PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **20** (1992/1993)
Številka 6
Strani 376–380

Jože Grasselli:

KDAJ JE $a^b = b^a$?

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/20/1151-Grasselli.pdf

KDAJ JE $a^b = b^a$?

1. Gremo mimo hiše, nad njenimi vežnimi vrati je pritrjena tablica s hišno številko 16. No, $16 = 2^4 = 4^2$! *Vidimo, da števili* $a = 2, b = 4$ *izpolnjujeta enačbo*

$$a^b = b^a. \tag{1}$$

Postanemo pozorni: Ali je še kaj naravnih števil a, b, $a \neq b$, za katere velja (1)?

Ko v (1) postavimo $a = 1$, dobimo $b = 1$; podobno iz $b = 1$ izhaja $a = 1$. Števili $a = 1, b = 1$ sicer ustrezata enačbi (1), ni pa $a \neq b$. To pomeni, da je enačbo (1) pri pogoju $a \neq b$ mogoče izpolniti kvečjemu, ko je $a > 1$ in $b > 1$. Vemo, da se od 1 večje naravno število enolično izraža s produktom praštevil (na vrstni red faktorjev se ne oziramo). Na to dejstvo se bomo naslanjali.

Vzemimo, da naravni števili $a > 1, b > 1, a \neq b$ izpolnjujeta enačbo (1). Mislimo si števili na levi in desni v (1) izraženi s produktom praštevil. Vsako praštevilo na levi je faktor v a, vsako praštevilo na desni faktor v b. Ker sta števili enaki, nastopajo po omenjenem dejstvu na levi in desni prav ista praštevila. Torej velja

$$a = p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}, \quad b = p_1^{l_1} \cdots p_j^{l_j} \tag{2}$$

pri različnih praštevilih $p_1, \ldots, p_j$ in naravnih številih $k_1, \ldots, k_j, l_1, \ldots, l_j$. Ko vnesemo a, b iz (2) v (1), dobimo

$$p_1^{k_1 b} \cdots p_j^{k_j b} = p_1^{l_1 a} \cdots p_j^{l_j a}.$$

Zaradi enolične izrazljivosti naravnega števila s produktom praštevil mora biti

$$k_1 b = l_1 a, \ldots, k_j b = l_j a. \tag{3}$$

Ker je $a \neq b$, smemo vzeti $a < b$. Potem iz (3) sledijo ocene $k_1 < < l_1, \ldots, k_j < l_j$. Ko te ocene upoštevamo v (2), vidimo, da a deli b. Zato je

$$b = sa \tag{4}$$

in s naravno število. Ker je $a < b$, je $s \geq 2$.

Za $s = 2$ je po (4)

$$b = 2a \tag{5}$$

in (1) se glasi $a^{2a} = (2a)^a$. Od tod izračunamo $a = 2$, po (5) je $b = 4$. To rešitev enačbe (1) smo srečali že zgoraj.

Naj bo v (4) sedaj $s \geq 3$. Enačba (1) dobi obliko $a^{sa} = (sa)^a$ in dalje $a^{s-1} = s$. Ker je $a \geq 2$, velja ocena

$$s = a^{s-1} \geq (1+1)^{s-1}.$$

Razvijemo vsoto po binomskem obrazcu, pa imamo

$$s \geq 1 + (s-1) + \frac{(s-1)(s-2)}{2} + \ldots \geq s + \frac{(s-1)(s-2)}{2}$$

in torej

$$0 \geq \frac{(s-1)(s-2)}{2}.$$

Ker je $s \geq 3$, zaidemo v protislovje

$$0 \geq \frac{2 \cdot 1}{2} = 1.$$

V (4) torej $s \geq 3$ ni mogoče.

Tako smo našli: **Edina rešitev enačbe (1) v naravnih številih** a, b, $a < b$ **je** $a = 2, b = 4$.

