

---

# MODELIRANJE LOKALNEGA GEOIDA Z UMETNIMI NEVRONSKIMI MREŽAMI

mag. Tomaž Ambrožič, dr. Miran Kuhar, doc.dr. Bojan

Stopar

FGG – Oddelek za geodezijo, Ljubljana

doc.dr. Goran Turk

FGG – Oddelek za gradbeništvo, Ljubljana

Prispelo za objavo: 1999-04-29

Pripravljeno za objavo: 1999-07-11

## Izvleček

Lokalni geoid lahko modeliramo na več načinov. Navadno ga aproksimiramo s ploskvijo prvega ali drugega reda. Na izbiro ploskve vpliva število točk z znano geoidno višino in njihova razporeditev. Ploskev lokalnega geoida pa lahko modeliramo tudi z umetnimi nevronskimi mrežami. Umetne nevronske mreže smo učili in nato testirali na območju, za katerega smo poznali astrogeodetski geoid, ter na lokalni mreži točk, kjer smo geoidne višine določili kot razliko med elipsoidnimi in ortometričnimi višinami. Ugotovili smo, da običajno bolje določimo geoid z umetnimi nevronskimi mrežami kot s ploskvijo prvega reda in približno enako kakovostno kot s ploskvijo drugega reda.

**Ključne besede:** aproksimacija funkcij, modeliranje geoida, umetna nevronska mreža

## Abstract

The local geoid can be modeled with several approximation functions such as linear and second order polynomials. The approximation function is chosen accordingly to the number of points where the geoid heights and their spatial distribution are known. The local geoid can be modeled with artificial neural networks (ANN). ANN was first trained and then tested for the geoid heights of points in a chosen area. The reference geoid heights were obtained through the astrogeodetic geoid model in one example and through the difference between the ellipsoid and the orthometric heights in the other. The general conclusion is that ANN is usually better than the linear approximation and comparable to the quality of the second order approximation.

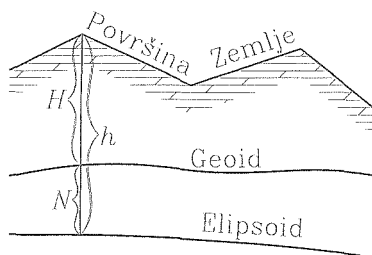
**Keywords:** approximation of functions, artificial neural network, modeling of geoid surface

## 1 UVOD

Z GPS tehnologijo določamo položaje točk v tridimenzionalnem geocentričnem koordinatnem sistemu (WGS-84, ITRS ...). Te koordinate transformiramo v elipsoidne koordinate ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ), ki se nanašajo na izbrani elipsoid. Tako pridobljena elipsoidna višina  $h$  se razlikuje od vsakodnevno uporabljanih ortometričnih višin  $H$ , pridobljenih s terestričnimi postopki izmere. Obe višini povezuje znana enačba

$$N = h - H, \quad (1)$$

kjer je  $N$  geoidna višina točke (Slika 1). Geoidna višina je višinska razlika med elipsoidom in geoidom. Če določimo geoidno višino točke s primerno natančnostjo, lahko s tako imenovanim GPS-višinomerstvom izračunamo ortometrično višino točke, kar predstavlja enega od izzivov moderne geodezije (Kuhar et al., 1998).



Slika 1: Površina Zemlje, geoid in elipsoid

Geoidno višino lahko določimo na več načinov. Pri vseh pa moramo uporabiti določen model geoida. Model geoida, ki ga imamo na razpolago, lahko na podlagi danih geoidnih višin (enačba 1) tudi izboljšamo (Fiedler, 1992, Potterfield, 1994). V Sloveniji uporabljamo model astrogeodetskega geoida (Čolić et al., 1993, glej tudi Sliki 2 in 3 v Stopar, 1997). Natančnost tega geoida je decimeterska in njegova uporabnost je omejena. Lahko ga uporabljamo na velikih območjih, za določitev geoidnih višin točk na manjših območjih (velikosti do 20 x 20 km) pa ni primeren. V tem primeru je bolje določiti model lokalnega geoida iz primerno natančnih ortometričnih in elipsoidnih višin. Geoidno višino lahko izračunamo iz enačbe (1). Tako lahko model geoida, ki ga predstavimo s funkcijo položaja točk z znanimi višinami, zapišemo kot

$$N = N(y, x) = Ay + Bx + C, \quad (2)$$

$$N = N(y, x) = Ay + Bx + C + Dy^2 + Eyx + Fx^2 \quad (3)$$

$$N = N(y, x) = Ay + Bx + C + Dy^2 + Eyx + Fx^2 + Gy^3 + Hy^2x + Iyx^2 + Jx^3 + \dots, \quad (4)$$

kjer spremenljivki  $y$  in  $x$  predstavljata koordinati točke v lokalnem ravninskem koordinatnem sistemu, pri nas običajno v GK-koordinatnem sistemu.

