

O delitvah na enakovredne dele



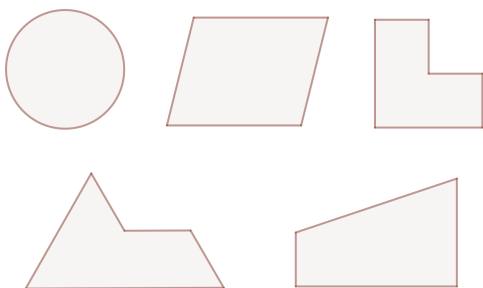
TADEJ STARČIČ

→ Vsakdo izmed vas je gotovo že kdaj naletel na kakšen problem delitve na enakovredne dele, morda zgolj v obliki kakšne miselne naloge ali kaj bolj konkretnega. V tem sestavku se bomo dotaknili nekaterih zanimivih problemov delitev, od bolj teoretičnih, pa do bolj praktičnih.

Kdaj sploh sta dva dela enakovredna? To je odvisno od tega, kaj nas zanima. Enkrat bo to pomenilo, da sta dela skladna geometrijska lika, drugič lika enakih ploščin, tretjič pa množici enakih kardinalnosti.

Začnimo z zabavnim izzivom.

Problem 1. (Delitev lika na skladne dele) Dane like z eno potezo (tj. z neprekinjeno krivuljo) razrežite na dva skladna lika:



SLIKA 1.

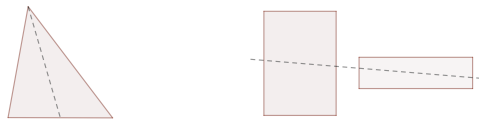
Ravninski liki.

Ali gre tudi z ravnim (tj. premočrtnim) rezom? Je to mogoče storiti na več načinov? Ali lahko katerega izmed likov razrežete na 3, 4 ali še več skladnih likov?

S prvimi tremi liki na sliki 1 zagotovo ne boste imeli večjih težav, kratko obravnavo drugih dveh pa po potrebi najdete v knjigi [1, pogl. 3]. Rešitev nameroma nismo skicirali, saj bi z njimi lahko marsikoga prikradjali za veselje pri reševanju.

Problem 2. (Delitev likov na ploščinsko enake dele) Ali lahko poljuben trikotnik z ravnim rezom razrežemo na dva ploščinsko enaka dela? Ali lahko

tudi poljubna dva pravokotnika v ravnini hkrati razrežemo na dva ploščinsko enaka dela z enim ravnim rezom? Ali velja to tudi za like bolj kompliciranih oblik?



SLIKA 2.

Razpolovitev z enim ravnim rezom.

Vemo, da težiščnica razdeli trikotnik na dva trikotnika s skladnima stranicama in višinama nanju, ter sta zato enakih ploščin. Rešitev drugega dela problema 2 je rez, ki gre skozi središči pravokotnikov, saj vsaka premica skozi središče pravokotnika le-tega razdeli celo na skladna dela; glejte sliko 2. Odgovor na tretje vprašanje pa je morda za koga malce presenetljiv.

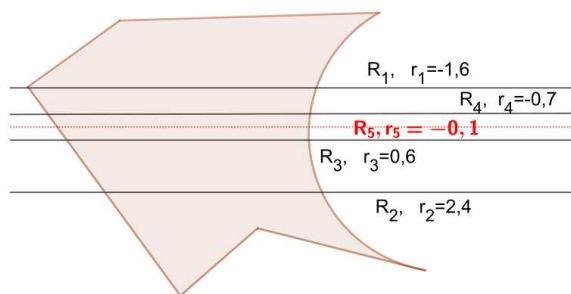
Izrek 1. (Obstoj delitve lika na ploščinsko enaka dela) Poljuben ravninski lik¹ je z ravnim rezom vedno mogoče razdeliti na dve ploščinsko enaki polovici. Obstaja več takih rezov.

Dokaz. S postopkom, ki mu rečemo bisekcija, bomo konstruirali zaporedje vodoravnih rezov R_n , ki se bo pomikalo proti iskanemu rezu. Ideja je vsak naslednji rez malo vzporedno premakniti, da se ploščini pripadajočih delov še bolj približata polovici ploščine lika. Naj rez R_n razdeli lik s ploščino p na dva dela, tisti del na zgornji polravnini naj ima ploščino p_n , ter naj bo $r_n := \frac{p}{2} - p_n$. Če je r_n blizu 0, potem je p_n blizu $\frac{p}{2}$. Izberimo najprej reza R_1 in R_2 tako, da bo $r_1 < 0 < r_2$. Nadalje denimo, da smo za neki $n \geq 2$ že izbrali take vzporedne vodoravne reze $R_1, \dots, R_n$, da je $r_1, \dots, r_n \neq 0$. Rez R_{n+1} nato izberemo na sredini med rezom R_n in njemu najbližjim

¹Ravninski lik je območje v ravnini, omejeno z enostavno sklenjeno krivuljo. Kakorkoli ga s premico razrežemo na dva dela, vedno lahko določimo ploščini posameznih delov.



