Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani
Fakulteta za naravoslovje in tehnologijo
VTO Matematika in mehanika

Anton Cedilnik

B A N A C H O V E   K V A D R A T N E
A L G E B R E

Disertacija

Ljubljana 1981

VSEBINA

Math. Subj. Class. (1980) 17 A 01
17 A 35
17 A 45
46 H 05

PREDGOVOR

To delo ima korenine v poskusu definirati in obravnavati neasociativne topološke algebre v moji magisterski nalogi pred tremi leti. Zaradi nejasnosti pri nekaterih osnovnih vprašanjih sem se pozneje ponovno spravil k definiciji Banachovih algeber, ki ne bi vsebovala asociativnosti. Takoj sem trčil ob vprašanje definicije spektra, saj ni jasno, kaj je inverzni element. Temu sem se hotel izogniti na dva načina. Prva možnost je bila, nadomestiti množico invertibilnih elementov z zalogo vrednosti eksponentne funkcije, druga pa je bila v posplošitvi Gelfandovega izreka o Banachovih algebrah z deljenjem, ki v svojem dokazu vsebuje ravno najbolj bistvene lastnosti spektra. Medtem ko sem s prvo hipotezo bolj ali manj obtičal v slepi ulici, sem v zvezi z drugo zamislijo naletel na veliko število že znanih posplošitev, ki pa so v tej ali oni obliki še vedno vsebovale asociativnost (z nekaj izjemami). Z metodami, ki sem jih pri tem spoznal, ter z nekaterimi novimi idejami, ki so v teoriji Banachovih algeber vzniknile v zadnjih desetih letih, sem nekaj teh izrekov uspel posplošiti na poljubne neasociativne algebre, rezultat pa so bile vedno nekatere specialne Banachove kvadratne algebre ali njihove podalgebre. Te posplošitve so [1,3], [9,3], [9,10], [9,11], [10,4], [10,7] in [10,8]. Ti izreki in pa uspele definicije [1,1], [3,2], [3,4], (5,1), [7,1] ter [9,1] so glavni rezultati tega dela in mislim, da kažejo možnost nastanka dovolj bogate teorije neasociativnih Banachovih algeber.

Precej izrekov v tem sestavku je vzetih iz tujega zelnika. To velja še posebno za drugi razdelek, v manjši meri za tretji, četrti in sedmi razdelek, nekaj tega pa je najti tudi drugje. Poleg tega je precej izrekov, pri katerih je metoda dokazovanja skoraj nespremenjena vzeta iz literature. No, moj namen ni bil kraja idej, pač pa kolikor mogoče celovit zapis neke teorije, kar je po mojem mnenju bolj pomemben cilj kot pa izvirnost za vsako ceno. Nihče pač ne piše rad samo za enkratno uporabo, ampak si želi, da bi morebitnemu bralcu zadeva služila še kako drugače, ne pa le kot seznam literature, skozi katero se je treba pregristi.

Kjer sem omenjeni greh storil, sem po potrebi opozoril z opombo, razen če sem domneval, da bo kateremu koli specialistu jasno, za kaj gre. Vsekakor pa mislim, da so vsaj izreki, ki sem jih naštel v prvem odstavku, res izvirni.

Profesor dr. Ivan Vidav je pokazal dobršno mero prijaznosti, ko je privolil, da bo moj mentor navkljub temu, da se on sam ne ukvarja z neasociativnimi algebrami. S svojim širokim znanjem mi je pomagal iz prenekatere zagate, skrbno se je poglobil v obravnavano snov, izločil nekaj večjih neumnosti iz teksta in potrpežljivo prenašal moj svojski slog študija in pisanja. Za vse to mu gre moja prisrčna zahvala.

Zahvaljujem se tudi drugim kolegom matematikom za občasne nasvete, matematični knjižnici za gradivo, Biotehniški fakulteti v Ljubljani, kjer sem zaposlen, pa zato, ker mi je časovno omogočila študij. Dalje se zahvaljujem profesorjem L. Ingelstamu, I. Kaplanskemu, R. D. Schaferju in E. Kleinfeldu za korespondenco.

Zahvalo dolgujem tudi Raziskovalni skupnosti Slovenije in Institutu za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani, ki sta to temo sprejela in financirala kot raziskovalno nalogo.

SPECIALNE OZNAKE

$\mathbb{K}$ je obseg realnih $\mathbb{R}$ ali kompleksnih $\mathbb{C}$ števil. Poleg teh znakov uporabljamo še $\mathbb{N}$ za naravna, $\mathbb{Z}$ za cela, $\mathbb{R}^+$ za pozitivna realna števila, $\mathbb{H}$ za algebro kvaternionov in $\mathbb{D}$ za Cayley - Dicksonovo algebro (algebro oktonionov). Z $\bar{\alpha}$ označujemo k α konjugirano število.

Znak $\square$ pomeni konec dokaza ali primera. Znak **!** pa označuje predpostavko, ki velja za več izrekov hkrati.

IZREKI TIPA GELFAND - MAZUR

1. Naj bo $\mathcal{H}$ asociativna kompleksna normirana algebra z enoto, v kateri je vsak element, različen od 0, obrnljiv (skratka, normiran kompleksen obseg). Tedaj je $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ izometrično izomorfno.
(Gelfand, Mazur; [38], 21-22)

2. Naj bo $\mathcal{H}$ normiran realen obseg. Tedaj je $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$.
([38], 22-24)

3. Naj bo $\mathcal{H}$ asociativna kompleksna normirana algebra z enoto in naj velja: $\|xy\| = \|x\|.\|y\|$ za vsak par x,y iz neke okolice enote. Tedaj je $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ izometrično izomorfno.
(Mazur; [38], 40)

4. Naj bo $\mathcal{H}$ asociativna kompleksna Banachova algebra z enoto. Če je enotna sfera $S = \{x \in \mathcal{H} ; \|x\| = 1\}$ gladka v neki okolici enote, pri čemer je norma algebrska in enota normirana, je $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$.
([38], 40)

5. Naj bo $\mathcal{H}$ asociativna Banachova algebra z enoto e, $\|e\| = 1$, in naj eksistira $\lim\limits_{\alpha \to 0} (\|e + \alpha x\| - 1)/\alpha$ za vsak singularen element x. Potem je $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ za kompleksno algebro oziroma $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ za realno algebro.
(Spatz; [6], 56)

6. Kompleksna asociativna Banachova algebra z enoto in brez (levih in desnih) topoloških deljiteljev niča razen 0 je izomorfna $\mathbb{C}$.
([28], 39)

7. Če je $\mathcal{H}$ kompleksna asociativna normirana algebra z enoto e, katere norma zadošča pogojema $\|e\| = 1$, $\|x\|.\|y\| \leq$ $\leq \beta\|xy\|$, β konstanta, potem je $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$.
([28], 39)

8. Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksna asociativna normirana algebra z enoto e, $\|e\| = 1$, nad predhilbertovim prostorom, tako da je norma algebrska in jo generira skalarni produkt. Tedaj je

$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$.

(Bohnenblust, Karlin; [5])

9. Naj bo $\mathcal{H}$ realna asociativna normirana algebra z enoto e, $\|e\| = 1$, nad predhilbertovim prostorom, tako da je norma algebrska in jo generira skalarni produkt. Tedaj je $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$.
(Ingelstam; [19], [33])

10. Naj bo $\mathcal{H}$ lokalno konveksna topološka asociativna algebra z deljenjem (torej obseg) z zveznim inverzom. Potem je $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ za realno algebro oziroma $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ za kompleksno algebro.
(Arens; [3])

11. Naj bo $\mathcal{H}$ lokalno konveksna, separabilna, metrična in polna asociativna algebra z deljenjem. Potem je $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ za realno algebro oziroma $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$ za kompleksno algebro.
(Arens; [3])

12. Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksna asociativna Banachova algebra, ki je obenem cel kolobar. Če je $\mathcal{H}$ lokalno končna, je $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$.
(Srinivasan; [34])

13. Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksna asociativna Banachova algebra, ki je obenem noetherski ali celo glavni kolobar. Potem je $\mathcal{H} \cong$ $\cong \mathbb{C}$.
(Srinivasan; [34])

14. Komutativna asociativna algebra z divizijo nad realno zaprtim obsegom ima lahko le dimenziji 1 ali 2.
(Hopf)

15. Edine končnodimenzionalne asociativne algebre z divizijo nad realno zaprtim obsegom so ta obseg, njegovo algebraično zaprtje in njegova algebra kvaternionov.
(Frobenius)

16. Kompleksna asociativna normirana algebra $\mathcal{H} \neq \{0\}$ z absolutno vrednostjo je izometrično izomorfna $\mathbb{C}$.
(Doran; [16])

17. Naj bo $\mathcal{H}$ asociativna kompleksna Banachova algebra z eno-

to. Če je $\|x^{-1}\| \leqq 1/\|x\|$ za vsak regularen element x, potem je $\mathcal{H}$ izometrično izomorfna $\mathbb{C}$. (Edwards; [24])

18. Potenčnoasociativna kompleksna algebra z absolutno vrednostjo in enoto je izomorfna $\mathbb{C}$. (Ingelstam; [20])

19. Alternativna realna algebra z enoto e in z normo, porojeno iz skalarnega produkta, za katero še velja: $\|e\| = 1$, $\|xy\| \leqq \|x\| \cdot \|y\|$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$, je izomorfna $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ ali $\mathbb{D}$. Prav taka kompleksna algebra je izomorfna $\mathbb{C}$. Izomorfizem je izometrični. (Ingelstam; [20])

20. Vsaka metrično homogena končnodimenzionalna enostransko alternativna algebra nad $\mathbb{R}$ je izometrično izomorfna $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ ali $\mathbb{D}$. Isti zaključek velja, če namesto metrične homogenosti in končnodimenzionalnosti zahtevamo algebraičnost, normiranost, enoto z normo 1 in gladkost enotne sfere v enoti. (Strzelecki; [35])

21. Naj bo $\mathcal{H}$ poljubna algebra z enoto nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$. V $\mathcal{H}$ eksistira nedegenerirana kvadratna forma N z lastnostjo $N(xy) = N(x)N(y)$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$, natanko tedaj, ko je $\mathcal{H}$ kompozicijska algebra (to je polenostavna končnodimenzionalna kvadratna alternativna algebra: $\mathbb{K}e$, $\mathbb{K}e \oplus \mathbb{K}e$, $\mathbb{H}, \mathbb{D}$).

22. Realna algebra $\mathcal{H}$ z enoto e in z absolutno vrednostjo je izomorfna $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ ali $\mathbb{D}$. Isti zaključek velja, če namesto eksistence enote zahtevamo eksistenco takega elementa $a \neq 0$, da velja: $ax = xa$, $a(ax) = a^2x$, $(xa)a = xa^2$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (Urbanik, Wright; [37])

23. Komutativna realna algebra z absolutno vrednostjo je izomorfna $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{C}^*$ ($\mathbb{C}^*$ je množica kompleksnih števil z običajnim seštevanjem in z množenjem $x \circ y = \overline{xy}$). (Urbanik, Wright; [37])

24. Algebre brez deljiteljev niča razen 0 nad realno zaprtim

obsegom imajo lahko samo naslednje dimenzije: 1, 2, 4, 8 in ∞.
(Bott, Milnor)

25. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra nad $\mathbb{C}$ in naj bo levo (oz. desno) množenje L_x (oz. R_x) za vsak $x \neq 0$ obrnljiv operator. Tedaj je $\mathcal{H}$ topološko izomorfna $\mathbb{C}$.
(Kaplansky; [23])

1. OSBORNOVI PARI

V prvem razdelku bomo poljubno algebro z enoto razstavili v dve strukturi: algebro na neki hiperravnini, nevsebujoči enoto, in bilinearno formo, torej podobno kot algebro kvaternionov razdelimo na vektorski produkt in skalarni produkt na tridimenzionalnem podprostoru, ortogonalnem na enoto. Če omenjeno formo simetriziramo, dobimo novo formo, ki v marsičem spominja na skalarni produkt, iz te pa naredimo nelinearno formo, ki je podobna normi. Če se zgodi, da je jedro te forme trivialno, je to res norma, algebra pa je v kompleksnem primeru kar enodimenzionalna.

Domenimo se, da je $\mathcal{H}$ algebra, če je $\mathcal{H}$ vektorski prostor poljubne dimenzije nad obsegom $\mathbb{K}$ in obstaja preslikava $(x,y) \longrightarrow x \circ y$ iz $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ v $\mathcal{H}$, imenovana multiplikacija, z lastnostmi:

$(x + y)\circ z = x\circ z + y\circ z$; $x\circ(y + z) = x\circ y + x\circ z$;

$\alpha(x\circ y) = (\alpha x)\circ y = x\circ(\alpha y) = \alpha\, x\circ y$; $\forall x,y,z \in \mathcal{H}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Komutativnosti, asociativnosti in drugih računskih zakonov ne bomo vnaprej zahtevali. Enota, če eksistira, pa naj bo vedno različna od 0.

[1,1] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}_0$ algebra z multiplikacijo $(a,b) \longrightarrow$ $\longrightarrow a \times b$, naj bo $(a,b) \longrightarrow \sigma(a,b)$ bilinearna forma, in $e \notin \mathcal{H}_0$. Tedaj je $\mathcal{H} = \mathbb{K}e \oplus \mathcal{H}_0$ spet algebra za multiplikacijo

$$(\alpha e + a, \beta e + b) \longrightarrow (\alpha e + a).(\beta e + b) =$$
$$= [\alpha\beta + \sigma(a,b)]e + \alpha b + \beta a + a \times b\ , \tag{1,1}$$

za $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $a,b \in \mathcal{H}_0$.

e je enota algebre $\mathcal{H}$.

Vsako algebro z enoto lahko dobimo na tak način.

Dokaz. Zlahka preverimo, da je ta multiplikacija res dobro definirana; treba je le preizkusiti veljavnost obeh distributivnosti in homogenosti novega produkta. Očitno je tudi, da je e res enota v $\mathcal{H}$.

Pa naj bo sedaj $\mathcal{H}$ poljubna algebra z enoto e in $\mathcal{B}$ neka algebrska baza, ki vsebuje e. Podbaza $\mathcal{B} - \{e\}$ naj razpenja podprostor $\mathcal{H}_0$. V skladu z razcepom $\mathcal{H} = \mathbb{K}e \oplus \mathcal{H}_0$ zapišemo: $a,b \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad a.b = \sigma(a,b)e + a{\times}b\ . \tag{1,2}$$

Iz bilinearnosti multiplikacije . sledi tudi bilinearnost preslikav σ in $\times$. Torej je $\mathcal{H}_0$ algebra za novo multiplikacijo $(a,b) \to a{\times}b$ in izrek je dokazan. $\square$

V trditvi [1,1] opisan par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ imenujmo <u>Osbornov par</u>, simbole $.,\times,\sigma,\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}_0$ pa uporabljajmo samo v tej zvezi.

Naj bo $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ Osbornov par. Funkcional

$$\alpha e + a \longrightarrow \tau(\alpha e + a) = \alpha\ , \quad \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ a \in \mathcal{H}_0\ , \tag{1,3}$$

je očitno linearen. Imenujmo ga <u>sled</u> elementa $\alpha e + a$ in ga označujmo vnaprej s τ. S sledjo razširimo definicijo forme σ na cel prostor $\mathcal{H}$:

$$\sigma(x,y) = \tau(x.y)\ , \quad \forall x,y \in \mathcal{H}\ . \tag{1,4}$$

Tako definirana forma σ je res razširitev prvotne. Še vedno je bilinearna in iz (1,1) sledi:

$$\sigma(\alpha e + a, \beta e + b) = \alpha\beta + \sigma(a,b)\ , \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ ,\ \forall a,b \in \mathcal{H}_0. \tag{1,5}$$

V posebnem velja:

$$\tau(e) = \sigma(e,e) = 1\ ;\quad \sigma(e,\mathcal{H}_0) = \sigma(\mathcal{H}_0,e) = \{0\}\ . \tag{1,6}$$

$$\tau(x) = \sigma(e,x) = \sigma(x,e)\ , \quad \forall x \in \mathcal{H}\ . \tag{1,7}$$

$$\sigma(x,y) = \sigma(x.y,e) = \sigma(e,x.y)\ , \quad \forall x,y \in \mathcal{H}\ . \tag{1,8}$$

Definirajmo <u>konjugiranje</u> v $\mathcal{H}$, zanj uporabljajmo simbol ^{K}:

$$\alpha e + a \longrightarrow (\alpha e + a)^K = \alpha e - a\ ;\quad \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ a \in \mathcal{H}_0\ . \tag{1,9}$$

$$(\alpha x)^K = \alpha x^K\ ;\quad (x \pm y)^K = x^K \pm y^K\ ;\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}. \tag{1,10}$$

$$(x^K)^K = x\ ;\quad \tau(x) = \tau(x^K)\ ;\quad \forall x \in \mathcal{H}\ . \tag{1,11}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau(x.y) = \tau(x^K.y^K)\ ;\ \tau(x.y^K) = \tau(x^K.y) \\ \sigma(x,y) = \sigma(x^K,y^K)\ ;\ \sigma(x,y^K) = \sigma(x^K,y) \end{array}\right\} \forall x,y \in \mathcal{H}\ . \tag{1,12}$$

Nadalje definirajmo <u>kvadratno normo</u> s simbolom N :

$$x \longrightarrow N(x) = \sigma(x,x^K) = \tau(x.x^K)\ , \quad \forall x \in \mathcal{H}\ . \tag{1,13}$$

$$N(0) = 0\ ,\quad N(e) = 1\ . \tag{1,14}$$

Izločimo konjugiranje iz definicije kvadratne norme:

$$x = \tau(x)e + (x - \tau(x)e)\ ,$$

$$x^K = \tau(x)e - (x - \tau(x)e) = 2\tau(x)e - x\ .$$

$$\tau(x.x^K) = \tau(x.(2\tau(x)e - x)) = \tau(2\tau(x)x - x^2)$$

$$N(x) = 2\tau(x)^2 - \tau(x^2)\ , \quad \forall x \in \mathcal{H}\ . \tag{1,15}$$

Še nekaj lastnosti:

$N(\alpha x) = \alpha^2 N(x)\ ,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ \forall x \in \mathcal{H}.$ (1,16)

$N(\alpha e + x) = \alpha^2 + 2\alpha\tau(x) + N(x)\ ,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ \forall x \in \mathcal{H}\ ,$ (1,17)

v posebnem:

$N(\alpha e + a) = \alpha^2 + N(a)\ ,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ ,\ \forall a \in \mathcal{H}_o\ ,$ (1,18)

kar nam takoj pove:

$N(x) = N(x^K)\ ,\ \forall x \in \mathcal{H}.$ (1,19)

Neposredno iz (1,13) sledi paralelogramsko pravilo:

$N(x + y) + N(x - y) = 2(N(x) + N(y))\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}.$ (1,20)

Definirajmo še eno formo, s stalno oznako δ:

$(x,y) \longrightarrow \delta(x,y) = \frac{1}{2}\left[N(x + y) - N(x) - N(y)\right]\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}.$ (1,21)

Iz (1,20) sledi za $\delta(x,y)$ analogna formula:

$\delta(x,y) = \frac{1}{2}\left[N(x) + N(y) - N(x - y)\right]\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}.$ (1,22)

Če (1,21) in (1,22) seštejemo in delimo z 2, dobimo:

$\delta(x,y) = \frac{1}{4}\left[N(x + y) - N(x - y)\right]\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}.$ (1,23)

Zaradi simetrije v (1,21) velja:

$\delta(x,y) = \delta(y,x)\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}.$ (1,24)

Iz (1,23) sledi:

$\delta(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau(x.y^K) + \tau(y.x^K)\right]\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}\ ,$ (1,25)

kar pa takoj pove, da je δ bilinearna forma.

Upoštevaje (1,4) in (1,12) dobimo iz (1,25):

$\sigma(x,y) + \sigma(y,x) = 2\delta(x,y^K)\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}.$ (1,26)

$\delta(x,x) = N(x)\ ,\ \delta(e,x) = \tau(x)\ ,\ \forall x \in \mathcal{H}\ ;\ \delta(e,e) = 1\ .$ (1,27)

$\delta(\alpha e + a, \beta e + b) = \alpha\beta + \delta(a,b)\ ,\ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}\ ,\ \forall a,b \in \mathcal{H}_o\ .$ (1,28)

Od tod sledi:

$\delta(x,y) = \delta(x^K,y^K)\ ,\ \delta(x,y^K) = \delta(x^K,y)\ ,\ \forall x,y \in \mathcal{H}.$ (1,29)

Forma δ v marsičem spominja na skalarni produkt in N na kvadrat ustrezne norme. Zato definirajmo <u>modul</u>:

$x \longrightarrow |x| = +\sqrt{|N(x)|}\ ,\ \forall x \in \mathcal{H}.$ (1,30)

Simbol $|.|$ rezervirajmo le za modul v $\mathcal{H}$ in absolutno vrednost v $\mathbb{K}$.

$$|x| = +\sqrt{|\delta(x,x)|} = +\sqrt{|\sigma(x,x^K)|} = +\sqrt{|\tau(x.x^K)|}\ , \quad \forall x \in \mathcal{H}. \qquad (1,31)$$

$$|x| = |x^K| \geqq 0\ , \ \forall x \in \mathcal{H}\ . \quad |0| = 0\ , \ |e| = 1\ . \qquad (1,32)$$

Iz (1,16) sledi:

$$|\alpha x| = |\alpha| . |x|\ , \ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ , \ \forall x \in \mathcal{H}\ . \qquad (1,33)$$

Splošneje:

$$N(\alpha e . x) = N(x . \alpha e) = N(\alpha e) N(x)\ , \ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ , \ \forall x \in \mathcal{H}\ . \qquad (1,34)$$

Iz (1,17) dobimo:

$$|\alpha e + a| \leqq |\alpha| + |a|\ , \ \forall \alpha \in \mathbb{K}\ , \ \forall a \in \mathcal{H}_0\ . \qquad (1,35)$$

Iz (1,21) pa še dobimo:

$$|x + y|^2 \leqq (|x| + |y|)^2 - 2(|x| . |y| - |\delta(x,y)|)\ , \qquad (1,36)$$
$\forall x,y \in \mathcal{H}$.

Še eno definicijo potrebujemo:

$$\mathcal{H}^0 = \{x\ ;\ N(x) = 0\} .$$

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow \delta(x,x) = 0 \Leftrightarrow \sigma(x,x^K) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \tau(x . x^K) = 0\ .$$

$$0 \in \mathcal{H}^0\ ;\ e \notin \mathcal{H}^0\ .$$

$$x \in \mathcal{H}^0 \Rightarrow x^K \in \mathcal{H}^0\ \&\ \alpha x \in \mathcal{H}^0\ , \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

<u>[1,2] TRDITEV.</u> Naj bo $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ Osbornov par. Naslednje izjave so ekvivalentne:

(a) $\mathcal{H}^0$ je podprostor.

(b) $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}_0$.

(c) $N(x) \geqq 0\ , \ \forall x \in \mathcal{H}_0$.

(d) $|\delta(x,y)| \leqq |x| . |y|\ , \ \forall x,y \in \mathcal{H}$. (1,37)

(e) $|x + y| \leqq |x| + |y|\ , \ \forall x,y \in \mathcal{H}$. (1,38)

Te izjave implicirajo še naslednje trditve:

(A) $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow N(x) \geqq 0\ , \ \forall x \in \mathcal{H}$.

(B) $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow N(x) = 0\ , \ \forall x \in \mathcal{H}_0$.

(C) $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow \delta(x,y) = 0\ , \ \forall x,y \in \mathcal{H}_0\ \&\ \mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_0$.

(D) $\mathbb{K} = \mathbb{C} \Rightarrow |\delta(x,y)| = |x| . |y|\ , \ \forall x,y \in \mathcal{H}$.

(E) $\delta(x,x) = 0 \Rightarrow \delta(x,y) = 0\ , \ \forall y \in \mathcal{H}$.

(F) $\mathbb{K} = \mathbb{R} \Rightarrow \delta(.,.)$ je semiskalarni produkt in $|.|$ je seminorma.

(G) $|\tau(x)| \leqq |x|\ , \ \forall x \in \mathcal{H}$.

(H) $N(x + y) = N(y)$, $\forall x \in \mathcal{H}^o$, $\forall y \in \mathcal{H}$. (1,39)

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b). Naj bo $x = \alpha e + a$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_o$.
$x \in \mathcal{H}^o \Longrightarrow x^K \in \mathcal{H}^o$. Ker je $\mathcal{H}^o$ podprostor, je tudi
$x + x^K = 2\alpha e \in \mathcal{H}^o$, iz česar sledi: $N(2\alpha e) = 4\alpha^2 = 0$, kar da $\alpha = 0$.

(b) $\Longrightarrow$ (c). Recimo, da je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{H}_o$, $N(x) < 0$.
$N(\sqrt{-N(x)}\, e + x) = 0$, kar pa ni mogoče zaradi $\mathcal{H}^o \subset \mathcal{H}_o$.
Pa naj bo še $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $x \in \mathcal{H}_o$, $N(x) \neq 0$.
$N(\sqrt{-N(x)}\, e + x) = 0$, kar pa je spet protislovje, in sledi:
$N(x) = 0 \geqq 0$, $\forall x \in \mathcal{H}_o$.
Naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ in naj velja (c) ; $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{H}_o$.
$N(\alpha e + a) = \alpha^2 + N(a) \geqq 0 \Longrightarrow$ (A) .
Naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in naj velja (c) ; $x \in \mathcal{H}_o \Longrightarrow N(x) \geqq 0$.
$ix \in \mathcal{H}_o \Longrightarrow N(ix) = -N(x) \geqq 0 \Longrightarrow N(x) = 0 \Longrightarrow$ (B) .
Posledica (C) sledi od tod in iz (1,23) .

(c) $\Longrightarrow$ (d). Vzemimo najprej taka $x,y \in \mathcal{H}$, da je:
$N(y - \alpha x) \geqq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.
$\delta(y - \alpha x, y - \alpha x) = \delta(y,y) - 2\alpha\delta(x,y) + \alpha^2\delta(x,x) \geqq 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.(*)
Denimo, da je $\delta(x,x) = 0$. Za dovolj velik $|\alpha|$ in primerno izbran smerni kot števila α je tedaj leva stran te neenačbe negativna (iz $\alpha = 0$ namreč sledi: $\delta(y,y) \in \mathbb{R}$), kar pa ni res. Torej je $\delta(x,y) = 0$.
Vzemimo v nasprotju s prejšnjo predpostavko: $\alpha = \delta(x,y)/\delta(x,x)$, in vstavimo v neenačbo (*):
$\delta(y,y) - 2\delta(x,y)^2/\delta(x,x) + \delta(x,y)^2/\delta(x,x) \geqq 0$, oziroma:
$\delta(x,x).\delta(y,y) - \delta(x,y)^2 \geqq 0$, ker je $\delta(x,x) > 0$ (kar sledi iz (*) za zelo velik $\alpha \in \mathbb{R}$.
To pa velja tudi v primeru $\delta(x,x) = 0$, torej velja nasploh.
Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, je začetni pogoj vedno izpolnjen (zaradi (A)) in zato velja:
$|\delta(x,y)|^2 = \delta(x,y)^2 \leqq \delta(x,x).\delta(y,y) = |x|^2|y|^2$.
Pa vzemimo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $a,b \in \mathcal{H}_o$.
$|\alpha e + a|^2 = |\delta(\alpha e + a, \alpha e + a)| = |\alpha^2 + \delta(a,a)| = |\alpha|^2$

zaradi posledice (B). Enako: $|\beta e + b|^2 = |\beta|^2$.

$|\delta(\alpha e + a, \beta e + b)|^2 = |\alpha\beta + \delta(x,y)|^2 = |\alpha\beta|^2 = |\alpha|^2 |\beta|^2 =$
$= |\alpha e + a|^2 |\beta e + b|^2$ zaradi posledice (C). To pa je obenem konec dokaza trditve (d) in posledice (D).

(E) že sledi iz (d).

(d) $\Longrightarrow$ (e). Dokaz sledi iz formule (1,36).

(e) $\Longrightarrow$ (a). Do linearnosti množice $\mathcal{H}^0$ manjka le še zaprtost za seštevanje:

$x,y \in \mathcal{H}^0 \Longrightarrow |x| = |y| = 0 \Longrightarrow 0 \leqq |x + y| \leqq 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow |x + y| = 0 \Longrightarrow x + y \in \mathcal{H}^0$.

Posledica (F) sledi od tod in iz že znanih lastnosti obeh funkcij.

Posledica (G): $|\tau(x)| = |\delta(e,x)| \leqq |e|.|x| = |x|$ (po (1,27)).

Posledica (H): $N(x) = 0 \Longrightarrow \delta(x,x) = 0$ (po (1,27)) $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \delta(x,y) = \frac{1}{2}[N(x + y) - N(y)] = 0 \ , \ \forall y \in \mathcal{H}$ (po (1,21) in (E)) $\Longrightarrow N(x + y) = N(y) \ , \ \forall y \in \mathcal{H}$. $\square$

<u>[1,3] TRDITEV.</u> Naj bo $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ Osbornov par in $\mathcal{H}^0 = \{0\}$. Tedaj je $\mathcal{H}$ unitaren prostor:

(a) Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$, modul je kar enak absolutni vrednosti.

(b) Za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ je $\mathcal{H}$ evklidski prostor s skalarnim produktom $\delta(.,.)$ in ustrezno normo $|.|$.

(c) σ je nedegenerirana bilinearna forma.

<u>Dokaz.</u> (a) Če je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, je po trditvi [1,2], posledica (C): $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}^0 = \{0\}$ in zato $\dim \mathcal{H} = 1$.

(b) Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sledi trditev iz trditve [1,2], posledica (F).

(c) $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_0$. Naj bo še $\beta e + b \in \mathcal{H}$, $\beta \in \mathbb{K}$, $b \in \mathcal{H}_0$, poljuben element.

$\sigma(\alpha e + a, \beta e + b) = 0 \Longrightarrow \alpha\beta + \sigma(a,b) = 0 \Longrightarrow \alpha\beta = 0$ &
& $\sigma(a,b) = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ & $\sigma(a,a^K) = N(a) = 0 \Longrightarrow \alpha e + a = 0$.

Enako dokažemo še drugo nedegeneriranost, le da uporabimo še (1,12). $\square$

Seveda se takoj vprašamo, če je algebra pod (b) iz trditve [1,3] kakšna posebna algebra. Nikalen odgovor nam da naslednja trditev:

[1,4] TRDITEV. Vsak Osbornov par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ nad $\mathbb{R}$, za katerega velja $\mathcal{H}^0 = \{0\}$, lahko konstruiramo takole:

- $\mathcal{H}_0$ naj bo poljubna realna algebra s produktom $\times$, $e \notin \mathcal{H}_0$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathbb{R}e$.
- σ naj bo bilinearna forma z lastnostjo: $\sigma(x,x) < 0$, $\forall x \in \mathcal{H}_0 - \{0\}$.
- $\mathcal{H}$ naj bo algebra s produktom (1,1).

Dokaz je preprost.

Vse to kaže, da je struktura, ki smo jo uvedli v tem poglavju, precej "površinska" in ne sega v dejansko strukturo algebre. Multiplikacijsko strukturo v algebri $\mathcal{H}$ Osbornovega para $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ smo zgolj razčlenili v dve neodvisni strukturi: prva je algebra $\mathcal{H}_0$ z multiplikacijo $\times$, drugo pa podaja bilinearna forma σ.

To analizo je v [26] izvršil Osborn za poljubne kvadratne algebre (prav zato smo par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ imenovali po njem).

2. KVADRATNE ALGEBRE

V tem razdelku bomo nanizali osnovne lastnosti kvadratnih algeber. To je potrebno zato, ker te lastnosti verjetno nikjer v literaturi niso sistematično zbrane, mi pa jih bomo pozneje še kako potrebovali. Pokazalo se bo, da je analiza algebrske strukture, opisana v prvem razdelku, zelo primerna ravno za študij kvadratnih algeber.

Ponovimo definicijo kvadratnih algeber in nekaj osnovnih lastnosti, pa še nekaj novih izpeljimo.

[2,1] DEFINICIJA. Algebra $\mathcal{H}$ z enoto e nad $\mathbb{K}$ je kvadratna algebra, če je $\{e,x,x^2\}$ linearno odvisna množica za vsak $x \in \mathcal{H}$.

Za vsak element $x \in \mathcal{H}$ torej velja:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma e = 0 ,$$

pri čemer vsaj eden od koeficientov ni 0. Če je $\alpha = 0$, je $\beta \neq 0$, in zato: $x = -(\gamma/\beta)e$. Toda tedaj je tudi:

$$x^2 - (\gamma^2/\beta^2)e = 0 ,$$

zato smemo vzeti: $\alpha \neq 0$. Delimo z njim in na novo označimo koeficiente, pa dobimo:

$$x^2 - 2\tau(x)x + N(x)e = 0 , \quad \forall x \in \mathcal{H} . \qquad (2,1)$$

Funkcionala τ in N sta dobro definirana v vsakem primeru razen za $x = \alpha e$. Tedaj pa postavimo:

$$\tau(\alpha e) = \alpha , \; N(\alpha e) = \alpha^2 , \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} , \qquad (2,2)$$

s čimer je enakost (2,1) izpolnjena za vsak α.

[2,2] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra in $\operatorname{Ker} \tau = \mathcal{H}_0$.

Tedaj je $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ Osbornov par, pri čemer je τ sled in N kvadratna norma, $\mathcal{H}_0$ pa antikomutativna algebra.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je funkcional τ linearen!

$$(\alpha x)^2 - 2\tau(\alpha x).\alpha x + N(\alpha x)e = 0 ,$$

$$-\alpha^2[x^2 - 2\tau(x)x + N(x)e] = 0 .$$

Seštejmo obe enačbi, pa bomo dobili:

$$2\alpha[\alpha\tau(x) - \tau(\alpha x)]x + [N(\alpha x) - \alpha^2 N(x)]e = 0 .$$

Posebej upoštevajmo $x = \lambda e$, $x \neq \lambda e$, pa dobimo z upoštevanjem (2,2): $\alpha\tau(x) = \tau(\alpha x)$, $\forall\alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

$(\alpha e + x)^2 - 2\tau(\alpha e + x)(\alpha e + x) + N(\alpha e + x)e = 0$,

$$-[x^2 - 2\tau(x)x + N(x)e] = 0 .$$

Seštejmo obe zadnji enačbi:

$2[\alpha + \tau(x) - \tau(\alpha e + x)]x + [\alpha^2 - 2\alpha\tau(\alpha e + x) + N(\alpha e + x) - N(x)]e = 0$.

Posebej upoštevajmo $x = \lambda e$, $x \neq \lambda e$, pa dobimo:

$\tau(\alpha e + x) = \alpha + \tau(x)$, $\forall\alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Vzemimo sedaj, da so elementi e, x, y linearno odvisni: $x = \alpha y + \beta e$, $x + y = (1 + \alpha)y + \beta e$.

$\tau(x + y) = \beta + (1 + \alpha)\tau(y)$.

$\tau(x) + \tau(y) = \alpha\tau(y) + \beta + \tau(y) = \tau(x + y)$.

Privzemimo še, da so e,x,y linearno neodvisni.

$(x + y)^2 - 2\tau(x + y)(x + y) + N(x + y)e +$
$+ (x - y)^2 - 2\tau(x - y)(x - y) + N(x - y)e = 0$.

Upoštevajmo: $x^2 = 2\tau(x)x - N(x)e$ in enako za y^2, pa je:

$2[2\tau(x) - \tau(x + y) - \tau(x - y)]x + 2[2\tau(y) - \tau(x + y) + \tau(x - y)]y + [N(x + y) + N(x - y) - 2N(x) - 2N(y)]e = 0$.

Izrazi v oglatih oklepajih morajo biti 0. Seštejmo prva dva, pa vidimo, da je τ linearen.

Ker τ je torej hiperravnina in lahko sestavimo Osbornov par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$. τ je očitno sled v tem paru.

Pa naj bo $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_0$. Po formuli (2,1) lahko zapišemo:

$N(\alpha e + a)e = 2\tau(\alpha e + a)(\alpha e + a) - (\alpha e + a)^2 =$
$= \alpha^2 e - \sigma(a,a)e - a\times a$,

iz česar sledi: $a\times a = 0$ in algebra $\mathcal{H}_0$ je antikomutativna.
Ker pa je $\tau(N(\alpha e + a)e) = N(\alpha e + a)$, je:

$N(\alpha e + x) = \tau(\alpha^2 e - \sigma(a,a)e - a\times a) =$
$= \tau((\alpha e + a)(\alpha e - a))$.

Torej je $N(x) = \tau(x.x^K)$, $\forall x \in \mathcal{H}$, in N je res kvadratna norma po (1,13). $\square$

Trditev in dokaz sta vzeta iz [26]. To velja tudi za obratno trditev:

[2,3] TRDITEV. Algebra $\mathcal{H}$ v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$, v katerem je $\mathcal{H}_o$ antikomutativna algebra, je kvadratna, pri čemer za sled in kvadratno normo velja (2,1).

Zanimivo pri tej trditvi je , da je funkcional σ popolnoma poljuben.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{H}_o$ antikomutativna algebra in $\sigma(.,.)$ neka bilinearna forma. $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_o \Rightarrow (\alpha e + a)^2 =$
$= \alpha^2 e + 2\alpha a + \sigma(a,a)e = 2\tau(\alpha e + a)(\alpha e + a) - (\alpha^2 - \sigma(a,a))e$.
Elementi $(\alpha e + a)^2$, $\alpha e + a$ in e so linearno odvisni in algebra je res kvadratna. Ker pa je po (1,13) in (1,18) tudi
$\alpha^2 - \sigma(a,a) = N(\alpha e + a)$,
je trditev dokazana. □

(2,1) sedaj lahko zapišemo takole:

$$x^2 - 2\delta(e,x)x + \delta(x,x)e = 0 \;, \;\forall x \in \mathcal{H} \;. \qquad (2,3)$$

Ker je antikomutativna algebra potenčnoasociativna, takoj sledi, da je tudi poljubna kvadratna algebra potenčnoasociativna! To trditev lahko dokažemo tudi neposredno z dokazovanjem veljavnosti obeh osnovnih identitet:
$xx^2 = x^2x$, $x^2x^2 = x(xx^2)$.

Odslej naj velja dogovor, da če je $\mathcal{H}$ kvadratna algebra v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$, je $\mathcal{H}_o$ konstruiran v smislu trditve [2,2]: $\mathcal{H}_o$ je jedro funkcionala τ iz (2,1) in je antikomutativna. !

[2,4] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$.

$$a^2 = -N(a)e \;\;\&\;\; ab + ba = -2\delta(a,b)e \;, \;\forall a,b \in \mathcal{H}_o . \qquad (2,4)$$

Dokaz. $a^2 = 2\tau(a)a - N(a)e = -N(a)e$.
$(a + b)^2 = -N(a + b)e = -N(a)e - N(b)e + ab + ba$.
$ab + ba = -2.\frac{1}{2}[N(a + b) - N(a) - N(b)]e = -2\delta(a,b)e$. □

[2,5] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$ in $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $a,b \in \mathcal{H}_o$.

$$[(\alpha e + a).(\beta e + b)]^K = (\beta e + b)^K.(\alpha e + a)^K + [\sigma(a,b) - \sigma(b,a)]e \;. \qquad (2,5)$$

$$(a\times b)^K = b^K \times a^K \tag{2,6}$$

Preveritev trditve je preprosta.

Konjugiranje je torej (realna) involucija na $\mathcal{H}_o$, na $\mathcal{H}$ pa je to natanko tedaj, ko je σ simetrična bilinearna forma, torej ko je:

$\sigma(x,y) = \sigma(y,x) = \delta(x,y^K)$.

Zlahka preverimo še formuli:

$$x.x^K = x^K.x = N(x)e \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ , \tag{2,7}$$

$$|x.x^K| = |x|^2 \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ . \tag{2,8}$$

[2,6] TRDITEV. Naj bo $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ poljuben Osbornov par nad $\mathbb{K}$ in konjugiranje $x \longrightarrow x^K$ involucija na algebri $\mathcal{H}_o$:

$(\alpha a + \beta b)^K = \bar{\alpha} a^K + \bar{\beta} b^K$, $(a^K)^K = a$,

$(a\times b)^K = b^K \times a^K$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_o$.

Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je tedaj $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}$.

za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ je tedaj $\mathcal{H}$ kvadratna algebra in $\mathcal{H}_o$ antikomutativna algebra.

Dokaz. Naj bo $a \in \mathcal{H}_o - \{0\}$ & $\alpha \in \mathbb{K}$.

$-\alpha a = (\alpha a)^K = \bar{\alpha} a^K = -\bar{\alpha} a$. Zato: $\alpha = \bar{\alpha}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je zato lahko le $\mathcal{H}_o = \{0\}$.

$-a\times b = (a\times b)^K = b^K \times a^K = b\times a$

in $\mathcal{H}_o$ je antikomutativna algebra. □

[2,7] TRDITEV. Kompleksifikacija $\mathcal{H}^c$ kvadratne algebre $\mathcal{H}$ je spet kvadratna algebra. Funkcionali τ, δ, σ, N, $|.|$ se z nespremenjenimi lastnostmi razširijo na $\mathcal{H}^c$.

Dokaz. Naj bo $z = x + iy \in \mathcal{H}^c$; $x = \alpha e + a$, $y = \beta e + b$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $a,b \in \mathcal{H}_o \subset \mathcal{H}$.

$z^2 - 2(\tau(x) + i\tau(y))z =$

$= x^2 - y^2 + ixy + iyx - 2\tau(x)x - 2i\tau(x)y - 2i\tau(y)x +$
$+ 2\tau(y)y = -N(x)e + N(y)e + ixy + iyx - 2i\tau(x)y - 2i\tau(y)x =$

$= -\alpha^2 e - N(a)e + \beta^2 e + N(b)e - 2i\alpha\beta e + i(ab + ba) =$

$$= -\left[(\alpha + i\beta)^2 + \delta(a,a) - \delta(b,b) + 2i\delta(a,b)\right]e \ . \tag{$*$}$$

To je že dovolj za trditev, da je $\mathcal{H}^c$ kvadratna algebra. Od tod sledi tudi linearnost razširitve funkcionala τ.

Predpostavimo veljavnost (1,25) v $\mathcal{H}^c$:

$$x,y,u,v \in \mathcal{H} \Rightarrow \delta_c(x + iy, u + iv) =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tau_c((x + iy)(u + iv)^K) + \tau_c((u + iv)(x + iy)^K)] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\tau_c((x + iy)(u^K + iv^K) + (u + iv)(x^K + iy^K)) =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tau(xu^K) + \tau(ux^K)] + \tfrac{i}{2}[\tau(yu^K) + \tau(uy^K)] +$$
$$+ \tfrac{i}{2}[\tau(xv^K) + \tau(vx^K)] - \tfrac{1}{2}[\tau(yv^K) + \tau(vy^K)] =$$
$$= \delta(x,u) + i\delta(y,u) + i\delta(x,v) - \delta(y,v) .$$

Iz enačbe (*) tedaj sledi:

$$N_c(z) = (\alpha + i\beta)^2 + \delta_c(a + ib, a + ib) = \delta_c(z,z) . \square$$

[2,8] PRIMERI. Kvadratne algebre najnižjih dimenzij.

(a) $\dim \mathcal{H} = 1$. $\mathcal{H}_o = \{0\} = \mathcal{H}^o$. $\mathcal{H} \cong \mathbb{K}$.

(b) $\dim \mathcal{H} = 2$. $\mathcal{H}_o = \mathbb{K}a$, $a \neq 0$, $a \times a = 0$.