Stopnja polinoma je odvisna od števila točk z znanimi geoidnimi višinami. Čim več točk imamo na razpolago, tem višjo stopnjo polinoma lahko uporabimo. Tako bi lahko dosegli, da bi izbrana ploskev potekala skozi vse te točke, kar pa ni dobro, saj ima tak polinom prave vrednosti le v teh točkah, druge pa so odstopanja od pravih vrednosti lahko velika. Zato navadno uporabljamo polinome največ druge stopnje.

Poleg polinomov bi za model geoida lahko uporabili tudi trigonometrične funkcije ali bikubične zlepke (spline funkcije), vendar je stabilnost določitve modela geoida s takimi funkcijami slabša pri neugodni razporeditvi točk (Holloway, 1988). Poleg števila točk z znanimi geoidnimi višinami je zato pomembna tudi njihova razporeditev. Priporočljivo je, da so te točke tem bolj enakomerno razporejene po obravnavanem območju, pri čemer naj bo nekaj točk tudi na robovih tega območja. S tako določeno ploskvijo geoida izračunamo geoidne višine vsem želenim točkam iz tega območja. Ploskev geoida lahko modeliramo tudi z umetnimi nevronskimi mrežami, kar prikazujemo v tem prispevku.

## 2 UMETNE NEVRONSKE MREŽE

### 2.1 Splošno o umetnih nevronskih mrežah

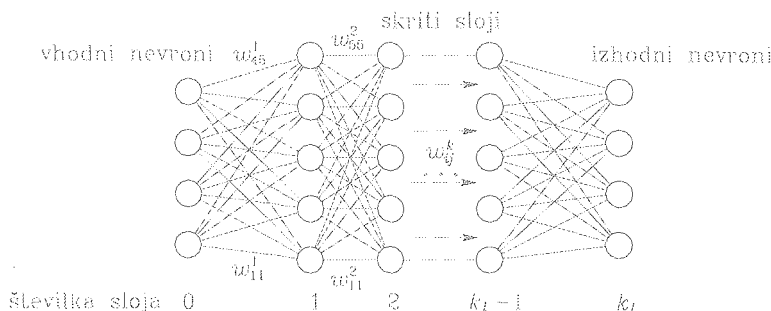
Umetne nevronske mreže so sestavljene iz zelo preprostih elementov, imenovanih nevronov. Nevroni, ki so v mreži predstavljeni kot spremenljivke in imajo vrednost trenutnega signala, so povezani s povezavami. Te so določene z utežmi. Prek povezav sprejme nevron signal od drugih nevronov. S pomočjo aktivacijske funkcije se signal v nevronu lahko ojači ali oslabi. Prek povezav nevron odda signal drugim nevronom. Termin umetne nevronske mreže je nastal po analogiji z nevronskimi mrežami v možganih živih bitij. Umetne nevronske mreže so sicer bolj preproste in manjše od bioloških nevronskih mrež, a delujejo na podoben način. V raziskavi uporabljamo umetne nevronske mreže, ki jih v nadaljevanju skrajšano imenujemo nevronske mreže.

Glade na geometrijo mreže poznamo več tipov nevronskih mrež: Hopfieldovo, Hammingovo, Carpenterjevo in Grossbergovo, Kohonenovo, večslojno usmerjeno nevronske mrežo in druge (Lippmann, 1987, Sarle, 1998). Nevronske mreže z različno geometrijo uporabljamo za različne probleme. Prve tri tipe nevronskih mrež uporabljamo pri binarnih vhodnih podatkih in pri problemih razvrščanja v razrede. Zadnja dva tipa nevronskih mrež pa sta primerna za zvezne vhodne podatke in reševanje problemov aproksimacije neznane funkcije. Za napovedovanje ploskve geoida uporabimo večslojno usmerjeno nevronske mrežo, saj želimo aproksimirati neznano zvezo med vhodnimi in izhodnimi podatki. Vhodni podatki so horizontalne koordinate točk, izhodni pa njihove geoidne višine. Dokazali so, da lahko z večslojno nevronske mrežo aproksimiramo poljubno zvezno funkcijo poljubno natančno (Hornik et al., 1989, Funahashi, 1989).

