Bik se pase, trava rase; drugič

Marjan Jerman

Ko sem pripravljal naloge pri Zgodovini matematike, sem iskal ideje v Newtonovi knjigi *Arithmetica Universalis* iz leta 1707. Naletel sem na zanimivo nalogo o volih, ki popasejo vso travo na pašniku. Nalogo lahko z današnjimi orodji prevedemo na sistem enačb. Prof. Boris Lavrič me je prijazno opozoril, da je Newtonovo nalogo objavil že prof. Vladimir Batagelj v rubriki Bistrovidec prve številke desetega letnika Preseka leta 1982, vole pa je zamenjal z biki. Naloga gre takole:

> *Dvanajst bikov je v štirih tednih popaslo tri in še tretjino jutra pašnika; enaindvajset bikov pa popase deset juter takega pašnika v devetih tednih. Koliko bikov bi popaslo štiriindvajset juter pašnika v osemnajstih tednih?*

Da bo naloga bolj jasna, dodajmo še, da je na začetku travnik enakomerno porasel s travo, med pašo pa trava tudi raste, in sicer enakomerno po vsem pašniku.

Že Newton je vedel, da je naloga rešljiva tudi v splošnem. Na 79. strani je med aritmetičnimi vprašanji zastavil nalogo številka XI:

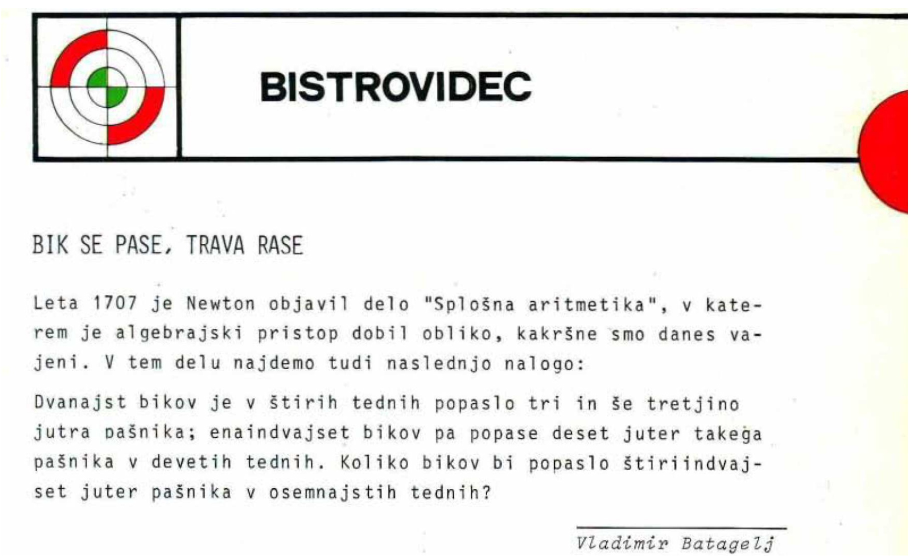
> *a_1 volov v b_1 tednih popase c_1 juter pašnika in a_2 volov v b_2 tednih popase c_2 juter pašnika. Koliko volov popase c_3 juter pašnika v b_3 tednih?*

Konkretne številke $a_1 = 12$, $b_1 = 4$, $c_1 = 3\frac{1}{3}$, $a_2 = 21$, $b_2 = 9$, $c_2 = 10$, $b_3 = 18$ in $c_3 = 24$ Newton navede kasneje kot poseben primer.

Newton nalogo reši z zvitim zaporedjem sklepnih računov in naknadnimi popravki zaradi sprotne rasti trave, mi pa se je lotimo z današnjimi orodji.

Najprej uvedimo še nekaj oznak. Naj z pomeni količino trave na jutru pašnika pred pašo, r naj pove, koliko nove trave zraste na teden na vsakem jutru, p pa označuje količino trave, ki jo en vol popase v enem tednu.

V današnjem matematičnem jeziku napišemo, da je količina popasene trave enaka vsoti začetnega sta-


BISTROVIDEC

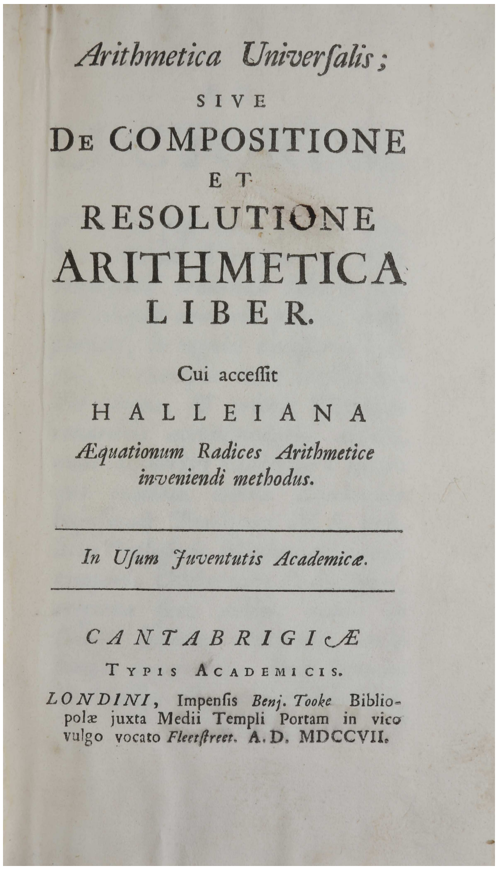
BIK SE PASE, TRAVA RASE

Leta 1707 je Newton objavil delo "Splošna aritmetika", v katerem je algebrajski pristop dobil obliko, kakršne smo danes vajeni. V tem delu najdemo tudi naslednjo nalogo:

Dvanajst bikov je v štirih tednih popaslo tri in še tretjino jutra pašnika; enaindvajset bikov pa popase deset juter takega pašnika v devetih tednih. Koliko bikov bi popaslo štiriindvajset juter pašnika v osemnajstih tednih?