$\cdot$	e	a
e	e	a
a	a	$-\lambda e$

δ	e	a
e	1	0
a	0	λ

σ	e	a
e	1	0
a	0	$-\lambda$

$$N(\alpha e + \beta a) = \alpha^2 + \lambda\beta^2 ,$$

$$\mathcal{H}^o \subset \mathcal{H}_o \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 & (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \\ \lambda \geq 0 & (\mathbb{K} = \mathbb{R}) , \end{cases}$$

$$\mathcal{H}^o = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \;\&\; \lambda > 0 .$$

(c) $\dim \mathcal{H} = 3$. $\mathcal{H}_o = \mathbb{K}a \oplus \mathbb{K}b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$\cdot$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	$-\lambda_o e$	$\lambda_1 e + \varepsilon a$
b	b	$\mu_1 e - \varepsilon a$	$-\mu_o e$

δ	e	a	b
e	1	0	0
a	0	λ_o	$(\lambda_1 + \mu_1)/2$
b	0	$(\lambda_1 + \mu_1)/2$	μ_o

σ	e	a	b
e	1	0	0
a	0	$-\lambda_o$	λ_1
b	0	μ_1	$-\mu_o$

$\times$	a	b
a	0	εa
b	$-\varepsilon a$	0

$$N(\alpha e + \beta a + \gamma b) = \alpha^2 + \beta^2\lambda_o + \gamma^2\mu_o - \beta\gamma(\lambda_1 + \mu_1) ,$$

$$\mathcal{H}^o = \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R} \;\&\; \lambda_o > 0 \;\&\; 4\lambda_o\mu_o > (\lambda_1 + \mu_1)^2 ,$$

$$\mathcal{H}^{\circ} \subset \mathcal{H}_{o} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{o} = \mu_{o} = \lambda_{1} + \mu_{1} = 0 \quad (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \\ \lambda_{o} \geqq 0 \ , \ \mu_{o} \geqq 0 \ , \ 4\lambda_{o}\mu_{o} \geqq (\lambda_{1} + \mu_{1})^{2} \\ (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \ . \ \square \end{cases}$$

[2,9] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra nad $\mathbb{K}$ v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{o})$. Tedaj velja za $\forall x \in \mathcal{H}$, $\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{K}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$N([\alpha e + \beta x].[\gamma e + \delta x]) = N(\alpha e + \beta x)N(\gamma e + \delta x) \ , \tag{2,9}$$
$$|(\alpha e + \beta x).(\gamma e + \delta x)| = |\alpha e + \beta x| . |\gamma e + \delta x| \ , \tag{2,10}$$
$$N(x^{n}) = N(x)^{n} \ , \tag{2,11}$$
$$|x^{n}| = |x|^{n} \ . \tag{2,12}$$

Posledica: $$\lim_{n \to \infty} |x^{n}|^{1/n} = \inf_{n} |x^{n}|^{1/n} = |x| \ . \tag{2,13}$$

Dokaz. Vzemimo najprej $x \in \mathcal{H}_{o}$.

$N([\alpha e + \beta x].[\gamma e + \delta x]) = N([\alpha\gamma - \beta\delta N(x)]e + [\beta\gamma + \alpha\delta]x) =$
$= [\alpha\gamma - \beta\delta N(x)]^{2} + [\beta\gamma + \alpha\delta]^{2}N(x) =$
$= \alpha^{2}\gamma^{2} + \beta^{2}\delta^{2}N(x)^{2} + \beta^{2}\gamma^{2}N(x) + \alpha^{2}\delta^{2}N(x) =$
$(\alpha^{2} + \beta^{2}N(x))(\gamma^{2} + \delta^{2}N(x)) = N(\alpha e + \beta x)N(\gamma e + \delta x)$.

Pa naj bo še: $x = \varepsilon e + y$, $\varepsilon \in \mathbb{K}$, $y \in \mathcal{H}_{o}$.

$N([\alpha e + \beta x].[\gamma e + \delta x]) = N([(\alpha + \beta\varepsilon)e + \beta y].[(\gamma + \delta\varepsilon)e +$
$+ \delta y]) = N((\alpha + \beta\varepsilon)e + \beta y)N((\gamma + \delta\varepsilon)e + \delta y) =$
$= N(\alpha e + \beta x)N(\gamma e + \delta x)$.

Če sedaj v (2,9) postavimo na obeh straneh absolutno vrednost in korenimo, dobimo še identiteto (2,10).

Za preveritev (2,11) najprej dokažemo s popolno indukcijo:

$x^{n} = \lambda_{n}e + \mu_{n}x$, $\forall x \in \mathcal{H}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Potem pa še enkrat uporabimo popolno indukcijo:

$N(x^{n+1}) = N(x^{n}.x) = N(x^{n})N(x) = N(x)^{n}N(x) = N(x)^{n+1}$.

(2,12) takoj sledi iz (2,11). $\square$

[2,10] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra nad $\mathbb{K}$ v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_{o})$. Tedaj velja za $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a \in \mathcal{H}_{o}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$N(\alpha e + a) = 0 \ \& \ n \neq 1 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha e + a)^n = (2\alpha)^{n-1}(\alpha e + a) \ ; \qquad (2,14)$$

$N(\alpha e + a) \neq 0$ & $N(a) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha e + a)^n = \alpha^{n-1}(\alpha e + na) \ ; \qquad (2,15)$$

$N(\alpha e + a) \neq 0$ & $N(a) \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha e + a)^n = (\sqrt{N(\alpha e + a)})^n(e.\cos(n\varphi) + $$

$$+ \frac{a}{\sqrt{N(a)}}\sin(n\varphi)) \ , \qquad (2,16)$$

kjer je: $\cos\varphi = \alpha/\sqrt{N(\alpha e + a)}$, $\sin\varphi = \sqrt{N(a)}/\sqrt{N(\alpha e + a)}$.

$\sqrt{N(\alpha e + a)}$ in $\sqrt{N(a)}$ imata v vseh izrazih fiksna smerna kota oziroma, v realnem primeru, fiksna predznaka.

Dokaz. Dokaz poteka v vseh treh primerih s popolno indukcijo, le v primeru (2,16) moramo najprej preveriti, če je za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dobljeni izraz sploh realen, kar pa z upoštevanjem kompleksne izražave funkcij sin in cos ni prav nič težko. □

[2,11] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ nad $\mathbb{K}$. Naslednje izjave so za $x \in \mathcal{H}$ ekvivalentne:

(a) $x^2 = 0$;

(b) x je nilpotenten element;

(c) $x \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}^0$.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b). Očitno!

(b) $\Rightarrow$ (c). Uporabimo trditev [2,10]. Zelo lahko je videti, da je samo potenca v (2,14) lahko enaka 0 in sicer za $\alpha = 0$. To pa že da izjavo (c).

(c) $\Rightarrow$ (a). $x \in \mathcal{H}_0 \cap \mathcal{H}^0 \Rightarrow \tau(x) = N(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 0$ po enačbi (2,1). □

[2,12] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ nad $\mathbb{K}$ in $\mathcal{P} \neq \mathcal{H}$ nek ideal. Tedaj je $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}^0$.

Dokaz. $x \in \mathcal{P} \Rightarrow x.x^K = x^K.x \in \mathcal{P}$, pa naj bo $\mathcal{P}$ levi ali desni ideal. Po enačbi (2,7) je torej: $N(x)e \in \mathcal{P}$, kar pa nam da: $N(x) = 0$. □

[2,13] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ nad $\mathbb{K}$. Naslednji izjavi sta ekvivalentni:

(a) Eksistira netrivialen idempotent;

(b) $\mathcal{H}^0 \not\subset \mathcal{H}_0$.

Ti dve trditvi implicirata še izjave:

(A) Vsi idempotenti so v $\mathcal{H}^0$ (netrivialni seveda);

(B) Če je q poljuben element v $\mathcal{H}_0$ z lastnostjo $N(q) = -1$, sta $p = (1/2)(e + q)$ in p^K idempotenta;

(C) Vsi netrivialni idempotenti so takšnega tipa;

(D) $p.p^K = p^K.p = 0$; $p + p^K = e$; $p - p^K = q$; (2,17)

$$\sigma(p,p) = \sigma(p^K,p^K) = \delta(p,p^K) = 1/2 \; ; \qquad (2,18)$$

$$\sigma(p,p^K) = \sigma(p^K,p) = \delta(p,p) = \delta(p^K,p^K) = N(p) = N(p^K) = |p| = |p^K| = 0 \, . \qquad (2,19)$$

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b). Naj bo $\alpha e + q$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $q \in \mathcal{H}_0$, netrivialen idempotent. $\alpha^2 e + 2\alpha q - N(q)e = \alpha e + q \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \alpha = 1/2$ & $N(q) = -1/4 \Longrightarrow N(\alpha e + q) = \alpha^2 + N(q) = 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \mathcal{H}^0 \not\subset \mathcal{H}_0$.

(b) $\Longrightarrow$ (a). $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, $q \in \mathcal{H}_0$, $N(\alpha e + q) = 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow N(q) = -\alpha^2 \Longrightarrow [\frac{1}{2}(e + \frac{1}{\alpha}q)]^2 = \frac{1}{2}(e + \frac{1}{\alpha}q)$.

Iz prvega dela dokaza sledijo še vse ostale trditve. □

[2,14] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ kvadratna algebra v Osbornovem paru $(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)$ nad $\mathbb{K}$ in naj bo brez pravih deljiteljev niča.

(a) Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je $\mathcal{H} = \mathbb{C}e$.

(b) Za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ima $\mathcal{H}$ naslednji karakteristični lastnosti:

(A) δ je skalarni produkt,

(B) za poljubna linearno neodvisna $a,b \in \mathcal{H}_0$ je tudi trojica $a,b,a\times b$ linearno neodvisna.

$\mathcal{H}$ je torej poseben primer algebre iz trditve [1,3].

Dokaz. (a) Naj bo $a \in \mathcal{H}_0$.

$(\sqrt{\sigma(a,a)}\, e + a).(\sqrt{\sigma(a,a)}\, e - a) = 0$.

Zato: $a = 0$ in $\dim \mathcal{H} = 1$.

(b) Iz prvega dela dokaza tako j sledi: $\sigma(a,a) < 0$, $\forall a \in \mathcal{H}_0 - \{0\}$. Ker pa je $-\sigma(a,a) = \delta(a,a) = N(a) > 0$, je po trditvah [1,2] in [1,3] forma $\delta(.,.)$ skalarni produkt. Recimo, da je: $a \times b = \lambda a + \mu b$ za neka $a,b \in \mathcal{H}_0 - \{0\}$ in $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Če je $\sigma(a,b) \neq \lambda\mu$ ali $\sigma(a,a) \neq \mu^2$, je:

$(\mu e - a).([\lambda\sigma(a,a) + \mu\sigma(a,b)]e + [\lambda\mu + \sigma(a,b)]a +$

$+ [\mu^2 - \sigma(a,a)]b) = 0$, kar je v nasprotju s predpostavko.

Če pa je $\sigma(a,b) = -\lambda\mu$ in $\sigma(a,a) = \mu^2$, je:

$(\mu e - a).([\lambda + \mu]e + a - b) = 0$, kar pa pomeni, da sta a in b v tem primeru kolinearna.

Sedaj pa vzemimo, da algebra $\mathcal{H}$ izpolnjuje pogoja (A) in (B) in naj eksistirajo $a,b \in \mathcal{H}_0$ in $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, da je $\alpha e + a \neq 0$, $\beta e + b \neq 0$, pa je vseeno

$0 = (\alpha e + a).(\beta e + b) = \alpha\beta e + \beta a + \alpha b + \sigma(a,b)e + a \times b$.

To je možno le, če sta a in b linearno odvisna, na primer $b = \lambda a$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Smiselno je vzeti $\lambda \neq 0$.

$0 = \alpha\beta e + \beta a + \alpha\lambda a - \lambda\delta(a,a)e$.

$\beta + \alpha\lambda = 0$, $\alpha\beta - \lambda\delta(a,a) = 0$.

Iz prve enačbe izračunajmo β, ga vstavimo v drugo enačbo in krajšajmo z $-\lambda$, pa dobimo protislovno zahtevo

$\alpha^2 + \delta(a,a) = 0$. $\square$

To je delen odgovor na Osbornovo vprašanje ([26]), ali se da vsaka antikomutativna algebra z lastnostjo (B) vložiti v neko kvadratno algebro z deljenjem.

3. BANACHOVE ALGEBRE

Najprej bomo z lemo [3,1] pokazali, da je definicija Banachove algebre lahko ravno taka kot v asociativnem primeru. Zatem bomo uvedli strukturo Banachove algebre še v Osbornov par, tako da zahtevamo zaprtost druge komponente tega para, pri čemer se izkaže, da sta obe algebri Banachovi. Odlikovali pa bomo tiste norme, ki so algebrske za obe algebri para in v kateri je sled para - kot bomo pozneje videli - neko stanje. Posebej velja opozoriti na trditev [3,8], v kateri pokažemo metodo določitve norme, ki je hkrati algebrska in je norma enote 1, pri čemer ta metoda ni odvisna od asociativnosti (in celo ne od polnosti, kar ugotovimo pri pozornem branju dokaza), v nasprotju s klasičnim Gelfandovim načinom. V trditvi [3,10] tudi na preprost način določimo algebrsko normo, pri kateri je sfera, ki vsebuje enoto, v le-tej gladka. V nadaljnjih trditvah bomo še ocenili funkcionale, ki izvirajo iz Osbornovega para, in povedali nekaj dejstev o kompleksifikaciji.

V tem in v naslednjem poglavju se bomo držali dogovora, da bomo označevali produkt v poljubni algebri s krožcem $\circ$, znaka $\cdot$ in $\times$ pa bomo rezervirali za produkta v algebrah, ki lahko tvorita Osbornov par.

Naj bo $\mathcal{H}$ algebra nad $\mathbb{K}$ z multiplikacijo $\circ : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$.

Levi in desni kanonski operatorji: $x \in \mathcal{H} \Rightarrow$

$$L_x y = x \circ y \quad \& \quad R_x y = y \circ x \quad , \forall y \in \mathcal{H}. \tag{3,1}$$

Kanonski operatorji so linearni. Velja še:

$$\left.\begin{array}{l} L_{\lambda x} = \lambda L_x \,, \quad L_{x+y} = L_x + L_y \,, \\ R_{\lambda x} = \lambda R_x \,, \quad R_{x+y} = R_x + R_y \,, \end{array}\right\} \forall \lambda \in \mathbb{K} \,, \ \forall x,y \in \mathcal{H}. \tag{3,2}$$

Fleksibilne algebre: $L_x R_x = R_x L_x$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (3,3)

Poseben primer, alternativne algebre:

$$L_{x\circ x} = L_x^2 \,, \quad R_{x \circ x} = R_x^2 \,, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{3,4}$$

Še poseben primer, asociativne algebre:

$$L_{x\circ y} = L_x L_y \,, \quad R_{x\circ y} = R_x R_y \,, \ \forall x,y \in \mathcal{H}. \tag{3,5}$$

[3,1] LEMA. Naj bo $\mathcal{H}$ algebra nad $\mathbb{K}$ z multiplikacijo $\circ$ in obenem Banachov prostor z normo $\|.\|$. Naslednje izjave so ekvivalentne:

(a) Multiplikacija $\circ$ je zvezna.

(b) $\exists M > 0 : \|x\circ y\| \leq M\|x\|.\|y\| \quad , \forall x,y \in \mathcal{H}$. (3,6)

(c) Eksistira prvotni normi ekvivalentna norma $\|.\|_1$, za katero velja:

$$\|x\circ y\|_1 \leq \|x\|_1\|y\|_1 \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} . \tag{3,7}$$

(d) Multiplikacija $\circ$ je ločeno zvezna:

$\forall x \in \mathcal{H}, \exists \alpha(x) > 0 : \|x\circ y\| \leq \alpha(x)\|y\| \ , \ \forall y \in \mathcal{H}$, &

& $\forall x \in \mathcal{H}, \exists \beta(x) > 0 : \|y\circ x\| \leq \beta(x)\|y\| \ , \ \forall y \in \mathcal{H}$.

(e) Vsi kanonski operatorji so omejeni.

Dokaz. Ekvivalenco (a) $\Longleftrightarrow$ (b) dobimo v [15], 103,104.

(b) $\Longrightarrow$ (c). $\|x\|_1 = M\|x\|$.

(c) $\Longrightarrow$ (b). $\exists\, n,N > 0 : \ n\|x\| \leq \|x\|_1 \leq N\|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H}$.

$\|x\circ y\| \leq \frac{1}{n}\|x\circ y\|_1 \leq \frac{1}{n}\|x\|_1\|y\|_1 \leq (N^2/n)\|x\|.\|y\|$.

(d) $\Longrightarrow$ (e). $\|L_x y\| \leq \alpha(x)\|y\| \ , \ \forall y \in \mathcal{H} \Longrightarrow L_x$ je omejen.

Analogno za R_x!

(e) $\Longrightarrow$ (d). $\alpha(x) = \|L_x\| \ , \ \beta(x) = \|R_x\|$.

(b) $\Longrightarrow$ (d). $\alpha(x) = \beta(x) = M\|x\|$.

(d) $\Longrightarrow$ (b). Naj bo $S_1(0) = \{z \in \mathcal{H} \ ; \ \|z\| = 1\}$.

$\|x\circ y\| = \|R_y x\| \leq \beta(x) \ , \ \forall y \in S_1(0)$.

Družina omejenih linearnih operatorjev $\{R_y \ ; \ y \in S_1(0)\}$ je zato enakomerno omejena in Banach - Steinhausov izrek pravi: $\exists\, M > 0 : \|R_y\| \leq M \ , \ \forall y \in S_1(0)$.

Sledi: $\|R_y x\| \leq M\|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ , \ \forall y \in S_1(0)$.

$\frac{1}{\|y\|}\|x\circ y\| = \|x\circ\frac{1}{\|y\|}y\| \leq M\|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ , \ \forall y \in \mathcal{H} - \{0\}$,

od koder pa dobimo (b) po množenju z $\|y\|$. $\square$

Opomba. Implikacija (d) $\Longrightarrow$ (b) , ki smo jo tukaj dokazali po Rickartu ([28]), se običajno pokaže s klasičnim Gelfandovim dokazom, katerega ideja je v tem, da uvedemo novo normo $|||x||| = \|L_x\|$. Pri asociativnih algebrah ima ta sicer precej daljši dokaz to prednost, da pokaže hkratno veljavnost dveh formul: $\|x\circ y\| \leqq \|x\|.\|y\|$ in $\|e\| = 1$ (ker velja (3,5) in je $R_e = L_e = I$ za morebitno enoto). Mi bomo morali konstruirati takšno normo drugače.

[3,2] DEFINICIJA. Vektorski prostor $\mathcal{H}$ nad $\mathbb{K}$ je Banachova (oz. Hilbertova) algebra, če je:

(a) $\mathcal{H}$ je Banachov (oz. Hilbertov) prostor,

(b) $\mathcal{H}$ je algebra,

(c) multiplikacija je zvezna v dani topologiji.

Iz prejšnje leme vemo, da za normo $\|.\|$ Banachove algebre $\mathcal{H}$ velja (3,6) in da lahko uvedemo novo normo $\|x\|_1 = M\|x\|$, da velja (3,7) (če gre za Hilbertovo algebro, potem prvotni skalarni produkt $\langle .,. \rangle$ nadomestimo z novim: $\langle x,y\rangle_1 = M^2\langle x,y\rangle$). Vsako normo, za katero velja (3,7), imenujemo algebrska norma.

[3,3] LEMA. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra z normo $\|.\|$, ki naj bo algebrska.

(a) Množici $\{x \in \mathcal{H} ;\ \exists\, L_x^{-1}\}$ in $\{x \in \mathcal{H} ;\ \exists\, R_x^{-1}\}$ sta odprti.

(b) $$\|L\| = \|R\| = \sup_{x,y\neq 0} \frac{\|x\circ y\|}{\|x\|.\|y\|} \leqq 1 \ . \tag{3,8}$$

$$\|x\circ y\| \leqq \|R\|.\|x\|.\|y\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} \ . \tag{3,9}$$

$$\|L_x\| \leqq \|x\| \ , \ \|R_x\| \leqq \|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} . \tag{3,10}$$

Če za nek x eksistirata L_x^{-1} in R_x^{-1}, je:

$$\|L_x^{-1}\|^{-1} \leqq \|L_x\| \ , \ \|R_x^{-1}\|^{-1} \leqq \|R_x\| \ . \tag{3,11}$$

(c) Če eksistira enota e, je:

$$\|e\| \geqq 1 \ , \ 1/\|e\| \leqq \|L\| = \|R\| \leqq 1 \ , \tag{3,12}$$

$$\|x\|/\|e\| \leqq \|L_x\| \leqq \|x\| \ , \ \|x\|/\|e\| \leqq \|R_x\| \leqq \|x\| \ , \tag{3,13}$$

$\forall x \in \mathcal{H}$;

če eksistirata L_x^{-1} in R_x^{-1}, je:

$$\|L_x^{-1}\|^{-1} \leqq \|x\|/\|e\| \ , \ \|R_x^{-1}\|^{-1} \leqq \|x\|/\|e\| \ . \tag{3,14}$$

(d) Če eksistira enota e in je $\|e\| = 1$, je:

$$\|L_x\| = \|R_x\| = \|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ . \tag{3,15}$$

Dokaz. Dokažimo le trditev (a), ker so druge bolj ali manj trivialne. Naj eksistira L_x^{-1}. V množici $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ omejenih operatorjev nad $\mathcal{H}$ eksistira odprta krogla s polmerom ε okoli

L_x, v kateri so vsi operatorji obrnljivi (ker je množica invertibilnih elementov v $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ odprta).
Naj bo $z \in \mathcal{H}$ poljuben element s pogojem $\|z\| < \varepsilon$.
$\|L_x - L_{x+z}\| = \|L_z\| \leqq \|z\| < \varepsilon \Rightarrow \exists\, L_{x+z}^{-1}$. $\square$

[3,4] DEFINICIJA. (a) Banach - Osbornov par je Osbornov par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$, v katerem je $\mathcal{H}$ Banachova algebra in $\mathcal{H}_o$ zaprt podprostor. Normo $\|.\|$ v $\mathcal{H}$, ki je algebrska za algebri $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}_o$ hkrati in za katero velja:
$\|e + a\| \geqq \|e\|$ za vsak $a \in \mathcal{H}_o$,
bomo imenovali Banach - Osbornova norma tega para.
(b) Hilbert - Osbornov par je Banach - Osbornov par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$, v katerem je $\mathcal{H}$ Hilbertova algebra. Banach - - Osbornovo normo v $\mathcal{H}$, ki izhaja iz skalarnega produkta, bomo imenovali Hilbert - Osbornova norma tega para.

Uporabljali bomo naslednje okrajšave: BO-par, HO-par, BO-norma, HO-norma.

[3,5] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova (oz. Hilbertova) algebra z enoto e. Tedaj eksistira omejen linearen funkcional τ z lastnostjo $\tau(e) = 1$, da je za $\operatorname{Ker} \tau = \mathcal{H}_o$ par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$ BO-par (oz. HO-par).

Dokaz. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra z enoto e. Definirajmo: $\tau(\lambda e) = \lambda$. τ je omejen linearen funkcional in po Hahn - - Banachovem izreku ga lahko razširimo na cel prostor $\mathcal{H}$. $\operatorname{Ker} \tau = \mathcal{H}_o$ je zaprta hiperravnina. Po enačbah (1,1) in (1,2) konstruiramo Osbornov par, pa je trditev dokazana. $\square$

[3,6 LEMA. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachov prostor z normo $\|.\|$ nad $\mathbb{K}$ in $\mathcal{H}_o$ zaprta hiperravnina, tako da je $\mathcal{H} = \mathbb{K}e \oplus \mathcal{H}_o$ za nek $e \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_o$. Naj bo $p(\alpha,\beta)$ norma v $\mathbb{R}^2$ z lastnostjo:
$p(\alpha,\beta) = p(|\alpha|,|\beta|)$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
Tedaj je $\|\alpha e + a\|_p = p(|\alpha|,\|a\|)$ za $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_o$, norma v $\mathcal{H}$, ekvivalentna prvotni normi $\|.\|$.

Dokaz. Denimo, da eksistirajo štiri števila $\alpha,\gamma,\beta,\delta$, za katere je: $0 \leqq \alpha \leqq \gamma$, $0 \leqq \beta \leqq \delta$, $p(\alpha,\beta) > p(\gamma,\delta)$.

$\alpha = \lambda\gamma$ za nek $\lambda \in [0,1]$; $\beta = \mu\delta$ za nek $\delta \in [0,1]$.

$(\alpha,\delta) = \frac{1+\lambda}{2}(\gamma,\delta) + \frac{1-\lambda}{2}(-\gamma,\delta)$,

$(\alpha,\beta) = \frac{1+\mu}{2}(\alpha,\delta) + \frac{1-\mu}{2}(\alpha,-\delta)$.

$p(\alpha,\delta) \leqq \frac{1+\lambda}{2}p(\gamma,\delta) + \frac{1-\lambda}{2}p(-\gamma,\delta) = p(\gamma,\delta) < p(\alpha,\beta) \leqq$

$\leqq \frac{1+\mu}{2}p(\alpha,\delta) + \frac{1-\mu}{2}p(\alpha,-\delta) = p(\alpha,\delta)$.

To protislovje kaže, da iz $0 \leqq \alpha \leqq \gamma$, $0 \leqq \beta \leqq \delta$ lahko sklepamo: $p(\alpha,\beta) \leqq p(\gamma,\delta)$.

Pokažimo sedaj, da je $\|.\|_p$ res norma! Naj bo $\alpha,\beta,\lambda \in \in \mathbb{K}$, $a,b \in \mathcal{H}_0$.

$\|\alpha e + a\|_p = 0 \Rightarrow |\alpha| = \|a\| = 0 \Rightarrow \alpha e + a = 0$.

$\|\lambda(\alpha e + a)\|_p = p(|\lambda|.|\alpha|, |\lambda|.\|a\|) = |\lambda|\, p(|\alpha|,\|a\|) =$

$= |\lambda|.\|\alpha e + a\|_p$.

$\|(\alpha e + a) + (\beta e + b)\|_p = p(|\alpha + \beta|, \|a + b\|) \leqq$

$\leqq p(|\alpha| + |\beta|, \|a\| + \|b\|) \leqq p(|\alpha|,\|a\|) + p(|\beta|,\|b\|) =$

$= \|\alpha e + a\|_p + \|\beta e + b\|_p$.

Vse norme v $\mathbb{R}^2$ so ekvivalentne. Torej eksistirata pozitivni števili ε in δ, da je: $\varepsilon p(\alpha,\beta) \leqq |\alpha| + |\beta| \leqq$

$\leqq \delta p(\alpha,\beta)$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.

$\|\alpha e + a\| \leqq |\alpha|.\|e\| + \|a\| \leqq (1 + \|e\|)(|\alpha| + \|a\|) \leqq$

$\leqq \delta(1 + \|e\|)p(|\alpha|,\|a\|)$ za $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_0$.

Definirajmo še: $P(\alpha e + a) = \alpha e$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$. $Q = I - P$. Ker sta $\mathbb{K}e$ in $\mathcal{H}_0$ zaprta podprostora, sta P in Q omejena operatorja:

$\|P(\alpha e + a)\| = |\alpha|.\|e\| \leqq \|P\|.\|\alpha e + a\|$,

$\|Q(\alpha e + a)\| = \|a\| \leqq \|Q\|.\|\alpha e + a\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$.

$|\alpha| + \|a\| \leqq (\|P\|/\|e\| + \|Q\|)\|\alpha e + a\|$.

$\|\alpha e + a\| \geqq 1/(\|P\|/\|e\| + \|Q\|)(|\alpha| + \|a\|) \geqq$

$\geqq \varepsilon(\|P\|/\|e\| + \|Q\|)^{-1}p(|\alpha|,\|a\|)$. $\square$

<u>[3,7] TRDITEV.</u> Naj bo $\mathcal{H}_0$ Banachova (oz. Hilbertova) algebra s produktom $(a,b) \longrightarrow a \times b$, $e \notin \mathcal{H}_0$ ni $\sigma(.,.)$ je zvezna bilinearna forma na $\mathcal{H}_0$. Tedaj je $\mathcal{H} = \mathbb{K}e \oplus \oplus \mathcal{H}_0$ Banachova algebra za katerokoli normo iz leme [3,6] (oz. Hilbertova za normo $(|\alpha|^2 + \|a\|^2)^{1/2}$ iz leme [3,6]) in za produkt (1,1). $(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)$ je potem

BO-par (oz. HO-par).

Dokaz. $\mathcal{H}$ je, kot je znano, res Banachov prostor. Zožitev norme $p(|\alpha|,\|a\|)$ iz leme [3,6] na $\mathcal{H}_0$ je proporcionalna prvotni normi: $p(0,\|a\|) = \|a\|p(0,1)$, zato je tudi v novi normi $\mathcal{H}_0$ isti Banachov prostor in s tem zaprt v $\mathcal{H}$. Naj bo: $|\sigma(a,b)| \leq S\|a\|.\|b\|$, $\|a\times b\| \leq M\|a\|.\|b\|$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_0$.

$\|(\alpha e + a).(\beta e + b)\|_p = p(|\alpha\beta + \sigma(a,b)|,\|\alpha b + \beta a + a\times b\|) \leq$
$\leq p(|\alpha\beta + \sigma(a,b)|,0) + p(0,\|\alpha b + \beta a + a\times b\|) =$
$= |\alpha\beta + \sigma(a,b)|p(1,0) + \|\alpha b + \beta a + a\times b\|p(0,1) \leq$
$\leq |\alpha|.|\beta|p(1,0) + S\|a\|.\|b\|p(1,0) + |\alpha|.\|b\|p(0,1) +$
$+ |\beta|.\|a\|p(0,1) + M\|a\|.\|b\|p(0,1) \leq$
$\leq [|\alpha|(1 + p(1,0)) + \|a\|(1 + p(0,1))(1 + M + S)].[|\beta|(1 +$
$+ p(1,0)) + \|b\|(1 + p(0,1))(1 + M + S)] =$
$= (A|\alpha| + B\|a\|)(A|\beta| + B\|b\|)$.

$\alpha e + a \longrightarrow A|\alpha| + B\|a\|$ pa je spet ena izmed norm iz leme [3,6] in je zato ekvivalentna ostalim:

$A|\alpha| + B\|a\| \leq C\|\alpha e + a\|_p$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$.

Od tod pa sledi:

$\|(\alpha e + a).(\beta e + b)\|_p \leq C^2\|\alpha e + a\|_p\|\beta e + b\|_p$. □

[3,8] TRDITEV. Naj bo $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ BO-par nad $\mathbb{K}$. Eksistira taka BO-norma $\|.\|$ tega para, da je $\|e\| = 1$.

Dokaz. Naj bo $\|.\|_0$ neka norma Banachovega prostora $\mathcal{H}$. Zanjo tedaj velja: $\|x.y\|_0 \leq p\|x\|_0\|y\|_0$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$,

pri čemer je $p > 0$. Postavimo: $P = \max\{1,p\}$ in uvedimo novo normo: $\|\alpha e + a\|_1 = |\alpha| + P\|a\|_0$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$.

Po lemi [3,6] je ta norma ekvivalentna prvotni: $\exists\, m,M > 0$, $m\|z\|_1 \leq \|z\|_0 \leq M\|z\|_1$, $\forall z \in \mathcal{H}$.

$\|x.y\|_1 \leq \frac{1}{m}\|x.y\|_0 \leq \frac{p}{m}\|x\|_0\|y\|_0$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$.

$a,b \in \mathcal{H}_0 \Rightarrow \|a.b\|_1 = |\sigma(a,b)| + P\|a\times b\|_0 \leq \frac{p}{m}\|a\|_0\|b\|_0 \leq$
$\leq Q\|a\|_0\|b\|_0$ za $Q = \max\{1,P/m\}$.

Dokažimo, da je $\|\alpha e + a\| = |\alpha| + Q\|a\|_0$ iskana norma!

(a) Po lemi [3,6] je ta norma ekvivalentna prvotni.

(b) Naj bo $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $a,b \in \mathcal{H}_0$.

$\|(\alpha e + a).(\beta e + b)\| = |\alpha\beta + \sigma(a,b)| + Q\|\alpha b + \beta a + a\times b\|_0 \leq$

$\leq |\alpha|.|\beta| + |\sigma(a,b)| + Q|\alpha|.\|b\|_o + Q|\beta|.\|a\|_o +$
$+ Q\|a\times b\|_o \leq |\alpha|.|\beta| + |\alpha|Q\|b\|_o + |\beta|Q\|a\|_o +$
$+ Q(|\sigma(a,b)| + P\|a\times b\|_o) \leq |\alpha|.|\beta| + |\alpha|Q\|b\|_o +$
$+ |\beta|Q\|a\|_o + Q^2\|a\|_o\|b\|_o = (|\alpha| + Q\|a\|_o)(|\beta| + Q\|b\|_o) =$
$= \|\alpha e + a\|.\|\beta e + b\|$,
in nova norma je v algebri $\mathcal{H}$ algebrska.

(c) $\|a\times b\| = Q\|a\times b\|_o \leq |\sigma(a,b)| + Q\|a\times b\|_o = \|a.b\| \leq$
$\leq \|a\|.\|b\|$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_o$,

in nova norma je tudi v algebri $\mathcal{H}_o$ algebrska.

(d) $\|e + a\| = 1 + Q\|a\|_o \geq 1 = \|e\|$, $\forall a \in \mathcal{H}_o$. □

[3,9] KOROLAR. Naj bo $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ BO-par nad $\mathbb{K}$. Tedaj je tudi $\mathcal{H}_o$ Banachova algebra (v inducirani strukturi Banachovega prostora).

[3,10] TRDITEV. Naj bo $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ BO-par nad $\mathbb{K}$. Eksistira taka BO-norma $\|.\|$, da je za vsak $x \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_x(\beta) = \|e + \beta x\|$ (iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$) pri $\beta = 0$ odvedljiva.

Dokaz. Naj bo $\|.\|_o$ neka norma Banachovega prostora $\mathcal{H}$. Uvedimo novo normo:

$$\|\alpha e + a\|_1 = \sqrt{|\alpha|^2 + \|a\|_o^2} \quad , \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \ , \ \forall a \in \mathcal{H}_o \ .$$

Po lemi [3,6] je ta norma ekvivalentna prvotni. Zato zanjo velja: $\|x.y\|_1 \leq M\|x\|_1\|y\|_1$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$, $\|a\times b\|_1 \leq$
$\leq m\|a\|_1\|b\|_1$ (upoštevaje korolar [3,9]).

Če je $N = \max\{m,M\}$, naj bo iskana norma $\|z\| = N\|z\|_1$.

(a) Tudi ta norma je očitno ekvivalentna s prvotno.

(b) $\|x.y\| = N\|x.y\|_1 \leq MN\|x\|_1\|y\|_1 \leq N^2\|x\|_1\|y\|_1 = \|x\|.\|y\|$,
$\forall x,y \in \mathcal{H}$.

(c) $\|a\times b\| = N\|a\times b\|_1 \leq mN\|a\|_1\|b\|_1 \leq N^2\|a\|_1\|b\|_1 = \|a\|.\|b\|$,
$\forall a,b \in \mathcal{H}_o$.

(d) $\|e + a\| = N\sqrt{1 + \|a\|_o^2} \geq N = \|e\|$, $\forall a \in \mathcal{H}_o$.

Torej je $\|.\|$ res BO-norma.

Pa naj bo $x = \alpha e + a$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_o$, in $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$.

$(\|e + \beta(\alpha e + a)\| - \|e\|)/\beta = (N\sqrt{|1 + \alpha\beta|^2 + \beta^2\|a\|_o^2} - N)/\beta \longrightarrow$

$\longrightarrow N.\mathrm{Re}\,\alpha$ (za $\beta \longrightarrow 0$) . $\square$

[3,11] TRDITEV. Za HO-par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$ nad $\mathbb{K}$ veljajo naslednje izjave:

(a) Eksistira HO-norma.

(b) Za vsako HO-normo velja:

$$\|\alpha e + a\| = \sqrt{|\alpha|^2\|e\|^2 + \|a\|^2}\ , \qquad (3,16)$$

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a \in \mathcal{H}_o$.

Za ustrezen skalarni produkt $\langle .,. \rangle$ velja, da je $\mathcal{H}_o$ ortogonal enote e in je:

$$\tau(x) = \langle x,e\rangle / \langle e,e\rangle\ , \ \forall x \in \mathcal{H}. \qquad (3,17)$$

(c) Za vsako HO-normo $\|.\|$ je za vsak $x \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_x(\beta) = \|e + \beta x\|$ $(\beta \in \mathbb{R})$ pri $\beta = 0$ odvedljiva:

$$\frac{d}{d\beta}\|e + \beta x\|_{\beta=0} = \|e\|\mathrm{Re}\,\tau(x) = \frac{1}{\|e\|}\mathrm{Re}\langle x,e\rangle\ . \qquad (3,18)$$

(d) $\mathcal{H}_o$ je spet Hilbertova algebra.

Dokaz. (a) Naj bo $\|.\|_o$ neka norma Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$, ki jo generira skalarni produkt $\langle .,. \rangle_o$. Ker je $\mathcal{H}_o$ tudi Hilbertov prostor, je forma $\langle \alpha e + a, \beta e + b\rangle_1 = \alpha\bar{\beta} + \langle a,b\rangle_o$ za $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $a,b \in \mathcal{H}_o$ spet skalarni produkt. njegova norma $\|\alpha e + a\|_1 = (|\alpha|^2 + \|a\|_o^2)^{1/2}$ je ekvivalentna prvotni in, če jo pomnožimo z dovolj veliko konstanto N, dobimo novo normo $\|.\|$, ki je BO-norma, kot smo videli v dokazu trditve [3,10]. Je pa tudi HO-norma, ker jo generira skalarni produkt $\langle x,y\rangle = N^2\langle x,y\rangle_1$.

(b) Naj bo sedaj $\|.\|$ neka HO-norma HO-para $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$.

$\|e + a\|^2 \geq \|e\|^2$, $\forall a \in \mathcal{H}_o$.

Naj bo $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\langle e + \lambda a, e + \lambda a\rangle = \|e\|^2 + |\lambda|^2\|a\|^2 + 2\mathrm{Re}(\lambda\langle a,e\rangle) \geq \|e\|^2$.

Recimo, da je $\langle a,e\rangle \neq 0$, in vzemimo:

$\lambda = -|\lambda|\langle e,a\rangle / |\langle a,e\rangle|$.

$|\lambda|^2\|a\|^2 - 2|\lambda|.|\langle a,e\rangle| \geq 0$, oziroma za $\lambda \neq 0$:

$2|\langle a,e\rangle| \leq |\lambda|.\|a\|^2$.

Ker pa sme biti $|\lambda|$ poljubno majhen, je nujno $\langle a,e\rangle = 0$ in $\mathcal{H}_o$ je ortogonal elementa e.

(c) Naj bo $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ sploh poljubna Hilbertova norma.

$$\frac{\|e + \beta x\| - \|e\|}{\beta} = \frac{\langle e + \beta x, e + \beta x\rangle - \|e\|^2}{\beta(\|e + \beta x\| + \|e\|)} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\|e\|}\mathrm{Re}\langle x,e\rangle \quad \text{za} \quad \beta \longrightarrow 0 .$$

(d) Sledi neposredno iz (a). $\square$

<u>[3,12] KOROLAR.</u> Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra z enoto e nad $\mathbb{K}$. Veljajo naslednje izjave:

(a) V $\mathcal{H}$ eksistira algebrska norma $\|.\|$, za katero je $\|e\| = 1$.

(b) V $\mathcal{H}$ eksistira algebrska norma $\|.\|$, za katero je za vsak $x \in \mathcal{H}$ funkcija $\varphi_x(\beta) = \|e + \beta x\|$ $(\beta \in \mathbb{R})$ pri $\beta = 0$ odvedljiva.

(c) Če je $\mathcal{H}$ Hilbertova algebra, je sploh v vsaki normi, generirani s skalarnim produktom, ta funkcija $\varphi_x(\beta)$ odvedljiva pri $\beta = 0$ in velja:

$$\frac{d}{d\beta}\|e + \beta x\|_{\beta=0} = \frac{1}{\|e\|}\mathrm{Re}\langle x,e\rangle .$$

<u>Dokaz.</u> Trditvi (a) in (b) sta posledici trditev [3,5],[3,8] in [3,10]. Trditev (c) pa sledi iz dokaza trditve [3,11]. $\square$

Takoj se nam zastavi vprašanje, ali eksistira v Banachovi algebri taka algebrska norma $\|.\|$, da je $\|e\| = 1$ in hkrati da za vsak $x \in \mathcal{H}$ eksistira $\frac{d}{d\beta}\|e + \beta x\|_{\beta=0}$ v realnem smislu; v posebnem, ali eksistira v Hilbertovi algebri taka algebrska norma $\|.\|$, generirana s skalarnim produktom, da je $\|e\| = 1$. Odgovor je nikalen! V tem delu bomo pokazali, da se to zgodi le v zelo specialnih algebrah.

<u>[3,13] TRDITEV.</u> Naj bo $(\mathcal{H},\mathcal{H}_0)$ BO-par in $\|.\|$ neka BO-norna na njem. Tedaj velja:

$$\|\alpha e + a\| \geqq |\alpha|.\|e\| \geqq |\alpha| \ , \ \forall\alpha \in \mathbb{K} \ , \ \forall a \in \mathcal{H}_0 . \tag{3,20}$$

$$\|\tau\| = 1/\|e\| \leqq 1 . \tag{3,21}$$

$$|\sigma(x,y)| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|x.y\| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|x\|.\|y\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} . \tag{3,22}$$

$$\left.\begin{aligned} &\|x\|/3 \leqq \|x^K\| \leqq 3\|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ ; \\ &\|a^K\| = \|a\| \ , \ \forall a \in \mathcal{H}_0 . \end{aligned}\right\} \tag{3,23}$$

$$|\delta(x,y)| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|x\|.\|y^K\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} \ ; \tag{3,24}$$

$$\left.\begin{aligned} &|\delta(x,y)| \leqq \frac{2 + \|e\|}{\|e\|^2}\|x\|.\|y\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} \ ; \\ &|\delta(x,a)| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|x\|.\|a\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ , \ \forall a \in \mathcal{H}_0 . \end{aligned}\right\} \tag{3,25}$$

$$\left.\begin{aligned} |N(x)| &\leq \frac{2 + \|e\|}{\|e\|^2}\|x\|^2 , \ \forall x \in \mathcal{H} ; \\ |N(a)| &\leq \frac{1}{\|e\|}\|a\|^2 , \ \forall a \in \mathcal{H}_0 . \end{aligned}\right\} \quad (3,26)$$

$$\left.\begin{aligned} |x| &\leq \frac{\sqrt{2 + \|e\|}}{\|e\|}\|x\| , \ \forall x \in \mathcal{H} ; \\ |a| &\leq \|a\|/\sqrt{\|e\|} , \ \forall a \in \mathcal{H}_0 . \end{aligned}\right\} \quad (3,27)$$

Dokaz. $\|\tau\| = \sup \dfrac{|\tau(\alpha e + a)|}{\|\alpha e + a\|} = \sup \dfrac{|\alpha|}{\|\alpha e + a\|}$, pri čemer gre supremum po vseh elementih $\alpha e + a \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_0$.

$\|\tau\| = \sup\limits_{\alpha \neq 0} \|e + \frac{1}{|\alpha|}a\|^{-1} = (\inf\limits_{b \in \mathcal{H}_0} \|e + b\|)^{-1} = 1/\|e\|$.

