PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **13** (1985/1986)
Številka 4
Strani 194–203

Janko Gravner:

STRATEGIJE

Ključne besede: matematika, teorija iger.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/13/790-Gravner.pdf

STRATEGIJE

1. Osnovni pojmi

Bralci Preseka so gotovo že zdavnaj sami opazili, da lahko igre med dvema igralcema v grobem razdelimo v dve skupini: igre, pri katerih je treba "samo misliti", in take, kjer igra določeno vlogo tudi sreča. Tukaj se bomo ukvarjali s prvim tipom, bolj natančno, vse igre, ki jih bomo srečali, bodo

(a) *končne,* to je, igralec, ki je na potezi, ima vedno na izbiro le končno mnogo potez in igra se vedno konča,

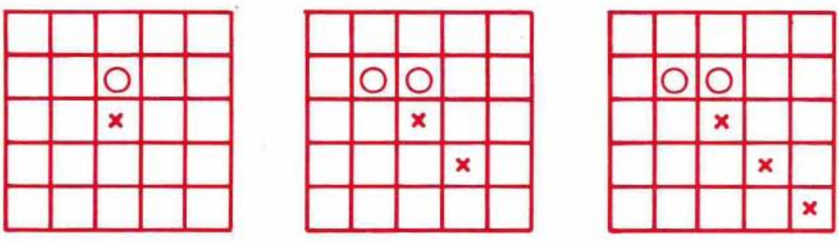
(b) *s popolno informacijo,* to pomeni, da igralec pred vsako svojo potezo pozna tako pozicijo kot tudi ves dotedanji potek partije in

(c) *med dvema igralcema.*

Končnim igram s popolno informacijo med dvema igralcema bomo odslej rekli kar na kratko igre, saj nas drugačne tu ne bodo zanimale.

Žal so resnično zanimive igre, kot so šah, go, dama, mlin in podobne, preveč zapletene, da bi nam tu služile kot primer, zato najprej opišimo nekaj takih iger (ali bolje igric), ki imajo enostavnejša pravila, a so še vedno dovolj zanimive, da bodo marsikoga tako prevzele, da bo ob igranju s sošolcem preslišal marsikatero šolsko uro. Da poenostavimo izražanje, bomo imenovali igralca, ki je prvi na potezi, *beli,* njegovega nasprotnika pa *črni.*

I. Igra križci–krogci. V kvadratke pravokotne končne mreže (kot je na primer list z nizkim karom) beli vpisuje križce, črni pa krogce. Zmaga tisti, ki prvi uspe postaviti v neprekinjeno vodoravno ali navpično ali diagonalno vrsto n svojih znakov. Če igralca zapolnita mrežo, ne da bi komu uspelo zmagati, je igra neodločena. Običajno je $n = 5$, ker je za manjše n beli v tako očitni prednosti, da igra ni zanimiva, za višje n pa je zmagati na manjših mrežah že zelo težko. Za $n = 3$ lahko na primer beli zmaga že kar v treh potezah. Oglejmo si



Slika 1

primer na sliki 1, ki jasno pokaže, kako mora beli v tem primeru igrati, da bo zmagal (to seveda gre le v primeru, da je mreža dovolj velika).

Naloga 1. Kako velika mora biti mreža za $n = 3$, da beli lahko zmaga? Na dovolj veliki mreži opiši pot belega do zmage v primeru $n = 4$.
Za $n = 5$ pa, kolikor je avtorju znano, še ni dokazano, da beli sploh lahko zmaga, če seveda črni igra optimalno.

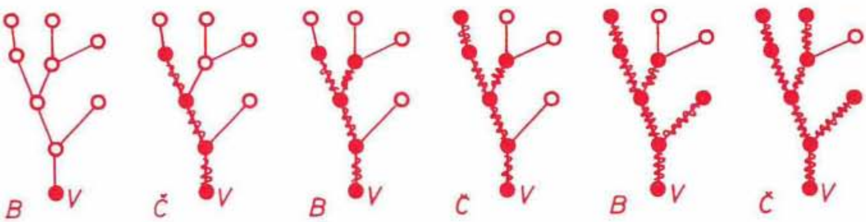
II. Razne variante igre nim

II.1. Nim 1. Na mizi je n dinarjev. Igralec, ki je na potezi, lahko vzame 1, 2 ali 3 dinarje. Tisti, ki pobere zadnji dinar, zmaga in pospravi ves kupček.