### 2.2 Večslojna usmerjena nevronska mreža

Večslojno usmerjeno nevronske mrežo sestavljajo najmanj trije sloji nevronov. V vhodnem sloju so vhodni nevroni, ki so povezani z nevroni prvega skritega sloja. Ti so povezani z nevroni naslednjega skritega sloja, če ta sloj obstaja, in tako naprej. Nevroni zadnjega skritega sloja so povezani z izhodnimi nevroni, ki tvorijo izhodni sloj nevronov. Vsak nevron vhodnega sloja pripada enemu vhodnemu podatku, vsak nevron izhodnega sloja pa eni odvisni spremenljivki, katere vrednost želimo določiti. Eno skupino vhodnih podatkov in ustreznih rezultatov imenujemo vhodno-izhodni par. Povezani so le nevroni dveh zaporednih slojev. Prav tako ni povezav med nevroni istega sloja. Večslojna usmerjena nevronska mreža je enosmerna. To pomeni,

da signali potujejo le v eni smeri, torej od vhodnega sloja prek skritih slojev do izhodnega sloja. Značilno geometrijo večslojne usmerjene nevronske mreže prikazujemo na sliki 2. Za natančno geometrijo oziroma topologijo nevronske mreže moramo določiti število skritih slojev in število nevronov v posameznih skritih slojih.



Slika 2: Večslojna usmerjena nevronska mreža

Delovanje večslojne usmerjene nevronske mreže opišemo z naslednjim postopkom. Vrednosti vhodnih podatkov priredimo nevronom vhodnega sloja. Te pomnožimo s pripadajočimi utežmi in jih prištejemo v vrednosti signalov vsem nevronom v naslednjem sloju

$$y_i^k = \sum_{j=1}^{n_{k-1}} w_{ij}^k y_j^{k-1}, \quad (5)$$

kjer je:

$w_{ij}^k$  . . . . . utež povezave med nevronom  $i$  sloja  $k$  in nevronom  $j$  sloja  $k - 1$ ,

$y_j^{k-1}$  . . . . . vrednost nevrona  $j$  v sloju  $k - 1$ ,

$n_{k-1}$  . . . . . število nevronov v sloju  $k - 1$ .

Vrednosti signalov transformiramo z aktivacijsko funkcijo

$$y_i^k = f(y_i^k) = f\left(\sum_{j=1}^{n_{k-1}} w_{ij}^k y_j^{k-1}\right), \quad (6)$$

Aktivacijska funkcija  $f(\cdot)$  je lahko poljubna zvezna ali nezvezna funkcija. Običajno uporabimo sigmoidne funkcije (monotono naraščajoče, omejene, zvezne in zvezno odvedljive funkcije). V naši raziskavi smo izbrali sigmoidno funkcijo

$$f(y) = \frac{1}{1 + e^{-y}}. \quad (7)$$

Vrednosti posameznih nevronov v enačbah (5) in (6) določamo postopoma iz vrednosti nevronov v nižjih slojih. Nižji sloji so tisti, ki so bližji vhodnemu sloju. Edine količine, ki jih ne poznamo, so vrednosti uteži  $w_{ij}^k$ . Vrednosti uteži nevronske mreže določimo z učenjem nevronske mreže.

Učenje nevronske mreže je iterativni postopek. Večslojno usmerjeno nevronske mrežo učimo vodeno, saj jo želimo naučiti na osnovi vhodno-izhodnih parov. Učimo

jo po posplošenem delta pravilu, ki se imenuje tudi učenje z vzratnim porazdeljevanjem pogreška aproksimacije. Ta način učenja so leta 1986 prvi opisali Rumelhart, Hinton in Williams, avtorji večslojne usmerjene nevronske mreže (Rumelhart et al., 1986). Uteži spremenimo tako, da se pogrešek aproksimacije zmanjšuje najhitreje. Iskanje optimalnih vrednosti uteži je problem iskanja minimuma pogreška v mnogodimenzionalnem prostoru uteži. Ta nelinearna funkcija ima lahko mnogo lokalnih minimumov, mi pa želimo najti globalnega oziroma tistega, pri katerem je delovanje nevronske mreže zadovoljivo. Pogrešek definiramo kot vsoto kvadratov odstopanj

$$E_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_0} (t_{pi} - y_{pi}^{n_1})^2, \quad (8)$$

kjer je:

$t_{pi}$  . . . . . želena vrednost izhodne spremenljivke oziroma izhodnega nevrona  $i$ ,

$y_{pi}^{n_1}$  . . . . . z nevronske mreže izračunana vrednost izhodnega nevrona  $i$  za

vhodno-izhodni par  $p$ ,

$n_0$  . . . . . število nevronov v izhodnem sloju  $n_1$ .