$|\sigma(x,y)| = |\tau(x.y)| \leq \|\tau\|.\|x.y\|$.

$\|x^K\| = \|2\tau(x)e - x\| \leq 2\|\tau\|.\|x\|.\|e\| + \|x\| = 3\|x\|$,
upoštevaje izpeljavo enačbe (1,15).

$\|x\| = \|(x^K)^K\| \leq 3\|x^K\|$.

(3,24) dobimo iz (1,25).

Z upoštevanjem $x^K = 2\tau(x)e - x$ izpeljemo:

$$\delta(x,y) = 2\tau(x)\tau(y) - \frac{1}{2}\tau(x.y + y.x) , \ \forall x,y \in \mathcal{H} . \quad (3,28)$$

$|\delta(x,y)| \leq 2|\tau(x)|.|\tau(y)| + \frac{1}{2}|\tau(x.y)| + \frac{1}{2}|\tau(y.x)| \leq$

$\leq \frac{2}{\|e\|^2}\|x\|.\|y\| + \frac{1}{\|e\|}\|x\|.\|y\|$.

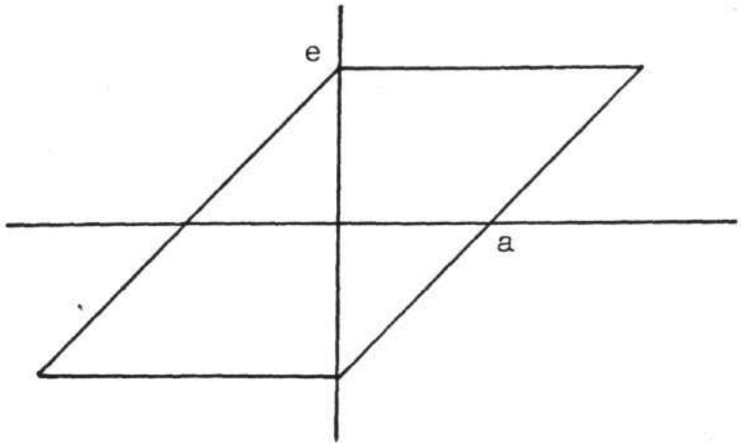
Ostale formule sledijo iz (3,24) in (3,25). $\square$

Ocene (3,23) v splošnem ni mogoče izboljšati, kar kaže naslednji primer.

[3,14] PRIMER. Naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ in $\dim\mathcal{H} = 2$ oziroma $\mathcal{H} = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}a$.

$$\|\alpha e + a\|_1 = \begin{cases} |\alpha| + |\beta| & \text{za } \alpha\beta \leq 0 , \\ |\alpha| & \text{za } 0 < \beta/\alpha < 2 , \\ |\beta| - |\alpha| & \text{za } 2 \leq \beta/\alpha . \end{cases}$$

Da je to res norma, vidimo, če narišemo ustrezno enotno kroglo, ki je paralelogram in zato konveksna, uravnovešena, absorbirajoča in omejena množica:



Zaradi končne dimenzionalnosti prostora velja:

$\|x.y\|_1 \leqq M\|x\|_1\|y\|_1$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$;

$\|\lambda a \times \mu a\|_1 \leqq m\|\lambda a\|_1\|\mu a\|_1$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$.

Če je $P = \max\{m,M\}$, je $\|x\| = P\|x\|_1$ algebrska norma v $\mathcal{H}$ in $\mathcal{H}_o = \mathbb{R}a$.

$$\|e + \lambda a\| = \begin{cases} P(1-\lambda) & \text{za } \lambda \leqq 0 , \\ P & \text{za } 0 < \lambda < 2 , \\ P(\lambda - 1) & \text{za } 2 \leqq \lambda , \end{cases}$$

zato je $\|e + \lambda a\| \geqq P = \|e\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Norma $\|.\|$ je torej res BO-norma.

$\|e + 2a\| = P$; $\|(e + 2a)^K\| = 3P$. □

[3,15] TRDITEV. Naj bo $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ HO-par in $\|.\|$ neka HO-norma. Poleg formul iz trditve [3,13] veljajo še naslednje:

$$\|\alpha e + a\| \geqq \|a\| , \ \forall \alpha \in \mathbb{K} , \ \forall a \in \mathcal{H}_o . \qquad (3,29)$$

$$\|x^K\| = \|x\| , \ \forall x \in \mathcal{H} . \qquad (3,30)$$

$$|\delta(x,y)| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|x\|.\|y\| , \ \forall x,y \in \mathcal{H} . \qquad (3,31)$$

$$|N(x)| = |x|^2 \leqq \|x\|^2/\|e\| , \ \forall x \in \mathcal{H} . \qquad (3,32)$$

Dokaz. (3,29) dobimo iz (3,16). Iz iste enačbe dobimo še:

$\|(\alpha e + a)^K\| = \sqrt{|\alpha|^2\|e\|^2 + \|-a\|^2} = \|\alpha e + a\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall a \in \mathcal{H}_o$.

(3,31) sledi iz (3,24). □

Iz izreka [3,13] sledi, da so funkcije τ,σ,δ in $x \longrightarrow x^K$ zvezne.

[3,16] TRDITEV. Naj bo $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ BO-par. Velja:

(a) $x \longrightarrow N(x)$ in $x \longrightarrow |x|$ sta zvezni funkciji.

(b) $x \longrightarrow N(x)$ je po Fréchetu odvedljiva:
$N'(x) = 2\delta(x,.)$. (3,33)

(c) $\mathcal{H}^{o}$ je zaprta množica.

Dokaz. $\lim\limits_{0 \neq \|y\| \to 0} \frac{1}{\|y\|} |N(x + y) - N(x) - 2\delta(x,y)| =$
$= \lim |N(y)|/\|y\| \leq \lim P\|y\| = 0$, pri čemer smo upoštevali (1,21) in $|N(y)| \leq P\|y\|^2$ v neki normi $\|.\|$ Banachovega prostora $\mathcal{H}$. S tem je izjava (b) potrjena. Izjava (a) sledi od tod, iz slednje pa še izjava (c), saj je $\mathcal{H}^{o}$ kot jedro funkcije $N(x)$ zagotovo zaprta množica. □

Kompleksifikacijo $\mathcal{H}^c$ realne Banachove algebre $\mathcal{H}$ z normo $\|.\|$ izvedemo natanko tako kot v asociativnem primeru ([38], 18 - 20):

Za $x,y,u,v \in \mathcal{H}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ je:

$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$;

$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$;

$(x + iy)\circ(u + iv) = (x\circ u - y\circ v) + i(y\circ u + x\circ v)$.

$\mathcal{H} \subset \mathcal{H}^c$ (v smislu naravne vložitve $x \longrightarrow x + i0$) .

$\mathcal{H}^c$ ima enoto natanko tedaj, ko jo ima $\mathcal{H}$, in obe enoti sovpadata.

V $\mathcal{H}^c$ eksistira taka norma $\|.\|_c$ (njena enotna krogla je najmanjša uravnovešena konveksna množica v $\mathcal{H}^c$, ki vsebuje enotno kroglo v $\mathcal{H}$), da velja:

(a) $\max\{\|x\|,\|y\|\} \leq \|x + iy\|_c \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$;

(b) $\|x\|_c = \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$;

(c) $\mathcal{H}^c$ je za to normo Banachova algebra natanko tedaj, ko je $\mathcal{H}$ za prvotno normo Banachova algebra;

(d) $\mathcal{H}^c$ je v topologiji norme $\|.\|_c$ Hilbertova algebra natanko tedaj, ko je $\mathcal{H}$ v topologiji norme $\|.\|$ Hilbertova algebra;

(e) norma $\|.\|_c$ je algebrska natanko tedaj, ko je taka tudi $\|.\|$;

(f) $\|e\| = 1 \Longleftrightarrow \|e\|_c = 1$ (za enoto e, če le eksistira).

Če na omenjeni način kompleksificiramo algebro $\mathcal{H}$ BO-para (oz. HO-para) $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$, je par $(\mathcal{H}^c,\mathcal{H}_o^c)$ spet BO-par (oz. HO-par); funkcionali $\tau,\sigma,\delta,N,|.|$ se pri tem razširijo na algebro $\mathcal{H}^c$ na običajen način (torej je:

$(\mathcal{H}_o)^c \cong (\mathcal{H}^c)_o$). Norma $\|.\|$ v $\mathcal{H}$ je za par $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ BO--norma natanko tedaj, ko je tudi $\|.\|_c$ BO-norma za par $(\mathcal{H}^c,\mathcal{H}_o^c)$: $\|e + (a + ib)\|_c \geq \max\{\|e + a\|,\|b\|\} \geq \|e + a\| \geq \geq \|e\|$, $\forall(a + ib) \in \mathcal{H}_o^c$.

Pripomba! Glede točke (d) velja pripomniti, da če je $\|.\|$ v $\mathcal{H}$ norma, porojena iz skalarnega produkta, še ni nujno, da je taka tudi norma $\|.\|_c$. $\mathcal{H}^c$ je pa vseeno Hilbertova algebra, saj jo lahko opremimo z drugačno normo: $|||x + iy||| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$. Tudi za to normo, ki jo generira skalarni produkt, namreč veljata neenačbi (a), pa je zato ekvivalentna normi $\|.\|_c$.

Tudi odvedljivost funkcije $\varphi_x(\beta) = \|e + \beta x\|$ pri $\beta = 0$ (v realnem smislu!) se v kompleksifikaciji v splošnem ne podeduje na normi $\|.\|_c$. Protiprimer je hitro pri roki. Vzemimo kvaternionsko algebro $\mathbb{H}$ z absolutno vrednostjo $|.|$ kot normo. $\mathbb{H}$ je Hilbertova algebra za to normo, ki je algebrska in za katero velja: $|1| = 1$. Kompleksifikacija (ki je še vedno asociativna algebra), je Hilbertova algebra v topologiji nove norme, ki je algebrska in za katero spet velja: $|1|_c = 1$. Če pa bi bila ta norma še generirana s skalarnim produktom ali vsaj funkcija $\varphi_x(\beta) = |1 + \beta x|_c$ odvedljiva pri $\beta = 0$, bi po Spatzu ([6], 56) prišli do nepravilnega sklepa: $\mathbb{H}^c \cong \mathbb{C}$.

Posledica: če je $\|.\|$ za par $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ HO-norma, potem $\|.\|_c$ za par $(\mathcal{H}^c,\mathcal{H}_o^c)$ to v splošnem ni.

4. POTENCE

Najprej bomo definirali potence v Banachovi algebri kot konveksne kombinacije različno asociiranih produktov enakih elementov. Potem pa bomo definirali spektralni polmer v dveh variantah - z po normi največjimi ali najmanjšimi potencami - in pokazali nekaj njunih lastnosti. Sledili bosta še dve temi: o odvodih potenc in o levih in desnih inverzih v bližini enote.

V tem razdelku naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra nad $\mathbb{K}$ z multiplikacijo $\circ$ in z algebrsko normo $\|.\|$. !

<u>Čista n-ta potenca</u> $p^n(x)$ elementa $x \in \mathcal{H}$ je produkt n faktorjev x v določenem zaporedju množenj. Posebej definirajmo: $p^1(x) = x$.
<u>n-ta potenca</u> $P^n(x)$ elementa $x \in \mathcal{H}$ $(n = 1,2,3,\dots)$ je konveksna kombinacija čistih n-tih potenc:

$$P^n(x) = \lambda_1 p_1^n(x) + \lambda_2 p_2^n(x) + \dots + \lambda_{s(n)} p_{s(n)}^n(x) ,$$

$$\sum_{k=1}^{s(n)} \lambda_k = 1 , \quad \lambda_k \geq 0 \quad \text{za vsak } k \text{ od } 1 \text{ do } s(n) .$$

Čiste potence so seveda posebni primeri potenc.
Z s(n) smo označili število formalno različnih čistih n-tih potenc. Glede na to, da je vsaka čista potenca produkt dveh čistih potenc nižje stopnje, velja enačba:

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n-1} s(k)s(n-k) , \quad s(1) = 1 . \qquad (4,1)$$

Tvorimo funkcijo $u = \sum_{n=1}^{\infty} s(n)z^n$, $u(0) = 0$.

S kvadriranjem vrste u in z upoštevanjem (4,1) dobimo (idejo dolgujem T. Pisanskemu):

$u^2 = u - z$ oziroma $u = 1/2 - \sqrt{1 - 4z}\,/2$.
Nato razvijemo u v Taylorjevo vrsto in s primerjavo členov dobimo:

$$s(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} , \quad n = 1,2,3,\dots \qquad (4,2)$$

$P^1(x) = x$; $P^2(x) = x^2$; $P^3(x) = \lambda x \circ x^2 + (1 - \lambda)x^2 \circ x$ za

$0 \leq \lambda \leq 1$; $P^4(x)$ ima že 5 členov, itd.
Ker je norma v $\mathcal{H}$ algebrska, je $\|p^n(x)\| \leq \|x\|^n$, iz česar sledi:

$$\|P^n(x)\| \leq \|x\|^n , \tag{4,3}$$

za vsak $x \in \mathcal{H}$ in za vsako potenco P^n.

Za vsako potenco P^n velja: $P^n(0) = 0$, $P^n(e) = e$ (če je e morebitna enota v $\mathcal{H}$), za vsak $x \in \mathcal{H}$ in $\alpha \in \mathbb{K}$ pa še:

$$P^n(\alpha x) = \alpha^n P^n(x) . \tag{4,4}$$

Če sta P_1^n in P_2^n dve n-ti potenci, je za vsak $x \in \mathcal{H}$ in za $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$:

$$\alpha_1 P_1^n(x) + \alpha_2 P_2^n(x) = (\alpha_1 + \alpha_2) P^n(x) , \tag{4,5}$$

kjer je P^n spet n-ta potenca. Zato je tudi vsaka konveksna kombinacija n-tih potenc spet n-ta potenca.

Če je algebra $\mathcal{H}$ potenčnoasociativna, je $P^n(x) = x^n$ v običajnem smislu.

<u>[4,1] LEMA.</u> Bodita P^m in P^n dve potenci v $\mathcal{H}$. Tedaj eksistirajo take potence (označili jih bomo z indeksom 1), da za vsak $x \in \mathcal{H}$ in vsak $\alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$ velja:

$$P^m(x) \circ P^n(x) = P_1^{m+n}(x) , \tag{4,6}$$

$$P^m(P^n(x)) = P_1^{mn}(x) , \tag{4,7}$$

$$P^n(\alpha e + x) = \alpha^n e + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} P_1^k(x) \tag{4,8}$$

(če je e morebitna enota v $\mathcal{H}$).

<u>Dokaz.</u> Prvi dve enačbi sta očitni. Prav tako je jasno, da zadostuje, če (4,8) dokažemo le za čisto potenco.

$$p^n(\alpha e + x) = \alpha^n p^n(e + \tfrac{1}{\alpha} x) = \alpha^n p^n(e + y) . \tag{*}$$

Dokažimo (4,8) s popolno indukcijo!

Za vsak n eksistirata za dano potenco p^n taki potenci p^i in p^{n-i}, da je:

$$p^n(z) = p^i(z) \circ p^{n-i}(z) , \quad \forall z \in \mathcal{H} .$$

$$p^n(e + y) = \left[e + \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} P_1^j(y)\right] \circ \left[e + \sum_{k=1}^{n-i} \binom{n-i}{k} P_2^k(y)\right] =$$

$$= e + \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} P_1^j(y) + \sum_{k=1}^{n-i} \binom{n-i}{k} P_2^k(y) + \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{i}{j} \binom{n-i}{k} P_3^{j+k}(y) =$$

$$= e + \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{i}{j}\binom{n-i}{k} p_3^{j+k}(y) \qquad (\text{za } j + k \neq 0) .$$

Če je $\varphi \in \mathbb{K}$, je: $1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k = (1 + \varphi)^n =$

$$= (1 + \varphi)^i (1 + \varphi)^{n-i} = 1 + \sum_{j=0}^{i} \sum_{k=0}^{n-i} \binom{i}{j}\binom{n-i}{k} \varphi^{j+k} \qquad (\text{za } j+k \neq 0).$$

Zato je po upoštevanju (4,4) in (4,5):

$$p^n(e + \tfrac{1}{\alpha}x) = e + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p_4^k(\tfrac{1}{\alpha}x) = e + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{-k} p_4^k(x) ,$$

kar nam zaradi (*) že da (4,8). □

Z $\operatorname{diam}\mathcal{M}$ označimo premer množice $\mathcal{M}$:

$\operatorname{diam}\mathcal{M} = \sup\{\|x - y\| \; ; \; x,y \in \mathcal{M}\}$.

[4,2] TRDITEV. Naj bo $x \in \mathcal{H}$ in $n \in \mathbb{N}$.

(a) Množica $\{P^n(x)\}$ je konveksna kompaktna množica.

(b) $$\sup_P \|P^n(x)\| = \max_p \|p^n(x)\| \tag{4,9}$$

(supremum gre po vseh n-tih potencah, maksimum pa po vseh čistih n-tih potencah).

(c) $$\operatorname{diam}\{P^n(x)\} \leq 2\max_p \|p^n(x)\| \leq 2\|x\|^n . \tag{4,10}$$

Dokaz. (a) $\{P^n(x)\}$ je konveksna ogrinjača končno mnogo točk.

(b) Naj bo $\max_p \|p^n(x)\| = \|p_o^n(x)\|$.

$$\|p_o^n(x)\| \leq \sup_P \|P^n(x)\| = \sup_{\lambda_k} \|\lambda_1 p_1^n(x) + \ldots + \lambda_{s(n)} p_{s(n)}^n(x)\| \leq$$

$$\leq \sup_{\lambda_k} (\lambda_1 \|p_1^n(x)\| + \ldots + \lambda_{s(n)} \|p_{s(n)}^n(x)\|) \leq \|p_o^n(x)\| .$$

(c) $$\operatorname{diam}\{P^n(x)\} = \sup_P \| P_1^n(x) - P_2^n(x)\| \leq$$

$$\leq \sup_P (\|P_1^n(x)\| + \|P_2^n(x)\|) = 2\sup_P \|P^n(x)\| =$$

$$= 2\max_p \|p^n(x)\| \leq 2\|x\|^n \quad (\text{po } (4,3)) .$$ □

[4,3] DEFINICIJA. Spodnji spektralni polmer elementa $x \in \mathcal{H}$:

$$\varrho_s(x) = \liminf_{n \to \infty} \left[\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] . \tag{4,11}$$

Zgornji spektralni polmer elementa $x \in \mathcal{H}$:

$$\rho_z(x) = \limsup_{n\to\infty}\left[\sup_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right]. \qquad (4,12)$$

$\rho_s(x) = 0 \iff x$ je <u>šibko topološko nilpotenten</u>.

$\rho_z(x) = 0 \iff x$ je <u>krepko topološko nilpotenten</u>.

Če je algebra $\mathcal{H}$ potenčnoasociativna, dobimo: $\rho_s(x) = \rho_z(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \rho(x)$ (spektralni polmer v običajnem pomenu).

<u>[4,4] LEMA.</u> (a) $0 \leq \rho_s(x) \leq \rho_z(x) \leq \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

(b) $\rho_z(x) = 0 \Rightarrow \rho_s(x) = 0$.

(c) $\rho_s(\alpha x) = |\alpha|\rho_s(x)$, $\rho_z(\alpha x) = |\alpha|\rho_z(x)$, $\forall x \in \mathcal{H}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$. (4,13)

(d) $\rho_z(x) = \limsup_{n\to\infty}\left[\max_p \|p^n(x)\|^{1/n}\right]$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (4,14)

(e) $\exists P^n(x) = 0 \Rightarrow \rho_s(x) = 0$.

(f) $x \neq 0$ & $x^2 = x$ (neničelni idempotent) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho_s(x) = \rho_z(x) = 1$.

Če enota e eksistira, je: $\rho_s(e) = \rho_z(e) = 1$.

$\rho_s(0) = \rho_z(0) = 0$.

Vse trditve v lemi so trivialne.

<u>[4,5] TRDITEV.</u> $\rho_s(x) = \inf_n\left[\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] =$

$$= \limsup_{n\to\infty}\left[\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] \leq$$

$$\leq \inf_n\left[\sup_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] \leq \liminf_{n\to\infty}\left[\sup_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] \leq$$

$$\leq \rho_z(x), \ \forall x \in \mathcal{H}. \qquad (4,15)$$

<u>Dokaz.</u> Dovolj bo,če pokažemo enakost

$$M = \inf_n\left[\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] = \limsup_{n\to\infty}\left[\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right].$$

Brez dvoma velja: $M \leq \limsup_{n\to\infty}\left[\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right]$.

$\delta > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \inf_P \|P^m(x)\|^{1/m} < M + \delta$.

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = i_n m + j_n$, $0 \leq j_n < m$.

$\lim_{n\to\infty} j_n/n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} i_n m/n = 1$.

$$\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n} \leq \inf_P \|P^{i_n}(P^m(x))\circ P^{j_n}(x)\|^{1/n} \leq$$

$$\leq \inf_P [(\|P^m(x)\|^{1/m})^{i_n m/n} \|P^{j_n}(x)\|^{1/n}] \leq$$

$$\leq (M+\delta)^{i_n m/n} \|x\|^{j_n/n} \longrightarrow M+\delta \quad (\text{za } n \to \infty).$$

Ta račun je pravilen za $j_n \neq 0$. Za $j_n = 0$ pa faktor $P^{j_n}(x)$ kar spustimo in zaključek ostane isti.

Torej je: $\limsup_{n\to\infty} [\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}] \leq M+\delta$.

Ker pa je bil δ poljubno pozitivno število, je:

$\limsup_{n\to\infty} [\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}] \leq M$. □

[4,6] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$, vsak $k \in \mathbb{N}$ in vsako k-to potenco P^k velja:

$$\rho_s(x)^k \leq \rho_s(P^k(x)) \leq \rho_z(P^k(x)) \leq \rho_z(x)^k . \qquad (4,16)$$

Dokaz. Označimo: $P^k(x) = y$. $P^n(y) \in \{P^{nk}(x)\}$, zato je:

$\inf_P \|P^n(y)\| \geq \inf_P \|P^{nk}(x)\|$, $\sup_P \|P^n(y)\| \leq \sup_P \|P^{nk}(x)\|$.

$$\rho_s(y) = \lim_{n\to\infty} [\inf_P \|P^n(y)\|^{1/n}] \geq \lim_{n\to\infty} [\inf_P \|P^{nk}(x)\|^{k.1/(nk)}] =$$

$$= \lim_{m\to\infty} [\inf_P \|P^m(x)\|^{1/m}]^k = \rho_s(x)^k .$$

$$\rho_z(y) = \limsup_{n\to\infty} [\sup_P \|P^n(y)\|^{1/n}] \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} [\sup_P \|P^{nk}(x)\|^{k.1/(nk)}] \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} [\sup_P \|P^m(x)\|^{1/m}]^k = \rho_z(x)^k . \quad \square$$

[4,7] TRDITEV. $\rho_s(x) \leq \rho(L_x)$, $\rho_s(x) \leq \rho(R_x)$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (4,17)

Dokaz. Vzemimo, da je $x \neq 0$ in dokažimo samo prvo neenačbo, dokaz druge je analogen.

$$\rho_s(x) = \limsup_{n\to\infty} [\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}] \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \|x\circ(x\circ(x\circ\ldots\circ(x\circ(x\circ x^2))\ldots))\|^{1/n} =$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \|L_x^{n-1}x\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} [\|L_x^{n-1}\|^{1/(n-1)}]^{(n-1)/n} \|x\|^{1/n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} [\rho(L_x)]^{(n-1)/n} = \rho(L_x) . \quad \square$$

Če je $x \in \mathcal{H}$, naj bo $\mathcal{A}(x)$ najmanjša zaprta podalgebra, ki vsebuje x. Seveda je tudi $\mathcal{A}(x)$ sama zase Banachova algebra. Brez težav preverimo, da je $\mathcal{A}(x)$ zaprtje podalgebre, ki jo generira x. Če je podalgebra, ki jo generira $x \in \mathcal{H}$, asociativna, je, kot je znano, $\mathcal{A}(x)$ asociativna in komutativna.

[4,8] TRDITEV. Naj bo $x \in \mathcal{H}$. Naslednji izjavi sta ekvivalentni:

(a) $\rho_s(x) = \|x\|$;

(b) $\|P^n(x)\| = \|x\|^n$ za vsako potenco P^n (in za vsak n).

Če je za tak x in za isto normo $\mathcal{A}(x)$ enakomerno konveksen prostor, je algebra $\mathcal{A}(x)$ asociativna in komutativna.

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b). $\|P^n(x)\| \leqq \|x\|^n = \rho_s(x)^n \leqq \rho_s(P^n(x)) \leqq$
$\leqq \|P^n(x)\|$.

(b) $\Longrightarrow$ (a). $\rho_s(x) = \lim_{n \to \infty} [\inf_P \|P^n(x)\|^{1/n}] = \|x\|$.

Pa naj velja (b) in $\mathcal{A}(x)$ naj bo enakomerno konveksen prostor: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$\| \|x\|^{-n} P_1^n(x) - \|x\|^{-n} P_2^n(x) \| \geqq \varepsilon \Longrightarrow \| \frac{1}{2}\|x\|^{-n} P_1^n(x) + \frac{1}{2}\|x\|^{-n} P_2^n(x) \| =$
$= 1 \leqq 1 - \delta$.

Toda ker zaključek implikacije ni pravilen, tudi ne velja predpostavka, zato:

$\| \|x\|^{-n} P_1^n(x) - \|x\|^{-n} P_2^n(x) \| < \varepsilon$, oziroma

$\|P_1^n(x) - P_2^n(x)\| < \varepsilon \|x\|^n$, $\forall \varepsilon > 0$.

To pa je že dovolj za enakost obeh potenc in za asociativnost algebre z generatorjem x. $\square$

Za poznejšo rabo si oglejmo odvode potenc. Začnimo s primerom $P^3(x) = x^2 \circ x$.

$\lim_{u \to 0} \frac{1}{\|u\|} \|(x + u)^2 \circ (x + u) - x^2 \circ x - [(u \circ x) \circ x + (x \circ u) \circ x +$
$+ x^2 \circ u] \| = 0$.

Zato: $[DP^3(x)](u) = (u \circ x) \circ x + (x \circ u) \circ x + x^2 \circ u$.

$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \|DP^3(x + v) - DP^3(x) - [(\cdot \circ x) \circ v + (\cdot \circ v) \circ x + (x \circ \cdot) \circ v +$
$+ (v \circ \cdot) \circ x + (x \circ v) \circ \cdot] \| = 0$.

Sledi: $[D(DP^3(x))](u,v) = [D^2P^3(x)](u,v) = (u \circ x) \circ v +$
$+ (u \circ v) \circ x + (x \circ u) \circ v + (v \circ u) \circ x + (x \circ v) \circ u + (v \circ x) \circ u$.
Analogno naprej izračunamo:

$$[D^3P^3(x)](u,v,w) = (u \circ v) \circ w + (u \circ w) \circ v + (v \circ u) \circ w + (v \circ w) \circ u +$$
$$+ (w \circ u) \circ v + (w \circ v) \circ u \ ;$$

$D^4P^3(x) = 0$, itd.

Mislimo si sedaj potenco $P^n(x)$ kot multilinearen operator z n (enakimi!) argumenti: $P^n(x) = A(x,x,\ldots,x)$. Potem brez težav preverimo naslednje identitete:

$$[DP^n(x)](u) = \sum_{i=1}^{n} A(x,x,\ldots,u,\ldots,x) \qquad (4,18)$$

(v vsakem členu vsote je u na i-tem mestu);

$$[D^2P^n(x)](u,v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1,\neq i}^{n} A(x,\ldots,u,\ldots,v,\ldots,x) \qquad (4,19)$$

(v vsakem členu vsote je u na i-tem mestu, v pa na j-tem mestu), in tako dalje do

$$[D^nP^n(x)](u_1,u_2,\ldots,u_n) = \sum A(u_{i_1},u_{i_2},\ldots,u_{i_n}) \qquad (4,20)$$

(vsota gre po vseh permutacijah u-jev).

$$D^{n+k}P^n(x) = 0 \quad (\text{za} \ \ k = 1,2,3,\ldots) \ . \qquad (4,21)$$

Odvod $[D^kP^n(x)](\ldots)$ ima v splošnem $n!/(n-k)!$ členov.

Nekaj posebnih primerov! Označujmo: $x^{(k)} = (x,x,\ldots,x)$ (k-terica x-ov), $x^{(1)} = (x)$.

$$D^kP^n(0) = 0 \quad (\text{za} \ \ k \neq n) \ . \qquad (4,22)$$

$$[D^nP^n(x)]u^{(n)} = n!P^n(u) \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ . \qquad (4,23)$$

$$P^n(x + y) = P^n(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}[D^kP^n(x)]y^{(k)} \qquad (4,24)$$

(to je kar Taylorjeva vrsta za $P^n(x)$).
Če eksistira enota e v $\mathcal{H}$, je:

$$[D^kP^n(e)]u^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}P_1^k(u) \ ,$$

kjer so $P_1^k(u)$ neke določene potence, $P_1^n(u) = P^n(u)$.

S pomočjo (4,24) izračunamo $P^n(u + e)$ in $P^n(e + u)$ ter s primerjanjem potenc dobimo (za $k \neq 0,n$):

$$[D^kP^n(e)]u^{(k)} = \frac{k!}{(n-k)!}[D^{n-k}P^n(u)]e^{(n-k)} \ . \qquad (4,25)$$

To je pravzaprav druga oblika trditve (4,8).

Formule (4,22) - (4,25) se delno posplošijo z dodatno definicijo D^o = identiteta. Še elegantnejše postanejo trditve, če dodatno definiramo $P^o(x) = e$, $\forall x \in \mathcal{H}$, le da je ta enačba nekoliko sporna.

Domenimo se za dve oznaki, ki bosta ponekod precej skrajšali pisanje:

$P_L^n(x) = L_x^{n-1}x = x\circ(x\circ(x\circ\ldots\circ(x\circ(x\circ x^2))\ldots))$,

$P_R^n(x) = R_x^{n-1}x = ((\ldots((x^2\circ x)\circ x)\circ\ldots\circ x)\circ x)\circ x$,

v posebnem: $P_L^1(x) = P_R^1(x) = x$, $P_L^2(x) = P_R^2(x) = x^2$.

Do konca razdelka predpostavimo eksistenco enote e v $\mathcal{H}$. **!**

Levi inverz elementa $x \in \mathcal{H}$ je tak element x_ℓ^{-1}, da je $x_\ell^{-1}\circ x = e$. Še desni inverz: $x\circ x_r^{-1} = e$.

[4,9] TRDITEV. Naj bo $\|x\| < 1$ v $\mathcal{H}$.

$$(e + x)_\ell^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n P_R^n(x) , \tag{4,26}$$

$$(e + x)_r^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n P_L^n(x) . \tag{4,27}$$

Element $e + x$ nima drugih levih in desnih inverzov.

$$\max\left\{\frac{\|e\|}{\|e\| + \|x\|} ; \|e\| - \frac{\|x\|}{1 - \|x\|}\right\} \leqq \|(e + x)_{\ell,r}^{-1}\| \leqq$$

$$\leqq \|e\| + \frac{\|x\|}{1 - \|x\|} . \tag{4,28}$$

Če je $\|e\| = 1$, je:

$$(1 + \|x\|)^{-1} \leqq \|(e + x)_{\ell,r}^{-1}\| \leqq (1 - \|x\|)^{-1} \tag{4,29}$$

Dokaz. Da sta to res inveza, dokažemo kar z množenjem. Preveriti je treba le konvergenco:

$\|e - x + x^2 - \ldots\| \lesseqgtr \|e\| \pm (\|x\| + \|x^2\| + \ldots) \lesseqgtr$

$\lesseqgtr \|e\| \pm (\|x\| + \|x\|^2 + \ldots) = \|e\| \pm \|x\|/(1 - \|x\|)$.

Ker pa je $\|e\| \leqq \|e + x\|.\|(e + x)_{\ell,r}^{-1}\|$ oziroma

$\|(e + x)_{\ell,r}^{-1}\| \geqq \|e\|/\|e + x\| \geqq \|e\|/(\|e\| + \|x\|)$,

velja tudi neenačba (4,28). (4,29) sledi od tod.

Vzemimo še, da sta dva leva inverza:

$y\circ(e + x) = z\circ(e + x) = e \Longrightarrow (y - z)\circ(e + x) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow y - z = -(y - z)\circ x \Longrightarrow \|y - z\| \leqq \|y - z\|.\|x\|$.
To pa je zaradi $\|x\| < 1$ mogoče le pri $y - z = 0$. □

Vrsti (4,26) in (4,27) sicer konvergirata na širšem območju. Ker je:

$$(e + x)_{\ell}^{-1} = e - (I + R_x)^{-1}x , \qquad (4,30)$$

$$(e + x)_{r}^{-1} = e - (I + L_x)^{-1}x , \qquad (4,31)$$

sta zadostna pogoja že $\varrho(R_x) < 1$ oziroma $\varrho(L_x) < 1$.
Še en zadostni pogoj lahko dobimo:

$$\limsup_{n\to\infty}\|(-1)^n P^n_{L,R}(x)\|^{1/n} \leqq \limsup_{n\to\infty}\left[\sup_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] = \varrho_z(x) .$$

Če je torej $\varrho_z(x) < 1$, sta vrsti konvergentni.

[4,10] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertova algebra s skalarnim produktom $\langle .,. \rangle$ in ustrezno normo $\|.\|$, ki naj bo algebrska. Če je za $x \in \mathcal{H}$: $|\langle e,x\rangle| > \|x\|\sqrt{\|e\|^2 - 1}$, eksistirata x_{ℓ}^{-1} in x_{r}^{-1} .

Dokaz. (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $\zeta(\alpha) = \|e - \alpha x\|^2 = \|e\|^2 - 2\alpha\langle e,x\rangle +$
$+ \alpha^2\|x\|^2$. $\min_{\alpha} \zeta(\alpha) = \|e\| - \langle e,x\rangle^2/\|x\|^2$ za
$\alpha = \langle e,x\rangle/\|x\|^2$.

(b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$. $\zeta(\alpha) = \|e - \alpha x\|^2 =$
$= \|e\|^2 - |\langle e,x\rangle|^2/\|x\|^2 + \|x\|^2(\alpha_1 - \mathrm{Re}\langle e,x\rangle/\|x\|^2)^2 +$
$+ \|x\|^2(\alpha_2 - \mathrm{Im}\langle e,x\rangle/\|x\|^2)^2$.
$\zeta(\alpha)$ doseže minimum, ko sta zadnja dva člena enaka 0, to je za $\alpha = \langle e,x\rangle/\|x\|^2$.

Torej je v splošnem:

$$\min_{\alpha}\|e - \alpha x\|^2 = \|e - \frac{\langle e,x\rangle}{\|x\|^2}x\|^2 = \|e\|^2 - |\langle e,x\rangle|^2/\|x\|^2 . \qquad (4,32)$$

$|\langle e,x\rangle| > \|x\|\sqrt{\|e\|^2 - 1} \Longrightarrow \|e\|^2 - |\langle e,x\rangle|^2/\|x\|^2 < 1 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}: \|e - \alpha x\| < 1 \Longrightarrow \exists (e - (e - \alpha x))_{\ell,r}^{-1} =$
$= (\alpha x)_{\ell,r}^{-1} \Rightarrow \exists x_{\ell,r}^{-1}$. □

5. EKSPONENTNE FUNKCIJE

Glede na to, da potenc nismo definirali enolično, je tudi eksponentnih funkcij zelo veliko; kljub temu pa se izkaže, da je njihovih slik pri istem argumentu le za kompaktno množico. Prvih nekaj trditev v tem razdelku opiše lastnosti eksponentnih funkcij, ki seveda niso prida bogate, razen pri funkcijah, ki sta sestavljeni samo iz potenc tipa P_L^n in P_R^n. Spodnja in zgornja ogrinjača norm eksponentnih funkcij sta dve skalarni funkciji E in F, ki podedujeta skoraj vse prvotne lastnosti, celo zveznost. Na koncu razdelka definiramo še logaritem in v okolici enote zagotovimo njegovo eksistenco z aplikacijo izreka o implicitnih funkcijah.

V tem razdelku naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra z enoto e, z multiplikacijo . in z algebrsko normo $\|.\|$ nad $\mathbb{K}$. !

Definirajmo eksponentno funkcijo nad :

$$\mathrm{Exp}: x \longrightarrow \mathrm{Exp}(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}P^n(x) , \qquad (5,1)$$

kjer je P^n ; $n = 1,2,3,\ldots$ poljubno zaporedje potenc. Razumljivo je tedaj, da ima algebra, ki ni potenčnoasociativna, lahko še zelo veliko različnih eksponentnih funkcij.

Posebej označimo: $$\mathrm{Exp}_L(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}P_L^n(x) \qquad (5,2)$$

in analogno še $\mathrm{Exp}_R(x)$.

[5,1] TRDITEV. Vsaka eksponentna vrsta $\mathrm{Exp}(x)$ konvergira za vsak $x \in \mathcal{H}$ in njena vrednost je zvezna funkcija argumenta x. Preslikava $\alpha \longrightarrow \mathrm{Exp}(\alpha x)$ iz $\mathbb{K}$ v $\mathcal{H}$ je za vsako eksponentno funkcijo in vsak $x \in \mathcal{H}$ cela analitična funkcija. Velja še:

$$\|\mathrm{Exp}(x)\| \lesseqgtr \|e\| \pm (\exp\|x\| - 1) , \quad \forall x \in \mathcal{H} ; \qquad (5,3)$$

$$\mathrm{Exp}(\alpha e) = \exp\alpha . e , \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} . \qquad (5,4)$$

Če sta Exp_1 in Exp_2 poljubni eksponentni funkciji in $\alpha_1, \alpha_2 \geqq 0$, eksistira natanko določena eksponentna funkcija Exp, da je:

$$\alpha_1\mathrm{Exp}_1(x) + \alpha_2\mathrm{Exp}_2(x) = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathrm{Exp}(x) , \quad \forall x \in \mathcal{H} . \qquad (5,5)$$

Dokaz. $\|\mathrm{Exp}(x)\| \lesseqgtr \|e\| \pm \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}P^n(x)\right\| \lesseqgtr \|e\| \pm \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\|x\|^n$,

iz česar sledi konvergenca vrste in (5,3).

$$\|\mathrm{Exp}(x+y)-\mathrm{Exp}(x)\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[P^n(x+y)-P^n(x)\right]\right\| \leqq$$

$$\leqq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left[D^kP^n(x)\right]y^{(k)}\right\| \quad \text{(po (4,24))}.$$

$\left\|\left[D^kP^n(x)\right]y^{(k)}\right\| \leqq \frac{n!}{(n-k)!}\|x\|^{n-k}\|y\|^k$, zato:

$$\|\mathrm{Exp}(x+y)-\mathrm{Exp}(x)\| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\|x\|^{n-k}\|y\|^k}{k!(n-k)!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\|x\|^i}{i!}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|y\|^j}{j!} = \exp\|x\|.(\exp\|y\|-1) .$$

To pa že zadošča za zveznost.

Ostale trditve so bolj ali manj trivialne. Tako recimo sledi (5,5) neposredno iz (4,5). □

[5,2] TRDITEV. Naj bo Exp neka eksponentna funkcija in $\alpha \geqq 0$. Tedaj eksistira natanko določena eksponentna funkcija Exp_α , da je za vsak $x \in \mathcal{H}$:

$$\mathrm{Exp}(\alpha e + x) = \exp\alpha.\mathrm{Exp}_\alpha(x) , \qquad (5,6)$$

$$\mathrm{Exp}(x) = \exp\alpha.\mathrm{Exp}_\alpha(-\alpha e + x) . \qquad (5,7)$$

Dokaz. (5,7) dobimo, če v (5,6) nadomestimo x z $x-\alpha e$. Dokažimo zato le (5,6)! Uporabimo (4,8), pri čemer se zavedajmo, da tipi potenc P_l^k zaradi (4,24) niso v ničemer odvisni od x in α.

$$\mathrm{Exp}(\alpha e + x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\alpha^n e + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha^{n-k}}{k!(n-k)!}P_n^k(x) =$$

$$= \exp\alpha.e + \frac{\alpha^0}{0!}\left[\frac{1}{1!}P_1^1(x) + \frac{1}{2!}P_2^2(x) + \frac{1}{3!}P_3^3(x) + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{\alpha^1}{1!}\left[\frac{1}{1!}P_2^1(x) + \frac{1}{2!}P_3^2(x) + \frac{1}{3!}P_4^3(x) + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{2!}\left[\frac{1}{1!}P_3^1(x) + \frac{1}{2!}P_4^2(x) + \frac{1}{3!}P_5^3(x) + \ldots\right] + \ldots =$$

$$= \exp\alpha.e + \frac{\alpha^0}{0!}\left[\mathrm{Exp}_0(x) - e\right] + \frac{\alpha^1}{1!}\left[\mathrm{Exp}_1(x) - e\right] + \ldots$$

Torej eksistira od α in x neodvisno zaporedje eksponentnih funkcij Exp_n , da je:

$$\mathrm{Exp}(\alpha e + x) = \sum_{n=0}\frac{\alpha^n}{n!}\mathrm{Exp}_n(x) . \qquad (5,8)$$

Od tod pa takoj sledi (5,6) iz (5,5) oziroma iz (4,5). □

[5,3] TRDITEV. Bodita Exp_1 in Exp_2 dve eksponentni funkciji in $\lambda \geq 0$. Tedaj eksistira točno določena eksponentna funkcija Exp_λ, da je za vsak $x \in \mathcal{H}$ in $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, za katera je $\alpha/\beta = \lambda$:

$$\mathrm{Exp}_1(\alpha x).\mathrm{Exp}_2(\beta x) = \mathrm{Exp}_\lambda((\alpha+\beta)x) . \qquad (5,9)$$

Dokaz. $\mathrm{Exp}_1(\alpha x).\mathrm{Exp}_2(\beta x) = \left[e + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha^m}{m!}P_1^m(x)\right].\left[e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}P_2^n(x)\right] =$

$$= e + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha^m}{m!}P_1^m(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}P_2^n(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\alpha^m}{m!}P_1^m(x).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}P_2^n(x) .$$

Izračunajmo vsoto $Q_k(x)$ členov s k-timi potencami:

$$Q_k(x) = \frac{\alpha^k}{k!}P_1^k(x) + \frac{\beta^k}{k!}P_2^k(x) + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{\alpha^i}{i!}\cdot\frac{\beta^{k-i}}{(k-i)!}P_1^i(x).P_2^{k-i}(x) =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^k}{k!}\left[\binom{k}{0}\frac{\alpha^k\beta^0}{(\alpha+\beta)^k}P_1^k(x) + \binom{k}{1}\frac{\alpha^{k-1}\beta^1}{(\alpha+\beta)^k}P_1^{k-1}(x).P_2^1(x) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \binom{k}{k-1}\frac{\alpha^1\beta^{k-1}}{(\alpha+\beta)^k}P_1^1(x).P_1^{k-1}(x) + \binom{k}{k}\frac{\alpha^0\beta^k}{(\alpha+\beta)^k}P_2^k(x)\right] .$$

Če je $\alpha/\beta = \lambda$, je $\frac{\alpha^i\beta^{k-i}}{(\alpha+\beta)^k} = \lambda^i/(\lambda+1)^k$, in izraz v oglatem oklepaju je konveksna kombinacija k-tih potenc (odvisna le od λ) ter s tem tudi sam k-ta potenca $P_\lambda^k(x)$; zato:

$Q_k(x) = \frac{(\alpha+\beta)^k}{k!}P_\lambda^k(x)$, in trditev je dokazana. □

[5,4] KOROLAR. Naj bo Exp neka eksponentna funkcija in P^n neka n-ta potenca. Tedaj eksistira natanko določena eksponentna funkcija Exp_n ; da je za vsak $x \in \mathcal{H}$:

$$P^n(\mathrm{Exp}(x)) = \mathrm{Exp}_n(nx) . \qquad (5,10)$$

[5,5] TRDITEV. Naj bo $\|x\| \leq 0{\cdot}824525$. Tedaj je za vsako eksponentno funkcijo Exp : $\|\mathrm{Exp}(x).\mathrm{Exp}(-x)\| > 0$.