Naloga 2. V katerem primeru beli lahko zmaga in kako mora za to igrati? Kaj pa, če tisti, ki pobere zadnji dinar, izgubi? Kaj pa, če lahko igralec na potezi vzame poljubno število dinarjev med 1 in k ($k < n$)?

II.2. Nim 2. Na mizi je n kupčkov s $p_1, ..., p_n$ dinarji. Igralec, ki je na potezi, lahko vzame poljubno število dinarjev iz enega izmed kupčkov (vendar mora vzeti vsaj en dinar). Tisti, ki pobere zadnji dinar, zmaga. Na primer, če so trije kupčki z 1, 3 in 5 dinarji, lahko igra poteka tako: $B(1,3,5)$, $Č(1,3,0)$, $B(1,1,0)$, $Č(1,0,0)$ ($Č(1,3,0)$ pomeni, da je črni na potezi in da ima pred sabo kupčke z 1, 3 in 0 dinarji) in črni zmaga. Pozneje bomo videli, da v tej igri beli "skoraj vedno" lahko zmaga.

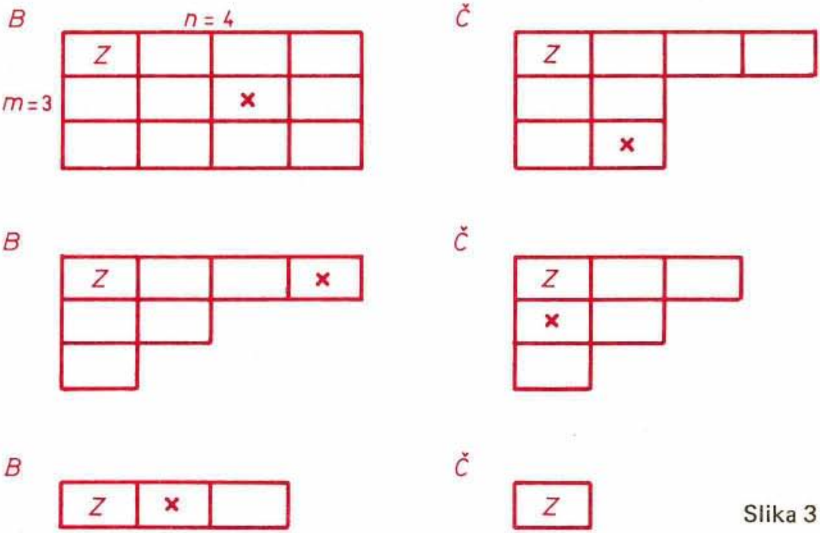
II.3. Drevesni nim. Kaj je graf in kakšne vrste grafi so drevesa, bralci Preseka že vedo (glej tudi sliko 2). Igralca imata na začetku pred sabo drevo z vrhom V, ki ima še to lastnost, da iz točke V vodi le ena povezava. Igrata tako, da izmenično počrnjujeta točke in povezave drevesa. Igralec, ki je na potezi, mora počrniti neko (povezano) pot med neko nepočrnjeno in neko že počrnjeno točko. Na začetku je edina črna točka vrh V. Pri počrnitvi poti pa se počrnijo tudi vse točke na njej. Zmagovalec je tisti, ki počrni zadnjo povezavo (ali, kar je isto, zadnjo točko). Igra lahko poteka na primer tako, kot je prikazano na sliki 2.



Slika 2

Tukaj je zmagal črni.

II.4. Zastrupljena čokolada. Igralca imata pred sabo tablico čokolade velikosti $m \times n$. Igralec, ki je na potezi, si izbere košček in ga odgrizne, hkrati z njim pa tudi vse, kar je desno in pod tem koščkom (torej ves desni spodnji vogal glede na izbrani košček). Košček levo zgoraj je zastrupljen, zato tisti, ki ga mora pojesti, izgubi. Oglejmo si primer na sliki 3 (m = 3, n = 4). S križcem je označen izbrani košček.