2. Ali dobimo več rešitev enačbe (1), če sta a, b različna pozitivna ulomka? Najprej dve ugotovitvi.

Imejmo tuji naravni števili u, v in naj bo d največja skupna mera za $u + v, u$. Pri naravnih k, l je tedaj $u = dk, u + v = dl$. Ker je $v = dl - - u = d(l - k)$, vidimo, da d deli v. Toda d deli tudi u in ker sta u, v tuja, je $d = 1$. Velja torej:

I. Če sta u, v tuji naravni števili, sta tudi $u, u + v$ tuji naravni števili.

Doženimo še:

II. Če sta s, t od ena večji naravni števili, u, v tuji naravni števili in je $s^u = t^v$, obstaja naravno število g tako, da je $s = g^v, t = g^u$. Res! Ker je $s^u = t^v$, vsebujeta s, t prav iste praštevilske faktorje in velja

$$s = p_1^{k_1} \cdots p_j^{k_j}, \quad t = p_1^{l_1} \cdots p_j^{l_j} \tag{6}$$

pri različnih praštevilih $p_1, \ldots, p_j$ in naravnih številih $k_1, \ldots, k_j, l_1, \ldots, l_j$. Zaradi $s^u = t^v$ je

$$p_1^{k_1 u} \cdots p_j^{k_j u} = p_1^{l_1 v} \cdots p_j^{l_j v}$$

in tako

$$k_1 u = l_1 v, \ldots, k_j u = l_j v. \tag{7}$$

Ker sta u, v tuja, iz prve enačbe v (7) izhaja, da v deli k_1 in u deli l_1. Zato je $k_1 = r_1 v, l_1 = r_1' u$ pri naravnih številih r_1, r_1'. Enačbo $k_1 u = l_1 v$ lahko sedaj pišemo $r_1 v u = r_1' u v$ in najdemo $r_1 = r_1'$. Ker velja podobno pri drugih enačbah v (7), dobimo $k_1 = r_1 v, l_1 = r_1 u, \ldots, k_j = r_j v, l_j = r_j u$ pri naravnih številih $r_1, \ldots, r_j$. Ko to upoštevamo v (6), imamo

$$s = (p_1^{r_1} \cdots p_j^{r_j})^v, \quad t = (p_1^{r_1} \cdots p_j^{r_j})^u.$$

Vzamemo za g število v oklepaju in trditev II je dognana.

Vrnimo se k enačbi (1). Naj bosta a, b pozitivna ulomka, ustrezajoča (1) in $a < b$. Kvocient $\frac{a}{b} = c$ je potem pozitiven ulomek, večji od 1. Ko

$$b = ca \tag{8}$$

vstavimo v (1), dobimo $a^{ca} = (ca)^a$ in dalje $a^{c-1} = c$. Od tod izračunamo

$$a = c^{\frac{1}{c-1}} \text{ in po (8) še } \quad b = c^{\frac{c}{c-1}}. \tag{9}$$

Ker je $c > 1$, je ulomek $\frac{1}{c-1}$ pozitiven. Ko ga okrajšamo, je

$$\frac{1}{c-1} = \frac{u}{v} \tag{10}$$

pri tujih naravnih številih u, v. Po (10) je $c = 1 + \frac{v}{u}$ in iz (9) izhaja

$$a = (\frac{u+v}{u})^{\frac{u}{v}}, \quad b = (\frac{u+v}{u})^{\frac{u+v}{v}}. \tag{11}$$

Pozitivna ulomka $a < b$, ustrezajoča (1), morata torej biti oblike (11) pri tujih naravnih številih u, v.

Če je $v = 1$, iz (11) sledi

$$a = (1 + \frac{1}{u})^u, \ b = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}. \tag{12}$$

Za vsako naravno število u sta a, b iz (12) različna pozitivna ulomka. (Da ustrezata enačbi (1), je mogoče preveriti z vstavitvijo.) Za $u = 1$ dobimo iz (12) že znano rešitev $a = 2, b = 4$. Za $u = 2$ je $a = (3^2)/(2^2), b = (3^3)/(2^3)$, za $u = 3$ pa $a = (4^3)/(3^3), b = (4^4)/(3^4)$. Ko se u spreminja po vseh naravnih številih, dajeta obrazca (12) neskončno različnih pozitivnih ulomkov a, b, ki izpolnjujejo (1).