→ že izbranim rezom, označimo ga z R_m ($m < n$), da je r_m nasprotnega predznaka kot r_n (slika 3). Tako bo število r_{n+1} zagotovo med r_n in r_m , razdalja med R_n in R_{n+1} pa se v primerjavi z razdaljo med R_{n-1} in R_n prepolovi. Bralec bo z nekaj osnovnega znanja o limitah znal utemeljiti, da nas to pripelje k rešitvi. Jasno je tudi, da lahko naklon rezov izberemo poljubno, zato je ustreznih rezov neskončno. ■



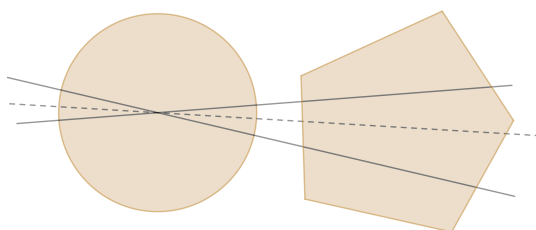
SLIKA 3.

Primer štirih korakov bisekcije lika na dva dela.

Izrek 2. (Izrek dveh palačink) Dva ravninska lika poljubnih oblik je mogoče z enim ravnim rezom enkrat razrezati na dva ploščinsko enaka dela.

Skica dokaza. Uporabimo prvi del izreka, natančneje reze, ki prvi lik razdelijo na ploščinsko enaka dela; na sliki 4 je poseben primer z rezi skozi eno točko. Rešitev da spet bisekcija.

Podrobnosti oziroma natančen dokaz najdemo med drugim v odlični knjigi [3, pogl. 22], kjer so sicer na izviren način lepo prestavljeni še številni drugi matematični problemi. ■



SLIKA 4.

Poseben primer izreka dveh palačink za en zelo simetričen lik.

Velja še splošnejši izrek o delitvi treh teles v prostoru na enake dele, t. i. **izrek o sendviču**: *Sendvič je mogoče z ravnino razrezati na dva dela, ki vsebujeta prostorninsko enako kruha, salame in sira*. Kot vprašanje ga je leta 1938 zastavil Steinhaus², s pomočjo izrekov višje matematike pa dokazal Banach³; glejte monografijo [2, pogl. 3].

Oglejmo si sedaj delitev množice s števno končno točkami.

Problem 3. (Razdelitev dveh vrst draguljev na dva enaka dela) Krona vsebuje 6 rubinovih in 4 diamantne dragulje. Ali jo lahko z ravnim rezom vedno prežemo tako, da bo vsak od dveh delov vseboval enako število rubinovih oziroma diamantnih draguljev? Kaj pa, če je draguljev več?

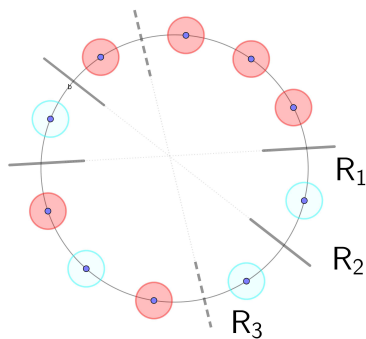
Začnimo s parom rezov R_1 , ki krono razrežeta na dve polovici s po petimi dragulji. Sedaj induktivno nadaljujemo z zaporedjem R_n takih parov rezov, da je vsak naslednji premaknjen za eno mesto v pozitivni smeri. Na sliki 5 spodaj vidimo primera rezov R_1, R_2 in R_3 .