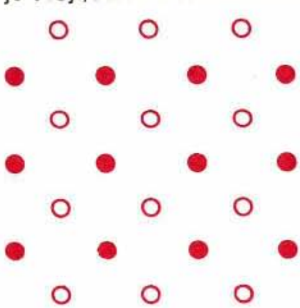


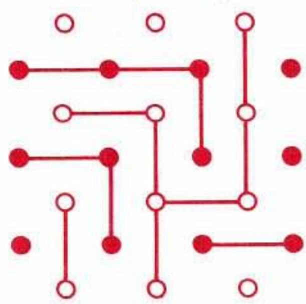
Slika 3

Pri tem beli seveda zmaga.

Naloga 3. Kako mora beli igrati v primeru m = 2 (ali n = 2), da bo gotovo zmagal?

III. Bridget. Igralca imata pred sabo kvadratno mrežo belih in črnih točk, z n točkami v vsaki od štirih stranic (v narisanem primeru na sliki 4 je n = 3, običajno je večji). Beli z rdečim svinčnikom povezuje bele točke, v vsaki potezi z





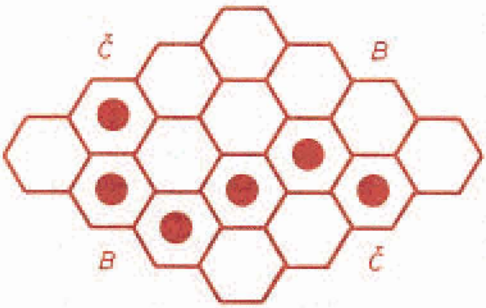
Slika 4

Slika 5

vodoravno ali navpično črto po en par točk, črni pa s črnim svinčnikom povezuje črne točke. Naloga belega je povezati neko točko v spodnji vrsti z neko točko v zgornji, črnega pa, povezati neko točko v levem stolpcu z neko točko v desnem. Seveda se rdeče in črne črte na smejo sekati. Zmagovalni položaj belega je na primer takšen kot na sliki 5.

Naloga 4. Pokaži, da se ta igra ne more končati drugače, kot da nekdo zmaga.

IV. Hex. To igro je treba igrati na mreži šestkotnikov. Mreža ima obliko romba velikosti $k \times k$. Običajno je $k = 11$, na sliki 6 pa je $k = 4$. Igralca izmenično postavljata kamenčke na ploščo. Beli skuša z belimi kamenčki povezati (to pomeni sestaviti povezano verigo) dve nasprotni strani, označeni z B, črni pa nasprotno, s črnimi kamenčki strani, označeni s $\check{C}$. Ena od zmagovalnih poti črnega je označena na sliki. Prav tako kot v prejšnjem primeru se da videti, da se igra mora končati z zmago nekoga.



Slika 6

Naloga 5. Ali beli v primeru $k = 4$ lahko zmaga? Kako mora za to igrati?

Gotovo marsikdo pozna še kakšen primer končne igre s popolno informacijo. Našteti zgledi bodo, upajmo, za ilustracijo zadoščali.

To, kar bo sedaj sledilo, bo matematična teorija v precej čistem pomenu te besede. Velikokrat bomo dokazali, da nekaj obstaja, niti najmanjšega namiga pa nam ti dokazi ne bodo dali, kako bi tisto tudi dobili. O vrednosti takih dokazov bi se seveda dalo razpravljati, obstajajo celo matematične šole ("intuicionisti"), ki jih a priori odklanjajo. Vsaj elegance pa jim večinoma ne gre oporekati, pa tudi določene uporabnosti, čeravno bolj abstraktne, ne čisto. Poglejmo si najprej preprost primer takega razmišljanja. Vemo, da imata dve družini skupaj sedem otrok. Kako bi dokazali, da ima vsaj ena družina vsaj štiri otroke? Preprosto, če bi vsaka družina imela največ tri, bi jih obe skupaj imeli največ šest, kar je v nasprotju s predpostavko. Takemu dokazu rečemo "reductio ad absurdum" (prevedba do protislovja) in je čisto nekonstruktiven, saj nam ne pove načina, s katerim bi ugotovili, katera od družin je tista z najmanj štirimi otroki. Jasno, saj imamo premalo podatkov za kaj takega.