Dokaz. $\mathrm{Exp}(x).\mathrm{Exp}(-x) = e + Q_3(x) + Q_4(x) + \ldots$

$$Q_k(x) = \frac{1}{k!}P^k(x) + \frac{(-1)^k}{k!}P^k(x) + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{(-1)^k}{n!(k-n)!}P^n(x).P^{k-n}(x) .$$

Če je k sodo število, je:

$$\|Q_k(x)\| \leq \frac{2}{k!}\|x\|^k + \sum_{n=1}^{k-1}\frac{\|x\|^k}{n!(k-n)!} = \frac{2^k\|x\|^k}{k!} .$$

Če je k liho število, je:

$$\|Q_k(x)\| \leq \sum_{n=1}^{k-1} \frac{\|x\|^k}{n!(k-n)!} = \frac{(2^k - 2)\|x\|^k}{k!} .$$

$$\|Q_3(x) + Q_4(x) + \ldots\| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2^k\|x\|^k}{k!} - 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|x\|^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \exp(2\|x\|) + \exp(-\|x\|) - \exp\|x\| - 2\|x\|^2 - 1 = \varepsilon(\|x\|) .$$

$$\|\mathrm{Exp}(x).\mathrm{Exp}(-x)\| \geq \|e\| - \varepsilon(\|x\|) .$$

To pa je tudi v najslabšem primeru, ko je $\|e\| = 1$, še vedno pozitivno. □

[5,6] TRDITEV. $\mathrm{Exp}_L(x) = \mathrm{Exp}(L_x)e$, (5,11)

$\mathrm{Exp}_R(x) = \mathrm{Exp}(R_x)e$; (5,12)

$\mathrm{Exp}_L(x) \neq 0$ in $\mathrm{Exp}_R(x) \neq 0$ za vsak $x \in \mathcal{H}$.

Dokaz. (5,11) in (5,12) je trivialno preveriti. Pa naj bo za nek x: $0 = \mathrm{Exp}_L(x) = \mathrm{Exp}(L_x)e$.

Pomnožimo na levi strani z $\mathrm{Exp}(-L_x)$!

$0 = \mathrm{Exp}(-L_x)\mathrm{Exp}(L_x)e = e$, protislovje. □

[5,7] TRDITEV. Bodi $a(x,n)$ funkcija iz $\mathcal{H} \times \mathbb{N}$ v $\mathcal{H}$, za katero je za vsak $x \in \mathcal{H}$: $\lim_{n\to\infty} a(x,n) = x$.

Tedaj za vsak $x \in \mathcal{H}$ eksistirata limiti:

$$\lim_{n\to\infty} P_L^n(e + \tfrac{1}{n}a(x,n)) = \mathrm{Exp}_L(x) , \qquad (5,13)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_R^n(e + \tfrac{1}{n}a(x,n)) = \mathrm{Exp}_R(x) . \qquad (5,14)$$

Dokaz. Dokažimo le (5,13), dokaz (5,14) bi potekal dobesedno enako. Najprej z indukcijo dokažimo, da je za $n \in \mathbb{N}$:

$$P_L^n(e + y) = e + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} P_L^k(y)$$

(to je poseben primer enačbe (4,8)!).

Bodita n in k naravni števili, $n > k$. k-ta potenca v izrazu $P_L^n(e + \frac{1}{n}a(x,n))$ se tedaj glasi takole:

$$\frac{1}{n^k}\binom{n}{k} P_L^k(a(x,n)) .$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = 1/k! \; ; \quad \lim_{n\to\infty} P_L^k(a(x,n)) = P_L^k(x) . \qquad (*)$$

Ker pa je $\|P_L^n(e + \frac{1}{n}a(x,n))\| \leq \|e\| + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\|a(x,n)\|^n \leq$

$\leqq \|e\| + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\|a(x,n)\|^n \longrightarrow \|e\| + \exp\|x\|$ (za $n \to \infty$) ,
nastajajoča vrsta zagotovo konvergira in sicer je po obeh limitah (*) sodeč ravno enaka $\mathrm{Exp}_L(x)$. □

[5,8] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ in $\alpha \in \mathbb{K}$ je:

$$\mathrm{Exp}_L(\alpha e + x) = \exp\alpha . \mathrm{Exp}_L(x) , \tag{5,15}$$

$$\mathrm{Exp}_R(\alpha e' + x) = \exp\alpha . \mathrm{Exp}_R(x) , \tag{5,16}$$

Dokaz. Dokažimo le (5,15), drugo enačbo bi dokazali po istem postopku.

$P_L^n(e + \frac{1}{n}(\alpha e + x)) = (1 + \frac{\alpha}{n})^n P_L^n(e + \frac{1}{n}\frac{1}{1 + \alpha/n}x)$.

$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\alpha}{n})^n = \exp\alpha$.

Če je $a(x,n) = \frac{1}{1 + \alpha/n}x$, je $\lim_{n\to\infty} a(x,n) = x$.

Uporabimo trditev [5,7], pa je dokaz končan. □

Naj bo $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ neprazna množica. Če je Exp neka eksponentna funkcija, definirajmo:

$\mathrm{Exp}(\mathcal{M}) = \{\mathrm{Exp}(x) \; ; \; x \in \mathcal{M}\}$.

$\mathrm{EXP}(\mathcal{M}) = \bigcup_{\mathrm{Exp}} \mathrm{Exp}(\mathcal{M})$ (unija gre po vseh eksponentnih funkcijah). Domenimo se za poenostavitev: $\mathrm{EXP}(\{x\}) = \mathrm{EXP}(x)$.

Očitno je: $\mathrm{Exp}(\{\alpha e\}) = \mathrm{EXP}(\alpha e) = \{\exp\alpha . e\}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Premer množice $\mathrm{EXP}(x)$ za $x \in \mathcal{H}$:

$$\mathrm{diam}\,\mathrm{EXP}(x) \leqq 2\exp\|x\| - 2 - 2\|x\| - \|x\|^2 . \tag{5,17}$$

[5,9] TRDITEV. Če je $\mathcal{M}$ s potmi povezana množica, sta taki tudi $\mathrm{Exp}(\mathcal{M})$ in $\mathrm{EXP}(\mathcal{M})$.

Dokaz. $\mathrm{Exp}(\mathcal{M})$ je z zvezno funkcijo preslikana množica $\mathcal{M}$, torej je tudi sama s potmi povezana.

Pa bodita $x,y \in \mathcal{M}$ in s tem $\mathrm{Exp}_1(x)$ in $\mathrm{Exp}_2(x)$ dva elementa iz $\mathrm{EXP}(\mathcal{M})$. Ker je $\mathcal{M}$ s potmi povezana množica, eksistira (zvezna) pot $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}$, $f(0) = x$, $f(1) = y$. Tedaj je

$$g(\lambda) = \begin{cases} \mathrm{Exp}_1(f(2\lambda)) & \text{za } \lambda \in [0,1/2] , \\ (2 - 2\lambda)\mathrm{Exp}_1(y) + (2\lambda - 1)\mathrm{Exp}_2(y) & \text{za } \lambda \in [1/2,1] \end{cases}$$

pot od $\mathrm{Exp}_1(x)$ do $\mathrm{Exp}_2(y)$ v $\mathrm{EXP}(\mathcal{M})$. Pri tem smo upoštevali pravilo (5,5). □

[5,10] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ je $\mathrm{EXP}(x)$ konveksna kompaktna

množica.

Dokaz. Zaradi (5,5) je $EXP(x)$ konveksna množica. Da pa je tudi kompaktna, bomo dokazali tako, da bomo iz poljubnega zaporedja elementov iz te množice izbrali konvergentno podzaporedje z limito v $EXP(x)$.

Naj bo $Exp_1(x)$, $Exp_2(x)$, $Exp_3(x)$, ... neko zaporedje. Ustrezno zaporedje tretjih potenc ima po trditvi [4,2],(a) konvergentno podzaporedje; naj bo $Exp_{1,3}(x)$, $Exp_{2,3}(x)$, $Exp_{3,3}(x)$, ... odgovarjajoče podzaporedje eksponentnih funkcij in z njim sestavimo novo zaporedje: $Exp_1(x)$, $Exp_{2,3}(x)$, $Exp_{3,3}(x)$, ... Iz tega zaporedja spet izberemo tako podzaporedje $Exp_{1,4}(x)$, $Exp_{2,4}(x)$, $Exp_{3,4}(x)$, ... , da bodo v njem konvergirale četrte potence, in znova tvorimo novo zaporedje $Exp_1(x)$, $Exp_{2,3}(x)$, $Exp_{3,4}(x)$, $Exp_{4,4}(x)$, ... Tako nadaljujemo preko vseh meja in končno dobimo naslednje podzaporedje prvotnega zaporedja: $Exp_1(x)$, $Exp_{2,3}(x)$, $Exp_{3,4}(x)$, $Exp_{4,5}(x)$, $Exp_{5,6}(x)$, ..., ki ga ponovno označimo takole:

$Exp_{o1}(x)$, $Exp_{o2}(x)$, $Exp_{o3}(x)$, ...

$$Exp_{om}(x) = e + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}P_m^3(x) + \frac{1}{4!}P_m^4(x) + \dots$$

V tem zaporedju konvergirajo n-te potence k n-ti potenci $P_o^n(x)$. Vse te potence pa spet tvorijo novo eksponentno funkcijo

$$Exp_o(x) = e + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}P_o^3(x) + \frac{1}{4!}P_o^4(x) + \dots$$

Naj bo $\varepsilon > 0$.

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\|P_m^k(x) - P_o^k(x)\| \leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\|x\|^k}{k!} \leq \frac{2\|x\|^{n+1}}{(n+1)!} \exp\|x\|$$

(po oceni ostanka Taylorjeve vrste). Od nekega $n = N$ dalje je ta izraz manjši od $\varepsilon/2$. Izberimo sedaj tako velik M, da je: $\|P_m^k(x) - P_o^k(x)\| < \varepsilon$, $\forall m > M$, $k = 3,4,\dots,N$.

$$\|Exp_{om}(x) - Exp_o(x)\| \leq \sum_{k=3}^{N} \frac{1}{k!}\|P_m^k(x) - P_o^k(x)\| +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\|P_m^k(x) - P_o^k(x)\| < \sum_{k=3}^{N} \varepsilon/k! + \varepsilon/2 < \varepsilon , \ \forall m > M .$$

Torej je $\lim_{m\to\infty} Exp_{om}(x) = Exp_o(x)$ in izrek je dokazan. $\square$

Definirajmo sedaj še dve funkciji:

$E(x) = \min\{\|y\| \ ; \ y \in EXP(x)\}$,

$F(x) = \max\{\|y\| \ ; \ y \in EXP(x)\}$.

Obe funkciji sta povsod definirani in zaradi (5,4) velja za vsak $x \in \mathcal{H}$ in za vsako eksponentno funkcijo Exp :

$$\max\{0 \ , \ \|e\| + 1 - \exp\|x\|\} \leq E(x) \leq \|\mathrm{Exp}(x)\| \leq F(x) \leq$$
$$\leq \|e\| - 1 + \exp\|x\| \ . \tag{5,18}$$

Poleg tega je seveda:

$$0 \leq F(x) - E(x) \leq \mathrm{diam}\, EXP(x) \ . \tag{5,19}$$
$$E(\alpha e) = F(\alpha e) = \|e\|\exp(\mathrm{Re}\,\alpha) \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{K} \ . \tag{5,20}$$

[5,11] TRDITEV. (a) $F(x) > 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

(b) Naj bo $z \in \mathcal{H}$ tak element, da je

$\min\limits_{\alpha \geq 0} \| z - \alpha e\| \leq 0{\cdot}824525$.

Tedaj je $E(x) > 0$.

Dokaz. (a) sledi iz trditve [5,6].

(b). Uporabimo trditev [5,5]: če je za nek $\alpha \geq 0$ $\|z - \alpha e\| \leq 0{\cdot}824525$, je za vsako eksponentno funkcijo Exp $0 < \|\mathrm{Exp}(z - \alpha e).\mathrm{Exp}(\alpha e - z)\|$, in zato $\|\mathrm{Exp}(z - \alpha e)\| \neq 0$. To velja tudi za funkcijo Exp_α iz (5,7). Tedaj pa je:

$\|\mathrm{Exp}(z)\| = \exp(\mathrm{Re}\,\alpha)\|\mathrm{Exp}_\alpha(z - \alpha e)\| > 0$. $\square$

[5,12] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ in vsak $\alpha \geq 0$ je:

$$E(\alpha e + x) \geq \exp\alpha\, E(x) \ , \tag{5,21}$$
$$E(-\alpha e + x) \leq \exp(-\alpha)E(x) \ , \tag{5,22}$$
$$F(\alpha e + x) \leq \exp\alpha\, F(x) \ , \tag{5,23}$$
$$F(-\alpha e + x) \geq \exp(-\alpha)F(x) \ . \tag{5,24}$$

Dokaz. $E(\alpha e + x) = \|\mathrm{Exp}(\alpha e + x)\|$ za neko določeno eksponentno funkcijo Exp (zaradi kompaktnosti množice EXP(x)). Iz (5,6) sledi (5,21): $E(\alpha e + x) = \exp\alpha \|\mathrm{Exp}_\alpha(x)\| \geq$ $\geq \exp\alpha\, E(x)$.

$E(\alpha e + (-\alpha e + x)) \geq \exp\alpha\, E(-\alpha e + x)$, oziroma $E(-\alpha e + x) \leq \exp(-\alpha)E(x)$, kar da (5,22) .

(5,23) in (5,24) dokažemo analogno. $\square$

[5,13] TRDITEV. (a) Naj bo $\lambda \geq 0$. Tedaj je za vsak $x \in \mathcal{H}$ in $\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\alpha/\beta = \lambda$:

$$E((\alpha + \beta)x) \leq E(\alpha x)E(\beta x) \ . \tag{5,25}$$

(b) Za vsak $x \in \mathcal{H}$ in vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$E(nx) \leqq E(x)^n \,. \tag{5,26}$$

Dokaz. (a) Uporabimo trditev [5,3]:

$E((\alpha + \beta)x) \leqq \|Exp_\lambda((\alpha + \beta)x)\| \leqq \|Exp_1(\alpha x)\| . \|Exp_2(\beta x)\|$.

Funkciji Exp_1 in Exp_2 sta poljubni, torej smemo predpostaviti, da sta po normi minimalni. To pa nam že da (5,25). Točka (b) je neposredna posledica točke (a). □

[5,14] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja:

$$\rho_s(Exp(x)) \geqq \limsup_{n \to \infty} E(nx)^{1/n} \,, \tag{5,27}$$

$$\rho_z(Exp(x)) \leqq \limsup_{n \to \infty} F(nx)^{1/n} \tag{5,28}$$

Dokaz. Uporabimo (4,15) in (5,10):

$\rho_s(Exp(x)) = \limsup_{n \to \infty} \left[\inf_P \|P^n(Exp(x))\|^{1/n}\right] =$

$= \limsup_{n \to \infty} \left[\inf_P \|Exp_n(nx)\|^{1/n}\right] \geqq \limsup_{n \to \infty} E(nx)^{1/n}$.

Drugo neenačbo dokažemo še lažje. □

[5,15] TRDITEV. Funkciji E in F sta zvezni.

Dokaz. Naj bo $x \in \mathcal{H}$ fiksen element. Zaradi kompaktnosti množice EXP(x) eksistira taka eksponentna funkcija Exp, da je $E(x) = \|Exp(x)\|$. Prav tako velja za vsak $y \in \mathcal{H}$:

$E(x + y) \leqq \|Exp(x + y)\|$.

$E(x + y) - E(x) \leqq \|Exp(x + y)\| - \|Exp(x)\| \leqq$

$\leqq \|Exp(x + y) - Exp(x)\| \leqq \exp\|x\|(\exp\|y\| - 1)$, po dokazu trditve [5,1]. Torej je za vsak par $x,y \in \mathcal{H}$:

$E(x + y) - E(x) \leqq \exp\|x\|(\exp\|y\| - 1)$.

$E(x) - E(x + y) = E((x + y) + (-y)) - E(x + y) \leqq$

$\leqq \exp\|x + y\|(\exp\|-y\| - 1) \leqq \exp\|x\|\exp\|y\|(\exp\|y\| - 1)$.

Torej smemo zapisati:

$|E(x + y) - E(x)| \leqq \exp\|x\|\exp\|y\|(\exp\|y\| - 1)$,

kar že kaže na zveznost funkcije E.

Spet naj bo x fiksen element. Tedaj eksistira taka eksponentna funkcija Exp, da je: $F(x) = \|Exp(x)\|$ in

$F(x + y) \geqq \|Exp(x + y)\|$.

$F(x) - F(x + y) \leqq \|Exp(x)\| - \|Exp(x + y)\| \leqq$

$\leqq \|Exp(x + y) - Exp(x)\| \leqq \exp\|x\|(\exp\|y\| - 1)$.

Za vsak par $x,y \in \mathcal{H}$ je torej:

$F(x) - F(x + y) \leqq \exp\|x\|(\exp\|y\| - 1)$.

$F(x + y) - F(x) = F(x + y) - F((x + y) + (-y)) \leq$
$\leq \exp\|x + y\|(\exp\|-y\| - 1) \leq \exp\|x\|\exp\|y\|(\exp\|y\| - 1)$.
Torej je: $|F(x + y) - F(x)| \leq \exp\|x\|\exp\|y\|(\exp\|y\| - 1)$, kar pa je že dovolj za zveznost. □

Naj bo $\mathrm{Exp}(x) = e + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} P^n(x)$ poljubna eksponentna funkcija. Oglejmo si vrsto $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!} D^kP^n(x)$, $k = 0,1,2,\ldots$!

Dokažimo, da vrsta $\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{n!} D^{k+1}P^n$ enakomerno konvergira v $B(a)$, kjer je a poljuben element iz $\mathcal{H}$ in $B(a)$ neka krogla s središčem v a.

$$\left\|\sum_{n=N}^{N+p}\frac{1}{n!} D^{k+1}P^n(x)\right\| \leq \sum_{n=N}^{N+p}\frac{1}{n!}\|D^{k+1}P^n(x)\| \leq$$
$$\leq \sum_{n=N}^{N+p}\frac{1}{n!}\frac{n!}{(n-k-1)!}\|x\|^{n-k-1} \leq \sum_{m=N-k-1}^{\infty}\frac{1}{m!}\|x\|^m .$$

Ta izraz pa je neodvisno od indeksa p poljubno majhen, če le vzamemo N dovolj velik, ne glede na to, kateri x iz B(a) vzamemo.

Velja še: $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!} D^kP^n(0) = k!P^n$.

To pa je že dovolj za zaključek ([15], 164), da tudi $\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!} D^kP^n$ enakomerno konvergira v $B(a)$ in da je na vsem $\mathcal{H}$:
$D\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!} D^kP^n(x) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!} D^{k+1}P^n(x)$. Sledi naslednja trditev:

[5,16] TRDITEV. Funkcija Exp je (ne glede na izbor njenih potenc $P^n(x)$) povsod neskončnokrat odvedljiva, je sama svoja Taylorjeva vrsta in jo lahko členoma odvajamo:

$$D^k\mathrm{Exp}(x) = \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n!} D^kP^n(x) , \forall x \in \mathcal{H}, k = 0,1,2,\ldots \quad (5,29)$$

$D^k\mathrm{Exp}(0) = P^k$, oziroma

$$D^k\mathrm{Exp}(0)x^{(k)} = P^k(x) , k = 1,2,3,\ldots \quad (5,30)$$

V posebnem imamo: $D\mathrm{Exp}(x) = I + \frac{1}{2!}(L_x + R_x) +$
$$+ \frac{\lambda}{3!}(L_x^2 + L_xR_x + R_{x^2}) + \frac{1-\lambda}{3!}(L_{x^2} + R_xL_x + R_x^2) + \ldots \quad (5,31)$$

$DExp(x) = I + A$,

$\|A\| = \left\| \frac{1}{2!}(L_x + R_x) + \ldots \right\| \leqq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} n\|x\|^{n-1} = \exp\|x\| - 1$.

$\|x\| < \ln 2 \Longrightarrow \exp\|x\| - 1 < 1 \Longrightarrow \|A\| < 1 \Longrightarrow \exists (DExp(x))^{-1}$.

Po [15], 273, tedaj za vsako točko x, za katero je $\|x\| < < \ln 2$, eksistira odprta okolica $\mathcal{U}(x)$, da je $Exp : \mathcal{U}(x) \longrightarrow Exp(\mathcal{U}(x))$ homeomorfizem, vsled česar je tudi $Exp(\mathcal{U}(x))$ odprta okolica točke Exp(x). Eksistira torej odprta okolica krogle $\{x \in \mathcal{H} ; \|x\| < \ln 2\}$, ki se s preslikavo Exp upodobi na unijo odprtih množic (med katerimi je tudi $Exp(\mathcal{U}(0))$, ki je okolica enote e, in je zato ta unija spet odprta okolica enote) in je Exp lokalni homeomorfizem med tema dvema množicama.

Naj bo $Log : Exp(\mathcal{U}(0)) \longrightarrow \mathcal{U}(0)$ inverzna preslikava. Tedaj je: $Exp(Log(y)) = y \; , \; \forall y \in Exp(\mathcal{U}(0))$;

$$Log(Exp(z)) = z \; , \; \forall z \in \mathcal{U}(0) \; .$$

Poleg tega pa je tudi Log neskončnokrat odvedljiva funkcija na $Exp(\mathcal{U}(0))$. Potem pa je ([15], 190), če leži daljica od e do x vsa v $Exp(\mathcal{U}(0))$:

$$Log(e - x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} D^n Log(e) x^{(n)} \; .$$

Ker pa je $Log(e) = 0$ in $DLog(e) = DLog(Exp(0)) = = [DExp(0)]^{-1} = I$ ([15], 152) , je:

$$Log(e - x) = -x + A_2(x,x) + A_3(x,x,x) + A_4(x,x,x,x) + \ldots,$$

kjer so A_k k-linearne preslikave, definirane in zvezne za vse k-terice $x^{(k)}$, za katere leži daljica od e do x vsa v $Exp(\mathcal{U}(0))$.

$$e - x = Exp(Log(e - x)) = Exp(-x + \sum_{k=2}^{\infty} A_k(x,x,\ldots,x)\,) =$$

$$\begin{aligned} = e - x + A_2(x,x) &+ A_3(x,x,x) && + \ldots \\ + \frac{1}{2!}x^2 &- \frac{1}{2!}A_2(x,x).x - \frac{1}{2!}x.A_2(x,x) && + \ldots \\ &- \frac{1}{3!}P^3(x) && + \ldots \end{aligned}$$

Od tod sledi: $A_2(x,x) = -\frac{1}{2}x^2$, $A_3(x,x,x) = -\frac{1}{3}(\frac{3}{4}x^2.x + + \frac{3}{4}x.x^2 - \frac{1}{2}P^3(x))$, in tako naprej. Potemtakem lahko zapišemo:

$$Log(e - x) = -(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}B_3(x) + \frac{1}{4}B_4(x) + \ldots) \; , \qquad (5,32)$$

kjer so $B_k(x)$ realne linearne kombinacije k-tih potenc. Ta vrsta absolutno konvergira za vse x, za katere je

$$\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n} B_n(x)\right\|^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/n}\|B_n(x)\|^{1/n} =$$
$$= \limsup_{n\to\infty}\|B_n(x)\|^{1/n} < 1 .$$

Vsekakor pa konvergira za vse elemente iz neke krogle B(O) s središčem v O in s pozitivnim polmerom, za katero velje: $e + B(O) \subset \mathrm{Exp}(\mathcal{U}(O))$.

Vsak $B_k(x)$ lahko zapišemo v naslednji obliki:

$B_k(x) = \lambda_k P_1^k(x) - \mu_k P_2^k(x)$, kjer sta $\lambda_k, \mu_k \geqq 0$, $P_1^k(x)$ in $P_2^k(x)$ pa dve k-ti potenci. To lahko naredimo celo na neskončno načinov. Če pa v tej razliki odštejemo vse popolnoma enake produkte, dobimo razstavitev, v kateri je vsota $\lambda_k + \mu_k$ minimalna. Recimo, da je naša algebra asociativna. Potem je seveda $B_k = x^k$. To pa pomeni, da je tudi v splošnem:

$\lambda_k - \mu_k = 1$, $\varphi_k = \min\{\lambda_k + \mu_k\} \geqq 1$.

Če še postavimo: $B_1(x) = x$, $B_2(x) = x^2$, dobimo:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

$$B_3(x) = \frac{3-2\alpha}{4}\, x.x^2 + \frac{1+2\alpha}{4}\, x^2.x \tag{5,33}$$

(za $P^3(z) = \alpha z.z^2 + (1-\alpha)z^2.z$).

$\lambda_3 = 1$, $\mu_3 = 0$, $\varphi_3 = 1$.

$$\begin{aligned} B_4(x) = \frac{1}{12}\gamma_1\Big[&(|3 - 4\alpha + \beta_1| + 3 - 4\alpha + \beta_1)\gamma_1^{-1}x.(x.x^2) + \\ &+ (2 + 2\beta_2)\gamma_1^{-1}x.(x^2.x) + (2 + 2\beta_3)\gamma_1^{-1}(x.x^2).x + \\ &+ (|-1 + 4\alpha + \beta_4| -1 + 4\alpha + \beta_4)\gamma_1^{-1}(x^2.x).x + \\ &+ (4 - 2\beta_1 - 2\beta_2 - 2\beta_3 - 2\beta_4)\gamma_1^{-1}x^2.x^2\Big] - \\ - \frac{1}{12}\gamma_2\Big[&(|3 - 4\alpha + \beta_1| - 3 + 4\alpha - \beta_1)\gamma_2^{-1}x.(x.x^2) + \\ &+ (|-1 + 4\alpha + \beta_4| + 1 - 4\alpha - \beta_4)\gamma_2^{-1}(x^2.x).x \end{aligned} \tag{5,34}$$

$\gamma_1 = |3 - 4\alpha + \beta_1| + |-1 + 4\alpha + \beta_4| + 10 - \beta_1 - \beta_4$,

$\gamma_2 = \gamma_1 - 12$

(za $P^4(z) = \beta_1 z.(z.z^2) + \beta_2 z.(z^2.z) + \beta_3(z.z^2).z + \beta_4(z^2.z).z + (1 - \beta_1 - \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)z^2.z^2$).

$\lambda_4 = \gamma_1/12$, $\mu_4 = \gamma_2/12$,

$$\varphi_4 = \frac{1}{6}\left[|3 - 4\alpha + \beta_1| + |-1 + 4\alpha + \beta_4| + 4 - \beta_1 - \beta_4\right] \quad (5,35)$$

$\varphi_4 \in [1,4/3]$.

V nasprotju s pričakovanjem torej ni $\mu_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Skušajmo oceniti konvergenčni polmer logaritemske vrste!

$$e - x = \mathrm{Exp}(\mathrm{Log}(e - x)) = e - (x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}B_3(x) + \dots) +$$
$$+ \frac{1}{2!}(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots)^2 - \frac{1}{3!}P^3(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots) + \dots$$

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}B_3(x) + \dots = \frac{1}{2!}(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots)^2 -$$
$$- \frac{1}{3!}P^3(x + \frac{1}{2}x^2 + \dots) + \dots$$

Izenačimo člene s potencami istih stopenj!

$$\frac{1}{n}B_n(x) = \frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2=n}\frac{1}{k_1k_2}B_{k_1}(x).B_{k_2}(x) -$$
$$- \frac{1}{3!}\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[\lambda B_{k_1}(x).(B_{k_2}(x).B_{k_3}(x)) +\right.$$
$$\left. + (1-\lambda)(B_{k_1}(x).B_{k_2}(x)).B_{k_3}(x)\right] + \dots$$
$$\dots + \frac{(-1)^n}{n!}P^n(x)$$

(vsi sumacijski indeksi so naravna števila, torej večji od 0). V tej vsoti se členi seštevajo in odštevajo. Če je

$B_k(x) = \lambda_k P_1^k - \mu_k P_2^k(x)$ z minimalnim $\lambda_k + \mu_k$, velja:

$$\frac{1}{n}\lambda_n P_1^n(x) - \frac{1}{n}\mu_n P_2^n(x) = \frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2=n}\frac{1}{k_1k_2}\left[(\lambda_{k_1}\lambda_{k_2} + \mu_{k_1}\mu_{k_2})P_3^n(x) -\right.$$
$$\left. - (\lambda_{k_1}\mu_{k_2} + \mu_{k_1}\lambda_{k_2})P_4^n(x)\right] - \frac{1}{3!}\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\frac{1}{k_1k_2k_3}\left[(\lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\lambda_{k_3} +\right.$$
$$+ \lambda_{k_1}\mu_{k_2}\mu_{k_3} + \mu_{k_1}\lambda_{k_2}\mu_{k_3} + \mu_{k_1}\mu_{k_2}\mu_{k_3})P_5^n(x) - (\mu_{k_1}\lambda_{k_2}\lambda_{k_3} +$$
$$\left. + \mu_{k_1}\mu_{k_2}\mu_{k_3} + \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\mu_{k_3} + \lambda_{k_1}\mu_{k_2}\lambda_{k_3})P_6^n(x)\right] + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}P^n(x) .$$

Zato velja: $\frac{1}{n}\lambda_n - \frac{1}{n}\mu_n = \frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2=n}\frac{1}{k_1k_2}\left[(\lambda_{k_1}\lambda_{k_2} +\right.$

$$\left. + \mu_{k_1}\mu_{k_2}) - (\lambda_{k_1}\mu_{k_2} + \mu_{k_1}\lambda_{k_2})\right] - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \quad (= \frac{1}{n}) .$$

Ker pa je po predpostavki razstavitev λ_n, μ_n minimalna, je:

$$\frac{1}{n}\lambda_n + \frac{1}{n}\mu_n \leq \frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2=n}\frac{1}{k_1k_2}(\lambda_{k_1}\lambda_{k_2} + \mu_{k_1}\mu_{k_2} + \lambda_{k_1}\mu_{k_2} + \mu_{k_1}\lambda_{k_2}) +$$
$$+ \dots + 1/n! ,$$ oziroma z upoštevanjem $\varphi_k = \lambda_k + \mu_k$:

$$\frac{1}{n}\varphi_n \leqq \frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2=n}\frac{1}{k_1k_2}\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}+\frac{1}{3!}\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\frac{1}{k_1k_2k_3}\varphi_{k_1}\varphi_{k_2}\varphi_{k_3}+$$

$+ \ldots + 1/n!$.

Če definiramo $\alpha_1 = 1$ in

$$\alpha_n = \frac{1}{2!}\sum_{k_1+k_2=n}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}+\frac{1}{3!}\sum_{k_1+k_2+k_3=n}\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\alpha_{k_3}+\ldots+\frac{1}{n!}\alpha_1^n ,$$

potem velja: $\frac{1}{n}\varphi_n \leqq \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Glede na prejšnje izračune še dodatno zahtevajmo: $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 1/3$. Od tod dobimo: $\alpha_5 = 53/60$, itd.

Definirajmo: $u(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta^n$, $u(0) = 0$.

$$\exp u(\zeta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta^n + \frac{1}{2!}\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\zeta^n\Big]^2 + \ldots =$$

$$= 1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + 13\zeta^4/12 + 2(\alpha_5\zeta^5 + \alpha_6\zeta^6 + \ldots) .$$

Zadnji del smo določili z upoštevanjem definicije števil α_n.
Torej je: $f(u,\zeta) = \exp u(\zeta) -$

$- (2u(\zeta) + 1 - \zeta + \zeta^3/3 + 5\zeta^4/12) = 0$.

$u(\zeta)$ je tedaj analitična funkcija, vrsta, s katero smo jo definirali, pa je Taylorjeva vrsta, razvita okoli točke $\zeta = 0$. Ta vrsta ima konvergenčni polmer, enak absolutni vrednosti točki 0 najbližje neodpravljive singularnosti. Singularnosti so tam, kjer je $\partial f/\partial u = \exp u - 2 = 0$ oziroma $u = \ln 2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Ker je pri $u = \ln 2$ ustrezni $\zeta = 0{\cdot}425690$ zelo majhen, je to gotovo najbližja singularnost, saj zadnja dva člena v $f(u,\zeta)$ ne doprineseta skoraj ničesar. Torej smemo trditi:

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi_n^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{n}\varphi_n\Big)^{1/n} \leqq \limsup_{n\to\infty}\alpha_n^{1/n} = 0{\cdot}425690\ldots^{-1} .$$

Logaritemska vrsta potemtakem konvergira, če je:

$$\limsup_{n\to\infty}\|B_n(x)\|^{1/n} \leqq \limsup_{n\to\infty}(\lambda_n\|P_1^n(x)\| + \mu_n\|P_2^n(x)\|)^{1/n} \leqq$$

$$\leqq \limsup_{n\to\infty}\Big[\varphi_n \sup_P\|P^n(x)\|\Big]^{1/n} = \limsup_{n\to\infty}\varphi_n^{1/n}\cdot \rho_z(x) \leqq$$

$$\leqq 0{\cdot}425690\ldots^{-1}\rho_z(x) < 1 , \text{ oziroma: } \rho_z(x) \leqq 0{\cdot}425689 .$$

Brez dvoma je to zelo slaba ocena. Če vsebuje logaritemska vrsta samo pozitivne člene, je:

$$\limsup_{n\to\infty}\|B_n(x)\|^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty}\left[\sup_P\|P^n(x)\|^{1/n}\right] = \rho_z(x) ,$$

ker so $B_n(x)$ tedaj kar potence, kar nam da kot pogoj za konvergenco logaritemske vrste bistveno boljšo oceno: $\rho_z(x) < 1$. Nekatera dejstva pri izpeljavi logaritma kažejo, da verjetno velja naslednja ekvivalenca: Logaritemska vrsta (5,32) ima samo pozitivne člene natanko tedaj, ko je sestavljena samo iz simetričnih potenc (to pa je zagotovo natanko tedaj, ko je tudi ustrezna eksponentna funkcija sestavljena samo iz simetričnih potenc). Pri tem smo imenovali potenco simetrično, če se ne spremeni, ko zamenjamo vrstni red vseh množenj v njej; taki sta naprimer:

$$P^3(x) = \tfrac{1}{2}(x^2.x + x.x^2) , \quad P^4(x) = \alpha[x.(x.x^2) + (x^2.x).x] +$$
$$+ \beta[x.(x^2.x) + (x.x^2).x + (1 - 2\alpha - 2\beta)x^2.x^2 .$$

Zberimo najpomembnejša dejstva v naslednji trditvi:

[5,17] TRDITEV. Naj bo Exp neka eksponentna funkcija. Eksistira odprta okolica $\mathcal{U}$ krogle $\{x \in \mathcal{H} ; \|x\| < \ln 2\}$, ki se z Exp lokalno homeomorfno preslika na neko odprto okolico $\mathcal{V}$ enote . Eksistira množica $\mathcal{W}$, ki je spet odprta okolica enote e in na kateri je mogoče enolično definirati inverzno preslikavo Log(e - x) s (5,32).

$$\mathcal{V} \supset \mathcal{W} \supset \{e-x \in \mathcal{H} ; \rho_z(x) \leq 0{\cdot}425689\} .$$

Še nekaj besed o logaritmu! Že pri kompleksnih številih ima logaritem danega argumenta neskončno vrednosti - - ali pa nobene. Torej smemo pričakovati, da bo tudi v splošnejših primerih enoličnost logaritma neizpolnjena želja. Zato je smiselno, da definiramo logaritem takole:

Naj bo Exp neka eksponentna funkcija. Logaritem funkcije Exp je preslikava Log : $\mathcal{H} \to P(\mathcal{H})$ (iz prostora $\mathcal{H}$ v njegovo potenčno množico), določena s predpisom:

$$\mathrm{Log}(y) = \{x \in \mathcal{H};\ \mathrm{Exp}(x) = y\} \qquad (5,36)$$

Logaritem v (5,32) je tedaj le en element iz množice Log(e - x). Zadnji del trditve [5,17] potem lahko zapišemo takole:

$$\rho_z(e - y) \leq 0{\cdot}425689 \Rightarrow \mathrm{Log}(y) \neq \emptyset .$$

Dokažimo še eno trditev, ki pa v nasprotju z dosedanjimi velja le za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

<u>[5,18] TRDITEV.</u> Naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in Exp poljubna eksponentna funkcija. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja naslednja ocena:

$$\|x\| \leqq \inf_{r>0} \left\{ \frac{1}{r} \max_{|\zeta|=r} \|\mathrm{Exp}(\zeta x)\| \right\} . \tag{5,37}$$

<u>Dokaz.</u> Brez težav preverimo, da velja za vsak $x \in \mathcal{H}$, za vsak $r > 0$ in za vsako eksponentno funkcijo Exp :

$$x = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_r} \mathrm{Exp}(\zeta x) . \zeta^{-2} d\zeta , \tag{5,38}$$

kjer je $\Gamma_r = \{ \zeta \in \mathbb{C} ; |\zeta| = r \}$.
Naj bo $\varepsilon(r) = \max\limits_{|\zeta|=r} \|\mathrm{Exp}(\zeta x)\|$.

$$\|x\| \leqq \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{\Gamma_r} \|\mathrm{Exp}(\zeta x)\| . |d\zeta| \leqq \frac{\varepsilon(r)}{2\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\varepsilon(r)}{r} .$$

(5,37) sledi neposredno od tod. $\square$

6. BANACHOVE KVADRATNE ALGEBRE

V šestem razdelku združimo teorijo drugega razdelka z ugotovitvami naslednjih treh, pri čemer nam je v veliko pomoč potenčna asociativnost kvadratnih algeber. Pokazali bomo enostavno izražavo spektralnega polmera in preprostost pojma nilpotentnost. Podrobno in eksplicitno bomo še obdelali ekspontno funkcijo in logaritem.

V tem razdelku naj bo $\mathcal{H}$ Banachova kvadratna algebra z multiplikacijo ., enoto e in algebrsko normo $\|.\|$ nad $\mathbb{K}$. !

Če bomo govorili o Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$, bomo vedno vzeli, da je $\mathcal{H}_o$ antikomutativna algebra, kot je to v trditvah [2,2] in [2,3].

[6,1] TRDITEV. $\mathcal{H}_o$ je zaprt podprostor v $\mathcal{H}$; $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$ je BO-par.

Dokaz. Najprej dokažimo, da je kvadriranje zvezna operacija.

$\forall x_o \in \mathcal{H}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = -\|x_o\| + \sqrt{\|x_o\|^2 + \varepsilon} > 0$:

$$\|x - x_o\| < \delta \implies \|x^2 - x_o^2\| = \|(x - x_o)^2 + (x - x_o).x_o +$$
$$+ x_o.(x - x_o)\| \leq \|x - x_o\|(\|x - x_o\| + 2\|x_o\|) <$$
$$< \delta(\delta + 2\|x_o\|) = \varepsilon .$$

Vzemimo sedaj, da $\mathcal{H}_o$ ni zaprta hiperravnina: $\overline{\mathcal{H}_o} = \mathcal{H}$. Če je $y \in \mathcal{H}_o - \{0\}$, eksistira konvergentno zaporedje $\{x_n\} \subset \mathcal{H}_o$, da je: $\lim_{n\to\infty} x_n = e + y$.

Kvadrirajmo to enačbo in upoštevajmo zveznost kvadriranja:

$$-e.\lim_{n\to\infty} N(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = (e + y)^2 = (1 - N(y))e + 2y .$$

To pa je protislovje in trditev je dokazana. $\square$

Ker je kvadratna algebra potenčnoasociativna, je $\rho_s(x) = \rho_z(x)$, $\forall x \in \mathcal{H}$. Označimo spektralni radij zato kar z $\rho(x)$.

[6,2] TRDITEV. Naj bo $x = \alpha e + a$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_o$.

$$\rho(x) = \max|\alpha \pm \sqrt{-N(a)}| . \qquad (6,1)$$

Dokaz. Za $x = 0$ je trditev očitno pravilna. Primer $x \neq 0$ pa razčlenimo na tri podprimere z uporabo (2,14), (2,15) in

(2,16). Ker je za računanje spektralnega polmera vseeno, če uporabljamo prvotni normi ekvivalentno normo, vzemimo, kadar bo potreba, normo $\|\alpha e + a\|_1 = |\alpha| + \|a\|$, upoštevaje lemo [3,6].

(a) $N(x) = 0 \Leftrightarrow N(a) = -\alpha^2$.

$$\max|\alpha \pm \sqrt{-N(a)}| = \max|\alpha \pm \alpha| = 2|\alpha| .$$

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|(2\alpha)^{n-1}(\alpha e + a)\|^{1/n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} (2|\alpha|)^{(n-1)/n}\|\alpha e + a\|^{1/n} = 2|\alpha| .$$

(b) $N(x) \neq 0$ & $N(a) = 0$.

$$\max|\alpha \pm \sqrt{-N(a)}| = |\alpha| .$$

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\|\alpha^{n-1}(\alpha e + na)\|_1^{1/n} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} |\alpha|^{(n-1)/n}(|\alpha| + n\|a\|)^{1/n} = |\alpha| .$$

(c) $N(x) \neq 0$ & $N(a) \neq 0$.

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\Big\|\sqrt{N(x)^n}\Big(e.\cos(n\varphi) + a.\frac{1}{\sqrt{N(a)}}\sin(n\varphi)\Big)\Big\|^{1/n} =$$
$$= \sqrt{|N(x)|}\lim_{n\to\infty}\Big\|e.\cos(n\varphi) + a.\frac{1}{\sqrt{N(a)}}\sin(n\varphi)\Big\|_1^{1/n} =$$
$$= |x|.\lim_{n\to\infty}\Big[|\cos(n\varphi)| + \frac{\|a\|}{\sqrt{|N(a)|}}|\sin(n\varphi)|\Big]^{1/n} .$$

$$\varphi = \lambda + i\mu \Rightarrow |\cos(n\varphi)| = \sqrt{\cos^2(n\lambda) + sh^2(n\mu)} ,$$
$$|\sin(n\varphi)| = \sqrt{\sin^2(n\lambda) + sh^2(n\mu)} .$$

$$\rho(x) = |x|.\lim_{n\to\infty}\Big[ch(n\mu).\Big(\sqrt{\frac{\cos^2(n\lambda)}{ch^2(n\mu)} + th^2(n\mu)} +$$
$$+ \frac{\|a\|}{|a|}\sqrt{\frac{\sin^2(n\lambda)}{ch^2(n\mu)} + th^2(n\mu)}\Big)\Big]^{1/n} .$$

$\dfrac{\cos^2(n\lambda)}{ch^2(n\mu)}$ in $\dfrac{\sin^2(n\lambda)}{ch^2(n\mu)}$ sta med 0 in 1 in nikoli nista hkrati enaka 0. Izraz v okroglem oklepaju za $ch(n\mu)$ je torej omejena količina, večja od neke konstante $\beta > 0$.