Vladimir Batagelj

SLIKA 1.
Naloga v rubriki Bistrovidec, Presek 1982/83, X/1



Arithmetica Universalis;
SIVE
DE COMPOSITIONE
ET
RESOLUTIONE
ARITHMETICA
LIBER.

Cui accessit
HALLEIANA
Æquationum Radices Arithmetice inveniendi methodus.

In Usum Juventutis Academicæ.

CANTABRIGIÆ.
TYPIS ACADEMICIS.
LONDINI, Impensis Benj. Tooke Bibliopolæ juxta Medii Templi Portam in vico vulgo vocato Fleetstreet. A.D. MDCCVII.

SLIKA 2.
Newtonova *Arithmetica Universalis*

nja in na novo zrasle trave takole:

- $c_1 z + b_1 c_1 r = a_1 b_1 p$
  $c_2 z + b_2 c_2 r = a_2 b_2 p$
  $c_3 z + b_3 c_3 r = a_3 b_3 p.$

Na prvi pogled ne kaže najboljše, ker moramo rešiti sistem treh enačb s štirimi neznankami a_3, z, r in p. Zdi se, da manjka še ena enačba.

Najprej se na običajni način z metodo nasprotnih koeficientov znebimo neznanke z: c_2 kratnik prve enačbe odštejmo od c_1 kratnika druge in c_3 kratnik prve od c_1 kratnika tretje. Dobimo:

- $c_1 b_2 c_2 r - c_2 b_1 c_1 r = c_1 a_2 b_2 p - c_2 a_1 b_1 p$
  $c_1 b_3 c_3 r - c_3 b_1 c_1 r = c_1 a_3 b_3 p - c_3 a_1 b_1 p$

ali bolj urejeno:

- $r c_1 c_2 (b_2 - b_1) = p(a_2 b_2 c_1 - a_1 b_1 c_2)$
  $r c_1 c_3 (b_3 - b_1) = p(a_3 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3).$

Podobno kot prej se lahko znebimo spremenljivke r tako, da od $(b_2 - b_1)c_2$ kratnika druge enačbe odštejemo $(b_3 - b_1)c_3$ kratnik prve enačbe. Tako nam ostane le še spremenljivka p v enačbi

- $0 = p\big((b_2 - b_1)c_2(a_3 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3) -$
  $(b_3 - b_1)c_3(a_2 b_2 c_1 - a_1 b_1 c_2)\big).$

Ker je razumno pričakovati, da med pašo voli pojedo vsaj nekaj trave, lahko privzamemo, da je $p \neq 0$, in dobimo iskano linearno enačbo za a_3

- $(b_2 - b_1)c_2(a_3 b_3 c_1 - a_1 b_1 c_3) -$
  $(b_3 - b_1)c_3(a_2 b_2 c_1 - a_1 b_1 c_2) = 0,$

ki ima v primeru $b_1 \neq b_2$ rešitev

- $a_3 = \dfrac{c_3(a_2 b_2 c_1 (b_3 - b_1) + a_1 b_1 c_2 (b_2 - b_3))}{(b_2 - b_1) b_3 c_1 c_2}.$

Radoveden bralec lahko preračuna zgornje sisteme enačb tudi v primeru $b_1 = b_2$. Dobil bo dodatne pogoje za smiselnost podatkov v nalogi.

Zanimivo je, da nas matematični občutek na začetku ni varal. Dobili smo enoparametrično rešitev. Vrednost p je poljubna, od nje sta odvisni vrednosti z in r. Na srečo pa je vrednost a_3 v primeru $b_1 \neq b_2$ enolično določena.

Sedaj lahko rešimo staro nalogo iz Preseka tako, da vstavimo v zgornjo formulo ustrezne številke in dobimo $a_3 = 36$. Z besedami: šestintrideset bikov popase štiriindvajset juter travnika v osemnajstih tednih.

Naloga ima še dodatno zgodovinsko vrednost. Leta 1835 je bila objavljena kot zadnja naloga med mešanimi problemi v Emersonovi knjigi *North American Arithmetic*. Emerson je brez omembe Newtona nalogo prepisal, vmešal pa se je še tiskarski škrat, ki je tretjino spremenil v polovico, $c_1 = 3\frac{1}{2}$. Junija 1835 so ponudili 50 dolarjev (kar je glede na ameriško inflacijo enakovredno današnjim 1321 dolarjem) za najboljšo rešitev naloge. Posebna komisija je med 112 odgovori našla 48 pravilnih. Nagrado je dobil James Robinson, rešitev pa ni tako zelo lepa kot v primeru originalne naloge, $a_3 = 37\frac{113}{175}$.

× × ×