Vrnimo se sedaj k našim igram. Definirajmo si najprej nekaj pojmov. Prvič, vsakemu možnemu izteku igre rečemo *izid*. Pri šahu so na primer trije izidi:

zmaga belega, zmaga črnega in remi. Imamo tudi igre, kjer je možnih več izidov, med našimi primeri pa takih ni. Seveda so zanimive samo igre, kjer sta vsaj dva možna izida.

Najvažnejši pojem pri igrah pa je *strategija.* To je natančen predpis, kako naj v vsaki potezi in v vsaki poziciji določeni igralec igra oziroma strategija je popoln (in vnaprej dan) opis, kako naj igralec odgovarja na poteze nasprotnika, in ne vključuje nobene bistrosti. Mislimo si lahko, da igro igra računalnik, ki mora v poljubni poziciji potegniti potezo, katero, pa določa program (seveda brez generatorja slučajnih števil). V igri nim 1 je ena od strategij belega taka: v vsaki potezi vzame en dinar. V igri nim 2 pa lahko igramo po tejle strategiji: vedno vzamemo vse dinarje z najmanjšega kupa. Pri čokoladi pa lahko črni igra po tejle strategiji: pogleda, kateri kos je odgriznil v svoji potezi beli, si izbere koščck, ki se le z eno točko dotika tega kosa (ta je nujno en sam), ga odgrizne in z njim vse koščke desno in pod njim.

Seveda nobena od naštetih strategij ni kaj prida. Za vsako od njih bo nasprotnik, ko enkrat ve zanjo, zlahka igral tako, da bo zmagal. Kakšne strategije pa sploh so dobre? Najbolj ugodne so gotovo take, ki omogočajo zmago ne glede na to, kaj igra nasprotnik. Takim strategijam rečemo *zmagovalne strategije.* Tako bi na primer nalogo 1 lahko povedali tudi tako: poišči zmagovalno strategijo za belega v igri *nim* 1.

Če v neki poziciji obstaja zmagovalna strategija na primer za belega, potem ji rečemo *zmagovalna pozicija* za belega. Igra torej postane nezanimiva, čim beli najde zase zmagovalno strategijo, saj jo lahko brez razmišljanja uporablja in črni je obsojen na poraz, pa če se še tako trudi.

Vzemimo, da sta v neki igri le dva možna izida: zmaga belega ali zmaga črnega. Videli bomo, da potem *obstaja bodisi zmagovalna strategija za belega bodisi za črnega.* To je najbrž bil prvi "resni" rezultat teorije iger, dokazal ga je leta 1921 nemški matematik Ernst Zermelo. Če sledimo njegovi ideji, predpostavimo najprej, da je naša trditev napačna. To pomeni, da – po kakršnikoli že strategiji beli igra – vedno lahko črni s primerno izbiro potez zmaga in narobe, za vsako strategijo črnega lahko beli igra tako, da bo zmagal. Iz tega sledita dve posledici.

(1) Katerokoli prvo potezo bo beli odigral, bo nastala pozicija, ki zanj ne bo zmagovalna. Seveda, saj če bi obstajala taka prva poteza belega, ki bi ga privedla v zmagovalno pozicijo, bi bila zanj že začetna pozicija zmagovalna.

(2) Obstaja vsaj ena začetna poteza belega, ki privede do pozicije, ki za črnega ni zmagovalna. V nasprotnem primeru bi bila namreč začetna pozicija zmagovalna za črnega.

Ko enkrat to vemo, smo skoraj opravili. Iz (1) in (2) sledi, da obstaja taka začetna poteza belega, da pozicija, ki nastane, ne bo zmagovalna za nobenega od obeh igralcev. Imenujmo to pozicijo Y_1. S popolnoma istim sklepom lahko pokažemo, da obstaja taka poteza črnega v poziciji Y_1, da bo nastala pozicija Y_2, ki ne bo zmagovalna niti za belega niti za črnega. Potem lahko, spet na enak način, dobimo pozicije Y_3, Y_4, ..., ki niso zmagovalne za nikogar. Torej se taka igra ne bo nikoli končala, saj če bi se, bi bila končna pozicija zmagovalna za nekoga (predpostavili smo, da sta le dva mogoča izida). Dobili smo torej neskončno zaporedje potez, kar nasprotuje naši predpostavki o končnosti igre.