Zato: $\rho(x) = |x|.\lim_{n\to\infty}(ch(n\mu))^{1/n} = |x|.\exp|\mu|$.

$$\varphi = \mathrm{Arccos}\frac{\alpha}{\sqrt{N(x)}} = -i.\ln\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{N(x)}} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{N(x)} - 1}\Big) =$$
$$= -i.\ln\frac{\alpha + \sqrt{-N(a)}}{\sqrt{N(x)}} .$$

$$|\mu| = \left| \operatorname{Re} \ln \frac{\alpha + \sqrt{-N(a)}}{\sqrt{N(x)}} \right|$$

$$\exp|\mu| = \max \exp\left[\pm \operatorname{Re} \ln \frac{\alpha + \sqrt{-N(a)}}{\sqrt{N(x)}}\right] =$$

$$= \max\left|\exp\left[\pm \ln \frac{\alpha + \sqrt{-N(a)}}{\sqrt{N(x)}}\right]\right| = \max\left|\frac{\alpha + \sqrt{-N(a)}}{\sqrt{N(x)}}\right|^{\pm 1} =$$

$$= \max \frac{|\alpha \pm \sqrt{-N(a)}|}{\sqrt{|N(x)|}} = \frac{1}{|x|} \max|\alpha \pm \sqrt{-N(a)}| . \quad \square$$

Naštejmo nekaj preprostih posledic gornjega izreka.

<u>[6,3] TRDITEV.</u> $\rho(\alpha e) = |\alpha e| \; , \; \forall \alpha \in \mathbb{K} \; .$ (6,2)

$\rho(a) = |a| \; , \; \forall a \in \mathcal{H}_o \; .$ (6,3)

$\rho(x) \geq |x| \; , \; \forall x \in \mathcal{H} \; .$ (6,4)

$\rho(x^n) = \rho(x)^n \; , \; \forall x \in \mathcal{H} \; .$ (6,5)

$\rho(x^K) = \rho(x) \; , \; \forall x \in \mathcal{H} \; .$ (6,6)

<u>Dokaz.</u> (6,2) in (6,3) sta očitni trditvi. Dokažimo (6,4)! Naj bo $x = \alpha e + a \; , \; \alpha \in \mathbb{K} \; , \; a \in \mathcal{H} \; .$

$$\rho(x) = \max|\alpha \pm \sqrt{-N(a)}| \geq |\alpha + \sqrt{-N(a)}|^{1/2} . |\alpha - \sqrt{-N(a)}|^{1/2} =$$

$$= |\alpha^2 + N(a)|^{1/2} = |x| \; .$$

(6,5) sledi iz (4,16). Trditev (6,6) pa je trivialna. $\square$

Pojma šibka in krepka topološka nilpotentnost se ujemata, zato pridevnika šibka in krepka lahko spustimo. Dokažimo, da smemo spustiti celo pridevnik topološka!

<u>[6,4] TRDITEV.</u> Naslednji izjavi sta za $x \in \mathcal{H}$ ekvivalentni:

(a) x je nilpotenten;

(b) x je topološko nilpotenten.

<u>Dokaz.</u> Naj bo $x = \alpha e + a \; , \; \alpha \in \mathbb{K} \; , \; a \in \mathcal{H}_o \; .$

$$\rho(x) = 0 \Rightarrow |\alpha + \sqrt{-N(a)}| = |\alpha - \sqrt{-N(a)}| = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha = N(a) = 0 \Rightarrow x^2 = 0$, kar pa je po trditvi [2,11] ekvivalentno nilpotentnosti in zato:

$$x^2 = 0 \Rightarrow 0 = \rho(x^2) = \rho(x)^2 \Rightarrow \rho(x) = 0 \; . \quad \square$$

V naslednji trditvi zberimo še nekaj preprostih lastnosti algebrske norme $\|.\|$.

<u>[6,5] TRDITEV.</u> $|N(x)| \leq \|x\|^2 \; , \quad |x| \leq \|x\| \; , \; \forall x \in \mathcal{H} \; .$ (6,7)

$|N(a)| \leq \|a\|^2/\|e\| \; , \quad |a| \leq \|a\|/\sqrt{\|e\|} \; , \; \forall a \in \mathcal{H}_o .$ (6,8)

$$\|x.x^K\| = \|x^K.x\| = \|e\|.|x|^2 \leqq \|e\|.\|x^2\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} . \quad (6,9)$$

$$\|a^K\| = \|a\| \ , \quad \|a.a^K\| = \|a^2\| \ , \ \forall a \in \mathcal{H}_o . \quad (6,10)$$

$$|\delta(x,y)| \leqq 2\|x\|.\|y\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} . \quad (6,11)$$

$$|\delta(a,b)| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|a\|.\|b\| \ , \ \forall a,b \in \mathcal{H}_o . \quad (6,12)$$

$$\|\tau\| \leqq (1 + \|e\|)/2 . \quad (6,13)$$

$$|\sigma(x,y)| \leqq \frac{1 + \|e\|}{2}\|x.y\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} . \quad (6,14)$$

$$\|x^K\| \leqq (1 + \|e\| + \|e\|^2)\|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} . \quad (6,15)$$

$$\|a{\times}b\| \leqq \tfrac{1}{2}(2 + \|e\| + \|e\|^2)\|a.b\| \ , \ \forall a,b \in \mathcal{H}_o . \quad (6,16)$$

Dokaz. (6,7): $|x| \leqq \rho(x) \leqq \|x\|$.

(6,8): $|a|^2\|e\| = |N(a)|.\|e\| = \|-N(a)e\| = \|a^2\| \leqq \|a\|^2$, po trditvi [2,4].

(6,9): Naj bo $x = \alpha e + a$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_o$.

$\|x.x^K\| = \|\alpha^2 e + N(a)e\| = \|e\|.|\alpha^2 + N(a)| = \|e\|.|x|^2 =$

$= \|e\|.|x^2| \leqq \|e\|.\|x^2\|$ (po (2,12)).

(6,10) je trivialno zaradi $a^K = -a$.

(6,11): Naj bo $\|x\| = \|y\| = 1$. $|\delta(x,y)| = \frac{1}{4}|N(x + y) -$

$- N(x - y)| \leqq \frac{1}{4}(|N(x + y)| + |N(x - y)|) \leqq$

$\leqq \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) \leqq \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|)^2 = 2$.

$x,y \neq 0 \implies |\delta(x,y)| = \|x\|.\|y\|.\left|\delta(\frac{1}{\|x\|}x, \frac{1}{\|y\|}y)\right| \leqq$

$\leqq 2\|x\|.\|y\|$.

(6,12): $|\delta(a,b)| = \frac{1}{2\|e\|}\|-2\delta(a,b)e\| = \frac{1}{2\|e\|}\|a.b + b.a\| \leqq$

$\leqq \frac{1}{\|e\|}\|a\|.\|b\|$ (po trditvi [2,4]).

(6,13): Naj bo $x \neq 0$. $2\tau(x)x = x^2 + N(x)e$.

$2|\tau(x)|.\|x\| \leqq \|x^2\| + |N(x)|.\|e\| \leqq (1 + \|e\|)\|x\|^2$.

(6,14): $|\sigma(x,y)| = |\tau(x.y)| \leqq \frac{1 + \|e\|}{2}\|x.y\|$.

(6,15): $x^K = 2\tau(x)e - x$.

$\|x^K\| \leqq 2\|\tau\|.\|x\|.\|e\| + \|x\| \leqq (1 + \|e\| + \|e\|^2)\|x\|$.

(6,16): $a{\times}b = a.b - \tau(a.b)e$.

$\|a{\times}b\| \leqq \|a.b\| + \frac{1 + \|e\|}{2}\|a.b\|.\|e\|$. □

Povežimo trditvi [6,5] in [3,13] in navedimo tiste ocene, ki se dajo izboljšati!

[6,6] KOROLAR. Naj bo $\|.\|$ BO-norma v BO-paru $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$.

$$\|a\times b\| \leqq \frac{1+\|e\|}{\|e\|}\|a.b\| \ , \ \forall a,b \in \mathcal{H}_o \ . \qquad (6,17)$$

$$|\delta(x,y)| \leqq \min\left\{2 \ , \ \frac{2+\|e\|}{\|e\|^2}\right\}.\|x\|.\|y\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H}. \qquad (6,18)$$

$$|N(x)| \leqq \min\left\{1 \ , \ \frac{2+\|e\|}{\|e\|^2}\right\}.\|x\|^2 \ , \ \forall x \in \mathcal{H}. \qquad (6,19)$$

$$|x| \leqq \min\left\{1 \ , \ \frac{\sqrt{2+\|e\|}}{\|e\|}\right\}.\|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H}. \qquad (6,20)$$

[6,7] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ Hilbertova algebra , $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ je tedaj HO-par. Če je $\|.\|$ algebrska norma, ki jo generira skalarni produkt, je:

$$|\delta(x,y)| \leqq \|x\|.\|y\| \ , \ \forall x,y \in \mathcal{H} \ . \qquad (6,21)$$

Dokaz. (6,21) dokažemo prav tako kot (6,11), le da pri tem še upoštevamo paralelogramsko pravilo.

Uvedimo eksponentno funkcijo, ki je zaradi potenčne asociativnosti seveda ena sama. Zato tudi velja za vsako podmnožico $\mathfrak{M}$ prostora $\mathcal{H}$: $EXP(\mathfrak{M}) = Exp(\mathfrak{M})$.

$E(x) = F(x) = \|Exp(x)\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

[6,8] TRDITEV. Naj bo $x = \alpha e + a$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_o$.

$$N(a) = 0 \Longrightarrow Exp(x) = \exp\alpha.(e + a) \ . \qquad (6,22)$$

$$N(a) \neq 0 \Longrightarrow Exp(x) =$$

$$= \exp\alpha.\left[e.\cos\sqrt{N(a)} + a\,\frac{\sin\sqrt{N(a)}}{\sqrt{N(a)}}\right]. \qquad (6,23)$$

$$Exp(\lambda x).Exp(\mu x) = Exp((\lambda+\mu)x) \ , \ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{K} \ . \qquad (6,24)$$

$$[Exp(x)]^n = Exp(nx) \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ . \qquad (6,25)$$

$$Exp(x).Exp(-x) = Exp(-x).Exp(x) = e \ . \qquad (6,26)$$

$$Exp(\lambda e + x) = \exp\lambda.Exp(x) \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \ . \qquad (6,27)$$

$$Exp(x^K) = [Exp(x)]^K \ . \qquad (6,28)$$

$$N(Exp(x)) = \exp(2\alpha) \ . \qquad (6,29)$$

$$|Exp(x)| = \exp(Re\,\alpha) \ . \qquad (6,30)$$

$$\rho(Exp(x)) = \exp(Re\,\alpha + |Im\sqrt{N(a)}|) \ . \qquad (6,31)$$

Dokaz. Trditve (6,24) - (6,27) so posledice dejstva, da je algebra, ki jo generirata e in x, asociativna.

$\mathrm{Exp}(\alpha e + a) = \exp\alpha . \mathrm{Exp}(a) = \exp\alpha .(e + a - \frac{N(a)}{2!} e - \frac{N(a)}{3!} a + \frac{N(a)^2}{4!} e + \ldots) = \exp\alpha . \left[e(1 - \frac{N(a)}{2!} + \frac{N(a)^2}{4!} - \ldots) + a(1 - \frac{N(a)}{3!} + \frac{N(a)^2}{5!} - \ldots) \right]$.

Od tod naprej je izpeljava (6,22) in (6,23) trivialna. Trditve (6,28) - (6,30) so preproste posledice teh dveh formul.

$\rho(\mathrm{Exp}(x)) = \max \left| \exp\alpha . \cos\sqrt{N(a)} \pm \sqrt{-\exp(2\alpha).\sin^2\sqrt{N(a)}} \right| =$
$= \exp(\mathrm{Re}\,\alpha).\max \left| \cos\sqrt{N(a)} \pm i.\sin\sqrt{N(a)} \right| =$
$= \exp(\mathrm{Re}\,\alpha).\max \left| \exp(\pm i\sqrt{N(a)}) \right| =$
$= \exp(\mathrm{Re}\,\alpha).\exp \left| \mathrm{Im}\sqrt{N(a)} \right|$, to pa je (6,31). $\square$

<u>[6,9] TRDITEV.</u> (a) $\mathrm{Exp}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H} - \mathcal{H}^0$.

(b) Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je:

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} - \mathcal{H}^0 . \qquad (6,32)$$

(c) Za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ je:

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{H}) = \{ y = \beta e + b \ ; \ (\beta \in \mathbb{R},\ b \in \mathcal{H}_0)\ \&\ N(y) > 0\ \&\ [\, b = 0\ \vee\ (N(b) \leqq 0\ \&\ \beta > +\sqrt{-N(b)}\,)\ \vee\ N(b) > 0 \,] \} \qquad (6,33)$$

<u>Dokaz.</u> Prva trditev sledi iz (6,29), drugi dve pa izhajata iz naslednjih formul, katerih preveritev je sicer precej dolga, načelno pa prav nič težka! $\square$

Naj bo $y = \beta e + b$, $\beta \in \mathbb{K}$, $b \in \mathcal{H}_0$, $N(y) = \beta^2 + N(b) \neq 0$, $\mathcal{H} \neq \mathbb{K}e$.

(1) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) $\beta \neq 0\ \&\ b = 0 \Longrightarrow \mathrm{Log}(y) = \{ \alpha e + a \ ; \ \alpha = \ln|\beta| + (\arg\beta + 2n\pi + k\pi)i\ ,\ a = k\pi c\ ,\ c \in \mathcal{H}_0\ ,\ N(c) = 1\ ,\ k,n \in \mathbb{Z} \}$. (6,34)

(b) $\beta \neq 0\ \&\ b \neq 0\ \&\ N(b) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Log}(y) = \{ \alpha e + a \ ; \ \alpha = \ln|\beta| + (\arg\beta + 2n\pi)i\ ,\ a = \frac{1}{\beta} b\ ,\ n \in \mathbb{Z} \}$. (6,35)

(c) $N(b) \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{Log}(y) = \{ \alpha e + a \ ; \ \alpha = \ln\left|\sqrt{N(y)}\right| + (\arg\sqrt{N(y)} + 2n\pi)i\ ,\ a = \frac{\lambda}{\mu} b\ ,\ \mu = i\sqrt{N(b)}\ ,\ \lambda = \ln|\beta + \mu| + (\arg(\beta + \mu) + 2k\pi)i - \alpha\ ,\ k,n \in \mathbb{Z} \}$. (6,36)

(2) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

(a1) $b = 0\ \&\ \beta > 0 \Longrightarrow \mathrm{Log}(y) = \{ \alpha e + a \ ; \ \alpha = \ln\beta$,

$a = 2n\pi c$, $c \in \mathcal{H}_0$, $N(c) = 1$, $n \in \mathbb{Z}\}$. (6,37)

(a2) $b = 0$ & $\beta < 0 \Rightarrow \mathrm{Log}(y) = \{\alpha e + a$; $\alpha = \ln(-\beta)$,
$a = (2n + 1)\pi c$, $c \in \mathcal{H}_0$, $N(c) = 1$, $n \in \mathbb{Z}\}$. (6,38)

(b) $\beta > 0$ & $b \neq 0$ & $N(b) = 0 \Rightarrow \mathrm{Log}(y) = \{\ln\beta . e +$
$+ \frac{1}{\beta} b\}$. (6,39)

(c1) $N(y) > 0$ & $N(b) > 0 \Rightarrow \mathrm{Log}(y) = \{\alpha e + a$; $\alpha =$
$= \frac{1}{2} \ln N(y)$, $a = \frac{1}{\mu}[\arg(\beta + i\mu) + 2k\pi]b$, $\mu = \sqrt{N(b)}$,
$k \in \mathbb{Z}\}$. (6,40)

(c2) $N(b) < 0$ & $\beta > +\sqrt{-N(b)} \Rightarrow \mathrm{Log}(y) = \{\alpha e + a$;
$\alpha = \frac{1}{2} \ln N(y)$, $a = \frac{1}{2\mu} \ln \frac{\beta + \mu}{\beta - \mu} b$, $\mu = \sqrt{-N(b)}\}$. (6,41)

(d) $N(y) < 0 \vee [b \neq 0$ & $N(b) \leqq 0$ & $\beta < +\sqrt{-N(b)}] \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathrm{Log}(y) = \emptyset$.

7. NUMERIČNE ZALOGE VREDNOSTI

Na začetku tega razdelka bomo nanizali nekaj dejstev o funkciji $\varphi_x(\alpha) = \|e + \alpha x\|$. To nam bo pomagalo pri definiciji in obravnavi numerične zaloge vrednosti elementov iz algebre. Numerična zaloga vrednosti je definirana kot množica vrednosti stanj; ker pa namenoma ne zahtevamo normiranosti enote, so za nas stanja tisti funkcionali, ki v enoti zavzamejo absolutno največjo vrednost, to je 1. Definicija je očitno uspešna, saj lahko izpeljemo vse (iz teorije asociativnih algeber že znane) lastnosti, ki niso neposredno povezane z multiplikacijo. Na koncu bomo dodali še definicijo hermitskih elementov.

Naj bo skozi cel razdelek $\mathcal{H}$ Banachova algebra z multiplikacijo ., z enoto e in z algebrsko normo $\|.\|$ nad $\mathbb{K}$.

Najprej nekaj dejstev o funkciji $\varphi_x(\alpha) = \|e + \alpha x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$!

$\varphi_x(\lambda\alpha_1 + (1 - \lambda)\alpha_2) = \|\lambda\alpha_1 x + (1 - \lambda)\alpha_2 x + \lambda e + (1 - \lambda)e\| \leqq$

$\leqq \|\lambda e + \lambda\alpha_1 x\| + \|(1 - \lambda)e + (1 - \lambda)\alpha_2 x\| =$

$= \lambda\varphi_x(\alpha_1) + (1 - \lambda)\varphi_x(\alpha_2)$ za $\lambda \in [0,1]$. To pa pomeni:

(1) $\varphi_x(\alpha)$ je povsod konveksna funkcija.

Posledice:

(2) $\varphi_x(\alpha)$ je absolutno zvezna na vsakem kompaktnem intervalu.

(3) $\varphi_x(\alpha)$ zadošča Lipschitzovemu pogoju:

$$|\varphi_x(\alpha) - \varphi_x(\beta)| \leqq \|x\|.|\alpha - \beta| . \qquad (7,1)$$

(4) $\varphi_x(\alpha)$ je zvezno odvedljiva funkcija (v realnem smislu) povsod razen v kvečjemu števno mnogo točkah, odvod pa je monotono naraščajoča funkcija.

(5) V vsaki točki α eksistirata levi in desni odvod

$D_\alpha^- \varphi_x(\alpha) \leqq D_\alpha^+ \varphi_x(\alpha)$, oba sta monotono naraščajoči funkciji, levi odvod je z leve, desni pa z desne zvezen.

(6) $$\alpha_1 < \beta < \alpha_2 \Rightarrow \frac{\varphi_x(\beta) - \varphi_x(\alpha_1)}{\beta - \alpha_1} \leqq \frac{\varphi_x(\alpha_2) - \varphi_x(\beta)}{\alpha_2 - \beta} \qquad (7,2)$$

(7) $\frac{1}{\alpha}(\varphi_x(\alpha) - \varphi_x(0))$ je monotono naraščajoča funkcija za

vsak $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Trditev dokažemo tako, da v (7,2) vstavimo $\beta = 0$ za primer $\alpha_1\alpha_2 < 0$, za primer $\alpha_1\alpha_2 > 0$ pa uporabimo osnovno neenačbo:

$$\varphi_x\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\alpha_2 + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).0\right) \leqq \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\varphi_x(\alpha_2) + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\varphi_x(0) .$$

Od tod pa sledi:

$$(8)\ D_\alpha^-\varphi_x(0) = \lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{1}{\alpha}\Big[\|e + \alpha x\| - \|e\|\Big] =$$

$$= \sup_{\alpha < 0}\left\{\frac{1}{\alpha}\Big[\|e + \alpha x\| - \|e\|\Big]\right\} = -\inf_{\alpha > 0}\left\{\frac{1}{\alpha}\Big[\|e - \alpha x\| - \|e\|\Big]\right\}. \qquad (7,3)$$

$$D_\alpha^+\varphi_x(0) = \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{1}{\alpha}\Big[\|e + \alpha x\| - \|e\|\Big] =$$

$$= \inf_{\alpha > 0}\left\{\frac{1}{\alpha}\Big[\|e + \alpha x\| - \|e\|\Big]\right\} = -\sup_{\alpha < 0}\left\{\frac{1}{\alpha}\Big[\|e - \alpha x\| - \|e\|\Big]\right\}. \qquad (7,4)$$

Oporna premica v točki $\alpha = 0$ na krivuljo $\varphi = \varphi_x(\alpha)$ je premica $\varphi = \|e\| + \varkappa\alpha$; iz zahteve $\varphi_x(\alpha) \geqq \|e\| + \varkappa\alpha$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, zaradi konveksnosti, dobimo:

$$(9)\ D_\alpha^-\varphi_x(0) \leqq \varkappa \leqq D_\alpha^+\varphi_x(0) , \qquad (7,5)$$

pri čemer je $\varkappa$ poljubna vrednost v tem intervalu.

Iz (7,3) in (7,4) še sledi:

$$D_\alpha^-\varphi_x(0) \geqq \lim_{\alpha \to -\infty} \frac{1}{\alpha}\Big[\|e + \alpha x\| - \|e\|\Big] = -\|x\| ,$$

$$D_\alpha^+\varphi_x(0) \leqq \lim_{\alpha \to \infty} \frac{1}{\alpha}\Big[\|e + \alpha x\| - \|e\|\Big] = \|x\| ,\ \text{kar nam da:}$$

$$(10)\ |\varkappa| \leqq \|x\| . \qquad (7,6)$$

<u>[7,1] DEFINICIJA.</u> (a) <u>$\mathfrak{D}(\mathcal{H})$</u> $= \{\psi \in \mathcal{H}^* ;\ \psi(e) = 1\ \&\ \&\ \|\psi\| = 1/\|e\|\}$. Elemente iz $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ imenujemo <u>stanja</u> na $\mathcal{H}$.

(b) <u>$\mathcal{V}(\mathcal{H},x)$</u> $= \{\psi(x)\ ;\ \psi \in \mathfrak{D}(\mathcal{H})\}$ <u>numerična zaloga vrednosti</u> elementa $x \in \mathcal{H}$.

(c) $v(\mathcal{H},x) = \sup\{|\lambda|\ ;\ \lambda \in \mathcal{V}(\mathcal{H},x)\}$ <u>numerični polmer</u> elementa $x \in \mathcal{H}$.

Če ne bo možnosti zmede, bomo pisali: $\mathfrak{D}$, $\mathcal{V}(x)$, $v(x)$.

Definicija množice $\mathfrak{D}$ (in z njo tudi $\mathcal{V}(x)$ in $v(x)$ za vsak x) je odvisna od norme: za drugačno, pa čeprav ekvivalentno, normo dobimo v splošnem drugačno množico stanj. Vendar se da prav hitro ugotoviti, da ostane $\mathfrak{D}$ isti, če namesto prvotne norme uporabimo kak njen mnogokratnik.

[7,2] LEMA. Naj bo $M \geq 1$. Tedaj je $x \longrightarrow |||x||| = M\|x\|$ spet algebrska norma, ustrezna množica stanj pa je ista kot pri prvotni normi.

Dokaz. Da je $|||.|||$ spet algebrska norma, je očitno. Pa naj bo $\psi \in \mathcal{H}^*$, $\psi(e) = 1$. $\|\psi\| = \frac{1}{\|e\|} \Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{|\psi(x)|}{\|x\|} = \frac{1}{\|e\|} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{|\psi(x)|}{M\|x\|} = \frac{1}{M\|e\|} \Leftrightarrow |||\psi||| = \frac{1}{|||e|||}$. □

[7,3] TRDITEV. $\mathcal{D}$ je neprazna šibko * kompaktna konveksna množica v $\mathcal{H}^*$.

Dokaz. Hahn - Banachov izrek zagotavlja nepraznost. Če je $\psi(e) = 1$ in $\|\psi\| \leq 1/\|e\|$, je $\|\psi\| = 1/\|e\|$. Zato je $\mathcal{D}$ presek množice funkcionalov iz zaprte krogle s polmerom $1/\|e\|$ v $\mathcal{H}^*$ in množice funkcionalov z lastnostjo $\psi(e) = 1$. Prva množica je konveksna in šibko * kompaktna, druga pa je konveksna in šibko * zaprta. Presek je torej res tak, kot je rečeno v trditvi. □

Ta dokaz je vzet iz [8], 52.

[7,4] TRDITEV. (a) $\mathcal{V}(x)$ je za vsak $x \in \mathcal{H}$ neprazna kompaktna konveksna množica v $\mathbb{K}$.

(b) $\mathcal{V}(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta \mathcal{V}(x)$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (7,7)

(c) $\mathcal{V}(x + y) \subset \mathcal{V}(x) + \mathcal{V}(y)$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$. (7,8)

(d) $v(x) = \max_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} \{|\lambda|\} \leq \|x\|/\|e\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (7,9)

(e) Naj bo $\mathcal{G}$ zaprta podalgebra v $\mathcal{H}$.
$\mathcal{V}(\mathcal{G},x) = \mathcal{V}(\mathcal{H},x)$, $\forall x \in \mathcal{G}$.

Dokaz. (a) $\mathcal{V}(x)$ je neprazna, ker je $\mathcal{D}$ neprazna množica. Preslikava $\psi \longrightarrow \psi(x)$ iz $\mathcal{D}$ v $\mathcal{V}(x)$ je šibko * zvezna in preslika zato kompaktno množico $\mathcal{D}$ spet v kompaktno množico $\mathcal{V}(x)$.

$\alpha,\beta \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta = \lambda\psi_1(x) + (1 - \lambda)\psi_2(x) =$
$= \psi_3(x) \in \mathcal{V}(x)$ zaradi konveksnosti množice $\mathcal{D}$.

(b) $\lambda \in \mathcal{V}(\alpha e + \beta x) \Longrightarrow \lambda = \psi(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta\psi(x) \in$
$\in \alpha + \beta\mathcal{V}(x)$, za $\psi \in \mathcal{D}$.
$\lambda = \alpha + \beta\psi(x)$ za $\psi \in \mathcal{D} \Longrightarrow \lambda = \psi(\alpha e + \beta x) \in \mathcal{V}(\alpha e + \beta x)$.

(c) $\lambda \in \mathcal{V}(x + y) \Longrightarrow \lambda = \psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y) \in \mathcal{V}(x) + \mathcal{V}(y)$.

(d) $\lambda \in \mathcal{V}(x) \Longrightarrow |\lambda| = |\psi(x)| \leq \|\psi\|.\|x\| = \|x\|/\|e\|$, za nek

$\psi \in \mathcal{D}$.

(e) Po Hahn - Banachovem izreku je preslikava $\psi \longrightarrow \psi|_{\mathcal{G}}$ iz $\mathcal{D}(\mathcal{H})$ v $\mathcal{D}(\mathcal{G})$ surjektivna. □

Dokaz trditve je vzet iz [8] , 52.

[7,5] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ je:

$$\min_{\lambda \in V(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \frac{1}{\|e\|} D_\alpha^- \varphi_x(0) , \tag{7,10}$$

$$\max_{\lambda \in V(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \frac{1}{\|e\|} D_\alpha^+ \varphi_x(0) . \tag{7,11}$$

Množica $\{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\, \lambda \in V(x)\}$ je zaprt interval med obema mejama.

Dokaz. $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi(x) = \beta + i\gamma$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$|\psi(e + \alpha x)| = |1 + \alpha\beta + i\alpha\gamma| = \sqrt{1 + 2\alpha\beta + \alpha^2(\beta^2 + \gamma^2)} \leqq$
$\leqq \|e + \alpha x\|/\|e\|$.

$\|e + \alpha x\| - \|e\| \geqq \|e\|\sqrt{1 + 2\alpha\beta + \alpha^2(\beta^2 + \gamma^2)} - \|e\| =$
$= \|e\|\alpha(\beta + \frac{1}{2}\gamma^2\alpha) + o(\alpha^2)$ za majhne $|\alpha|$.

$\lim_{\alpha \searrow 0} \frac{1}{\alpha}[\|e + \alpha x\| - \|e\|] \geqq \beta\|e\| \implies \|e\| \sup_{\lambda \in V(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} \leqq D_\alpha^+ \varphi_x(0)$.

$\lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{1}{\alpha}[\|e + \alpha x\| - \|e\|] \leqq \beta\|e\| \implies \|e\| \inf_{\lambda \in V(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} \geqq D_\alpha^- \varphi_x(0)$.

Zaradi kompaktnosti množice $V(x)$ in zaradi zveznosti funkcije $\lambda \longrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda$ pa lahko namesto inf in sup pišemo min oziroma max.

Dokažimo še zadnjo trditev. Naj bo najprej $x = (\beta + i\gamma)e$, $\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. $\mathrm{Re}\,\psi(x) = \beta$, $\forall \psi \in \mathcal{D}$.

$\frac{1}{\|e\|} D_\alpha \varphi_x(\alpha) = \frac{1}{\|e\|} \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}[\|e + \alpha(\beta + i\gamma)e\| - \|e\|] =$
$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}[|1 + \alpha\beta + i\alpha\gamma| - 1] = \beta$.

Sedaj pa vzemimo, da sta e in x linearno neodvisna. Konstruirali bomo funkcional ψ, za katerega bo $\|e\|\mathrm{Re}\,\psi(x)$ poljubno število $\varkappa$ v intervalu $[D_\alpha^- \varphi_x(0) , D_\alpha^+ \varphi_x(0)]$.

Naj bo $\varphi = \|e\| + \varkappa\alpha$ neka oporna premica na $\varphi_x(\alpha)$ pri $\alpha = 0$. V podprostoru, ki ga razpenjata e in x, definirajmo linearni funkcional ψ s predpisom:

$\|e\|.\mathrm{Re}\,\psi(\xi e + \eta x) = \xi\|e\| + \varkappa\eta$, $\forall \xi,\eta \in \mathbb{R}$.

Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, je seveda $\mathrm{Re}\,\psi(z) = \psi(z)$; če pa je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, je $\psi(z) = \mathrm{Re}\,\psi(z) - i\mathrm{Re}\,\psi(iz)$.

Oporna premica je zaradi konveksnosti funkcije $\varphi_x(\alpha)$ pod grafom le-te, zato: $\|e + \alpha x\| \geqq \|e\| + \varkappa\alpha = \|e\| . |\mathrm{Re}\,\psi(e + \alpha x)|$, za vsak α, za katerega je $\|e\| + \varkappa\alpha \geqq 0$. Če pa je $\|e\| + \varkappa\alpha < 0$, je: $\|e\| . |\mathrm{Re}\,\psi(e + \alpha x)| = |\|e\| + \varkappa\alpha| = |\varkappa| . |\alpha| - \|e\| \leqq \|\alpha x\| - \|e\| \leqq \|e + \alpha x\|$.

Torej je za $\xi \neq 0$: $\|e\| . |\mathrm{Re}\,\psi(\xi e + \eta x)| = |\xi| . \|e\| . |\mathrm{Re}\,\psi(e + \frac{\eta}{\xi} x)| \leqq |\xi| . \|e + \frac{\eta}{\xi} x\| = \|\xi e + \eta x\|$.

$\|e\| . |\mathrm{Re}\,\psi(\eta x)| = |\varkappa| . |\eta| \leqq \|\eta x\|$.

Upoštevajmo še: $\|e\| . |\mathrm{Re}\,\psi(e)| = \|e\|$, pa je: $\|\mathrm{Re}\,\psi\| = 1/\|e\|$, iz česar sledi tudi $\|\psi\| = 1/\|e\|$.

Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, je $\psi(e) = 1$. Pa naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

$\psi(e) = 1 - i\mathrm{Re}\,\psi(ie)$.

$1 \geqq |\psi(e)| = \sqrt{1 + [\mathrm{Re}\,\psi(ie)]^2} \Longrightarrow \mathrm{Re}\,\psi(ie) = 0 \Longrightarrow \psi(e) = 1$.

Funkcional ψ po Hahn - Banachovem izreku razširimo na cel prostor z nespremenjeno normo in ga spet označimo s ψ. Tedaj velja: $\psi \in \mathcal{D}$. Velja pa tudi: $\|e\| . \mathrm{Re}\,\psi(x) = \varkappa$. $\square$

Dokaz je delno vzet iz [38], 37, 38.

<u>[7,6] TRDITEV.</u> Naslednji izjavi sta ekvivalentni:

(a) $\exists \frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}$, $\forall x \in \mathcal{H}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

(b) $\mathrm{card}\,\mathcal{D} = 1$.

Če sta izjavi pravilni, potem za $\mathcal{D} = \{\psi\}$ in za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja:

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \Longrightarrow \psi(x) = \frac{1}{\|e\|} \frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\|_{\alpha=0} . \qquad (7,12)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \psi(x) = \frac{1}{\|e\|} \frac{d}{d\alpha}\Big[\|e + \alpha x\| - i\|e + i\alpha x\|\Big]_{\alpha=0} . \qquad (7,13)$$

<u>Dokaz.</u> (a) $\Longrightarrow$ (b). Iz trditve [7,5] sledi: množica $\{\mathrm{Re}\,\lambda\ ;\ \lambda \in \mathcal{V}(x)\}$ vsebuje eno samo vrednost za vsak x. Za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ je tedaj trditev že pravilna. Pa naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in recimo, da sta $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}$ in da eksistira x: $\psi_1(x) \neq \psi_2(x)$. Toda: $\mathrm{Re}\,\psi_1(x) = \mathrm{Re}\,\psi_2(x)$ in $\mathrm{Im}\,\psi_1(x) = -\mathrm{Re}\,\psi_1(ix) = -\mathrm{Re}\,\psi_2(ix) = \mathrm{Im}\,\psi_2(x)$, kar pa je protislovje.

(b) $\Longrightarrow$ (a). $\{\mathrm{Re}\,\lambda\ ;\ \lambda \in \mathcal{V}(x)\}$ ima eno samo točko, torej sta levi in desni odvod funkcije $\varphi_x(\alpha)$ pri $\alpha = 0$ enaka in trditev velja.

Formuli (7,12) in (7,13) sledita iz dokaza prejšnje trditve. $\square$

[7,7] KOROLAR. Naj bo $\mathcal{H}$ še Hilbertova algebra s skalarnim produktom $\langle .,. \rangle$, ki generira algebrsko normo $\|.\|$.
Tedaj je $\mathcal{D} = \left\{ \frac{\langle .,e \rangle}{\langle e,e \rangle} \right\}$

Dokaz. $\frac{\langle e,e \rangle}{\langle e,e \rangle} = 1$; $\frac{\langle x,e \rangle}{\langle e,e \rangle} \leqq \frac{\|x\| . \|e\|}{\|e\|^2} = \|x\|/\|e\|$.

Zato je $\frac{\langle .,e \rangle}{\langle e,e \rangle} \in \mathcal{D}$.

Iz prejšnje trditve in iz korolarja [3,12],(c), pa sledi še $\operatorname{card} \mathcal{D} = 1$. □

[7,8] TRDITEV. Naj bo $\tau \in \mathcal{D}$ neko stanje in Ker $\tau = \mathcal{H}_0$. Tedaj je $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ s formulama (1,1) in (1,2) BO-par in $x \to |||x||| = 2\|x\|$ je BO-norma tega para (oziroma HO-par in $|||.|||$ tudi HO-norma, če je $\mathcal{H}$ Hilbertova algebra in normo $\|.\|$ generira skalarni produkt).
Če je $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ poljuben BO-par in τ sled v njem, je $\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$ v vsaki normi, ki je tudi BO-norma.

Dokaz. Za prvi del trditve je treba preveriti le, če je $|||.|||$ res BO-norma. Delno nam to kaže že lema [7,2].
Pa bodita $a,b \in \mathcal{H}_0$. $|||a \times b||| = |||ab - \tau(a.b)e||| \leqq |||a.b||| + \frac{1}{|||e|||}|||a.b|||.|||e||| = 2|||a.b||| = 4\|a.b\| \leqq 4\|a\|.\|b\| = |||a|||.|||b|||$.

$1/|||e||| = |||\tau||| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{|\tau(x)|}{|||x|||} = \sup \frac{|\alpha|}{|||\alpha e + a|||}$ za $\alpha \in \mathbb{K}$, $a \in \mathcal{H}_0$, $\alpha e + a \neq 0$. Supremum zagotovo ni dosežen pri $\alpha = 0$, zato smemo z α deliti. Označimo: $\frac{1}{\alpha} a = b$. Seveda je b še lahko katerikoli element iz $\mathcal{H}_0$.

$$1/|||e||| = \sup_{b \in \mathcal{H}_0} \frac{1}{|||e + b|||} = \frac{1}{\inf\limits_{b \in \mathcal{H}_0} |||e + b|||} .$$

To pa pomeni: $|||e||| = \inf\limits_{b \in \mathcal{H}_0} |||e + b||| \leqq |||e + c|||$, $\forall c \in \mathcal{H}_0$,

in $|||.|||$ je BO-norma.
Drugi del trditve sledi iz (1,6) in (3,21) . □

[7,9] TRDITEV. $\mathcal{V}(x) = \bigcap\limits_{\xi \in \mathbb{K}} \{ \lambda \in \mathbb{K} ; \|e\|.|\xi - \lambda| \leqq \|\xi e - x\| \}$ (7,14)

Dokaz. $\lambda \in \mathcal{V}(x) \Rightarrow \lambda = \psi(x)$ za nek $\psi \in \mathcal{D}$.
$\xi \in \mathbb{K} \Rightarrow |\xi - \lambda| = |\psi(\xi e - x)| \leqq \|\xi e - x\|/\|e\|$.
Torej velja $\subset$ v (7,14).

Naj bo sedaj λ v preseku na desni strani (7,14).

Če je $x = \alpha e$, je $\|\xi e - x\| = |\xi - \alpha| . \|e\|$. Torej je: $\|e\| . |\xi - \lambda| \leqq \|\xi e - x\| = \|e\| . |\xi - \alpha|$, $\forall \xi \in \mathbb{K}$, iz česar sklepamo (če vzamemo $\xi = \alpha$): $\lambda = \alpha = \psi(\alpha e) = \psi(x)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}$.

Vzemimo sedaj, da sta e in x linearno neodvisna. Definirajno: $\psi_0(\alpha e + \beta x) = \alpha + \beta\lambda$. ψ_0 je očitno linearen funkcional nad $\mathbb{K}e \oplus \mathbb{K}x$. Če je $\beta \neq 0$, je:

$|\psi_0(\alpha e + \beta x)| = |\alpha + \beta\lambda| = |\beta| . |(-\frac{\alpha}{\beta}) - \lambda| \leqq$

$\leqq \frac{|\beta|}{\|e\|} \|-\frac{\alpha}{\beta} e - x\| = \frac{1}{\|e\|}\|\alpha e + \beta x\|$, kar pa velja tudi za $\beta = 0$ in je zato: $\|\psi_0\| \leqq 1/\|e\|$. Po Hahn - Banachovem izreku ψ_0 razširimo do nekega $\psi \in \mathcal{H}^*$ z $\|\psi\| \leqq 1/\|e\|$. Ker pa je $\psi_0(e) = \psi(e) = 1$, je $\psi \in \mathcal{D}$, pa še: $\psi(x) = \lambda \in \mathcal{V}(x)$. □

Dokaz trditve je vzet iz [8], 52,53.

<u>[7,10] TRDITEV.</u> Naj bo $x \in \mathcal{H}$ poljuben element.

$$\text{(a)} \quad \bigcup_{\|y\|=1} \bigcap_{\xi \in \mathbb{K}} \{\lambda \in \mathbb{K} \,;\, \|e\| . |\xi - \lambda| \leqq \|(\xi e - x).y\|\} \subset$$
$$\subset \mathcal{V}(x) \subset$$
$$\subset \bigcup_{\|y\|=1} \bigcap_{\xi \in \mathbb{K}} \{\lambda \in \mathbb{K} \,;\, |\xi - \lambda| \leqq \|(\xi e - x).y\|\}. \quad (7,15)$$

$$\text{(b)} \quad \bigcup_{\|y\|=1} \bigcap_{\xi \in \mathbb{K}} \{\lambda \in \mathbb{K} \,;\, \|e\| . |\xi - \lambda| \leqq \|y.(\xi e - x)\|\} \subset$$
$$\subset \mathcal{V}(x) \subset$$
$$\subset \bigcup_{\|y\|=1} \bigcap_{\xi \in \mathbb{K}} \{\lambda \in \mathbb{K} \,;\, |\xi - \lambda| \leqq \|y.(\xi e - x)\|\}. \quad (7,16)$$

<u>Dokaz.</u> Naj bo $\|y\| = 1$. $\|(\xi e - x).y\| \leqq \|\xi e - x\|$. Uporabimo trditev [7,9].

$$\bigcap_{\xi \in \mathbb{K}} \{\lambda \,;\, \|e\| . |\xi - \lambda| \leqq \|(\xi e - x).y\|\} \subset$$
$$\subset \bigcap_{\xi \in \mathbb{K}} \{\lambda \,;\, \|e\| . |\xi - \lambda| \leqq \|\xi e - x\|\} = \mathcal{V}(x) .$$

Od tod pa že sledi prva inkluzija v (7,15).

$$\mathcal{V}(x) = \bigcap_{\xi \in \mathbb{K}} \{\lambda \,;\, |\xi - \lambda| \leqq \|(\xi e - x).\tfrac{1}{\|e\|} e\|\}.$$

Ker pa je $\|\frac{1}{\|e\|} e\| = 1$, je potrjena tudi druga inkluzija v (7,15).

(7,16) dokažemo analogno. □

Dokaz je prirejen po [8], 54.

Sedaj pa se omejimo le na kompleksne algebre: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. !

[7,11] DEFINICIJA. Element $x \in \mathcal{H}$ je hermitski, če je $V(x) \subset \subset \mathbb{R}$.

Množico hermitskih elementov označimo s Her($\mathcal{H}$) !

[7,12] TRDITEV. (a) Her($\mathcal{H}$) je zaprt realen podprostor v $\mathcal{H}$.

(b) $\mathbb{R}e \subset \mathrm{Her}(\mathcal{H})$.

(c) $x \in \mathrm{Her}(\mathcal{H}) \iff V(x) = \left[\frac{1}{\|e\|} D_\alpha^- \varphi_x(0)\ ,\ \frac{1}{\|e\|} D_\alpha^+ \varphi_x(0)\right]$.

Dokaz. (a) $x,y \in \mathrm{Her}(\mathcal{H})$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

$\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y) \in \mathbb{R}$, $\forall \psi \in \mathcal{D} \implies$
$\implies \alpha x + \beta y \in \mathrm{Her}(\mathcal{H})$.

$\{x_n\} \subset \mathrm{Her}(\mathcal{H})$ naj bo neko zaporedje, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
$\psi(x) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n)$, $\forall \psi \in \mathcal{D}$. Zaporedje $\{\psi(x_n)\}$ je realno, zato je tudi limita $\psi(x)$ realna in trditev je pravilna.

(b) Trivialno.

(c) Trditev je posledica trditve [7,5]. □

Dokaz točke (a) je vzet iz [38], 39.

Točka (c) zelo jasno kaže, kako močno je množica Her($\mathcal{H}$) odvisna od norme. Če naprimer vzamemo normo iz korolarja [3,12],(b), je: $\mathrm{Her}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_0 + \mathbb{R}e$ (realna direktna vsota!), kjer je $\mathcal{H}_0 = \{x \in \mathcal{H}\ ;\ V(x) = \{0\}\}$; Her($\mathcal{H}$) je torej realna hiperravnina cele algebre.

[7,13] TRDITEV. Naslednji izjavi sta za $x \in \mathcal{H}$ ekvivalentni:

(a) $x \in \mathrm{Her}(\mathcal{H})$;

(b) $\|e + i\alpha x\| = \|e\| + o(\alpha)$ za absolutno majhne $\alpha \in \mathbb{R}$.