V obrazcih (11) naj bo zdaj $v \geq 2$. Ker je a ulomek, obstajata taki tuji naravni števili m, n, da je $a = \frac{m}{n}$, in po (11) lahko pišemo

$$(\frac{u+v}{u})^{\frac{u}{v}} = \frac{m}{n}.$$

Pri tem je $n \geq 2$, saj smo naravne rešitve našli že v razdelku 1. Ko odpravimo ulomke in potenciramo, je

$$(u+v)^u n^v = m^v u^u. \tag{13}$$

Ker sta u, v tuja, sta po ugotovitvi I tudi $u, u+v$ tuja; tudi $u^u, (u+v)^u$ sta potem tuja. Iz tujosti m, n sledi tujost za n^v, m^v. Po (13) mora torej u^u deliti n^v in n^v deliti u^u. Ker sta to naravni števili, je $u^u = n^v$. Zaradi $n \geq 2$, je $u \geq 2$; ker sta u, v tuja, po ugotovitvi II velja

$$u = g^v, \ n = g^u \tag{14}$$

pri naravnem številu g. Iz enakih razlogov je

$$u + v = h^v, \ m = h^u \tag{15}$$

pri naravnem številu h. Ker je $v \geq 2$, iz (14) in (15) izhaja

$$u = g^v < u + v = h^v < (g+1)^v = g^v + vg^{v-1} + \ldots$$

in po korenjenju

$$g < h < g + 1.$$

Naravno število h bi tako ležalo strogo med zaporednima naravnima številoma g in $g+1$. Takega naravnega števila pa ni. V obrazcih (11) torej $v \geq 2$ sploh ni mogoče.

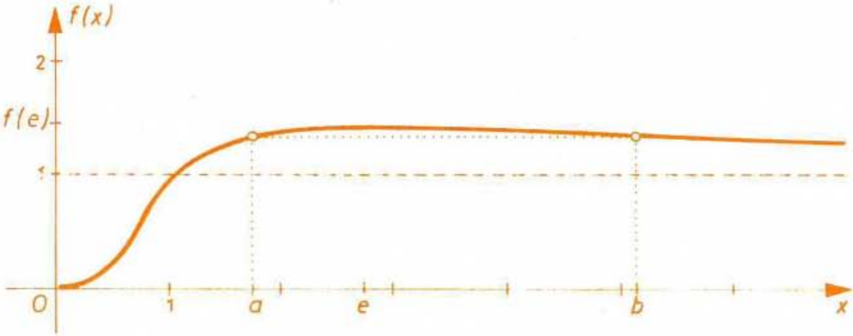
Tako smo ugotovili: **Vse pozitivne ulomke** a, b, $a < b$, **ki izpolnjujejo enačbo (1), zajamemo, ko v obrazcih (12) teče** u **po vseh naravnih številih.**

3. Če sta a, b pozitivni realni števili, je med pozitivnimi realnimi števili ravno eno, ki daje vrednost potence a^b. *Pri računanju s takimi potencami veljajo enaka pravila, kot če sta osnova in eksponent potence naravni števili ali pozitivna ulomka. Kako je z rešitvami enačbe (1) v pozitivnih realnih številih?*

Naj pozitivni realni števili $a, b, a < b$ izpolnjujeta enačbo (1). Potem velja tudi

$$a^{\frac{1}{a}} = b^{\frac{1}{b}}. \tag{16}$$

Rešitev enačbe (1) dajeta torej števili, pri katerih ima funkcija $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ enako vrednost. Potek funkcije $f(x)$ prikazuje slika.



Ko raste x od 0 do $e \doteq 2,72$, narašča $f(x)$ od 0 do $f(e) \doteq 1,45$. Ko raste x od e prek vsake meje, $f(x)$ pada in se zmeraj bolj približuje vrednosti 1. Če vzamemo kakšen a, $1 < a < e$, obstaja ravno en $b > e$, ko velja (16). Za $0 < a \leq 1$ in $a = e$ ni takega $b, b \neq a$, ki bi izpolnjeval enačbo (1). Vse to vidimo iz slike.

Oglejmo si še enkrat obrazca (9). Če je c od 1 večje realno število, sta števili a, b dobljeni po (9), pozitivni realni. Da izpolnjujeta enačbo (1) , se prepričamo z vstavitvijo. Ko narašča c od 1 prek vsake meje, a vztrajno pada od e proti 1, b pa vztrajno raste od e prek vsake meje. To se da potrditi s kratkim računom. Vsakemu realnemu c, $1 < c < \infty$ pripada torej po (9) en a, $1 < a < e$ in en b, $e < b < \infty$.

Povzemimo: **Vsako realno rešitev** a, b, $a < b$ **enačbe (1) dobimo ravno enkrat, ko v obrazcih (9) spreminjamo** c **po vseh realnih številih večjih od 1.**

Jože Grasselli