Naloga 6. Vzemimo, da imamo igro s tremi izidi: zmago belega, zmago črnega in remijem. Potem bodisi obstaja zmagovalna strategija za belega, bodisi taka strategija belega, s katero lahko beli iztrži vsaj remi, bodisi zmagovalna strategija za črnega.

Torej za šah lahko rečemo tole: bodisi obstaja zmagovalna strategija za belega, bodisi zmagovalna strategija za črnega, bodisi se ob pametni igri obeh igralcev vsaka partija mora izteči v remi. Opomba: nobena od teh strategij danes še ni znana (in tudi gotovo ne bo tako kmalu), ker je šah igra, ki ima ogromno število možnih pozicij.

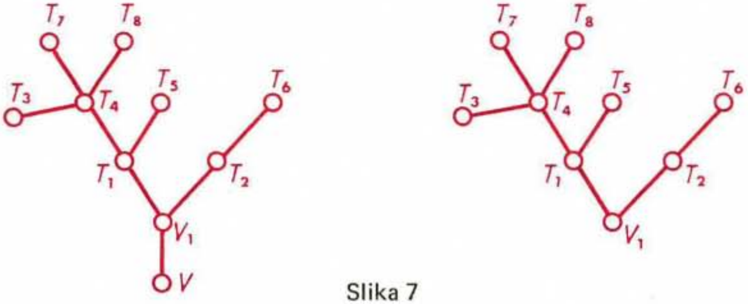
Naloga 7. Predpostavi, da imaš na voljo računalnik z neskončnim spominom, ki dela zelo hitro. Premisli, kakšen bi bil program, ki bi ugotovil, katera od treh zgoraj navedenih možnosti pri šahu dejansko nastopi.

Vrnimo se sedaj k našim primerom. Dokažimo najprej tole. *Pri igri križci–krogci ne obstaja zmagovalna strategija za črnega* (torej obstaja taka strategija za belega, s katero lahko vsaj remizira). Pa predpostavimo nasprotno, da zmagovalna strategija za črnega obstaja. V tem primeru beli lahko igra takole. V svoji prvi potezi nekje naredi križec (kjerkoli). Nato počaka, da svojo potezo odigra črni. Potem se beli lahko brani tako, da igra zmagovalno strategijo črnega, dela se, da je črni z dodatnim križcem. Če zmagovalna strategija (za črnega) od njega zahteva, da igra tisto potezo, ki jo je že naredil, zariše križec na poljubnem praznem polju. Na ta način igra zmagovalno strategijo z dodatno potezo. Toda ta dodatna poteza ga pri zmagovalni strategiji ne moti, saj je dodatni križec vedno lahko le v korist in nikoli v škodo. Potemtakem beli na ta način lahko zmaga. Prišli smo torej v nasprotje s predpostavko, da črni lahko zmaga. S tem smo to trditev ovrgli. Morda se je pri tem dokazu komu zdelo čudno, da predpostavljamo, da beli ve za hipotetično zmagovalno strategijo črnega. To smo v resnici prisiljeni storiti, saj za zmagovalno strategijo zahtevamo, da vodi do zmage, kakorkoli že nasprotnik igra. Smo torej kar se da pesimistični, predpostavimo, da nasprotnik v vsaki potezi ve za svojo najboljšo potezo in jo brez usmiljenja igra.

Naloga 8. Pokaži, da pri igrah *bridget* in *hex* obstaja zmagovalna strategija za belega.