Izjavo (b) lahko zapišemo tudi takole: $\exists \frac{d}{d\alpha}\|e + i\alpha x\|_{\alpha=0} = 0$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, ali takole: $D_\alpha^- \varphi_{ix}(0) = D_\alpha^+ \varphi_{ix}(0) = 0$.

Dokaz. $V(ix) = i\,V(x) \iff \min_{\lambda \in V(ix)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \max_{\lambda \in V(ix)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = 0$. Upoštevaje trditev [7,5] je gornja trditev dokazana. □

[7,14] TRDITEV. Naj bo $z \in \mathcal{H}$ tak element, da sta $\varphi_z(\alpha) = \|e + \alpha z\|$ in $\varphi_{iz}(\alpha) = \|e + i\alpha z\|$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ pri

$\alpha = 0$ odvedljivi funkciji. Potem sta za nek $\lambda \in \mathbb{C}$ elementa $z - \lambda e$ in $i(z - \lambda e)$ oba hermitska. Če je $\varphi_z'(0) = \beta$, $\varphi_{iz}'(0) = \gamma$, je:

$$\psi(z) = \lambda = \frac{1}{\|e\|}(\beta - i\gamma), \quad \forall \psi \in \mathcal{D} .$$

<u>Dokaz.</u> $\|e + \alpha z\| = \|e\| + \beta\alpha + o_1(\alpha)$;

$\|e + i\alpha z\| = \|e\| + \gamma\alpha + o_2(\alpha)$;

$\lambda = \frac{1}{\|e\|}(\beta - i\gamma)$; α naj bo realno in absolutno zelo majhno število. Tedaj je:

$$\|e + \alpha(z - \lambda e)\| = \|e(1 - \alpha\lambda) + \alpha z\| = |1 - \alpha\lambda| . \|e + \frac{\alpha}{1-\alpha\lambda} z\| =$$

$$= \sqrt{(1 - \frac{\alpha\beta}{\|e\|})^2 + \frac{\alpha^2\gamma^2}{\|e\|^2}} \cdot \|e + \alpha z + \alpha^2\lambda z + \alpha^3\lambda^2 z + \ldots\| =$$

$$= (1 - \frac{\alpha\beta}{\|e\|} + o_3(\alpha))(\|e + \alpha z\| + o_4(\alpha)) =$$

$$= (1 - \frac{\alpha\beta}{\|e\|} + o_3(\alpha))(\|e\| + \alpha\beta + o_5(\alpha)) = \|e\| + o_6(\alpha) .$$

Torej je $\frac{1}{i}(z - \lambda e)$ in s tem tudi $i(z - \lambda e)$ hermitski element.

$$\|e + i\alpha(z - \lambda e)\| = \|e(1 - i\alpha\lambda) + i\alpha z\| =$$

$$= |1 - i\alpha\lambda| . \|e + \frac{i\alpha}{1 - i\alpha\lambda} z\| =$$

$$= \sqrt{(1 - \frac{\alpha\gamma}{\|e\|})^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{\|e\|^2}} \cdot \|e + i\alpha z - \alpha^2\lambda z - \ldots\| =$$

$$= (1 - \frac{\alpha\gamma}{\|e\|} + o_7(\alpha))(\|e\| + \alpha\gamma + o_8(\alpha)) = \|e\| + o_9(\alpha) ,$$

in $z - \lambda e$ je tudi hermitski element.

$\psi(z - \lambda e) = \psi(z) - \lambda \in \mathbb{R}$;

$\psi(iz - i\lambda e) = i\psi(z) - i\lambda \in \mathbb{R}$.

To pa že pomeni: $\psi(z) - \lambda = 0$, $\forall \psi \in \mathcal{D}$. $\square$

8. ALGEBRE Z NORMIRANO ENOTO

Nadaljujmo z izpeljavo lastnosti numerične zaloge vrednosti. Do konca razdelka se bo izkazalo, da je ta teorija skoraj popolnoma neodvisna od asociativnosti, saj ne bo v končnem seznamu trditev manjkal noben pomembnejši izrek o numerični zalogi vrednosti pri asociativnih algebrah, le način dokazovanja je nekoliko drugačen: ponekod moramo uporabiti kanonske operatorje namesto originalnih elementov algebre. Ravno ugotovitev, da je v sedmem in osmem razdelku pravzaprav ista teorija kot recimo v [6], je njun najbolj pomemben zaključek. To namreč pomeni, da predstavlja numerična zaloga vrednosti izredno pomembno orodje v obravnavi neasociativnih Banachovih algeber.

Če pozorno pregledamo trditve prejšnjega razdelka, opazimo, da v resnici ni nobene povezave med multiplikacijo in numeričnimi zalogami vrednosti. Edina trditev, ki sploh nakaže zvezo, je [7,10]. Pa tudi ta trditev ni zadostna, saj se lahko zgodi, da sta množici, s katerima je $\mathcal{V}(x)$ v (7,15) in (7,16) navzdol omejena, prazni; to pa bi nas, kot bomo pozneje videli, bistveno oviralo. Ravno to nas navede na idejo, da enoto normiramo. S tem močno omejimo izbor norme, ki je bila v prejšnjem razdelku do konstantnega faktorja poljubna, da je le generirala prvotno topologijo.

V tem razdelku naj bo torej $\mathcal{H}$ Banachova algebra z multiplikacijo . in enoto e nad $\mathbb{K}$, norma pa naj bo algebrska in $\|e\| = 1$. Kot pove korolar [3,12],(a), ta omejitev še vedno ni bistvena. !

Za vsak $x \in \mathcal{H}$ velja:

$$\min_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} \{\operatorname{Re} \lambda\} \leqq \min_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} \{|\operatorname{Re} \lambda|\} \leqq \min_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} \{|\lambda|\}, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{8,1}$$

[8,1] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ je:

$$\min_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} \{|\lambda|\} \leqq \inf_{\|y\|=1} \{\|x.y\|, \|y.x\|\} \tag{8,2}$$

Dokaz. V presek v (7,15) vstavimo $\zeta = 0$.

$$\bigcap_{\zeta \in \mathbb{K}} \{\lambda; |\zeta - \lambda| \leqq \|(\zeta e - x).y\|\} \subset \{\lambda; |\lambda| \leqq \|x.y\|\}. \tag{*}$$

Potem iz (7,15) sledi: $\{|\lambda|;\ \lambda \in \mathcal{V}(x)\} =$

$= \{|\lambda|\,;\lambda \in \bigcup_{\|y\|=1} \bigcap_{\xi\in\mathcal{K}} \{\lambda;\ |\xi - \lambda| \leqq \|(\xi e - x).y\|\}\} =$

$= \bigcup_{\|y\|=1} \{|\lambda|;\ \lambda \in \bigcap_{\xi\in\mathcal{K}} \{\lambda;\ |\xi - \lambda| \leqq \|(\xi e - x).y\|\}\}$

in od tod: $\min_{\lambda\in\mathcal{V}(x)} \{|\lambda|\} = \min \bigcup_{\|y\|=1} \{|\lambda|;\ \ldots\} \leqq$

$\leqq \min\{|\lambda|;\ \ldots\}$, $\forall y$: $\|y\| = 1$. Uporabimo (*) :

$\min_{\lambda\in\mathcal{V}(x)} \{|\lambda|\} \leqq \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \{\lambda\,;\ |\lambda| \leqq \|x.y\|\}\} =$

$= \sup\{|\lambda|;\ |\lambda| \leqq \|x.y\|\} = \|x.y\|$, $\forall y$: $\|y\| = 1$.

$\min_{\lambda\in\mathcal{V}(x)} \{|\lambda|\} \leqq \inf_{\|y\|=1} \|x.y\|$.

Ponovimo ta postopek še s formulo (7,16), pa je trditev dokazana. □

Dokaz je izdelan po vzorcu iz [8], 54.

<u>[8,2] TRDITEV.</u> Naj bo $x \in \mathcal{H}$ in $\mu = \max_{\lambda\in\mathcal{V}(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\}$, $\nu =$ $= \min_{\lambda\in\mathcal{V}(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\}$, ter Exp poljubna eksponentna funkcija. Tedaj veljajo naslednje štiri trditve:

$$\alpha \geqq 0 \Longrightarrow \exp(\alpha\mu) \geqq \|\mathrm{Exp}_{L,R}(\alpha x)\| \geqq E(\alpha x)\ . \tag{8,3}$$

$$\alpha \leqq 0 \Longrightarrow \exp(\alpha\nu) \geqq \|\mathrm{Exp}_{L,R}(\alpha x)\| \geqq E(\alpha x)\ . \tag{8,4}$$

$$\mu = \sup_{\alpha>0}\left\{\frac{1}{\alpha}\ln\|\mathrm{Exp}_{L,R}(\alpha x)\|\right\} = \lim_{\alpha\searrow 0}\frac{1}{\alpha}\ln\|\mathrm{Exp}(\alpha x)\| = $$
$$= \sup_{\alpha>0}\left\{\frac{1}{\alpha}\ln E(\alpha x)\right\} = \lim_{\alpha\searrow 0}\frac{1}{\alpha}\ln E(\alpha x)\ . \tag{8,5}$$

$$\nu = \inf_{\alpha<0}\left\{\frac{1}{\alpha}\ln\|\mathrm{Exp}_{L,R}(\alpha x)\|\right\} = \lim_{\alpha\nearrow 0}\frac{1}{\alpha}\ln\|\mathrm{Exp}(\alpha x)\| = $$
$$= \inf_{\alpha<0}\left\{\frac{1}{\alpha}\ln E(\alpha x)\right\} = \lim_{\alpha\nearrow 0}\frac{1}{\alpha}\ln E(\alpha x)\ . \tag{8,6}$$

Pri tem smo s simbolom $\mathrm{Exp}_{L,R}$ menili eno od funkcij Exp_L in Exp_R .

<u>Dokaz.</u> Če je $x = 0$ ali $\alpha = 0$, sta trditvi (8,3) in (8,4) očitno pravilni. Zato vzemimo: $x \neq 0$ & $\alpha \neq 0$. Naj bo $0 < \beta < 1/\|x\|$. Zaradi (7,9) je: $1 - \beta\mu > 0$.

$\min\{\mathrm{Re}\,\lambda;\ \lambda \in \mathcal{V}(e - \beta x)\} = \min\{\mathrm{Re}\,\lambda;\ \lambda \in 1 - \beta\,\mathcal{V}(x)\} =$

$= \min\{\mathrm{Re}(1 - \beta\lambda)\ ;\ \lambda \in \mathcal{V}(x)\} = 1 - \beta\mu$.

Po trditvi [8,1] je: $1 - \beta\mu \leqq \|(e - \beta x).y\|$, $\forall y$: $\|y\| = 1$, oziroma: $(1 - \beta\mu)\|y\| \leqq \|(e - \beta x).y\|$, $\forall y \in \mathcal{H}$.

Vzemimo: $y = (e - \beta x)_{*}^{-1}$ (v smislu trditve [4,9]).

$(1 - \beta\mu)\|(e - \beta x)_{*}^{-1}\| \leqq 1$.

Naj bo $\alpha > 0$. Za dovolj velike $n \in \mathbb{N}$ je torej:

$\|(e - \frac{\alpha}{n} x)_{*}^{-1}\| \leqq (1 - \frac{\alpha}{n}\mu)^{-1}$, oziroma

$$(1 - \frac{\alpha}{n}\mu)^{-n} \geqq \|(e - \frac{\alpha}{n} x)_{*}^{-1}\|^{n} \geqq \|P_L^n((e - \frac{\alpha}{n} x)_{*}^{-1}) \quad . \qquad (*)$$

Uporabimo formuli (4,27) in (5,13).

$$\exp(\alpha\mu) \geqq \lim_{n \to \infty} \|P_L^n(e + \frac{\alpha}{n} x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} P_L^k(\alpha x)\| = \|\mathrm{Exp}_L(\alpha x)\| \ .$$

S tem je (8,3) že potrjeno. Nadomestimo sedaj x z -x !

$$\max_{\lambda \in \mathcal{V}(-x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \max_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} \{-\mathrm{Re}\,\lambda\} = - \min_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = - \nu \ .$$

$\exp(-\alpha\nu) \geqq \|\mathrm{Exp}_L(-\alpha x)\|$, $\forall \alpha > 0 \Rightarrow (8,4)$.

Če v (*) namesto P_L^n vstavimo P_R^n , dobimo iskane ocene še za Exp_R .

Po drugi strani pa je: $\|\mathrm{Exp}(\alpha x)\| = \|e + \alpha x\| + o(\alpha)$, za vsako eksponentno funkcijo Exp ter za absolutno majhne $\alpha \in \mathbb{R}$. Uporabimo neenačbo:

$(\beta - 1)/(2 - \beta) \geqq \ln\beta \geqq (\beta - 1)/\beta$, $0 < \beta < 2$.

$$\frac{[\|e + \alpha x\| - 1] + o(\alpha)}{2 - \|e + \alpha x\| - o(\alpha)} \geqq \ln\|\mathrm{Exp}(\alpha x)\| \geqq$$

$$\geqq \frac{[\|e + \alpha x\| - 1] + o(\alpha)}{\|e + \alpha x\| + o(\alpha)} \Big/ \cdot\frac{1}{\alpha} \ , \ \lim_{\alpha \searrow 0} \ , \ \lim_{\alpha \nearrow 0}$$

(logaritem smemo uporabiti, ker $\mathrm{Exp}(\alpha x)$ za absolutno majhne α ni 0 po trditvi [5,5]).

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \frac{1}{\alpha} \ln\|\mathrm{Exp}(\alpha x)\| = D_\alpha^+ \varphi_x(0) = \mu \ ,$$

$$\lim_{\alpha \nearrow 0} \frac{1}{\alpha} \ln\|\mathrm{Exp}(\alpha x)\| = D_\alpha^- \varphi_x(0) = \nu \quad \text{(po trditvi [7,5])}.$$

Od tod in iz prvih dveh formul pa že sledita drugi dve. □

Dokaz je pretežno vzet iz [10], 55.

<u>[8,3] KOROLAR.</u> Za vsak $x \in \mathcal{H}$ in za vsak $\alpha \in \mathbb{K}$ je:

$$\|\mathrm{Exp}_{L,R}(x)\| \leqq \max_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} |\exp\lambda| \ , \qquad (8,7)$$

$$\|\mathrm{Exp}_{L,R}(\alpha x)\| \leqq \exp(|\alpha|.v(x)) \ . \qquad (8,8)$$

<u>Dokaz.</u> (8,7) dobimo iz (8,3), če vstavimo $\alpha = 1$. Potem pa še x nadomestimo z αx , ter ocenimo:

$$\max_{\lambda \in \mathcal{V}(x)} |\exp \lambda| \leqq \exp v(x) \ . \ \square$$

<u>[8,4] TRDITEV.</u> Naj bo $x \in \mathcal{H}$ in $\varepsilon > 0$. Naslednje izjave so ekvivalentne:

(a) $\{\mathrm{Re}\, \lambda \ ; \ \lambda \in \mathcal{V}(x)\} = \{0\}$.

(b) $\|\mathrm{Exp}_L(\alpha x)\| \leqq 1 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\|\mathrm{Exp}_R(\alpha x)\| \leqq 1 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(d) $E(\alpha x) \leqq 1 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(e) $\|\mathrm{Exp}_L(\alpha x)\| \leqq 1 \ , \ \forall \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(f) $\|\mathrm{Exp}_R(\alpha x)\| \leqq 1 \ , \ \forall \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(g) $E(\alpha x) \leqq 1 \ , \ \forall \alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

(h) $\|e + \alpha x\| = 1 + \alpha^2 m_x(\alpha)$ za absolutno majhne $\alpha \in \mathbb{R}$, pri čemer je $|m_x(\alpha)|$ omejena količina.

(i) $\|e + \alpha x\| = 1 + o(\alpha)$ za absolutno majhne $\alpha \in \mathbb{R}$.

Iz vsake od teh izjav še sledijo izjave:

(A) $\|e + \alpha x\| \geqq 1 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(B) $0 \geqq \varphi(x)^2 \geqq \mathrm{Re}\, \varphi(x^2) \ , \ \forall \varphi \in \mathcal{D}$. (8,9)

(C) $x \neq 0 \Longrightarrow x^2 \neq 0$.

<u>Dokaz.</u> Shema dokaza ekvivalentnosti izjav (a) - (i) :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & (d) \arrow[dr, Rightarrow] & & & & \\ (a) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (b) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (e) \arrow[r, Rightarrow] & (g) \arrow[r, Rightarrow] & (h) \arrow[r, Rightarrow] & (i) \arrow[r, Rightarrow] & (a) \\ & (c) \arrow[r, Rightarrow] & (f) \arrow[ur, Rightarrow] & & & & \end{tikzcd}$$

Implikaciji (a) $\Longrightarrow$ (b) in (a) $\Longrightarrow$ (c) sledita iz (8,3) in (8,4). Implikacije (b) $\Longrightarrow$ (d) , (b) $\Longrightarrow$ (e) , (c) $\Longrightarrow$ (f) , (d) $\Longrightarrow$ (g) , (e) $\Longrightarrow$ (g) , (f) $\Longrightarrow$ (g) in (h) $\Longrightarrow$ (i) so trivialne.

(g) $\Longrightarrow$ (h). Za fiksen α je: $E(\alpha x) = \|\mathrm{Exp}_\alpha(\alpha x)\| =$

$$= \left\|e + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2!} x^2 + \ldots\right\| \geqq \|e + \alpha x\| - \left\|\frac{\alpha^2}{2!} x^2 + \ldots\right\| \geqq$$

$$\geqq \|e + \alpha x\| - \frac{\alpha^2}{2}\|x\|^2 \exp(|\alpha| . \|x\|) = \|e + \alpha x\| - \alpha^2 N_x(\alpha) \ .$$

$E(\alpha x) \leqq 1 \Longrightarrow \|e + \alpha x\| \leqq 1 + \alpha^2 N_x(\alpha)$.

$$\|e + \alpha x\| \geqq \|e + \alpha x\| \frac{\|e - \alpha x\|}{1 + \alpha^2 N_x(\alpha)} \geqq \frac{\|e - \alpha^2 x^2\|}{1 + \alpha^2 N_x(\alpha)} \geqq$$

$$\geqq (1 - \alpha^2 \|x\|^2)(1 - \alpha^2 N_x(\alpha) + \alpha^4 N_x(\alpha)^2 - \ldots) \geqq$$

$$\geqq 1 - \alpha^2(\|x\|^2 + N_x(\alpha))$$ za absolutno majhne $\alpha \in \mathcal{R}$.

(i) $\Longrightarrow$ (a). $\|e + \alpha x\|$ je pri $\alpha = 0$ v realnem smislu odvedljiva funkcija in odvod je 0. Trditev [7,5] nam potem da (a).

Dokažimo še posledice!

(A) sledi iz (i) zaradi konveksnosti funkcije $\varphi_x(\alpha)$.

(B). Naj bo $\psi \in \mathcal{D}$ in $\alpha \in \mathcal{R}$. Velja: $\operatorname{Re} \psi(x) = 0$ oziroma $\psi(x) = i\lambda$ za $\lambda \in \mathcal{R}$. Upoštevajmo izjavo (b).

$$0 \geqq \ln\|\mathrm{Exp}_L(\alpha x)\| \geqq \ln|\psi(\mathrm{Exp}_L(\alpha x))| =$$

$$= \ln\left|1 + \alpha\psi(x) + \frac{\alpha^2}{2!}\psi(x^2) + \frac{\alpha^3}{3!}\psi(P_L^3(x)) + \ldots\right| \geqq$$

$$\geqq \ln\left(\left|1 + \alpha\psi(x) + \frac{\alpha^2}{2}\psi(x^2)\right| - \left|\frac{\alpha^3}{3!}\psi(P_L^3(x)) + \ldots\right|\right)$$

$$\left|\frac{\alpha^3}{3!}\psi(P_L^3(x)) + \ldots\right| \leqq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|\alpha|^k}{k!}\|x\|^k \leqq$$

$$\leqq \frac{|\alpha|^3}{6}\|x\|^3 \exp(|\alpha| . \|x\|) = o_1(\alpha^2) .$$

$$0 \geqq \ln\left(\left|\left[1 + \frac{\alpha^2}{2}\operatorname{Re}\psi(x^2)\right] + i\left[\alpha\lambda + \frac{\alpha^2}{2}\operatorname{Im}\psi(x^2)\right]\right| - o_1(\alpha^2)\right) =$$

$$= \frac{\alpha^2}{2}\left[\operatorname{Re}\psi(x^2) + \lambda^2\right] + o_2(\alpha^2) .$$

Sledi: $0 \geqq \operatorname{Re}\psi(x^2) + \lambda^2$, oziroma $0 \geqq \operatorname{Re}\psi(x^2) + |\psi(x)|^2$.

(C). Naj bo $x^2 = 0$. Uporabimo (8,2) in prejšnjo trditev.

$|\psi(x)|^2 \leqq -\operatorname{Re}\psi(x^2) = 0$.

$$1 = \min_{\psi \in \mathcal{D}} \{\operatorname{Re}(\psi(e - \alpha x))\} \leqq \inf_{\|y\|=1} \{\|y.(e - x)\|\} \leqq$$

$$\leqq \frac{\|(e + \alpha x).(e - \alpha x)\|}{\|e + \alpha x\|} = \frac{\|e - \alpha^2 x^2\|}{\|e + \alpha x\|} = 1/\|e + \alpha x\| , \quad \forall \alpha \in \mathcal{R} .$$

To pa je v protislovju z izjavo (A), razen če je $\|e + \alpha x\| \equiv \equiv 1$, kar pa je mogoče le za $x = 0$. $\square$

Označimo s <u>co($\mathcal{M}$)</u> konveksno lupino množice $\mathcal{M}$.

[8,5] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ je:

$$\mathrm{co}(\mathrm{Sp}(L_x) \cap \mathbb{K}) \subset V(x) , \tag{8,10}$$

$$\mathrm{co}(\mathrm{Sp}(R_x) \cap \mathbb{K}) \subset V(x) . \tag{8,11}$$

Dokaz. Naj bo $\lambda \notin V(x)$. Po trditvi [7,9] eksistira tak $\xi \in \mathbb{K}$, da je: $|\xi - \lambda| > \|\xi e - x\| = \|L_{\xi e - x}\|$.
Ker iz tega sledi: $\xi \neq \lambda$, je:
$1 > \left\| \frac{1}{\xi - \lambda} L_{\xi e - x} \right\|$, iz česar dobimo:
$\exists \left[I - \frac{1}{\xi - \lambda} L_{\xi e - x}\right]^{-1} = (\lambda - \xi)(\lambda I - L_x)^{-1}$,
in zato: $\lambda \notin \mathrm{Sp}(L_x) \cap \mathbb{K}$.

Konveksno lupino smemo dodati v (8,10) zaradi konveksnosti množice $V(x)$.

Analogno dokažemo tudi (8,11). □

[8,6] TRDITEV. Naj bo $x \in \mathcal{H}$ tak element, da je $V(x) = V(x^2) = \{0\}$. Ali pa naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in $x \in \mathcal{H}$ tak element, da je $V(x) = \{0\}$. Tedaj je $x = 0$.

Dokaz. Naj bo najprej $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in $V(x) = \{0\}$. Tedaj je:
$\{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(\exp(i\varphi).x)\} = \{0\}$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$,
iz česar sledi:
$\|\mathrm{Exp}_L(\alpha.\exp(i\varphi).x)\| \leqq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$,
oziroma $\|\mathrm{Exp}_L(\xi x)\| \leqq 1$, $\forall \xi \in \mathbb{C}$.
Iz Liouvilleovega izreka pa izvemo, da je takrat $x = 0$.

S tem smo kompleksni primer odpravili v celoti.
Naj bo zato vnaprej $\mathcal{H}$ realna algebra in x tak element, da je $V(x) = V(x^2) = \{0\}$. $\mathcal{H}^c$ naj bo kompleksifikacija algebre $\mathcal{H}$, kot smo jo opisali na strani 37 : $\|e\|_c = 1$, $\|z\|_c = \|z\|$ za vsak $z \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^c$.
V $\mathcal{H}$ velja: $\exists \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}\left[\|e + \alpha x\| - 1\right] = 0$ (po trditvi [7,5]).
Potem pa to velja tudi v $\mathcal{H}^c$ in
$\{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(\mathcal{H}^c, x)\} = \{0\}$.
Analogno dokažemo tudi: $\{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(\mathcal{H}^c, x^2)\} = \{0\}$.
Uporabimo (8,9): $0 \geqq \psi(x)^2 \geqq \mathrm{Re}\,\psi(x^2) = 0$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^c)$.
Torej je: $V(\mathcal{H}^c, x) = \{0\}$, kar pa nam spet da: $x = 0$. □

[8,7] TRDITEV. Za vsak $x \in \mathcal{H}$ je:

$$V(\mathcal{H},x) = V(\mathcal{B}(\mathcal{H}),L_x) = V(\mathcal{B}(\mathcal{H}),R_x) . \qquad (8,12)$$

Dokaz. Uporabimo (3,15) in trditev [7,5] in dokazujmo le za L_x, ker je za R_x dokaz ravno tak.

$$\tfrac{1}{\alpha}[\|e + \alpha x\| - 1] = \tfrac{1}{\alpha}[\|L_{e+\alpha x}\| - 1] = \tfrac{1}{\alpha}[\|I + \alpha L_x\| - 1] .$$

Odvedljivost funkcij $\|e + \alpha x\|$ in $\|I + \alpha L_x\|$ pri $\alpha = 0$ torej nastopa istočasno in zato velja:

$$\{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(\mathcal{H},x)\} = \{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(\mathcal{B}(\mathcal{H}),L_x)\} .$$

Za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ je s tem trditev že dokazana. Poglejmo še primer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$!

$$\{\mathrm{Re}(\lambda.\exp(i.\varphi)) \,;\ \lambda \in V(\mathcal{H},x)\} =$$
$$= \{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(\mathcal{H},\exp(i\varphi)x)\} =$$
$$= \{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(\mathcal{B}(\mathcal{H}),\ \exp(i\varphi)L_x)\} =$$
$$= \{\mathrm{Re}(\lambda.\exp(i\varphi)) \,;\ \lambda \in V(\mathcal{B}(\mathcal{H}),L_x)\} ,\ \forall \varphi \in [0,2\pi] .$$

Ker sta množici $V(\mathcal{H},x)$ in $V(\mathcal{B}(\mathcal{H}),L_x)$ konveksni, to že zadošča za njuno enakost; zadnja enačba namreč pove, da imata obe množici iste oporne premice. $\square$

[8,8] KOROLAR. Naj bo $x \in \mathcal{H}$.

(a) $$\min_{\lambda \in V(x)} \{|\lambda|\} \leq \inf\{\|L_x A\| ,\ \|AL_x\| ,\ \|R_x A\|,\ \|AR_x\|;\ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ,\ \|A\| = 1\} . \qquad (8,13)$$

(b) $$\max_{\lambda \in V(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \sup_{\alpha > 0} \{\tfrac{1}{\alpha} \ln\|\mathrm{Exp}(\alpha L_x)\|\} = \lim_{\alpha \searrow 0} \tfrac{1}{\alpha} \ln\|\mathrm{Exp}(\alpha L_x)\| . \qquad (8,14)$$

(c) $$\min_{\lambda \in V(x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \inf_{\alpha < 0} \{\tfrac{1}{\alpha} \ln\|\mathrm{Exp}(\alpha L_x)\|\} = \lim_{\alpha \nearrow 0} \tfrac{1}{\alpha} \ln\|\mathrm{Exp}(\alpha L_x)\| . \qquad (8,15)$$

(d) Izjavi (b) in (c) ob zamenjavi $L_x \longrightarrow R_x$.

[8,9] KOROLAR. Za $x \in \mathcal{H}$ so naslednje izjave ekvivalentne:

(a) $\{\mathrm{Re}\,\lambda \,;\ \lambda \in V(x)\} = \{0\}$.

(b) $\|\mathrm{Exp}(\alpha L_x)\| = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\|\mathrm{Exp}(\alpha R_x)\| = 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Katerakoli od izjav (b), (e), (h), (i) iz trditve

[8,4], če namesto x pišemo L_x ali R_x, namesto e pa I.

Do konca razdelka se spet omejimo na kompleksne algebre: $\mathbb{K} = \mathbb{C}$! **!**

[8,10] KOROLAR. Naj bo $x \in \mathcal{H}$. Naslednje izjave so ekvivalentne:

(a) $x \in \mathrm{Her}(\mathcal{H})$.

(b) $L_x \in \mathrm{Her}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

(c) $R_x \in \mathrm{Her}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$.

(d) Katerakoli od izjav (b) - (h) trditve [8,4] in katerakoli od izjav (b) - (d) korolarja [8,9], če namesto α pišemo $i\alpha$.

[8,11] KOROLAR. Naj bo $x \in \mathrm{Her}(\mathcal{H})$. Tedaj je:

(a) $\|e + i\alpha x\| \geqq 1 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $\|I + i\alpha L_x\| \geqq 1 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $\|I + i\alpha R_x\| \geqq 1 \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(d) $\psi(x)^2 \leqq \mathrm{Re}\, \psi(x^2) \ , \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H})$. (8,16)

(e) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$.

[8,12] KOROLAR. Naj bo $x \in \mathcal{H}$. Tedaj je:

(a) $\mathrm{co}(\mathrm{Sp}(L_x)) \subset V(x)$. (8,17)

(b) $\rho(L_x) \leqq v(x)$. (8,18)

(c) $x \in \mathrm{Her}(\mathcal{H})$ implicira za vsak $\alpha \in \mathbb{C}$:

$\rho(\alpha I + L_x) = v(\alpha e + x) = \|\alpha e + x\|$. (8,19)

Vse tri izjave veljajo tudi, če L_x nadomestimo z R_x.

Dokaz. Iz [8], 57, sledi: $\rho(\alpha I + A) = \|\alpha I + A\|$ za $A \in \mathrm{Her}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ in vsak $\alpha \in \mathbb{C}$.

$\rho(\alpha I + L_x) = \|\alpha I + L_x\| = \|\alpha e + x\| \geqq v(\alpha e + x) \geqq \rho(\alpha I + L_x)$. $\square$

[8,13] TRDITEV. Če sta elementa x in ix v $\mathcal{H}$ oba hkrati hermitska, je $x = 0$. Če je z tak element v $\mathcal{H}$, da sta $\varphi_z(\alpha)$ in $\varphi_{iz}(\alpha)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ obe hkrati odvedljivi funkciji pri $\alpha = 0$, je: $z = (\beta - i\gamma)e$, kjer je $\beta = \varphi_z'(0)$, $\gamma = \varphi_{iz}'(0)$.

Dokaz. $x \in \mathrm{Her}(\mathcal{H}) \Longrightarrow \mathcal{V}(x) \subset \mathbb{R}$.
$ix \in \mathrm{Her}(\mathcal{H}) \Longrightarrow i\mathcal{V}(x) \subset \mathbb{R}$.
Torej je $\mathcal{V}(x) = \{0\}$ in po trditvi [8,6] je $x = 0$.

Ostali del trditve potem sledi iz trditve [7,14]. □

[8,14] TRDITEV. Preslikava $x \longrightarrow v(x)$ iz $\mathcal{H}$ v $\mathbb{R}$ je norma, ekvivalentna prvotni normi:

$$\|x\|.\exp(-1) \leqq v(x) \leqq \|x\| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ . \qquad (8,20)$$

Dokaz. Naj bodo $x,y \in \mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Veljajo naslednje ugotovitve:

$v(x) \geqq 0$.

$$v(\alpha x) = \max_{\lambda \in \mathcal{V}(\alpha x)} \{|\lambda|\} = \max_{\mu \in \mathcal{V}(x)} \{|\alpha\lambda|\} = |\alpha|.v(x) \ .$$

$$v(x + y) = \max_{\lambda \in \mathcal{V}(x+y)} \{|\lambda|\} \leqq \max_{\lambda \in \mathcal{V}(x)+ \mathcal{V}(y)} \{|\lambda|\} =$$

$$= \max_{\lambda \in \mathcal{V}(x), \mu \in \mathcal{V}(y)} \{|\lambda + \mu|\} \leqq \max_{\lambda \in \mathcal{V}(x), \mu \in \mathcal{V}(y)} \{|\lambda| + |\mu|\} =$$

$$= v(x) + v(y) \ .$$

$$v(x) \leqq \|x\|/\|e\| = \|x\| \ .$$

v je torej polnorma, navzgor omejena z dano normo. Trditev bo dokazana tisti hip, ko bomo pokazali levo neenačbo v (8,20). V ta namen uporabimo (5,38) z $r = 1$ in eksponentno funkcijo Exp_L ter (8,8):

$$\|x\| \leqq \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_1} \|\mathrm{Exp}_L(\xi x)\|.|d\xi| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp v(x).d\varphi = \exp v(x) \ .$$

$v(x) \geqq \ln\|x\|$, če $x \neq 0$.

Zamenjajmo x z $\frac{\exp 1}{\|x\|} x$!

$$\frac{\exp 1}{\|x\|} v(x) \geqq \ln \exp 1 = 1 \ .$$

$v(x) \geqq \|x\|.\exp(-1)$. □

Dokaz je vzet iz [8], 56.

V [7], 111 - 114, najdemo dokaz, da ocene (8,20) v splošnem ni mogoče izboljšati.

[8,15] TRDITEV. Linearna lupina množice $\mathcal{D}$ je cel prostor

$\mathcal{H}^*$. $\mathcal{D}$ torej loči točke v $\mathcal{H}$.

Dokaz prvega stavka, ki ga najdemo v [7], 101, ni odvisen od asociativnosti in je zato popolnoma nespremenjen uporaben tudi tukaj. Drugi stavek pa sledi od tod ali pa kar iz trditve [8,14].

9. METAKOMPLEKSNE ALGEBRE

V tem razdelku bomo storili tisto, čemur smo se ves čas izogibali, pač v težnji k splošnosti: zahtevali bomo, da ima dana algebrska norma obe specialni lastnosti iz tretjega razdelka, namreč norma enote je 1 in enotna sfera je je v enoti gladka. Pri tem pa se bomo kolikor mogoče izogibali polnosti, ki pri ključnih izrekih ne bo potrebna.

Algebram s tako normo bomo rekli metakompleksne. Ime morda ni najbolj posrečeno, opiše pa dejstvo, dokazano v prvi polovici razdelka, da je vsaka podalgebra z enim generatorjem, ki ni mnogokratnik enote, izomorfna kompleksnim številom. Metakompleksna algebra je torej poseben primer kvadratne algebre, in sicer je v kompleksnem primeru kar enodimenzionalna.

Izrek [9,10] da izredno široko ekvivalentno definicijo - metakompleksne algebre so namreč kar Hilbertove algebre z normirano enoto - , izrek [9,11] pa takoj nato pokaže, da so metakompleksne algebre kljub vsemu zelo specialne.

Vse nadaljevanje poglavja je posvečeno naštevanju lastnosti metakompleksnih algeber; prav na koncu navedemo še nekaj šibkih strukturnih izrekov.

[9,1] DEFINICIJA. Naj bo $\mathcal{H}$ vektorski prostor nad $\mathbb{K}$ z lastnostmi:

(a) $\mathcal{H}$ je algebra za multiplikacijo . in z enoto e ;

(b) $\mathcal{H}$ je normiran prostor za neko normo $\|.\|$, za katero velja:

(A) $\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$;

(B) $\|e\| = 1$;

(C) $\exists \frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Tedaj bomo $\mathcal{H}$ imenovali metakompleksna algebra.

[9,2] TRDITEV. Napolnitev $\widetilde{\mathcal{H}}$ metakompleksne algebra $\mathcal{H}$ kot normiranega prostora je Banachova algebra (za zvezno razširjen produkt) in je spet metakompleksna algebra. card $\{\varphi \in \mathcal{H}^*;\ \varphi(e) = \|\varphi\| = 1\} = 1$.

Dokaz. Da se lahko produkt zvezno razširi na $\widetilde{\mathcal{H}}$, pri čemer ostane (A) v veljavi, zvemo iz [38], 9, 10 (dokaz v navedeni literaturi, narejen za asociativne algebre, ni prav nič odvisen od asociativnosti). $\widetilde{\mathcal{H}}$ je torej res Banachova algebra, pri čemer je e še naprej enota in velja tudi (B).
Pa naj bo $\mathcal{D} = \{\psi \in \mathcal{H}^*;\ \psi(e) = \|\psi\| = 1\}$.
Hahn - Banachov izrek zagotavlja nepraznost te množice. Naj bo še: $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi(x) = \beta + i\gamma$.

$$\|e + \alpha x\| \geqq |\psi(e + \alpha x)| = |1 + \alpha\beta + i\alpha\gamma| .$$

$$\|e + \alpha x\| - 1 \geqq \sqrt{(1 + \alpha\beta)^2 + \alpha^2\gamma^2} - 1 = \alpha\beta + o(\alpha) .$$

$$\alpha > 0 \Rightarrow \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}[\|e + \alpha x\| - 1] \geqq \beta .$$

$$\alpha < 0 \Rightarrow \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha}[\|e + \alpha x\| - 1] \leqq \beta .$$

Torej je $\frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\| = \beta$. V splošnem je zato:

$$\text{card}\,\{\text{Re}\,\psi(x)\ ;\ \psi \in \mathcal{D}\} = 1 ,\ \forall x \in \mathcal{H} .$$

Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, to že pomeni: $\text{card}\,\mathcal{D} = 1$.
Če pa je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, recimo, da eksistirata $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{D}$, $\psi_1 \neq \psi_2$. Obstaja tak x potemtakem, da je sicer $\text{Re}\,\psi_1(x) = \text{Re}\,\psi_2(x)$, toda: $\text{Im}\,\psi_1(x) \neq \text{Im}\,\psi_2(x)$. Po drugi strani pa je: $\text{Im}\,\psi_1(x) = -\,\text{Re}\,\psi_1(ix) = -\,\text{Re}\,\psi_2(ix) = \text{Im}\,\psi_2(x)$.

Torej je čisto splošno: $\text{card}\,\mathcal{D} = 1$. Ker pa je $\mathcal{H}^* = (\widetilde{\mathcal{H}})^*$, je $\mathcal{D}$ množica stanj v $\widetilde{\mathcal{H}}$. Uporabimo trditev [7,6] in vidimo, da velja tudi (c), zato je $\widetilde{\mathcal{H}}$ res metakompleksna algebra. □

[9,3] IZREK. Naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in $\mathcal{H}$ metakompleksna algebra z enoto e. Tedaj je $\mathcal{H}$ izometrično izomorfna obsegu $\mathbb{C}$ (z absolutno vrednostjo kot normo).

Dokaz. Najprej $\mathcal{H}$ napolnimo v $\widetilde{\mathcal{H}}$. Po trditvi [8,15] edino stanje loči točke, zato je $\dim \widetilde{\mathcal{H}} = 1$, oziroma $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} = \mathbb{C}e$. Preslikava $\lambda e \longrightarrow \lambda$ iz $\mathcal{H}$ v $\mathbb{C}$ je očitno res izometrični izomorfizem. □

Ohlapno rečeno: obstaja samo ena kompleksna metakompleksna algebra, namreč $\mathbb{C}$.

Naj bo $\mathcal{H}$ metakompleksna algebra z enoto e in normo $\|.\|$ nad $\mathbb{K}$, τ (edini) funkcional v $\mathcal{H}^*$ z lastnostima $\tau(e) =$

$= \|\tau\| = 1$, in Ker $\tau = \mathcal{H}_o$. Tedaj je $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ Osbornov par, v katerem je τ sled, kar preprosto preverimo, če v (1,1) uporabimo (1,4). Če je $\mathcal{H}$ poln prostor, je $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$ BO-par.

Odslej uporabljajmo simbole $\sigma, \delta, N, |.|, \times, {}^K, \mathcal{H}^o$ samo glede na omenjeni par $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$. !

[9,4] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ polna metakompleksna algebra z enoto e in normo $\|.\|$. Tedaj je $\mathcal{H}^o = \{0\}$, $\sigma(.,.)$ je neizrojena forma, $\delta(.,.)$ je skalarni produkt in modul $|.|$ norma, ekvivalentna prvotni. Velja še:

$$N(x) = |x|^2 \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ ; \tag{9,1}$$

$$\tau(a^2) = -|a|^2 \ , \ \forall a \in \mathcal{H}_o \ ; \tag{9,2}$$

$$\|a\| = |a| \ , \ \forall a \in \mathcal{H}_o \ . \tag{9,3}$$

Dokaz. Naj bo $a \in \mathcal{H}_o - \{0\}$. Sledi: $\tau(a) = 0$ in $V(a) = \{0\}$. Potem pa velja (8,9): $0 \geq \tau(a^2)$.
Toda iz $\tau(a^2) = 0$ sledi $V(a^2) = \{0\}$ in po trditvi [8,6] je tedaj $a = 0$, kar pa ni res. Torej je:
$\tau(a^2) < 0$, $\forall a \in \mathcal{H}_o - \{0\}$.
$N(a) = -\tau(a^2) > 0$ po (1,13).
Trditev [1,2] nam pove, da je zato $\mathcal{H}^o \subset \mathcal{H}_o$. Ker pa je $\mathcal{H}^o = \mathrm{Ker}\, N$, je $\mathcal{H}^o = \mathrm{Ker}\, N|_{\mathcal{H}_o} = \{0\}$.
Potem pa trditev [1,3] pove, da je $\delta(.,.)$ skalarni produkt, modul $|.|$ ustrezna norma na vsem prostoru $\mathcal{H}$ ter $\sigma(.,.)$ nedegenerirana forma. Iz izpeljave tudi dobimo (9,2) in od tod (9,1).

Po trditvi [7,8] je $|||.||| = 2\|.\|$ BO-norma. Iz (3,23) potem dobimo: $\|x^K\| = |||x^K|||/2 \leq 3|||x|||/2 = 3\|x\|$ za vsak $x \in \mathcal{H}$.

$$|x| = \sqrt{|\tau(x.x^K)|} \leq \sqrt{\|x.x^K\|} \leq \sqrt{\|x\|.\|x^K\|} \leq \sqrt{3}\,\|x\| \ . \tag{*}$$

Naj bo sedaj $\mathcal{H}^c$ kompleksifikacija algebre $\mathcal{H}$. Za vsak $x \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^c$ eksistira $\frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}$ $(\alpha \in \mathcal{R})$, zato iz trditve [7,5] sledi:

$$\min_{\lambda \in V(\mathcal{H}^c,x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \max_{\lambda \in V(\mathcal{H}^c,x)} \{\mathrm{Re}\,\lambda\} = \mathrm{Re}\,\psi(x) \ , \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^c).$$

Konstruirajmo funkcional τ_c nad $\mathcal{H}^c$ s pogojema:
τ_c je linearen & $\tau_c(x) = \tau(x)$, $\forall x \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^c$.
$\tau_c(x + iy) = \tau_c(x) + i\tau_c(y) = \tau(x) + i\tau(y)$, $\forall x,y \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}^c$.

$\tau_c(e) = \tau(e) = 1 \Rightarrow \|\tau_c\|_c \geqq |\tau_c(e)| = 1$.

Za vsak $z \in \mathcal{H}^c$ eksistira tak $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, da je:

$|\tau_c(z)| = \alpha\tau_c(z) = \tau_c(\alpha z)$.

Če je $\alpha z = x + iy$, $x,y \in \mathcal{H}$, je očitno $\tau(y) = 0$.

$|\tau_c(z)| = \tau(x) \leqq \|\tau\|.\|x\| = \|x\| \leqq \max\{\|x\|,\|y\|\} \leqq \|\alpha z\|_c =$
$= \|z\|_c$, zato: $\|\tau_c\|_c \leqq 1$.

