PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **25** (1997/1998)
Številka 4
Strani 210–214

Janez Strnad:

# FIZIKA, MATEMATIKA IN MURPHYJEV ZAKON

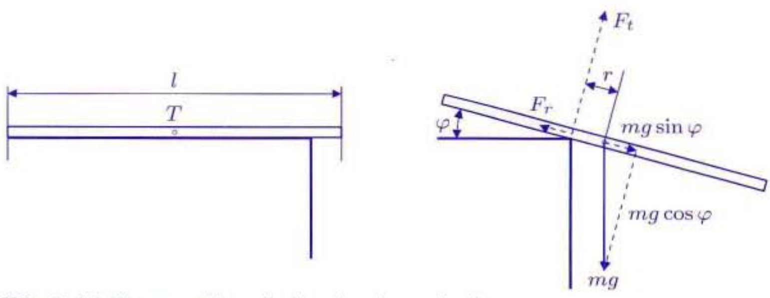
Ključne besede: fizika, matematična statistika, Murphyjev zakon, Edward Murphy.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/25/1340-Strnad.pdf

# FIZIKA, MATEMATIKA IN MURPHYJEV ZAKON

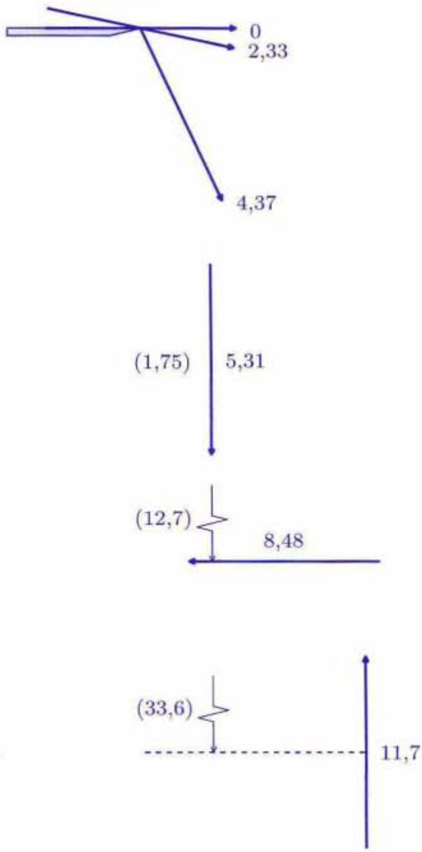
Kapetan Edward Murphy je leta 1949 sodeloval pri poskusih ameriškega vojnega letalstva, pri katerih so raziskovali vpliv nenadnega zaviranja na letalce. Prostovoljci so sedli na nekakšne sani, ki so jih pognale rakete in ki so jih potem na hitro zaustavili. Odziv na pojemek ob zaustavljanju so merili s senzorji na delih telesa. Žice s priključki za pisalnike so speljali v čelado, za katero je načrt naredil kapetan Murphy. Nekega dne, ko se je zdelo, da so izvedli niz poskusov brez napak, pisalne naprave niso nič zapisale. Presenetljivi izid je kapetan Murphy pojasnil s tem, da so bile žice v čeladi napačno zvezane. Tedaj je izjavil: "Če obstaja več možnosti, da nekaj naredimo, in ena od njih pripelje do neželenega izida, jo bo nekdo izbral." Na tiskovni konferenci so izjavo omenili kot dobro izhodišče za razprave o varnosti. Pozneje so ji dali bolj megleno obliko: "Če kaj lahko gre narobe, bo šlo narobe." Ta izjava naj bi veljala tudi v vsakdanjem življenju. Iz nje je nastalo veliko izpeljank, tudi šaljivih. Ali bi lahko nekatere izmed njih imele oporo v zakonih narave ali matematike in tako ne bi bile zgolj razpoloženjske oziroma posledica dejstva, da se neprijetni dogodki bolj vtisnejo v spomin kot drugi? Vsaj za tri oblike Murphyjevega zakona je odgovor na vprašanje pritrdilen.