Naslednja je na vrsti igra zastrupljena čokolada. Uženemo jo s podobnim razmislekom, kot je bil zgornji. Denimo, da je vsaj eno od števil m, n večje od 1 (če je $m = n = 1$, je beli, jasno, izgubljen). V tem primeru obstaja *zmagovalna strategija za belega.* Naj temu ne bo tako, naj torej obstaja zmagovalna strategija za črnega. Potem v prvi potezi beli odgrizne samo košček na poziciji (m,n). Katerokoli potezo nato igra črni, prvo potezo belega zabriše in beli se brez težav lahko drži zmagovalne strategije črnega in zmaga. Predpostavka, da lahko zmaga črni, je torej ovržena in črni je tisti, ki je zapisan pogubi.

Tudi v igri drevesni nim *obstaja zmagovalna strategija za belega.* Da bralca ne bi utrujali z rigoroznostjo, bomo dokaz za to trditev razložili kar na primeru. Vzemimo tile dve drevesi s slike 7:



Slika 7

Drugo drevo dobimo iz prvega tako, da mu "odrežemo deblo" oziroma vrh premaknemo v točko V_1. Tudi na tako dobljenem drevesu lahko igramo *drevesni nim* po istim pravilih. Recimo tej igri *nim*★. V tej igri obstaja bodisi zmagovalna strategija za belega bodisi za črnega. Če nastopi prvi primer in je prva poteza v zmagovalni strategiji za belega na primer počrnitev poti od T_8 do V_1, potem v prvi potezi originalne igre beli počrni pot od T_8 do V, nato pa igra zmagovalno strategijo belega v igri *nim*★. Če pa v igri *nim*★ obstaja zmagovalna strategija za črnega, beli v prvi potezi preprosto počrni povezavo od V do V_1, nato pa spet brezskrbno igra zmagovalno strategijo za črnega v igri *nim*★ in seveda spet zmaga.

Vse doslej so bile zmagovalne strategije "v oblakih". Vemo, da obstajajo, a jih ne poznamo. Za dve od naštetih iger bomo bolj konkretni in bomo zmagovalni strategiji opisali.

2. Zmagovalna strategija za igro nim 2

V tej zmagovalni strategiji je skrito kar precej matematike. Kdor želi uspešno igrati po njej, se mora najprej dobro naučiti pretvarjati dvojiški zapis števil v desetiškega in obratno. Pa preidimo k stvari. Najprej bomo naredili korak, ki je v matematiki precej pogost, namreč, definirali bomo nekaj, kar na prvi pogled ne bo imelo niti najmanjše zveze z našo igro. Vzemimo dve nenegativni celi števili a in b in izračunajmo "nekaj podobnega kot vsoto", $a \oplus b$, na tak način: zapišemo a in b v dvojiškem sistemu eno nad drugo, tako da so enice nad enicami itd. Nato posamezne številke seštejemo po modulu 2, pri čemer pa seštevek v nekem stolpcu nič ne vpliva na vsoto v naslednjem. Najbolj se to vidi na primeru:

$$11 \oplus 23 = \begin{array}{r} 1011 \\ \underline{10111} \\ 11100 \end{array} = 28$$

To torej ni običajna vsota števil. Ta operacija ima naslednje lastnosti, ki jih je zelo lahko preveriti, zato jih bomo le navedli.

$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ (asociativnost),
$a \oplus b = b \oplus a$ (komutativnost),
$a \oplus 0 = a$ in
$a \oplus a = 0$

za poljubna cela števila $a, b, c \geqslant 0$. Bralca, ki obvlada algebraične strukture, opozorimo, da je množica $(\mathbf{N} \cup \{0\}, \oplus)$ Abelova grupa (kar za običajno seštevanje ne velja).

Predpostavimo sedaj, da imamo pri igri *nim* 1 n kupčkov s $p_1, ..., p_n$ dinarji. Najprej izračunamo tako imenovano vsoto pozicije $s = p_1 \oplus ... \oplus p_n$. Za igro s štirimi kupčki s 3, 5, 7 in 11 dinarji je vsota na primer

$$\begin{array}{r} 3 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \\ \hline 10 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 11 \\ 101 \\ 111 \\ 1011 \\ \hline 1010 \end{array}$$

enaka 10. Videli bomo, da igralec na potezi lahko zmaga vedno, ko je vsota različna od 0 (v nasprotnem primeru pa seveda lahko zmaga drugi igralec).