Jasno je število rubinovih draguljev na obeh straneh enako natanko tedaj, ko je na obeh straneh enako tudi diamantnih draguljev. Za vsak rez R_n označimo število rubinovih draguljev prve polovice z r_n , število rubinovih draguljev na drugi polovici je potem $6 - r_n$, razlika med polovico 3 in r_n pa je $d_n := 3 - r_n$ (slika 5). Opazimo, da se R_6 ujema z R_1 , le vlogi polovic se zamenjata, t.j. $r_6 = 6 - r_1$, ter zato $d_6 = 3 - r_6 = r_1 - 3 = -d_1$. Po drugi strani se na posameznem koraku število rubinovih draguljev ne spremeni bodisi se poveča ali zmanjša za 1; s tem se d_n ne spremeni ali se spremeni za 1. Če je $d_1 = 0$, je R_1 že v redu, sicer pa sta začetni in končni člen zaporedja d_n različnega predznaka, ter lahko spet z bisekcijo, kot v dokazu izreka 1, pridemo do nekega vmesnega člena zaporedja, ki je enak 0. Pripadajoči rez je seveda rešitev naloge.

Bralcu bo zagotovo uspelo rešitev problema 3 prilagoditi za primer poljubnih dveh sodih števil rubi-

²Hugo Steinhaus (1887–1972) je bil poljski matematik; dejaven je bil na različnih področjih, med drugim je bil med začetniki teorije verjetnosti in teorije iger.

³Stefan Banach (1892–1945) je bil poljski matematik; začetnik moderne funkcionalne analize.



n	1	2	3	4	5	6
r_n	4	4	3	3	2	2
$6 - r_n$	2	2	3	3	4	4
d_n	-1	-1	0	0	1	1

SLIKA 5.

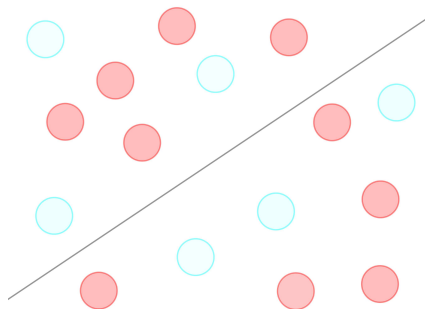
Primer krone z razrezi R_1 , R_2 in (iskanim) R_3 , ter tabela vrednosti pripadajočih zaporedij r_n in d_n .

novih in diamantnih draguljev. V duhu te rešitve bi bilo mogoče dokazati naslednji izrek.

Izrek 3. (Diskretna verzija izreka dveh palačink)

V ravnini je $2r$ rdečih in $2m$ modrih točk v splošni legi, tj. nobene tri ne ležijo na isti premici. Potem obstaja premica, ki ravnino razdeli na dve polravnini tako, da je na vsaki od polravnin r rdečih in m modrih točk (slika 6).

Z orodji višje matematike je mogoče dokazati t. i. **diskretno verzijo izreka o sendviču**: *Točke treh*



SLIKA 6.

Diskretna verzija izreka dveh palačink.

barv (sodo število točk vsake barve) v prostoru je mogoče z ravnino razdeliti na dva dela, ki vsebujeta številčno enako točk vsake od barv. Uporaba tega izreka omogoča posplošitev problema 3 na krono z dragulji treh vrst dragih kamnov, ki je v literaturi znana tudi kot **problem ogrlice**; več o tem najdete v že omenjenem viru [2, pogl. 3].

Za konec je tu nekaj kratkih geometrijskih nalog o razpolavljanju, ki jih poskusite rešiti sami.

Naloga 1. Dani dve daljici s premico hkrati razdelite na dva skladna dela. Kaj pa tri daljice?

Naloga 2. Dokažite, da vzporednica stranice danega trikotnika, ki ploščinsko razpolovi ta trikotnik, razdeli ostali dve stranici v razmerju $1 : (1 + \sqrt{2})$.

Naloga 3. Trikotnik z ravnim rezom razdelite na dva trikotnika z enakima obsegoma. Ali lahko vsak ravninski lik prerežemo na dve polovici z enakima obsegoma?

Naloga 4. Poiščite kakšno ravnino, ki dano tristrano piramido (lahko poševno) razdeli na dva prostorninsko enaka dela.

Naloga 5. Samo z uporabo šestila (brez ravnila) razdelite dano krožnico na dve polkrožnici. Nekoliko težje je dano daljico s šestilom razdeliti na dva skladna dela. Poskusite.

Morda se boste bralci kdaj srečali s kakšnim novim oziroma drugačnim problemom delitve. Tudi v tem primeru vam utegne pridobljeno znanje ter širši pogled na tematiko priti zelo prav.

Literatura

- [1] M. Gardner, *Aha! pa te imam: paradoksi za nape-njanje možganov in razvedrilo*, DZS, ZOTKS, Ljubljana, 1988.
- [2] J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam theorem. Lectures on topological methods in combinatorics and geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [3] J. Tanton, *Solve This: Mathematical Activities for Students and Clubs*, Mathematical Association of America, 2012.

× × ×