**Opečeni kruh**. Že v prejšnjem stoletju je pesnik potožil, "da opečeni kruh vselej pade na stran z maslom". Vzemimo namesto kruha poljubno togo telo v obliki ploske pravokotne prizme, na primer ploščo ali knjigo. Če ni pri roki nič drugega, je dobra tudi številka Preseka. Ploščo položimo na vodoravno mizo, tako da je ena izmed stranic osnovne ploskve vzporedna z robom mize. Ploščo počasi potiskamo v smeri druge stranice. Ko težišče plošče pogleda dovolj čez rob mize, se plošča začne vrteti okoli roba mize (slika 1). Potem plošča zdrsne in drsi po robu mize, ki deluje nanjo v nasprotni smeri gibanja s silo trenja. Naposled plošča zgubi stik z mizo in se odtlej enakomerno vrti okoli težiščne osi, ko se težišče giblje po paraboli.




Slika 1. Plošča na mizi pred gibanjem in med njim.

Iz dokaj zapletenih računov izhaja, da plošča pade na vrhnjo stran, če leži rob mize na intervalu od nekaj manj kot $2l$ do nekaj več kot $30l$ nad tlemi (slika 2). ($l$ je stranica osnovne ploskve, pravokotna na rob mize.) Pri višini mize 70 cm in stranici plošče 10 cm je rob mize $7l$ nad tlemi. Računali smo z izmerjenima podatkoma za opečeni kruh: s koeficientom trenja $k = 0{,}25$ in z začetno ročico $0{,}0075l$. S trenjem so povezane težave, posebno še pri drsenju po robu mize. Kruh lahko pade z mize, ko stranica ni pravokotna na rob mize. Poleg tega ima lahko tudi začetno hitrost proti robu mize, čeprav to ne vpliva bistveno na izid, dokler hitrost znatno ne preseže 1 m/s. Svoje prispeva tudi zračni upor, ki ga nismo upoštevali. Zato je rezultat zgolj ocena. Toda ocenjeni interval višin je tako velik, da lahko s precejšnjo gotovostjo napovemo, da bo opečeni kruh pri običajnih padcih z navadnih miz zaradi zakonov gibanja padel na namazano stran.




Slika 2. Gibanje plošče, potem ko je zgubila stik z mizo. Račun velja za koeficient trenja $k = 0{,}25$ in začetno ročico $r_0 = 0{,}0075l$, ki so ju dala merjenja za opečeni kruh. Razdalje merimo v enotah $l$, čas pa v enotah $(l/g)^{1/2}$. V časovnem intervalu od 0 do 2,33 se plošča enakomerno pospešeno vrti okoli roba mize, v časovnem intervalu od 2,33 do 4,37 drsi (glej sliko 3), potem pa pada težišče po paraboli in plošča se enakomerno vrti okoli težiščne osi. Globina težišča je navedena v oklepajih na levi, čas pa na desni. Za naš primer velja: $x_2 = 0{,}22$, $z_2 = -0{,}44$, $\dot{x}_2 = 0{,}13$, $\dot{z}_2 = -0{,}92$, $\varphi_2 = 1{,}11$, $\dot{\varphi}_2 = 0{,}50$.

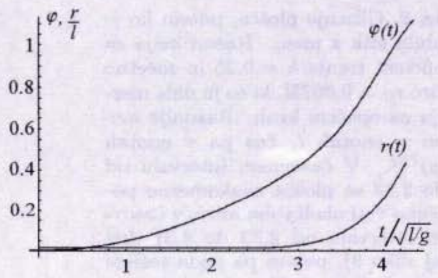
Na ploščo, nagnjeno proti vodoravnici za kot $\varphi$, delujeta Zemlja s težo $mg$ navpično navzdol v težišču sredi plošče in miza s silo v točki, v kateri se je dotika. Silo mize razstavimo na komponento v smeri plošče $F_r$ in na komponento $F_t$ v smeri pravokotno na ploščo. Tudi pospešek težišča razstavimo na ustrezni komponenti $a_t$ in $a_r$. Izrek o gibanju težišča da

$$mg\cos\varphi - F_t = ma_t, \qquad mg\sin\varphi - F_r = ma_r\,.$$

Uporabimo še izrek o vrtilni količini, ki velja za težiščno os, četudi se ta pospešeno giblje:

$$J\ddot{\varphi} = rF_t\,.$$

$J = \frac{1}{12}ml^2$ je vztrajnostni moment plošče okoli težiščne osi. Najprej se plošča vrti okoli roba mize kot nepremične osi pri razdalji $r_0$ od težišča, ne da bi drsela po mizi. Tedaj ne potrebujemo prvih dveh enačb, iz tretje pa izhaja, da je vrtenje enakomerno pospešeno s kotnim pospeškom $r_0 g/l^2$, če je $r_0$ začetna ročica in zanemarimo $r_0^2$ v primeri z $\frac{1}{12}l^2$. Plošča začne drseti, ko kot preseže $\varphi_1 = \arctan k$. Tedaj je treba v smeri plošče upoštevati silo trenja, za katero velja $F_r = kF_t$. Enačba se zaplete, ko izrazimo tangentno in radialno komponento pospeška težišča z $r$ in $\varphi$ in z njunimi odvodi. Z izrekom o vrtilni količini dobimo sistem dveh navadnih diferencialnih enačb, ki ga rešimo z *Mathematico* za poseben primer (slika 3). Izračunamo lego težišča $(x_2, z_2)$, njegovo hitrost $(\dot{x}_2, \dot{z}_2)$ in kotno hitrost $\dot{\varphi}_2$ pri vrtenju okoli težiščne osi v trenutku, ko plošča zgubi stik z mizo. Os $x$ je vodoravna in os $z$ navpična. Dalje gre brez težav: $x = x_2 + \dot{x}_2 t$, $z = z_2 + \dot{z}_2 t + \frac{1}{2}gt^2$ ter $\varphi = \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 t$.




Slika 3. Kot $\varphi$ in razdalja težišča od roba mize v odvisnosti od časa med drsenjem plošče po mizi za naš primer (slika 2). Z *Mathematico* smo rešili sistem diferencialnih enačb: $\varphi'' = 12r(\cos\varphi - 2\varphi' r')/(12r^2+1)$, $r'' = \sin\varphi + \varphi'^2 r - k(\cos\varphi - 2\varphi' r')/(12r^2+1)$. Enota za razdaljo je $l$ in enota za čas $(l/g)^{1/2}$.

**Ne dežuje, ko na sprehod vzamemo dežnik**. Ena izmed oblik Murphyjevega zakona trdi, da ne dežuje, ko na podlagi vremenske napovedi vzamemo na sprehod dežnik. Kako je s to trditvijo? Vremenske napovedi angleških meteorologov od sto primerov zadenejo 83-krat in zgrešijo 17-krat. Na drugi strani je po podatkih iz istega vira dež na enournih sprehodih podnevi precej redek, na sto sprehodih samo na 8-ih dežuje, na 92-ih pa ne. Za desettisoč enournih sprehodov ugotovimo, da dežuje na $8 \cdot 83 = 664$ sprehodih, ko je bil dež napovedan, in na $8 \cdot 17 = 136$ sprehodih, ko dež ni bil napovedan. Ne dežuje na $92 \cdot 83 = 7636$ sprehodih, ko dež ni bil napovedan, in na $92 \cdot 17 = 1564$ sprehodih, ko je bil dež napovedan. Od sprehodov ob napovedih dežja je delež sprehodov brez dežja $1564/2228 = 0{,}70$ več kot dvakrat večji kot delež sprehodov z dežjem $664/2228 = 0{,}30$. Zares pogosto na sprehodu nismo mokri, ko vzamemo s seboj dežnik, če je napovedan dež. Statistika torej podpira Murphyjev zakon v tej obliki. Najbolje je, če se ne oziramo na vremensko napoved, ko se odločamo, ali bomo vzeli na enourni sprehod dežnik ali ne. Sklep velja za nekoga, ki se odloča samo po vremenski napovedi, in ne za nekoga, ki s pogledom skozi okno ugotovi, kdaj kaže na sprehod vzeti dežnik.

Psihologi vedo povedati, da pri podobnih vprašanjih pogosto pride do napačnih odločitev. Včasih navedejo kot zgled vprašanje: V mestu z dvema podjetjema taksijev je delež zelenih taksijev 0,85 in delež modrih 0,15. Prometno nesrečo, po kateri je voznik pobegnil, je po izjavi očividca povzročil modri taksi. Očividci v 80 primerih od stotih zadenejo barvo taksija, v 20 pa se zmotijo. Kolikšna je verjetnost, da je nesrečo povzročil modri taksi?