Igrati je treba tako, da bo po naši potezi vsota pozicije vedno enaka 0, če je to le mogoče (v zgornjem primeru je: v največjem kupu je treba pustiti le 1 dinar). Pa vzemimo, da je vsota začetne pozicije različna od 0, in pokažimo, da lahko beli odigra tako potezo, ki bo črnega postavila pred pozicijo z ničelno vsoto. Izračunajmo števila $s_1 = s \oplus p_1, ..., s_n = s \oplus p_n$. Da se dokazati, da obstaja tak i, $1 \leqslant i \leqslant n$, da je $s_i < p_i$. Beli sedaj igra tako, da v i–tem kupčku pusti s_i kovancev. Kakšna je po tej potezi pozicija? Spremenil se je le i–ti kupček, vsota nove pozicije s', je torej enaka:

$$s' = p_1 \oplus \ldots \oplus p_{i-1} \oplus s_i \oplus p_{i+1} \oplus \ldots \oplus p_n =$$
$$= p_1 \oplus \ldots \oplus p_{i-1} \oplus p_i \oplus s \oplus p_{i+1} \oplus \ldots \oplus p_n =$$
$$= (p_1 \oplus \ldots \oplus p_n) \oplus s = s \oplus s = 0$$

Kaj pa zdaj lahko igra črni? Karkoli bo revež igral, bo vsaj v enem kupčku spremenil (v dvojiškem zapisu) vsaj eno številko, s čimer bo povzročil , da vsota pozicije ne bo več nič. S tem bo belemu omogočil potezo, ki spet vodi v pozicijo z ničelno vsoto. In tako dalje do konca igre, ki je seveda tak, da so vsi kupčki prazni. Vsota take pozicije je seveda enaka 0, kar pomeni, da je zadnjo potezo odigral beli.

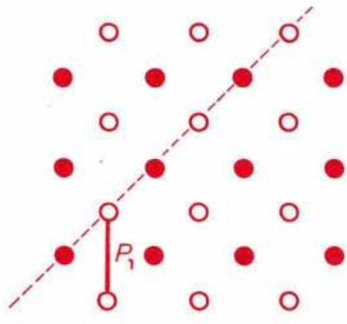
Vse je torej odvisno od vsote začetne pozicije. Če je enaka 0, lahko zmaga črni, v vseh ostalih primerih pa beli.

Naloga 9. Ali je poteza, ki jo beli v primeru, da je vsota pozicije različna od 0, mora igrati, do bo gotovo zmagal, vedno ena sama?

Naloga 10. Spremenimo pravila tako, da izgubi tisti, ki mora pobrati zadnji dinar. Kdaj v taki igri lahko beli zmaga? Opiši tudi zmagovalno strategijo.

3. Zmagovalna strategija za igro bridget

Najprej zmagovalno strategijo za belega opišimo, pozneje jo bomo utemeljili. Beli naj v mislih potegne diagonalo kot na sliki 8, nato pa igra potezo $P1$.



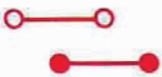
Slika 8

Nato naj igra po naslednjem algoritmu:

(1) Če črni poveže neko točko na diagonali s horizontalno črto, potem naj bo odgovor tak, kot na sliki 9.

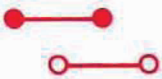
Slika 9

(2) Če črni poveže točki s črto pod diagonalo kakorkoli drugače, potem naj odgovori tako, kot kaže slika 10.

(2.1)  (2.2) 

Slika 10

(3) Če črni poveže točki nad diagonalo drugače kot v primeru (1), pa je treba odgovoriti tako, kot na sliki 11.

(3.1)  (3.2) 

Slika 11

(4) Če beli na potezo črnega ne more odgovoriti s potrebnim odgovorom (1) – (3), ker je to črto že kdaj prej povlekel ali pa take črte ni (npr. (2.2) ni možno, če črni poveže dve točki na desnem robu), potem beli poveže poljubni dve točki, ki ju na slepo izbere.

Če bo bralec to strategijo nekajkrat poskušal igrati, mu bo skoraj očitno, da vodi do zmage.

Naloga 11. Napiši računalniška programa, ki igrata *nim* 1 in *bridget* po zmagovalnih strategijah.

Janko Gravner