Torej je $\tau_c \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^c)$.

Če je $x \in \mathcal{H}$ in $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^c)$ poljubno stanje, je:

$\mathrm{Re}\,\psi(x) = \mathrm{Re}\,\tau_c(x) = \tau(x)$.

Za $a \in \mathcal{H}_o$ je tedaj: $\mathrm{Re}\,\psi(a) = 0$, in iz (8,9) sledi:

$0 \geqq \psi(a)^2 \geqq \mathrm{Re}\,\psi(a^2)$.

Ker pa je tudi $a^2 \in \mathcal{H}$, je: $\mathrm{Re}\,\psi(a^2) = \tau(a^2)$, in zato:

$|\psi(a)|^2 = -\psi(a)^2 \leqq -\mathrm{Re}\,\psi(a^2) = -\tau(a^2) = |a|^2$.

Torej je: $|\psi(a)| \leqq |a|$, $\forall a \in \mathcal{H}_o$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^c)$.

Po drugi strani pa je za $a \in \mathcal{H}_o$:

$\mathrm{Im}\,\psi(ia) = \mathrm{Re}\,\psi(a) = 0$, $\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^c)$, zato:

$ia \in \mathrm{Her}(\mathcal{H}^c)$, in po (8,19) je:

$v(\mathcal{H}^c, ia) = \|ia\|_c = \|a\|_c = \|a\|$.

Za vsak $z \in \mathcal{H}^c$ eksistira tak funkcional $\psi_z \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^c)$, da je: $|\psi_z(z)| = v(\mathcal{H}^c, z)$. Torej je tudi:

$\|a\| = v(\mathcal{H}^c, ia) = |\psi_{ia}(ia)| = |\psi_{ia}(a)| \leqq |a|$, $\forall a \in \mathcal{H}_o$.

Še ocena v nasprotno smer:

$|a| = \sqrt{|\tau(a.a^K)|} = \sqrt{-\tau(a^2)} \leqq \sqrt{\|a^2\|} \leqq \|a\|$.

To pa nam že da (9,3) .

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ in $a \in \mathcal{H}_o$ je:

$\|\alpha e + a\| \leqq \|\alpha e\| + \|a\| = |\alpha| + |a| \leqq \sqrt{2}\sqrt{\alpha^2 + |a|^2} = \sqrt{2}\,|\alpha e + a|$.

To in pa (*) nam še da:

$$\|x\|/\sqrt{2} \leqq |x| \leqq \sqrt{3}\|x\| \; , \; \forall x \in \mathcal{H} \,. \; \square \qquad (9,4)$$

[9,5] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ algebra iz trditve [9,4].

$$\sigma(x,y) = \sigma(y,x) = \delta(x,y^K) \; , \; \forall x,y \in \mathcal{H}. \qquad (9,5)$$

Dokaz. Bodita $a,b \in \mathcal{H}_o$. Element b razstavimo na komponento, vzporedno z a, in na komponento, pravokotno na a:

$b = \alpha a + b_o$, $\delta(a,b_o) = 0$.

Naj bo: $a^2 = -|a|^2 e + c$ (upoštevaje (9,2)) ,

$a.b_o = \lambda e + d$, $c,d \in \mathcal{H}_o$.
Če je $a = 0$, je tudi $\lambda = 0$. Vzemimo pa, da $a \neq 0$.
$\|a.b\| \leqq \|a\|.\|b\| = |a|.|b| = |a|.(\alpha^2|a|^2 + |b_o|^2)^{1/2}$.
$\|a.b\| = \|a.(\alpha a + b_o)\| = \|-\alpha|a|^2 e + \alpha c + \lambda e + d\| =$
$= |-\alpha|a|^2 + \lambda|.\|e + \frac{1}{-\alpha|a|^2 + \lambda}(\alpha c + d)\| \geqq |-\alpha|a|^2 + \lambda|$
(zaradi trditve [8,4], (A)) za $-\alpha|a|^2 + \lambda \neq 0$, kar pa je res za dovolj velike $|\alpha|$.
Tako smo dobili: $|-\alpha|a|^2 + \lambda| \leqq |a|.(\alpha^2|a|^2 + |b_o|^2)^{1/2}$.
Neenačbo kvadrirajmo:

$$\alpha^2|a|^4 + \lambda^2 - 2\alpha\lambda|a|^2 \leqq \alpha^2|a|^4 + |a|^2|b_o|^2 .$$

$$\lambda^2 - 2\alpha|a|^2\lambda - |a|^2|b_o|^2 \leqq 0 .$$

Recimo, da je b_o poljuben, α pa tak, da je $\operatorname{sgn}\alpha = -\operatorname{sgn}\lambda$ in $|\alpha|$ zelo velik. Potem je neenačba nepravilna, razen če domnevamo, da je $\lambda = 0$. Če sedaj spet vzamemo, da je α (in z njim b) popolnoma poljuben, sledi:
$\tau(a.b) = -\alpha|a|^2 = -\delta(a,b) = -\delta(b,a)$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_o$.

Pa naj bo: $x = \varepsilon e + a$, $y = \eta e + b$, $\varepsilon,\eta \in \mathbb{R}$.
$\tau(x.y) = \tau(\varepsilon\eta e + \varepsilon b + \eta a + a.b) = \varepsilon\eta + \tau(a.b) = \varepsilon\eta -$
$- \delta(a,b) = \delta(x,y^K) = \delta(y,x^K) = \tau(y,x)$. □

<u>[9,6] TRDITEV.</u> Naj bo $\mathcal{H}$ algebra iz trditve [9,4]. $a,b \in \mathcal{H}_o$ &
& $\delta(a,b) = 0$ $\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \delta(a.b,b) = \delta(b.a,b) = 0 . \qquad (9,6)$$

<u>Dokaz.</u> Naj bo $x = e + \alpha a$. $x.b = b + \alpha a.b$.
$\tau(x.b) = \alpha\tau(a.b) = \alpha\sigma(a,b) = -\alpha\delta(a,b) = 0$ po (9,5), zato: $x.b \in \mathcal{H}_o$.
$\|e + \alpha a\| = 1 + \alpha^2 m_a(\alpha)$ za absolutno majhne α po trditvi [8,4],(h).

$$0 \leqq \|x\|^2\|b\|^2 - \|x.b\|^2 = \|e + \alpha a\|^2|b|^2 - |b + \alpha a.b|^2 =$$
$$= [1 + 2\alpha^2 m_a(\alpha) + \alpha^4(m_a(\alpha))^2].|b|^2 - \delta(b + \alpha a.b, b + \alpha a.b) =$$
$$= \alpha^4(m_a(\alpha))^2|b|^2 + \alpha^2(2m_a(\alpha)|b|^2 - |a.b|^2) - 2\alpha\delta(a.b,b) .$$

Za absolutno majhne α je tretji člen dominanten, utegnil pa bi biti negativen za določen predznak α , razen če je $\delta(a.b,b) = 0$.

Napravimo isti račun s produktom $b.x$, pa bomo dobili še $\delta(b.a,b) = 0$. □

[9,7] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ algebra iz trditve [9,4] in a,b,c paroma ortogonalni elementi v $\mathcal{H}_o$.

$$\delta(a.b,c) = \delta(b,a^K.c) \,, \qquad (9,7)$$

$$\delta(b.a,c) = \delta(b,c.a^K) \,, \qquad (9,8)$$

$$b.c + c.b = 0 \,. \qquad (9,9)$$

Dokaz. Naj bodo e,a,b,c paroma ortogonalni. Če je dim $\mathcal{H} < 4$, je pač kàteri izmed njih enak 0. Za $\alpha \in \mathbb{R}$ definirajmo: $x = e + \alpha a$, $y = b + c \in \mathcal{H}_o$.

$x.y = b + c + \alpha a.b + \alpha a.c$.

$\tau(x.y) = \sigma(x,y) = \delta(x,y^K) = -\delta(x,y) = 0$ po (9,5), zato:

$x.y \in \mathcal{H}_o$.

$\|x\| = \|e + \alpha a\| = 1 + \alpha^2 m_a(\alpha)$ za absolutno majhne α (po trditvi [8,4],(h)).

$$0 \leq \|x\|^2\|y\|^2 - \|x.y\|^2 = [1 + \alpha^2 m_a(\alpha)]^2(|b|^2 + |c|^2) -$$

$$- \delta(b + c + \alpha a.b + \alpha a.c, b + c + \alpha a.b + \alpha a.c) =$$

$$= \alpha^4(m_a(\alpha))^2(|b|^2 + |c|^2) + \alpha^2[2m_a(\alpha).(|b|^2 + |c|^2) - |a.b|^2 -$$

$$- |a.c|^2 - 2\delta(a.b,a.c)] - 2\alpha[\delta(a.c,b) + \delta(a.b,c)] \,.$$

Pri tem smo upoštevali trditev [9,5].

Za majhne $|\alpha|$ sta prva dva člena zanemarljiva v primerjavi s tretjim, ki pa je pri določenem predznaku α lahko negativen, razen če je: $\delta(a.c,b) + \delta(a.b,c) = 0$. (*)

Enak račun s produktom y.x nam da še:

$\delta(c.a,b) + \delta(b.a,c) = 0$. (**)

S preureditvijo dobimo (9,7) in (9,8).

V (*) naredimo ciklične permutacije!

$\delta(b.a,c) + \delta(b.c,a) = 0$, (***)

$\delta(c.b,a) + \delta(c.a,b) = 0$. (****)

Enačbi (**) in (****) dasta:

$\delta(c.a,b) - \delta(b.c,a) = 0$,

to pa da skupaj z (****):

$\delta(c.b,a) + \delta(b.c,a) = \delta(b.c + c.b,a) = 0$.

Iz (9,6) še sledi:

$\delta(b.c + c.b,b) = \delta(b.c + c.b,c) = 0$.

$\delta(b.c + c.b,e) = \delta(b.c,e) + \delta(c.b,e) = \sigma(b.c,e) + \sigma(c.b,e) =$

$= \sigma(b,c) + \sigma(c,b) = -2\delta(b,c) = 0$.

Potem pa je element b.c + c.b ortogonalen na cel $\mathcal{H}$ in je zato enak 0 . □

[9,8] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ algebra iz trditve [9,4]. $\mathcal{H}$ je kvadratna algebra in $\mathcal{H}_0$ je antikomutativna algebra.

Dokaz. Vzemimo najprej, da je $\dim \mathcal{H} > 2$ in bodita a in b dva ortogonalna elementa iz $\mathcal{H}_0$, $|a| = |b| = 1$.
$\delta(a + b, a - b) = 0$, zato iz (9,9) sledi:
$0 = (a + b).(a - b) + (a - b).(a + b) = 2(a^2 - b^2)$,
oziroma $a^2 = b^2$.
$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Longrightarrow (\alpha a + \beta b)^2 = a^2$.
To pa pove, da so kvadrati vseh normiranih elementov iz $\mathcal{H}_0$ enaki. Ta trditev seveda velja tudi za algebre z dimenzijo 1 ali 2, torej velja splošno.

Pa recimo, da je $a^2 = |a|^2(-e + r)$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$, kjer je $r \in \mathcal{H}_0$ neodvisen od a . Pri tem smo upoštevali (9,2). Denimo, da je $r \neq 0$. Iz (9,3) sledi:
$\|r\|^2 = |r|^2 = -\tau(r^2) = |\tau(r^2)| \leqq \|r^2\| \leqq \|r\|^2$, zato:
$|r|^2 = \|r^2\|$. Poleg tega je: $r^2 = |r|^2(-e + r)$.
Zato: $|r|^2 = \||r|^2(-e + r)\|$ in z upoštevanjem (9,4):
$1 = \|-e + r\| \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}|-e + r| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1 + |r|^2}$.
Od tod dobimo: $|r| \leqq \sqrt{2}$.

Uvedimo nov vektor: $z = \dfrac{1}{|r|\sqrt{4 - |r|^2}}(|r|^2 e - 2r)$.

Zlahka preverimo: $z^2 = -e$.
Podalgebra $\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}z$ je očitno asociativna, zato eksistira ena sama eksponentna funkcija:

$$\mathrm{Exp}(\lambda z) = e + \lambda z - \frac{\lambda^2}{2!} e - \frac{\lambda^3}{3!} z + \frac{\lambda^4}{4!} e + \ldots =$$
$$= e.\cos\lambda + z.\sin\lambda .$$

Uporabimo trditev [5,8]:

$$\mathrm{Exp}(\lambda z) = \exp\left(\frac{\lambda|r|}{\sqrt{4 - |r|^2}}\right) \mathrm{Exp}\left(\frac{-2\lambda}{|r|\sqrt{4 - |r|^2}}\, r\right)$$

$$\mathrm{Exp}\left(\frac{-2\lambda}{|r|\sqrt{4 - |r|^2}}\, r\right) = \exp\left(\frac{-\lambda|r|}{\sqrt{4 - |r|^2}}\right).(e.\cos\lambda + z.\sin\lambda)$$

Vzemimo: $\lambda = -2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, in uporabimo normo na obeh straneh te enačbe.

$$\left\| \operatorname{Exp}\left(\frac{4n\pi}{|r|\sqrt{4 - |r|^2}} r \right) \right\| = \exp\left(\frac{2n\pi|r|}{\sqrt{4 - |r|^2}} \right)$$

Desna stran te enačbe je za dovolj velik n poljubno velika. Toda $r \in \mathcal{H}_0$, oziroma $\mathcal{V}(r) = \{\tau(r)\} = \{0\}$, zato je $\|\operatorname{Exp}(\alpha r)\| \leqq 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, po trditvi [8,4].
To protislovje kaže, da je $r = 0$ in da je:
$a^2 = -|a|^2 e$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$, iz česar sledi:
$a \times a = 0$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$, kar pa že dokazuje antikomutativnost algebre $\mathcal{H}_0$. Kvadratnost algebre $\mathcal{H}$ sledi po izreku [2,3]. □

<u>[9,9] TRDITEV.</u> Naj bo $\mathcal{H}$ algebra iz trditve [9,4].

$$\|x\| = |x| \ , \ \forall x \in \mathcal{H} \ . \tag{9,10}$$

<u>Dokaz.</u> (6,7) nam da: $|x| \leqq \|x\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$.
Pa naj bo $a \in \mathcal{H}_0$, $|a| = 1$. Ker je kvadratna algebra potenčnoasociativna, obstaja ena sama eksponentna funkcija in sicer (6,23). Zaradi $\sqrt{N(\lambda a)} = \lambda$ je:
$\|\operatorname{Exp}(\lambda a)\| = \|e.\cos\lambda + a.\sin\lambda\| \leqq 1$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
(zaradi trditve [8,4]). Recimo, da je za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:
$\alpha e + \beta a \neq 0$.

$$\|\alpha e + \beta a\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left\| \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} a \right\| \leqq \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} =$$
$$= |\alpha e + \beta a| \ .$$

Ker vsak element $x \in \mathcal{H}$ lahko zapišemo kot $\alpha e + \beta a$ za nek $a \in \mathcal{H}_0$, $|a| = 1$, je torej $\|x\| = |x|$. □

<u>[9,10] IZREK.</u> Naj bo $\mathcal{H}$ algebra z multiplikacijo . in enoto e nad $\mathbb{K}$, obenem pa normiran prostor z normo $\|.\|$, za katero velja: $\|x.y\| \leqq \|x\|.\|y\|$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$, $\|e\| = 1$. Naslednji izjavi sta ekvivalentni:
(a) norma $\|.\|$ je generirana s skalarnim produktom;
(b) $\mathcal{H}$ je metakompleksna algebra.

<u>Dokaz.</u> (a) $\Longrightarrow$ (b). Če je norma generirana s skalarnim produktom, je enotna sfera povsod gladka in po definiciji [9,1] je $\mathcal{H}$ metakompleksna algebra.
(b) $\Longrightarrow$ (a). Če je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, sledi trditev iz izreka [9,3]. Naj bo torej $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ in $\widetilde{\mathcal{H}}$ napolnitev normiranega prostora $\mathcal{H}$. $\widetilde{\mathcal{H}}$ je spet metakompleksna algebra, zato je razširitev norme $\|.\|$ na $\widetilde{\mathcal{H}}$ po trditvi [9,9] generirana s skalarnim produktom. Potem pa je tako tudi z normo $\|.\|$ v $\mathcal{H}$. □

[9,11] IZREK. Naj bo $\mathcal{H}$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ in $e \in \mathcal{H}$ neničelni element. Veljata naj še naslednji zahtevi:

(a) $\mathcal{H}$ poseduje skalarni produkt $\delta(.,.)$ z ustrezno normo $|.|$, tako da je: $|e| = 1$.

(b) Če s $\mathcal{H}_o$ označimo ortogonal elementa e: $\delta(e, \mathcal{H}_o) = \{0\}$ in $\mathcal{H} = \mathbb{R}e \oplus \mathcal{H}_o$, naj bo $\mathcal{H}_o$ antikomutativna algebra z multiplikacijo $\times$, za katero veljata zahtevi:

(A) $|a\times b| \leqq |a|.|b|$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_o$,

(B) $a,b \in \mathcal{H}_o$ & $\delta(a,b) = 0 \Longrightarrow \delta(a\times b, a) = 0$.

V prostoru $\mathcal{H}$ definirajmo multiplikacijo . takole:

$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ & $a,b \in \mathcal{H}_o \Longrightarrow (\alpha e + a).(\beta e + b) = [\alpha\beta - \delta(a,b)]e + [\beta a + \alpha b + a\times b]$.

Tedaj je $\mathcal{H}$ metakompleksna algebra.

Dokaz. Če primerjamo izrek [9,11] z izrekom [9,10], je jasno, da moramo dokazati le še algebraičnost norme $|.|$.

Poljubna elementa $x,y \in \mathcal{H}$ lahko zapišemo takole:

$x = \alpha e + a$, $y = \beta e + \gamma a + b$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $a,b \in \mathcal{H}_o$, $\delta(a,b) = 0$.

$$x.y = (\alpha\beta - \gamma|a|^2)e + (\beta + \alpha\gamma)a + \alpha b + a\times b .$$

$$|x.y|^2 = (\alpha\beta - \gamma|a|^2)^2 + (\beta + \alpha\gamma)^2|a|^2 + \alpha^2|b|^2 + |a\times b|^2 \leqq$$
$$\leqq \alpha^2\beta^2 + \gamma^2|a|^4 + \beta^2|a|^2 + \alpha^2\gamma^2|a|^2 + \alpha^2|b|^2 + |a|^2|b|^2 =$$
$$= (\alpha^2 + |a|^2)(\beta^2 + \gamma^2|a|^2 + |b|^2) = |x|^2|y|^2 . \quad \square$$

Glede na prejšnje trditve tega razdelka je očitno, da sta zahtevi (a) in (b) celo karakteristični za metakompleksne algebre.

Zberimo nekaj lastnosti metakompleksnih algeber. Ves čas naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ in $\mathcal{H}$ algebra iz definicije [9,1]. Naj bo še: !

$$\mathcal{H}_o = \{c \in \mathcal{H} ; \tfrac{d}{d\alpha}\|e + \alpha c\|_{\alpha=0} = 0\}.$$

[9,12] TRDITEV. (a) $\mathcal{H}$ je kvadratna algebra.

(b) $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_o)$ je Osbornov par za sled $\tau(x) = \frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}$. $\mathcal{H}_o$ je v tem paru antikomutativna algebra. $\|\tau\| = 1$.

(c) $\|x\| = |x|$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (9,11)

$N(x) = |x|^2$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (9,12)

$\delta(.,.)$ je skalarni produkt.

$\sigma(x,y) = \sigma(y,x) = \delta(x,y^K)$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$. (9,13)

$\tau(x) = \delta(x,e)$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (1,27)

$|\sigma(x,y)| \leqq \|x.y\|$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$. (9,14)

$\mathcal{H}^o = \{0\}$.

(d) Konjugiranje je zvezna involucija: za vsak par $x,y \in \mathcal{H}$ je

$(x.y)^K = y^K.x^K$, (9,15)

$\|x^K\| = \|x\|$, (9,16)

$\|x.x^K\| = \|x^K.x\| = \|x^2\| = \|x\|^2$. (9,17)

Hermitski elementi za to involucijo so $\mathcal{R}e$, vsi elementi so normalni, edina projektorja sta e in 0, unitarni elementi pa so vsi elementi na enotni sferi.

(e) $\|a \times b\| \leqq \|a.b\|$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_o$. (9,18)

Če je $\mathcal{H}$ polna algebra, je $\|.\|$ HO-norma para $(\mathcal{H},\mathcal{H}_o)$.

(f) $\alpha \in \mathcal{R}$ & $a \in \mathcal{H}_o - \{0\}$ & $\cos\varphi = \frac{\alpha}{\|\alpha e + a\|}$ &

& $\sin\varphi = \frac{\|a\|}{\|\alpha e + a\|}$ & $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $(\alpha e + a)^n =$

$= \|\alpha e + a\|^n \left[e.\cos(n\varphi) + a \frac{1}{\|a\|} \sin(n\varphi) \right]$ (9,19)

(Moivrova formula).

Če je $\mathcal{H}$ polna algebra, je: $\mathrm{Exp}(\alpha e + a) =$

$$\begin{aligned} &= \exp\alpha.e &&, \text{ za } a = 0 ,\\ &= \exp\alpha\left[e.\cos|a| + a \frac{1}{|a|} \sin|a|\right] &&, \text{ za } a \neq 0 , \end{aligned} \qquad (9,20)$$

pri čemer je $\alpha \in \mathcal{R}$ in $a \in \mathcal{H}_o$; od tod:

$|\mathrm{Exp}(\alpha e + a)| = E(\alpha e + a) = \exp\alpha$ (9,21)

in za $\dim\mathcal{H} \neq 1$ še:

$\mathrm{Exp}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} - \{0\}$.

(g) $\rho(x) = \|x\|$. (9,22)

Algebra $\mathcal{H}$ nima netrivialnih topološko nilpotentnih (in nilpotentnih) elementov. Prav tako nima netrivialnih idempotentov.

(h) Algebra $\mathcal{H}$ nima netrivialnih idealov in je zato enostavna v vsakem pomenu.

(i) Vsaka neničelna podalgebra algebre $\mathcal{H}$ je invariantna za konjugiranje in vsebuje enoto e.

(j) Podalgebre algebre $\mathcal{H}$ in podalgebre algebre $\mathcal{H}_0$ so v bijektivni korespondenci.

Dokaz. Točka (a) sledi iz trditve [9,8].

(b) Iz dokaza trditve [9,2] sledi, da je $\tau(x) = \frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}$ edini funkcional z lastnostjo $\tau(e) = \|\tau\| = 1$. Potem pa ga lahko vzamemo za sled v Osbornovem paru $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$. V napolnitvi $\widetilde{\mathcal{H}}$ velja po trditvi [9,8]: Kerτ je antikomutativna algebra. Potem pa to velja tudi v $\mathcal{H}$.

(c) (9,11) sledi iz (9,10), (9,12) iz (9,1), (9,13) pa iz (9,5). δ je skalarni produkt po trditvi [9,4]. (9,14) je v $\widetilde{\mathcal{H}}$ posledica (9,10) in (6,14), s tem pa velja tudi v $\mathcal{H}$.

(d) (9,15) dobimo iz (2,5) in (9,5), (9,16) iz (9,11) in (1,32), (9,17) pa iz (6,9).
Ostale trditve so trivialne.

(e) $\|a.b\| = |a.b| = |\sigma(a,b)e + a\times b| =$

$= \sqrt{\sigma(a,b)^2 + |a\times b|^2} \geqq |a\times b| = \|a\times b\|$.

(f) (9,19) je aplikacija trditve [2,10]. (6,22) in (6,23) nam dasta (9,20), iz česar preprosto sledi (9,21). Zadnjo trditev točke (f) pa nam da (6,33).

(g) (9,22) je res zaradi (2,13). Ostali trditvi sledita iz trditev [2,11] in [2,13].

Točka (h) je posledica trditve [2,12].

(i) Naj bo $\mathcal{P}$ podalgebra algebre $\mathcal{H}$ in $x = \alpha e + a \in \mathcal{P}$,

$x \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{H}_0$.

$\frac{1}{\|x\|^2} (2\alpha x - x^2) = e \in \mathcal{P}$.

$2\alpha e - x = x^K \in \mathcal{P}$.

(j) To je izrek A-6 iz [11]. Bijekcija je podana s projeciranjem iz $\mathcal{H}$ v $\mathcal{H}_0$: $x \longrightarrow x - \tau(x)e$. $\square$

[9,13] TRDITEV. Za poljubne $x,y,z \in \mathcal{H}$ in $a,b,c \in \mathcal{H}_0$ velja:

(a) $\sigma(x.y,z) = \sigma(x,y.z)$. (9,23)

(b) $\delta(x.y,z) = \delta(y,x^K.z) = \delta(x,z.y^K)$. (9,24)

(c) $\delta(a.b,c) = \delta(a,b.c) = \delta(b,c.a) =$
$= \delta(a\times b,c) = \delta(a,b\times c) = \delta(b,c\times a)$. (9,25)

(d) $\delta(a.b,a) = \delta(a.b,b) =$
$= \delta(a\times b,a) = \delta(a\times b,b) = 0$. (9,26)

(e) $L_x^* = L_{x^K}$, $R_x^* = R_{x^K}$;

vsi kanonski operatorji so normalni.

(f) $|\delta(x,y)| \leqq \|x.y\|$. (9,28)

Dokaz. (a) Enačbe (9,6) - (9,9) veljajo za paroma ortogonalne elemente iz $\mathcal{H}_0$, ker so čisto algebrske in niso odvisne od polnosti prostora $\mathcal{H}$.

Zapišimo vektorje x,y,z v naslednji obliki:
$x = \alpha_1 e + \alpha_2 a + b$, $y = \beta e + a$, $z = \gamma_1 e + \gamma_2 a + \gamma_3 b +$
$+ \gamma_4 a.b + c$, kjer naj bodo $a,b,a.b,c$ paroma ortogonalni elementi iz $\mathcal{H}_0$, grške črke pa naj označujejo realna števila.

$\sigma(x.y,z) - \sigma(x,y.z) = \gamma_4 |a.b|^2 - \gamma_4 \sigma(b,a.(a.b)) -$
$- \sigma(b,a.c) = \gamma_4 |a.b|^2 + \gamma_4 \delta(b,a.(a.b)) + \delta(b,a.c)$

z uporabo (9,5). Uporabimo še (9,7):

$\sigma(x.y,z) - \sigma(x,y.z) = \gamma_4 |a.b|^2 - \gamma_4 \delta(a.b,a.b) -$
$- \delta(a.b,c) = 0$.

(b) $\delta(x.y,z) = \delta(z,x.y) = \sigma(z,y^K.x^K) = \sigma(z.y^K,x^K) =$
$= \delta(z.y^K,x) = \delta(x,z.y^K)$;

$\delta(x.y,z) = \sigma(z,y^K.x^K) = \sigma(y^K.x^K,z) = \sigma(y^K,x^K.z) =$
$= \sigma(x^K.z,y^K) = \delta(x^K.z,y) = \delta(y,x^K.z)$.

(c,d) (9,25) sledi iz (9,24), (9,26) pa je trivialna posledica.

(e) $\delta(L_x y,z) = \delta(x.y,z) = \delta(y,x^K.z) = \delta(y,L_{x^K} z)$.

Enako postopamo z R_x .
Normalnost kanonskih operatorjev dobimo s preveritvijo enačb $x^K.(x.y) = x.(x^K.y)$ in $(y.x).x^K = (y.x^K).x$ za poljubna $x,y \in \mathcal{H}$.

(f) Naj bo $x = \alpha e + a$, $y = \beta e + \gamma a + b$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$,

$a,b \in \mathcal{H}_0$, $\delta(a,b) = 0$.

$\delta(x.y,x.y) - \delta(x,x)^2 = \|a.b\|^2 + \alpha^2\|b\|^2 +$

$+ \|a\|^2(\beta + \alpha\gamma)^2 \geqq 0$. □

Zaradi neizrojenosti forme σ in zaradi (9,23) so metakompleksne algebre poseben primer algeber, obravnavanih v [11].

[9,14] TRDITEV. (a) $\mathcal{H}$ je anizotropna algebra:

$x \in \mathcal{H}$ & $x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$.

(b) $\mathcal{H}$ je fleksibilna algebra:

$(x.y).x = x.(y.x)$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$, (9,29)

oziroma

$R_x L_x = L_x R_x$, $\forall x \in \mathcal{H}$. (9,30)

(c) $\mathcal{H}$ je (nekomutativna) Jordanova algebra:

$(x.y).x^2 = x.(y.x^2)$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$. (9,31)

(d) Naj bo $\mathcal{H}^+$ algebra nad prostorom $\mathcal{H}$ s produktom $x \circ y = \frac{1}{2}(x.y + y.x)$. Tedaj je $\mathcal{H}^+$ (komutativna) Jordanova algebra.

Dokaz. (a) in (d) sta trivialni izjavi.

(b) Naj bo $x = \alpha e + a$, $y = \beta e + \gamma a + b$, $a,b \in \mathcal{H}_0$, $\delta(a,b) = 0$, $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$. x in y sta seveda lahko še čisto poljubna elementa iz $\mathcal{H}$. Uporabimo (9,9) in (9,2): $(x.y).x - x.(y.x) = a.(a.b) + (a.b).a$.
Zaradi (9,6) sta a in a.b ortogonalna, zaradi (9,5) je $a.b \in \mathcal{H}_0$, potem pa velja (9,9) in tako je fleksibilnost dokazana.

(c) preverimo na podoben način. □

Jedro $\mathcal{N}$ algebre $\mathcal{H}$ je množica elementov iz $\mathcal{H}$, ki asociirajo z vsemi elementi iz $\mathcal{H}$: $(x.y).z = x.(y.z)$, če je vsaj en element iz $\mathcal{N}$.
Center $\mathcal{C}$ algebre $\mathcal{H}$ je podmnožica jedra, v kateri so elementi, ki komutirajo z vsemi elementi iz $\mathcal{H}$.
$\mathcal{N}$ in $\mathcal{C}$ sta podprostora. $\mathbb{R}e \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{N}$.

[9,15] TRDITEV. (a) $\dim \mathcal{H} \leqq 2 \Longleftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{N} = \mathcal{H} \Longleftrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{H}$.

(b) $\dim \mathcal{H} \neq 2 \Longleftrightarrow \mathcal{C} = \mathbb{R}e$.

(c) $\mathcal{N} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$; v zadnjem primeru je $\mathcal{H} = \mathcal{N}$.

<u>Dokaz.</u> (a), $\Leftarrow$! Recimo, da sta $a,b \in \mathcal{H}_o$, $\delta(a,b) = 0$.

$a\times b = a.b = b.a = b\times a = - a\times b \Longrightarrow a\times b = 0 \Longrightarrow a.b = 0$.

$0 = (a.b).b = a.b^2 = - a|b|^2$.

Torej je bodisi $a = 0$ ali $b = 0$, kar pa pomeni: $\dim \mathcal{H}_o \leqq 1$ in $\dim \mathcal{H} \leqq 2$.

(a), $\Longrightarrow$! Sledi iz primerov [2,8].

(b), $\Leftarrow$! $\dim \mathcal{H} = 2 \Longrightarrow \mathcal{C} = \mathcal{H} \neq \mathbb{R}e$ (upoštevaje primere [2,8]).

(b), $\Longrightarrow$! Če je $\dim \mathcal{H} = 1$, je $\mathcal{H} = \mathcal{C} = \mathbb{R}e$. Zato naj bo $\dim \mathcal{H} > 2$ in $\alpha e + a \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{H}_o$.

$\exists b \in \mathcal{H}_o : |b| = 1$ & $\delta(b,a) = 0$.

$0 = [(\alpha e + a).a].b - (\alpha e + a).(a.b) = -|a|^2 b - a\times(a\times b)$.

$0 = a.b - b.a = 2a\times b$.

Zato je $|a|^2 b = 0$ oziroma $a = 0$.

(c) Za $\dim \mathcal{H} \leqq 2$ je trditev očitna. Naj bo torej $\dim \mathcal{H} > 2$ in $\mathcal{N} \neq \mathcal{C} = \mathbb{R}e$ (po točki (b)) in $\mathcal{H} \neq \mathbb{H}$.

$\alpha e + \beta a \in \mathcal{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{H}_o$, $|a| = 1$, $\beta \neq 0$.

Ker je $\mathcal{N}$ podprostor in je $\alpha e \in \mathcal{N}$, je $a \in \mathcal{N}$.

$\exists b_1 \in \mathcal{H}_o$, $|b_1| = 1$, $\delta(a,b_1) = 0$.

$0 = a^2.b_1 - a.(a.b_1) = -b_1 - a.(a.b_1)$.

Naj bo $a.b_1 = c_1$. Potem je: $a.c_1 = -c_1.a = -b_1$.

$1 = |b_1| = |c_1.a| \leqq |c_1|.|a| = |c_1| = |a.b_1| \leqq |a|.|b_1| = 1.$

Torej je $|c_1| = 1$. Seveda je tudi $c_1 \perp a,b_1$.

$b_1.c_1 = b_1.(a.b_1) = -b_1.(b_1.a) = -b_1^2.a = a$.

Očitno je podalgebra, generirana z elementi e,a,b_1,c_1 izometrično izomorfna $\mathbb{H}$. Po predpostavki torej ta algebra še ni cela algebra $\mathcal{H}$. Zato eksistira na e,a,b_1,c_1 ortogonalen element b_2 , $|b_2| = 1$. Po istem računu kot poprej, če b_1 nadomestimo z b_2, dobimo še en vektor $c_2 = a.b_2$ s $|c_2| = 1$, da je podalgebra, generirana z e,a,b_2,c_2, spet kvaternionska. Med drugim je: $b_2.c_2 = a$ in $c_2.a = b_2$.

$\delta(b_1,c_2) = \delta(b_1,a.b_2) = \delta(b_1.a,b_2) = \delta(-c_1,b_2) = 0$.

Enako je $\delta(c_1,c_2) = 0$. Zato je $\mathcal{B} = \{e,a,b_1,c_1,b_2,c_2\}$ ortonormiran sistem.

Produkt $v = b_1.b_2$ je pravokoten na e,b_1,b_2.

$v = (c_1.a).b_2 = c_1.(a.b_2) = c_1.c_2$.

$\delta(a,v) = \delta(a.b_1,b_2) = 0$. v je torej vektor, pravokoten na $\mathcal{B}$.

$0 = [a.(b_1 + c_2)].(b_1 + c_2) - a.(b_1 + c_2)^2 =$

$= (c_1 - b_2).(b_1 + c_2) + 2a = 2v$.

Naj bo še $w = b_1.c_2 = b_1.(a.b_2) = (b_1.a).b_2 = -c_1.b_2$.

$w = (c_1.a).c_2 = -(a.c_1).c_2 = -a.(c_1.c_2) = -a.v = 0$.

Vektor b_1 je bil pravokoten na prostor $\mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}a$, sicer pa poljuben normiran vektor.

$(b_1.b_1).b_2 = -b_2 \neq 0 = b_1.(b_1.b_2)$.

Zato: $b_1 \notin \mathcal{N}$ in $\mathcal{N} = \mathbb{R}e \oplus \mathbb{R}a$. $\square$

Točka (c) te trditve nam torej pove, da je $\mathcal{N} = \mathbb{R}e$ vedno razen ko je $\mathcal{N} = \mathcal{H} \cong \mathbb{H}$ ali pa je $\mathcal{N} \cong \mathbb{C}$, pri čemer je $\mathcal{H}$ algebra naslednjega tipa:

Če je $\mathcal{N} \supset \mathbb{R}e + \mathbb{R}a$, $\|a\| = 1$, $\delta(e,a) = 0$, in $\mathcal{B}$ končna (lahko tudi prazna) množica normiranih vektorjev $\{b_k\}$, izbranih tako, da je vsak b_k ortogonalen na e,a,b_i $(i \neq k)$ in $c_i = a \times b_i$ $(i \neq k)$, sicer pa poljubnih, potem je multiplikacijska tabela za podalgebro, generirano z $\mathcal{B}$, taka:

.	e	a	b_1	c_1	b_2	c_2	b_3	c_3	...
e	e	a	b_1	c_1	b_2	c_2	b_3	c_3	
a	a	$-e$	c_1	$-b_1$	c_2	$-b_2$	c_3	$-b_3$	
b_1	b_1	$-c_1$	$-e$	a	0	0	0	0	
c_1	c_1	b_1	$-a$	$-e$	0	0	0	0	⋮
b_2	b_2	$-c_2$	0	0	$-e$	a	0	0	
c_2	c_2	b_2	0	0	$-a$	$-e$	0	0	
b_3	b_3	$-c_3$	0	0	0	0	$-e$	a	
c_3	c_3	b_3	0	0	0	0	$-a$	$-e$	
⋮				...					

[9,16] TRDITEV. (a) Če je $\mathcal{H}$ asociativna algebra, je $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$.

(b) Če je $\mathcal{H}$ leva ali desna alternativna algebra, je $\mathcal{H} \cong \mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ ali $\mathbb{D}$.

Dokaz. (a) je pravzaprav posledica (b), dokažemo pa jo z neposredno aplikacijo trditve [9,15],(c).

Če je algebra leva ali desna alternativna, je zaradi fleksibilnosti kar alternativna in izjavo (b) lahko dokažemo podobno kot trditev [9,15],(c), le dokaz bi bil nekoliko daljši. Tega ne bomo storili, ker tako ali tako dobimo obe trditvi že v literaturi ([19],[20]). $\square$

[9,17] TRDITEV. Naslednje izjave so ekvivalentne:

(a) $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+$.

(b) $\mathcal{H}$ je Jordanova algebra.

(c) $\mathcal{H}$ je komutativna algebra.

(d) $\mathcal{H}_0$ je trivialna algebra.

Dokaz. Upoštevajmo trditvi [9,14],(c) in (d). $\square$

Označimo z an($\mathcal{M}$) anihilator neprazne množice $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}_0$: $\text{an}(\mathcal{M}) = \{ a \in \mathcal{H}_0 \ ; \ a \times b = 0 \ , \ \forall b \in \mathcal{M} \}$. (9,32)

Anihilator je očitno zaprt podprostor. $\text{an}(\mathcal{M}) = \text{an}(\overline{\mathcal{M}})$ (z $\overline{\mathcal{M}}$ smo označili zaprtje množice $\mathcal{M}$ v $\mathcal{H}_0$ oziroma v $\mathcal{H}$). $\text{an}(\mathcal{H}_0)$ je zaprt ideal algebre $\mathcal{H}_0$.

[9,18] DEFINICIJA. Algebra $\mathcal{H}$, za katero velja: $\text{an}(\mathcal{H}_0) = \mathcal{H}_0$, je votla metakompleksna algebra. Algebra $\mathcal{H}$, za katero je: $\text{an}(\mathcal{H}_0) = \{0\}$, je prava metakompleksna algebra.

Votle algebre so algebre iz trditve [9,17] in seveda niso zanimive. Vredno je opozoriti le na to, da iz vsakega prostora s skalarnim produktom lahko naredimo votlo algebro.

[9,19] TRDITEV. Naj bo $\dim \mathcal{H} > 2$ in $\dim \mathcal{N} > 1$ (jedro je torej dvo- ali štiridimenzionalno). Potem je $\mathcal{H}$ prava metakompleksna algebra, $\mathcal{H}_0$ pa enostavna algebra.

Dokaz. Če kvaternionski primer izpustimo, lahko vzamemo: $\dim \mathcal{H} > 4$. Naj bo $\mathcal{P}$ neničelni ideal algebre $\mathcal{H}_0$, $p \in \mathcal{P}$, $q \in \mathcal{H}_0$. Elementa p in q lahko zapišemo takole:

$p = \alpha a + \beta b_1$, $q = \gamma a + \delta b_1 + \varepsilon a\times b_1 + \xi b_2$ (v skladu s tabelo na strani 103).

(a) $\alpha \neq 0$! $p\times\frac{1}{\alpha}b_1 = a\times b_1 = c_1 \in \mathcal{P}$,

$c_1\times a = b_1 \in \mathcal{P}$, $\frac{1}{\alpha}p - \frac{\beta}{\alpha}b_1 = a \in \mathcal{P}$.

(b) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$! $\frac{1}{\beta}p = b_1 \in \mathcal{P}$,

$-b_1\times a = c_1 \in \mathcal{P}$, $b_1\times c_1 = a \in \mathcal{P}$.

V obeh primerih je $a\times(b_2\times a) = b_2 \in \mathcal{P}$ in zato $q \in \mathcal{P}$, kar pa pomeni: $\mathcal{P} = \mathcal{H}_0$. Vsi ideali, vključno z $an(\mathcal{H}_0)$, so trivialni in trditev je dokazana. □

<u>[9,20] TRDITEV.</u> Naj bo $\mathcal{H}$ polna algebra in $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_0$ neprazna podmnožica. Potem je $\mathcal{H}_0$ ortogonalna direktna vsota:

$$\mathcal{H}_0 = an(\mathcal{P}) \oplus \overline{\mathcal{P}\times\mathcal{H}_0} . \tag{9,33}$$

Velja še:

$$\overline{\mathcal{P}} \subset an(an(\mathcal{P})) . \tag{9,34}$$

<u>Dokaz.</u> $a \in an(\mathcal{P})$, $b \in \mathcal{P}\times\mathcal{H}_0$.

$b = b_1\times c_1 + b_2\times c_2 + \ldots + b_n\times c_n$, $b_i \in \mathcal{P}$, $c_i \in \mathcal{H}_0$.

$\delta(a,b) = \delta(a\times b_1,c_1) + \ldots + \delta(a\times b_n,c_n) = 0$.

Zato: $an(\mathcal{P}) \perp \mathcal{P}\times\mathcal{H}_0$ in tudi $an(\mathcal{P}) \perp \overline{\mathcal{P}\times\mathcal{H}_0}$.

Naj bo še: $a \perp \overline{\mathcal{P}\times\mathcal{H}_0}$ in $b \in \mathcal{P}$.

$0 = \delta(a,b\times c) = \delta(a\times b,c)$, $\forall c \in \mathcal{H}_0 \implies a\times b = 0 \implies a \in an(\mathcal{P})$. □

<u>[9,21] TRDITEV.</u> Naj bo $\mathcal{H}$ polna algebra, $\mathcal{P}$ ideal algebre $\mathcal{H}_0$ in $\mathcal{R}$ njegov ortogonalni komplement: $\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{R}$. Tedaj je $\mathcal{R}$ spet ideal algebre $\mathcal{H}_0$ in $\mathcal{R} \subset an(\mathcal{P})$. Ideal ideala algebre $\mathcal{H}_0$ je spet ideal algebre $\mathcal{H}_0$.

<u>Dokaz.</u> $\mathcal{R} \perp \overline{\mathcal{P}} \supset \mathcal{P} \supset \mathcal{P}\times\mathcal{H}_0 \implies \mathcal{R} \perp \overline{\mathcal{P}\times\mathcal{H}_0} \implies$

$\implies \mathcal{R} \subset an(\mathcal{P}) \implies \mathcal{P}\times\mathcal{R} = \{0\}$.

$a \in \mathcal{P}$, $b \in \mathcal{R}$, $c \in \mathcal{H}_0$.

$\delta(a,b\times c) = \delta(a\times b,c) = 0$.

Zato: $b\times c \perp \mathcal{P} \implies b\times c \in \mathcal{R} \implies \mathcal{R}$ je ideal. □

Naslednji korolar in še trditev za njim kažeta - če govorimo v jeziku Liejevih algeber -, da je $\mathcal{H}_0$ reduktivna algebra, torej direktna vsota trivialne (= komutativne) in polenostavne algebre.