Očividec z verjetnostjo $0{,}85 \cdot 0{,}20 = 0{,}17$ zeleni taksi proglasi za modrega in z verjetnostjo $0{,}15 \cdot 0{,}80 = 0{,}12$ pravilno ugotovi modrega. Verjetnost, da je nesrečo povzročil modri taksi, je le $0{,}12/(0{,}17 + 0{,}12) = 0{,}41$. Marsikdo pri odgovoru spregleda osnovni podatek o deležu modrih in zelenih taksijev in pripiše preveliko težo izjavi očividca. Pojavu pravijo *napaka osnovnih podatkov*.

**Nogavice brez para**. Ena od oblik Murphyjevega zakona pravi: Če se lahko pojavijo nogavice brez para, se bodo pojavile. Raziščimo trditev. Vzemimo, da imamo v predalu $n$ med seboj različnih parov nogavic. Izgubimo $2s$ nogavic, naključno izbranih izmed $2n$ nogavic v predalu, ne da bi nas zanimalo, kako je prišlo do izgube. Obdelajmo na začetku najpreprostejši zgled, pri katerem od 2 parov izgubimo 2 nogavici. Nogavice zaznamujemo po vrsti z 1, 2, 3 in 4 in z oklepaji nakažemo pare. Možnosti so:

$$\begin{array}{lll} (1,2) & 2,3 & (3,4) \\ 1,3 & 2,4 & \\ 1,4. & & \end{array}$$

Od 6 primerov sta pri dveh nogavici v paru in se pri štirih pojavita nogavici, ki nista par. Razmerje med številom primerov z nogavicama v paru in številom primerov z nogavicama, ki nista par, je $2/4 = 1/2$. Računa ni težko posplošiti na primer, ko imamo $n$ parov in na koncu ostane samo en par. V tem primeru zapišemo možnosti preostalega para podobno kot prej in ugotovimo, da je vseh primerov $n(2n-1)$, primerov z nogavicama v paru je $n$ in primerov z nogavicama brez para $2n(n-1)$. Razmerje obojih je potemtakem $1/2(n-1)$. Pri desetih parih je razmerje $1/18 = 0{,}056$. Sklepi so uporabni tudi v primeru, če od $n$ parov izgubimo samo dve nogavici, le da je pri tem med preostalimi nogavicami $n-1$ ali $n-2$ parov.

Bolj zapleten je račun z vmesnim številom zgubljenih nogavic. Zanimata nas le skrajna primera, v katerih je največ in najmanj nogavic brez para. V prvem primeru je vsaka od izgubljenih nogavic iz drugega para, v drugem pa izgubimo same pare. Vzemimo, da od desetih parov ($n = 10$) izgubimo 6 nogavic ($2s = 6$). Delež primerov z največjim številom preostalih nogavic brez para, to je 6, je $(16 \cdot 7)/(17 \cdot 19) = 112/323 = 0{,}35$, delež primerov s tremi zgubljenimi pari pa le $1/(17 \cdot 19) = 1/323 = 0{,}0031$. Statistika podpira tudi to obliko Murphyjevega zakona. Povedano velja samo za primer, da so vsi pari nogavic med seboj različni, in zgubi pomen, če so vsi pari med seboj enaki. Težavam se lahko v precejšnji meri izognemo, če imamo veliko parov nogavic dveh ali treh vrst.

V splošnem sta deleža najneugodnejših in najugodnejših primerov

$$2^{2s}\binom{n}{2s} : \binom{2n}{2s} \quad \text{in} \quad \binom{n}{s} : \binom{2n}{2s}, \quad 2s \leq n\,.$$

Binomski simbol $\binom{n}{s} = \binom{n}{n-s}$ pove, na koliko načinov lahko iz množice z $n$ elementi izberemo podmnožico z $s$ elementi.

Z navedenimi vprašanji se je podrobno ukvarjal Robert Matthews, fizik, ki piše o znanosti v angleškem časniku in raziskuje v računalništvu. Oprli smo se na njegove članke: *Tumbling toast, Murphy's law and the fundamental constants*, European Journal of Physics **16** (1995) 172, *Odd socks: a combinatoric example of Murphy's law*, Mathematics Today **32** (1996) 39, *Base-rate errors and raining forecasts*, Nature **382** (1996) 766 in *The science of Murphy's law*, Scientific American **276** (1997) (4) 72.

*Janez Strnad*