[9,22] KOROLAR. Naj bo $\mathcal{H}$ polna algebra.

$$\mathcal{H}_0 = \mathrm{an}(\mathcal{H}_0) \oplus \overline{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0} \,. \tag{9,35}$$

Oba ortogonalna direktna sumanda sta zaprta ideala v $\mathcal{H}_0$. Algebra $\mathcal{H}$ ima s tem dve podalgebri:

$$\mathbb{R}e \oplus \mathrm{an}(\mathcal{H}_0) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}e \oplus \overline{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0} \,,$$

ki sta obe spet polni metakompleksni algebri, prva je votla in druga je prava.

Dokaz. Netrivialno v korolarju je le to, da je $\mathbb{R}e \oplus \overline{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0}$ res prava algebra. Pa naj bo $a \in \overline{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0}$ tak element, da je: $a \times \overline{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0} = \{0\}$. Toda potem je $a \in \mathrm{an}(\mathcal{H}_0)$ in zato $a = 0$. □

[9,23] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ polna prava algebra. Če je $\mathcal{P}$ poljuben ideal v algebri $\mathcal{H}_0$, je $\overline{\mathcal{P} \times \mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}}$. Ne eksistira noben neničelni ideal $\mathcal{P}$ z lastnostjo $\mathcal{P} \times \mathcal{P} = \{0\}$.

Dokaz. Naj bo $\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{R}$ (ortogonalno) in recimo, da $\overline{\mathcal{P}} \neq \overline{\mathcal{P} \times \mathcal{H}_0}$, oziroma $\overline{\mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P} \times \mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{Q}$ (spet ortogonalno), kjer je $\mathcal{Q}$ netrivialen zaprt podprostor.

$$\overline{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0} = \overline{(\overline{\mathcal{P}} \times \overline{\mathcal{P}}) \oplus (\mathcal{R} \times \mathcal{R})} \subset \overline{\mathcal{P} \times \mathcal{H}_0} \oplus \mathcal{R} \neq \mathcal{H}_0 \,,$$

kar pa je v nasprotju s predpostavko, da je algebra $\mathcal{H}$ prava. Zato je $\mathcal{Q} = \{0\}$.

$$\overline{\mathcal{P} \times \mathcal{P}} = \overline{\overline{\mathcal{P}} \times \mathcal{P}} = \overline{(\overline{\mathcal{P}} \oplus \mathcal{R}) \times \mathcal{P}} = \overline{\mathcal{H}_0 \times \mathcal{P}} = \overline{\mathcal{P}} \,. \; □$$

[9,24] KOROLAR. Naj bo $\mathcal{H}$ polna prava algebra in $\mathcal{P}$ poljuben ideal v $\mathcal{H}_0$. Tedaj je $\mathcal{H}_0$ ortogonalna direktna vsota

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{P}} \oplus \mathrm{an}(\mathcal{P}) \,, \tag{9,36}$$

pri čemer je

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathrm{an}(\mathrm{an}(\mathcal{P})) \,. \tag{9,37}$$

$\overline{\mathcal{P}} \oplus \mathbb{R}e$ je spet prava polna metakompleksna algebra.

Zaradi (9,36) in (9,37) bi lahko rekli, po analogiji z asociativnimi algebrami, da je algebra $\mathcal{H}_o$ anihilatorska oziroma dualna.

[9,25] KOROLAR. Naj bo $\mathcal{H}$ taka metakompleksna algebra, da je $\dim(\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o) < \infty$. Potem je $\mathcal{H}_o$ ortogonalna direktna vsota:

$$\mathcal{H}_o = \mathrm{an}(\mathcal{H}_o) \oplus \mathcal{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_n . \tag{9,38}$$

$\mathcal{P}_k$ so ideali, sami zase končnodimenzionalne enostavne algebre, $\mathcal{P}_i \times \mathcal{P}_j = \{0\}$ za $i \neq j$, $\mathcal{P}_i \times \mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i$.

Dokaz. $\mathcal{H}$ napolnimo v $\tilde{\mathcal{H}}$. $(\tilde{\mathcal{H}})_o \times (\tilde{\mathcal{H}})_o \subset \widetilde{\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o}$.

Potem je $(\tilde{\mathcal{H}})_o \times (\tilde{\mathcal{H}})_o = \mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o$ in

$(\tilde{\mathcal{H}})_o = \mathrm{an}((\tilde{\mathcal{H}})_o) \oplus (\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o)$, iz česar sledi:

$\mathcal{H}_o = \mathrm{an}(\mathcal{H}_o) \oplus (\mathcal{H}_o \times \mathcal{H}_o)$.

Ostalo potem sledi iz (9,36). $\square$

10. DODATEK

Na naslednjih straneh bomo pokazali, kako z v tem delu zbranim materialom zlahka izpeljemo znani izrek o algebrah z absolutno vrednostjo (Urbanik, Wright). Zatem pa bomo prikazali in delno tudi analizirali dve posplošitvi takšnih algeber, eno lokalno (v okolici enote) in eno globalno. Glavna rezultata sta poleg že znanih izrekov trditvi [10,7] in [10,8].

Absolutna vrednost je norma $\|.\|$ na algebri z multiplikacijo ., če velja identično:

$$\|x.y\| = \|x\|.\|y\| . \qquad (10,1)$$

Absolutna vrednost morebitne enote je vedno 1.

[10,1] LEMA. Naj bo $\mathcal{H}$ algebra z multiplikacijo . in enoto e nad obsegom $\mathbb{K}$ in še normiran prostor za normo $\|.\|$, za katero eksistira taka okolica $\mathcal{U}(e)$ enote e, da je:

$$\|x\|.\|y\| \leqq \|e\|.\|x.y\| , \ \forall x,y \in \mathcal{U}(e) . \qquad (10,2)$$

Tedaj eksistira $\frac{d}{d\alpha}\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Dokaz. $D_\alpha^+\left[\|e + \alpha x\|.\|e - \alpha x\|\right]_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\|e + \alpha x\|.\|e - \alpha x\| - \|e\|^2}{\alpha} =$

$$= \lim_{\alpha \searrow 0}\left[\frac{\|e + \alpha x\| - \|e\|}{\alpha}\|e - \alpha x\| - \frac{\|e\| - \|e - \alpha x\|}{\alpha}\|e\|\right] =$$

$$= D_\alpha^+\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}.\|e\| - D_\alpha^-\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}.\|e\| \geqq 0 ,$$

ker je desni odvod kvečjemu večji od levega.

$$D_\alpha^+\left[\|e + \alpha x\|.\|e - \alpha x\|\right] \leqq \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\|e\|.\|e - \alpha^2 x^2\| - \|e\|^2}{\alpha} \leqq$$

$$\leqq \lim_{\alpha \searrow 0} \frac{\|e\|(\|e\| + \alpha^2\|x^2\|) - \|e\|^2}{\alpha} = 0 .$$

Torej je: $D_\alpha^+\left[\|e + \alpha x\|.\|e - \alpha x\|\right]_{\alpha=0} =$

$$= \|e\|\left[D_\alpha^+\|e + \alpha x\|_{\alpha=0} - D_\alpha^-\|e + \alpha x\|_{\alpha=0}\right] = 0 . \ \square$$

[10,2] IZREK. Naj bo $\mathcal{H}$ algebra z multiplikacijo . in enoto e nad $\mathbb{K}$ in normiran prostor za normo $\|.\|$:

$$\|x.y\| \leqq \|x\|.\|y\| , \ \forall x,y \in \mathcal{H} ;$$

za vsaka x,y iz neke okolice $\mathcal{U}(e)$ enote e pa velja

celo: $\|x.y\| = \|x\|.\|y\|$.
Tedaj je za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ algebra $\mathcal{H}$ izometrično izomorfna $\mathbb{C}$, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pa je $\mathcal{H}$ izometrično izomorfna $\mathbb{R}$ ali $\mathbb{C}$ ali $\mathbb{H}$ ali $\mathbb{D}$.

Dokaz. Očitno je $\|e\| = 1$ in iz leme [10,1] takoj zvemo, da je $\mathcal{H}$ metakompleksna algebra. Iz izreka [9,3] potem že sledi gornji izrek za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pa naj bo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$! Bodita a in b poljubna elementa iz $\mathcal{H}_0$ in α ter β dovolj absolutno majhni števili. Tedaj je:

$\|e + \alpha a\|^2\|e + \beta b\|^2 = 1 + \alpha^2\|a\|^2 + \beta^2\|b\|^2 + \alpha^2\beta^2\|a\|^2\|b\|^2 =$

$= \|(e + \alpha a).(e + \beta b)\|^2 = (1 - \alpha\beta\,\sigma(a,b))^2 + \alpha^2\beta^2\|a\times b\|^2 +$

$+ \delta(\alpha a + \beta b, \alpha a + \beta b) = 1 + \alpha^2\|a\|^2 + \beta^2\|b\|^2 + \alpha^2\beta^2\delta(a,b)^2 +$

$+ \alpha^2\beta^2\|a\times b\|^2$. Torej je:

$$\delta(a,b)^2 + \|a\times b\|^2 = \|a\|^2\|b\|^2 . \qquad (*)$$

Na enak način izračunajmo za poljubna $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ še izraza $\|\lambda e + a\|^2\|\mu e + b\|^2$ in $\|(\lambda e + a).(\mu e + b)\|^2$, upoštevajmo (*), pa bomo videli, da sta ta izraza enaka. Torej velja identično: $\|x\|.\|y\| = \|x.y\|$.
Toda v metakompleksni algebri je norma porojena iz skalarnega produkta. To pa je po Hurwitzovem izreku že dovolj za naš zaključek. $\square$

Preden gremo na obljubljeno posplošitev, si poglejmo konstrukcijo neke normirane algebre.

[10,3] PRIMER. Naj bo $\mathcal{H}_0$ neka algebra za produkt $\times$ nad $\mathbb{K}$ in normiran prostor za normo $\|.\|$, za katero je:
$\|a\times b\| \leq \|a\|.\|b\|$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_0$.
Dodajmo k $\mathcal{H}_0$ še enodimenzionalni prostor:
$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathbb{K}e$.
$\mathcal{H}$ naj bo spet algebra za produkt. :

$$(\alpha e + a).(\beta e + b) = \alpha\beta e + \beta a + \alpha b + a\times b , \qquad (10,3)$$

$\forall\alpha,\beta \in \mathbb{K}$, $\forall a,b \in \mathcal{H}_0$,
in normiran prostor:

$$\|\alpha e + a\| = 3.\max\{|\alpha|; \|a\|\} . \qquad (10,4)$$

Isti znak za obe normi smemo uporabiti, ker je nova norma le razširitev prvotne.

$\|e\| = 3$.

$(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ je Osbornov par, pri čemer je $\sigma(a,b) = 0$ za vse $a,b \in \mathcal{H}_0$.

$\|(\alpha e + a).(\beta e + b)\| = 3.\max\{|\alpha|.|\beta| \ ; \|\alpha b + \beta a + a\times b\|\} \leq$
$\leq 3.\max\{|\alpha|.|\beta| \ ; \ |\alpha|.\|b\| + |\beta|.\|a\| + \|a\|.\|b\|\} \leq$
$\leq 9.\max\{|\alpha|.|\beta| \ ; \ |\alpha|.\|b\| \ ; \ |\beta|.\|a\| \ ; \ \|a\|.\|b\|\} =$
$= 9.\max\{|\alpha| ; \|a\|\}.\max\{|\beta| ; \|b\|\} = \|\alpha e + a\|.\|\beta e + b\|$.

Norma $\|.\|$ je torej v primeru polnosti prostora $\mathcal{H}_0$ celo BO-norma BO-para $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$.

Za nas je pomembno, da velja preprosto preverljiva implikacija: $\|x\|, \|y\| < 1/2 \implies$

$$\implies \|e + x\|.\|e + y\| = \|e\|.\|(e + x).(e + y)\| , \tag{10,5}$$

kakršnakoli sta sicer x in y iz $\mathcal{H}$. $\square$

[10,4] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra z multiplikacijo . in enoto e nad $\mathbb{K}$ v topologiji norme $\|.\|_0$, za katero eksistira taka okolica $\mathcal{U}(e)$ enote e, da je: $\|x\|_0\|y\|_0 \leq \|e\|_0\|x.y\|_0$, $\forall x,y \in \mathcal{U}(e)$.

Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je to algebra iz primera [10,3] (polna in z ekvivalentno normo). Sicer pa pri kakršnemkoli $\mathbb{K}$ eksistira taka ekvivalentna algebrska norma $\|.\|$ in tak $\varepsilon > 0$, da je:

(a) $\|x\|, \|y\| < \varepsilon \implies \|e + x\|.\|e + y\| \leq \|e\|.\|(e + x).(e + y)\|$, kakršnakoli sta sicer x in y iz $\mathcal{H}$.

(b) card $\mathcal{D} = 1$ (oziroma $\mathcal{D} = \{\tau\}$, pri čemer je $\mathcal{D}$ množica stanj za normo $\|.\|$).

(c) Za $\mathcal{H}_0 = \operatorname{Ker}\tau$ je $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ BO-par in $\|.\|$ BO-norma.

(d) $$\|e\| \leq \|e + a\| \leq \|e - a^2\| \tag{10,6}$$
za $a \in \mathcal{H}_0$, $\|a\| < \varepsilon$ (za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ smemo neenačaja zamenjati kar z enačajema).

(e) Za Osbornov par $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_0)$ veljajo izjave iz trditve [1,2].

(f) $\sigma(a, a\times a) = 0$, $\forall a \in \mathcal{H}^0$.

(g) Za $\|x\| < \varepsilon$ in vsako čisto potenco p^n je
$$\|e + \tfrac{1}{n} x\|^n \leq \|e\|^{n-1}\|p^n(e + \tfrac{1}{n} x)\| \tag{10,7}$$
(za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ velja kar enačaj).

(h) Za $\|x\| < \varepsilon$ je

$$\|e\|.\exp \mathrm{Re}\,\tau(x) \leqq \|\mathrm{Exp}_{L,R}(x)\| \; . \tag{10,8}$$

(i) Za vsak $x \in \mathcal{H}$ je

$$F(x) \geqq \|e\|.\exp \mathrm{Re}\,\tau(x) \; . \tag{10,9}$$

(j) $$F(\alpha x)F(\beta x) \leqq \|e\|.F((\alpha + \beta)x) \tag{10,10}$$

za vsak $x \in \mathcal{H}$ ter za taka α in β, da imata nenegativno realno razmerje in je $|\alpha|, |\beta| < \varepsilon/\|x\|$.

Dokaz. Za normo $\|.\|_o$ velja: $\|x.y\|_o \leqq M\|x\|_o\|y\|_o$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$.

Naj bo kar $\|x\| = 2M\|x\|_o$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Okolica $\mathcal{U}(e)$ vsebuje neko kroglo s polmerom ε_1 in s središčem v e, tako da za vsak $\varepsilon \leqq \varepsilon_1$ velja (a).

Po lemi [10,1] in trditvi [7,6] sklepamo v pravilnost točke (b).

Trditev [7,7] nam potrdi še točko (c).

Postavimo sedaj: $\varepsilon = \varepsilon_1/(1 + \varepsilon_1)$. Zagotovo je $0 < \varepsilon < \min\{1 \; ; \varepsilon_1\}$. Naj bo $x \in \mathcal{H}$ poljuben element in $\beta \in \mathbb{K}$ tako število, da je $|\beta|.\|x\| < \varepsilon$.

$$\|(e - \beta x)_r^{-1} - e\| = \|\beta x + \beta^2 x^2 + \beta^3 x.x^2 + \ldots\| \leqq$$
$$\leqq |\beta|.\|x\|/(1 - |\beta|.\|x\|) < \varepsilon_1 \; .$$

$$1 - \beta \mathrm{Re}\,\tau(x) \leqq |\tau(e - \beta x)| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|e - \beta x\| =$$
$$= \|(e - \beta x)_r^{-1}\|^{-1} \cdot \frac{1}{\|e\|}\|e - \beta x\|.\|(e - \beta x)_r^{-1}\| \leqq$$
$$\leqq \|(e - \beta x)_r^{-1}\|^{-1}\|e\| \; .$$

Ker pa velja še: $\|e\|.\mathrm{Re}\,\tau(z) \leqq \|e\|.|\tau(z)| \leqq \|z\|$, $\forall z \in \mathcal{H}$,

je: $$\|e\|.\mathrm{Re}\,\tau((e - \beta x)_r^{-1}) \leqq \|(e - \beta x)_r^{-1}\| \leqq$$
$$\leqq \|e\|.[1 - \beta \mathrm{Re}\,\tau(x)]^{-1} \; .$$

Če izpustimo srednji del neenakosti, skrajna dva člena pa razvijemo v vrsti, dobimo:

$$1 + \beta \mathrm{Re}\,\tau(x) + \beta^2 \mathrm{Re}\,\tau(x^2) + \beta^3 \mathrm{Re}\,\tau(x.x^2) + \ldots \leqq$$
$$\leqq 1 + \beta \mathrm{Re}\,\tau(x) + \beta^2[\mathrm{Re}\,\tau(x)]^2 + \beta^3[\mathrm{Re}\,\tau(x)]^3 + \ldots \tag{$*$}$$

Sledi: $\mathrm{Re}\,\tau(x^2) \leqq [\mathrm{Re}\,\tau(x)]^2$.

Za $a \in \mathcal{H}_o$ je zato: $\mathrm{Re}\,\sigma(a,a) \leqq 0$.

Za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ je: $\sigma(a,a) \leqq 0$.

Za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ je: $0 \geqq \mathrm{Re}\,\sigma(ia,ia) = -\mathrm{Re}\,\sigma(a,a)$, zato:

$\mathrm{Re}\,\sigma(a,a) = 0$. Toda $0 = \mathrm{Re}\,\sigma(\sqrt{i}\,a, \sqrt{i}\,a) = -\mathrm{Im}\,\sigma(a,a)$, in s tem: $\sigma(a,a) = 0$.
V splošnem je torej $N(a) = -\sigma(a,a) \geqq 0$, $\forall a \in \mathcal{H}_0$, iz česar sledi točka (e).

Naj bo spet $a \in \mathcal{H}_0$, $\|a\| < \varepsilon_1$.

$$1 = |\tau(e - a)| \leqq \frac{1}{\|e\|}\|e - a\| \cdot \frac{\|e + a\|}{\|e + a\|} = \frac{\|e - a^2\|}{\|e + a\|}$$

Skupaj z dejstvom, da je $\|.\|$ BO-norma, nam to da oceno (10,6).
Pa recimo spet, da je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ in $a \in \mathcal{H}_0$ poljuben element, β pa tako število, da je $|\beta|.\|a\| < \varepsilon$.

$\|\beta^2 a^2\| \leqq |\beta|^2\|a\|^2 < \varepsilon^2 < \varepsilon$. Zato:

$$\|e + \beta a\| \leqq \|e - \beta^2 a^2\| \leqq \|e - \beta^4 a^2.a^2\| \leqq$$
$$\leqq \|e - \beta^8(a^2.a^2).(a^2.a^2)\| \leqq \ldots = \|e\|.$$

S tem je točka (d) v celoti potrjena.
Za absolutno dovolj majhne $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ je tedaj

$$1 = \|e + \alpha a\|.\|e + \beta b\|/\|e\|^2 \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{\|e\|}\left\|\left[1 + \alpha\beta\,\sigma(a,b)\right]e + \left[\alpha a + \beta b + \alpha\beta\, a \times b\right]\right\| =$$
$$= \frac{1}{\|e\|}\left|1 + \alpha\beta\,\sigma(a,b)\right|.\|e + c\| = \left|1 + \alpha\beta\,\sigma(a,b)\right|.$$

Ker pa sta smerna kota števil α in β poljubna, od tod že sledi: $\sigma(a,b) = 0$. To pa je dokaz, da je za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ naša algebra res kar algebra iz primera [10,3], ki je sicer popolnoma poljubna, le σ je na $\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0$ (kartezični produkt!) ničelni funkcional.

Treditev (f) je za $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ trivialna, za $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pa sledi iz (*), ki se za $x = a \in \mathcal{H}_0$ in $\sigma(a,a) = 0$ (kar je isto kot $a \in \mathcal{H}^0$) glasi:

$$1 + \beta^3\tau(a.a^2) + \ldots \leqq 1$$

Nadaljujmo dokaz pri točki (g). Po formuli (4,8) je:

$$\left\|p^n\left(e + \tfrac{1}{n}x\right)\right\| = \left\|e + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}P_1^k(x)\right\|.$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}P_1^k(x)\right\| \leqq \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\|x\|^k = (1 + \|x\|/n)^n - 1 \leqq$$
$$\leqq \exp\|x\| - 1.$$

Ker je $\varepsilon < \ln(\varepsilon_1 + 1)$, je za $\|x\| < \varepsilon$ in vsako potenco p^n: $p^n(e + \frac{1}{n}x) \in \mathcal{U}(e)$.

Dokažimo (g) s popolno indukcijo.

Za $n = 1$ je vse v redu. Naj trditev velja za vse $n \leqq k$.

$$\|e\|^k \|p^{k+1}(e + \frac{1}{k+1} x)\| =$$

$$= \|e\|^k \|p^i(e + \frac{1}{i}\cdot\frac{i}{k+1} x).p^{k+1-i}(e + \frac{1}{k+1-i}\cdot\frac{k+1-i}{k+1} x)\| \geqq$$

$$\geqq \|e\|^{k-1}\|p^i(e + \frac{1}{k+1} x)\|.\|p^{k+1-i}(e + \frac{1}{k+1} x)\| \geqq$$

$$\geqq \|e + \frac{1}{k+1} x\|^i \|e + \frac{1}{k+1} x\|^{k+1-i} = \|e + \frac{1}{k+1} x\|^{k+1} .$$

Sedaj pa to upoštevajmo: $\|e\|(1 + \frac{1}{n} \operatorname{Re}\tau(x))^n \leqq$

$$\leqq \|e\|.|\tau(e + \frac{1}{n} x)|^n \leqq \|e + \frac{1}{n} x\|^n / \|e\|^{n-1} \leqq$$

$$\leqq \|P^n_{L,R}(e + \frac{1}{n} x)\| .$$

Iz trditve [5,7] že sledi točka (h).

Dokažimo še zadnji dve točki!

$$\|x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} P^3(x) + \ldots\| \leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \|x\|^k = \exp\|x\| - 1 .$$

Za $\|x\| < \varepsilon < \ln(1 + \varepsilon_1)$ je torej $\|\operatorname{Exp}(x) - e\| < \varepsilon_1$ za vsako eksponentno funkcijo Exp. Trditev [5,3] nam za poljuben x in α, β iz točke (j) da za poljubni funkciji Exp_1 in Exp_2 :

$$\frac{1}{\|e\|}\|\operatorname{Exp}_1(\alpha x)\|.\|\operatorname{Exp}_2(\beta x)\| \leqq \|\operatorname{Exp}_\lambda((\alpha + \beta)x)\| \leqq F((\alpha + \beta)x) .$$

Torej velja tudi (10,10).

Od tod pa sledi za $\|y\| < \varepsilon$: $F(y)^2 \leqq \|e\| F(2y)$.

Če je x poljuben element, je za dovolj velik $n \in \mathbb{N}$:

$$2^{-n}\|x\| < \varepsilon \text{ ; zato je: } F(2^{-n}x)^{2^n} \leqq \|e\|^{2^n-1} F(x) ,$$

iz česar dobimo po logaritmiranju:

$$2^{-n}[\ln F(2^{-n}x) - \ln\|e\|] \leqq \ln F(x) - \ln\|e\| .$$

Če n raste preko vseh meja, postaja neenačba veljavna za vse po normi še tako velike x .

$$\lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta}[\ln F(\beta x) - \ln\|e\|] = \frac{d}{d\beta} \ln F(\beta x)_{\beta=0} =$$

$$= \frac{1}{\|e\|} \frac{d}{d\beta} F(\beta x)_{\beta=0} = \frac{1}{\|e\|} \frac{d}{d\beta}\|e + \beta x\|_{\beta=0} = \operatorname{Re}\tau(x)$$

(upoštevaje trditev [7,6]). Torej je za vsak x:

$\operatorname{Re}\tau(x) \leqq \ln F(x) - \ln\|e\|$; to pa je že (10,9). □

Lokalna posplošitev absolutne vrednosti nas očitno ni pripeljala do kakšnih specialnih struktur. Zato poskusimo sedaj z globalno posplošitvijo, torej z normo, ki zadošča dvojni neenačbi na celi algebri:

$m\|x\|.\|y\| \leqq \|x.y\| \leqq M\|x\|.\|y\|$. (10,11)

Najprej pa navedimo pomemben izrek!

[10,5] IZREK. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra nad $\mathbb{C}$ in L_x naj bo za vsak $x \neq 0$ bijektiven operator. Tedaj je $\mathcal{H}$ topološko izomorfna $\mathbb{C}$.

Izredna pomembnost izreka je v tem, da ne zahteva niti asociativnosti niti eksistence enote! Kolikor mi je znano, je avtor I. Kaplansky, vendar je možno, da je bil izrek dokazan že zelo zgodaj, saj je dokaz presenetljivo kratek in eleganten, pa ga zato tu tudi navajam.

Dokaz. Bodita x in y linearno neodvisna. Za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ je $L_{x-\lambda y} = L_x - \lambda L_y$ omejen bijektiven operator, prav tako tudi $L_{x-\lambda y}L_y^{-1} = L_xL_y^{-1} - \lambda I$. Toda tedaj je spekter operatorja $L_xL_y^{-1}$ prazen, kar pa ni mogoče. $\square$

Analogen izrek velja, če je R_x za vsak $x \neq 0$ bijektiven operator.

[10,6] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra nad $\mathbb{K}$ z algebrsko normo $\|.\|$, naj bo

$\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{H} \ ; \ \exists L_x^{-1}\} \neq \emptyset$

in naj eksistira $A \in \mathbb{R}^+$, da je $\|x\|.\|L_x^{-1}\| \leqq A$ za vsak $x \in \mathcal{R}$. Tedaj za vsak $z \in \mathcal{H} - \{0\}$ eksistira L_x^{-1}.

Dokaz. Za $\dim \mathcal{H} = 0$ je $\mathcal{R} = \emptyset$. Za $\dim \mathcal{H} = 1$ je trditev trivialna. Zato naj bo odslej $\dim \mathcal{H} > 1$.

Naj bo $\mathcal{D}_r = \{z \in \mathcal{H} \ ; \ \|z\| \geqq r\}$ za $r \in \mathbb{R}^+$.

Za vsak tak r je $\mathcal{R} \cap \mathcal{D}_r \neq \emptyset$.

$\mathcal{D}_r$ je povezana množica! Vzemimo, da sta $x,y \in \mathcal{D}_r$. Če je y nekolinearen z x, potem ta dva elementa povezuje pot

$$f(t) = \frac{(1-t)\|x\| + t\|y\|}{\|(1-t)x + ty\|}\left[(1-t)x + ty\right] , \qquad (*)$$

ki vsa leži v $\mathcal{D}_r$. Če pa je $y = \alpha x$ za $\alpha \in \mathbb{K}$, vzemimo nek drug od x linearno neodvisen element z iz $\mathcal{D}_r$ in nato sestavimo pot od x do z in od z do y po receptu (*).

Dalje je $\mathcal{R} \cap \mathcal{D}_r$ v relativni topologiji topološkega prostora $\mathcal{D}_r$ odprta množica, ker je $\mathcal{R}$ odprta množica po lemi [3,3],(a).

Toda $\mathcal{R} \cap \mathcal{D}_r$ je v tej topologiji tudi zaprta množica! Naj bo $\{x_k\} \subset \mathcal{R} \cap \mathcal{D}_r$ Cauchyjevo zaporedje. Eksistira tak $x \in \mathcal{D}_r$, da je: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.
Ker je $\|L_{x_n}^{-1}\| \leqq A/\|x_n\| \leqq A/r$, je:

$$\|L_{x_k}^{-1} - L_{x_n}^{-1}\| = \|L_{x_k}^{-1}(L_{x_n} - L_{x_k})L_{x_n}^{-1}\| \leqq$$
$$\leqq \|L_{x_k}^{-1}\|.\|L_{x_n} - L_{x_k}\|.\|L_{x_n}^{-1}\| \leqq \|x_n - x_k\|.A^2/r^2 .$$

Zato eksistira povsod definiran omejen linearen operator U, da je: $\lim_{n\to\infty} \|L_{x_n}^{-1} - U\| = 0$.

$$\|L_x U - I\| \leqq \|L_x U - L_x L_{x_n}^{-1}\| + \|L_x L_{x_n}^{-1} - L_{x_n} L_{x_n}^{-1}\| \leqq$$
$$\leqq \|L_x\|.\|U - L_{x_n}^{-1}\| + \|L_x - L_{x_n}\|.\|L_{x_n}^{-1}\| \leqq$$
$$\leqq \|L_x\|.\|U - L_{x_n}^{-1}\| + \|x - x_n\|.A/r .$$

Ta in pa analogen račun za $\|UL_x - I\|$ nam povesta, da je $U = L_x^{-1}$, in $\mathcal{R} \cap \mathcal{D}_r$ je res zaprta množica.

Potem pa je zaradi povezanosti množice $\mathcal{D}_r$:
$\mathcal{R} \cap \mathcal{D}_r = \mathcal{D}_r$. Toda: $\mathcal{H} - \{0\} = \bigcup_{r\in\mathbb{R}^+} \mathcal{D}_r$ in s tem so vsi L_x obrnljivi za $x \neq 0$. □

Trditev in njen dokaz sta narejena po vzorcu podobnega Edwardsovega izreka za asociativne algebre ([24]). Analogen izrek velja seveda za operatorje R_x.

[10,7] KOROLAR. Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksna Banachova algebra z algebrsko normo $\|.\|$, naj bo $\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{H} ; \exists L_x^{-1}\} \neq \emptyset$ in naj eksistira tak $A \in \mathbb{R}^+$, da je: $\|x\|.\|L_x^{-1}\| \leqq A$, $\forall x \in \mathcal{R}$. Tedaj je $\mathcal{H}$ topološko izomorfna $\mathbb{C}$.

Korolar je očitna posledica trditve [10,6] in izreka [10,5]. Analogen korolar dobimo z zamenjavo L z R.

[10,8] IZREK. Naj bo $\mathcal{H}$ kompleksna algebra z multiplikacijo . in enoto e in obenem normiran prostor za normo $\|.\|$, za katero eksistirata konstanti $m,M \in \mathbb{R}^+$, da je za

vsaka $x,y \in \mathcal{H}$ veljavna dvojna ocena (10,11). Tedaj je $\mathcal{H}$ topološko izomorfna $\mathbb{C}$.

Dokaz. Napolnimo $\mathcal{H}$ v $\widetilde{\mathcal{H}}$. Pri tem norma obdrži vse omenjene lastnosti. Uvedimo še novo normo: $|||x||| = M\|x\|$, za katero velja povsod:

$\frac{m}{M} |||x|||.|||y||| \leqq |||x.y||| \leqq |||x|||.|||y|||$.

Množica $\mathcal{R}$ iz trditve [10,5] ni prazna, ker eksistira enota. naj bo $x \in \mathcal{R}$. Za vsak $y \in \mathcal{H} - \{0\}$ je:

$|||y||| = |||x.(L_x^{-1}y)||| \geq \frac{m}{M} |||x|||.|||L_x^{-1}y|||$, oziroma

$\frac{M}{m} \geq |||x|||.\frac{|||L_x^{-1}y|||}{|||y|||}$.

Torej je tudi $\frac{M}{m} \geq |||x|||.|||L_x^{-1}|||$.

Pogoji iz korolarja [10,7] so izpolnjeni in $\widetilde{\mathcal{H}}$ je topološko izomorfna $\mathbb{C}$. Potem pa je zaradi končne dimenzionalnosti taka tudi algebra $\mathcal{H}$. $\square$

Žal realna verzija izrekov [10,5] in [10,8], ki je ob predpostavki, da eksistira enota (protiprimer v [37]!), v tem, da trdimo: $\dim \mathcal{H} = 1,2,4$ ali 8 , in ki je skoraj zagotovo pravilna, ni tako preprosto dokazljiva. V naslednji trditvi nanizajmo le nekaj lastnosti take realne algebre, kakršna sicer kompleksna nastopa v izreku [10,8].

[10,9] TRDITEV. Naj bo $\mathcal{H}$ realna Banachova algebra z enoto e in algebrsko normo $\|.\|$, za katero eksistira tak $A \in \mathbb{R}^+$, da je $\|x\|.\|y\| \leqq A\|x.y\|$ za vse $x,y \in \mathcal{H}$; tedaj je:

(a) $\|e\| \leqq A$; (10,12)

(b) za vsak $x \in \mathcal{H} - \{0\}$ eksistirata L_x^{-1} in R_x^{-1} in:

$$\left.\begin{aligned} \|x\|.\|L_x^{-1}\| &\leqq A , \\ \|x\|.\|R_x^{-1}\| &\leqq A ; \end{aligned}\right. \qquad (10,13)$$

(c) $\|x\|^n \leqq A^{n-1}\|p^n(x)\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$ (10,14)

(za vsako čisto n-to potenco p^n);

(d) $\|x\| \leqq A.\rho_z(x)$, $\forall x \in \mathcal{H}$; (10,15)

$\rho_z(x + y) \leqq A[\rho_z(x) + \rho_z(y)]$, $\forall x,y \in \mathcal{H}$; (10,16)

(e) $F(\alpha x).F(\beta x) \leqq A.F((\alpha + \beta)x)$ (10,17) za vsak $x \in \mathcal{H}$ in vsaka $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ z nenegativnim razmerjem; za vsak $n \in \mathbb{N}$ je:

$$\frac{1}{A} F(nx) \geq \left[\frac{1}{A} F(x)\right]^n ; \qquad (10,18)$$

(f) $\dim \mathcal{H} = 1, 2, 4, 8, \infty$.

Dokaz. (a) $\|e\|.\|y\| \leq A\|e.y\| = A\|y\|$.

(b) Množica $\mathcal{R} = \{x \in \mathcal{H} ; \exists L_x^{-1}\}$ zaradi eksistence enote ni prazna. Če torej eksistira L_x^{-1} za nek x, je:

$\|x\|.\|L_x^{-1}y\| \leq A\|x.(L_x^{-1}y)\| = A\|y\|$.

$\|x\| \cdot \frac{\|L_x^{-1}y\|}{\|y\|} \leq A$, $\forall y \in \mathcal{H} - \{0\}$.

S tem so izpolnjeni pogoji v trditvi [10,6].
Enako dokažemo tudi varianto z R_x^{-1} .

(c) Dokaz s popolno indukcijo! Za $n = 1$ je neenačba trivialna. Pa recimo, da velja neenačba za vse n do vključno k.

$A^k\|p^{k+1}(x)\| = A^k\|p^s(x).p^{k+1-s}(x)\| \geq$

$\geq A^{k-1}\|p^s(x)\|.\|p^{k+1-s}(x)\| \geq$

$\geq A^{k-1}.\frac{\|x\|^s}{A^{s-1}}.\frac{\|x\|^{k+1-s}}{A^{k-s}} = \|x\|^{k+1}$.

(d) $A.\rho_z(x) = A.\limsup_{n \to \infty}\left[\max_p\|p^n(x)\|^{1/n}\right] \geq$

$\geq A.\limsup_{n \to \infty}\left[\|x\|^n A^{1-n}\right]^{1/n} =$

$= A\|x\|\limsup_{n \to \infty} A^{-1+1/n} = \|x\|$.

$\max_p\|p^n(x + y)\|^{1/n} \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq$

$\leq \left[A^{n-1}\|p_1^n(x)\|\right]^{1/n} + \left[A^{n-1}\|p_2^n(y)\|\right]^{1/n} \leq$

$\leq A^{1-1/n}.\max_p\|p^n(x)\|^{1/n} + A^{1-1/n}.\max_p\|p^n(y)\|^{1/n}$.

Začetku in koncu ocene izračunajmo $\limsup_{n \to \infty}$, pa dobimo še (10,16).

(e) Uporabimo oznake iz trditve [5,3]:

$A.F((\alpha + \beta)x) \geq A\|Exp_\lambda((\alpha + \beta)x)\| \geq$

$\geq \|Exp_1(\alpha x)\|.\|Exp_2(\beta x)\|$, kjer sta Exp_1 in Exp_2 poljubni eksponentni funkciji. Vzemimo taki, da je

$\|\mathrm{Exp}_1(\alpha x)\| = F(\alpha x)$, $\|\mathrm{Exp}_2(\beta x)\| = F(\beta x)$, pa je!

Z indukcijo dokažemo še drugo neenačbo! Za $n = 1$ je celo kar identiteta. Pa naj bo neenačba pravilna za $n \leqq k$.

$$\frac{1}{A} F((k+1)x) = \frac{1}{A^2} F(x)F(kx) = \frac{1}{A} F(x)\left[\frac{1}{A} F(x)\right]^k = \left[\frac{1}{A} F(x)\right]^{k+1} .$$

(f) dobimo iz Bott - Milnorjevega izreka o končnodimenzionalnih algebrah z deljenjem. $\square$

NEKATERA ODPRTA VPRAŠANJA

ki so vzniknila ob nastajanju tega dela, pa jim avtor ni bil kos.

(1) Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra. Ali je za vsak $x \in \mathcal{H}$

$\inf_n \left[\sup_P \|P^n(x)\|^{1/n}\right] = \rho_z(x)$?

(2) Naj bo $\mathcal{H}$ Banachova algebra. Ali je $\mathrm{Exp}(x) \neq 0$ za vsak $x \in \mathcal{H}$ in za vsako eksponentno funkcijo Exp ? Ali je celo $E(x) > 0$ za vsak $x \in \mathcal{H}$?

(3) Ali je množica $\mathrm{EXP}(\mathcal{H})$ v Banachovi algebri $\mathcal{H}$ odprta? V katerih algebrah je $\mathrm{EXP}(\mathcal{H}) \supset \mathcal{H} - \{0\}$?

(4) Kaj je najboljša ocena za konvergenčno območje logaritma (5,32) v Banachovi algebri?

(5) Ali je tudi za $\dim(\mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0) = \infty$ algebra $\mathcal{H}_0$ iz korolarja (9,25) direktna vsota $\mathrm{an}(\mathcal{H}_0)$ in enostavnih idealov (v kakršnemkoli že smislu)?

(6) Klasifikacija metakompleksnih algeber, v katerih je jedro enodimenzionalno in antikomutativna algebra enostavna?

(7) Kakšna je metakompleksna algebra, pri kateri je antikomutativna algebra Liejeva?

(8) Ali je metakompleksna algebra brez pravih deljiteljev niča končnodimenzionalna? Ali je morda taka celo realna Banachova kvadratna algebra brez pravih deljiteljev niča?

(9) Kakšna je realna verzija izreka [10,5]? Ali vsaj realna verzija izreka [10,7]?

LITERATURA

V seznam literature sem uvrstil le tista dela, ki sem jih neposredno ali posredno uporabil. Izčrpen seznam literature iz naše teme bi bil seveda mnogo preobširen, najti pa ga je v referencah del iz tega seznama.

Z znakom • so zaznamovane knjige za razliko od člankov.

[1] A. A. Albert: Absolute-valued algebraic algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 763 - 768.

[2] --- : On nonassociative division algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 296 - 309.

[3] R. Arens: Linear topological division algebras. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 623 - 630.

[4] H. Behncke: Hermitean Jordan Banach algebras. J. London Math. Soc. (2) 20 (1979), 327 - 333.

[5] H. F. Bohnenblust, S. Karlin: Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras. Ann. of Math. (2) 62 (1955), 217 - 229.

[6] • F. F. Bonsall, J. Duncan: Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras. Cambridge University Press 1971.

[7] • --- : Numerical Ranges II. Cambridge University Press 1973.

[8] • --- : Complete Normed Algebras. Springer - Verlag, Berlin - Heidelberg - New York 1973.

[9] R. H. Bruck, E. Kleinfeld: The structure of alternative division rings. Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 878 - - 890.

[10] J. A. Van Casteren: On algebras with a smooth norm. Bull. Soc. Math. Belg. 26 (1974), no. 4, 347 - 350 ; M.R., dec. 1978, # 16378.

[11] • A. Cedilnik: Algebre z neizrojeno invariantno bilinearno formo. Magistersko delo, Ljubljana 1978.

[12] W. Chojnacki: On Banach algebras which are Hilbert spaces. Commentationes math., Warszawa, 20 (1978), 279 - - 281 ; Z.B.M. 394 (1979), 46040.

[13] R. A. Czerwinski: Bonded quadratic division algebras. Pacific J. Math. 64 (1976), no. 2 , 341 - 351.

[14] C. V. Devàpakkiam: Jordan algebras with continuous inverse. Mathematicae Japonicae 16 (1971), 115 - 125.

[15] • J. Dieudonne: Foundations of Modern Analysis. Academic press, New York and London 1969.

[16] R. S. Doran: An application of idempotents in the clssification of complex algebras. Elem. Math. 35 (1980), 16 - 17 ; Z.B.M. 427 (1980), 245 - 246.

[17] • E. Hille: Functional Analysis and Semi-Groups. Amer. Math. Society, New York 1948.

[18] M. Hladnik, M. Omladič: On complex rotundity and smoothness. Glas. Mat. 32 (1977), no. 12, 73 - 79.

[19] L. Ingelstam: Hilbert algebras with identity. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), no. 6, 794 - 796.

[20] --- : Non-associative normed algebras and Hurwitz' problem. Ark. Mat. 5 (1964), 231 - 238.

[21] --- : Real Banach algebras. Ark. Mat. 5 (1964), 239 - - 270.

[22] I. Kaplansky: Infinite-dimensional quadratic forma admitting composition. Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), 956 - 960.

[23] • --- : Algebraic and Analytic Aspects of Operator Algebras. Providence, Amer. Math. Society 1970.

[24] • R. Larsen: Banach Algebras, an Introduction. Marcel Dekker, Inc., New York 1973.

[25] K. McCrimmon: Generically algebraic algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 127 (1967), 527 - 551.

[26] J. M. Osborn: Quadratic division algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962), 202 - 221.

[27] --- : Varieties of algebras. Advances in Math. 8 (1972), 163 - 369.

[28] • C. E. Rickart: General Theory of Banach Algebras. R. E. Krieger Publishing Co., Huntington, New York 1960.

[29] • R. D. Schafer: An Introduction to Nonassociative Algebras. Academic Press, New York and London 1966.

[30] --- : Generalized standard algebras. J. Algebra 12 (1969), 386 - 417.

[31] --- : Forms permitting composition. Advances in Math. 4 (1970), 127 - 148.

[32] M. F. Smiley: Real Hilbert algebras with identity. Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), 440 - 441.

[33] A. M. Sinclair: The norm of a Hermitean element in a Banach algebra. Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 446 - 450.

[34] V. K. Srinivasan: On some Gelfand - Mazur like theorems in Banach algebras. Bull. Austral. Math. Soc. 20 (1979), 211 - 215.

[35] E. Strzelecki: Metric properties of normed algebras. Studia Math. 23 (1963), 41 - 51.

[36] --- : Power-associative regular real normed algebras. J. Austral. Math. Soc. 6 (1966), 193 - 209 ; M.R. 33,, # 6435.

[37] K. Urbanik, F. B. Wright: Absolute-valued algebras. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 861 - 866.

[38] • I. Vidav: Banachove algebre. IMFM, Ljubljana 1978.

[39] M. A. Youngson: A Vidav theorem for Banach algebras. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 84 (1978), 263 - 272.

[40] • K. A. Želvakov, A. M. Slinjko, I. P. Šestakov, A. I. Širšov: Koljca, blizkie k associativnim. Nauka, Moskva 1978.

STVARNO KAZALO