Če želimo, da se pogrešek aproksimacije v vsakem koraku zmanjšuje, morajo biti popravki uteži sorazmerni z odvodom pogreška na izhodnem sloju po utežeh

$$\Delta_p w_{ij}^k \propto \frac{\partial E_p}{\partial w_{ij}^k} \text{ oziroma} \quad (9)$$

$$\Delta_p w_{ij}^k = -\eta \frac{\partial E_p}{\partial w_{ij}^k}, \quad (10)$$

kjer je:

$\eta$  . . . . . dolžina koraka, ki določa hitrost spreminjanja uteži (Janakiraman et al., 1993).

Parcialni odvod v enačbah (9) oziroma (10) izračunamo s posrednim odvajanjem

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{ij}^k} = \frac{\partial E_p}{\partial y_{pi}^k} \frac{\partial y_{pi}^k}{\partial w_{ij}^k}. \quad (11)$$

Odvod  $\partial y_{pi}^k / \partial w_{ij}^k$  izračunamo z odvajanjem enačbe (6)

$$\frac{\partial y_{pi}^k}{\partial w_{ij}^k} = \frac{df(y_{pi}^{'k})}{dy_{pi}^{'k}} \frac{\partial y_{pi}^{'k}}{\partial w_{ij}^k} = \frac{df(y_{pi}^{'k})}{dy_{pi}^{'k}} y_{pj}^{k-1}. \quad (12)$$

Glede na sloj, ki ga trenutno računamo, moramo  $\partial E_p / \partial y_{pi}^k$  izračunati na dva načina. Ko računamo odvode za nevrone izhodnega sloja  $n_1$ , odvajamo enačbo (8) in dobimo

$$\frac{\partial E_p}{\partial y_{pi}^{n_1}} = -(t_{pi} - y_{pi}^{n_1}). \quad (13)$$

Popravke za nevrone izhodnega sloja dobimo, če v enačbi (10) upoštevamo enačbe (11), (12) in (13)

$$\Delta_p w_{ij}^{n_1} = \eta (t_{pi} - y_{pi}^{n_1}) = \frac{df(y_{pi}^{n_1})}{dy_{pi}^{n_1}} y_{pi}^{n_1-1}. \quad (14)$$

Ko računamo odvode za nevrone vseh drugih slojev, pa z odvajanjem enačbe (6) dobimo

$$\frac{\partial E_p}{\partial y_{pi}^{k-1}} = \sum_{j=1}^{n_k} \frac{\partial E_p}{\partial y_{pj}^k} \frac{\partial y_{pj}^k}{\partial y_{pi}^{k-1}}. \quad (15)$$

Popravke za nevrone vseh drugih slojev dobimo, če v enačbi (10) upoštevamo enačbe (11), (12) in (15):

$$\Delta_p w_{ij}^{k-1} = \eta \left( \sum_{l=1}^{n_k} \frac{\partial E_p}{\partial y_{pl}^k} \frac{\partial y_{pl}^k}{\partial y_{pi}^{k-1}} \right) \frac{df(y_{pi}^{k-1})}{dy_{pi}^{k-1}} y_{pi}^{k-2}. \quad (16)$$

Enačba (16) predstavlja rekurzivno formulo za postopen izračun odvodov  $\partial E_p / \partial w_{ij}^k$ .

Najprej popravimo uteži med izhodnim slojem in zadnjim skritim slojem. Nato popravimo uteži od zadnjega skritega sloja zaporedno proti prvemu. Na koncu popravimo uteži med prvim skritim slojem in vhodnim slojem. Ker te odvode računamo postopoma od izhodnega proti vhodnemu sloju in v tej smeri določamo tudi popravke vrednosti uteži, tej metodi pravimo tudi metoda z vzratnim porazdeljevanjem pogreška. Vzratno porazdeljevanje pogreška ponavljamo toliko časa, da je izračunani pogrešek za vse vhodno-izhodne pare manjši od predpisanega.

Vhodno-izhodni pari sestavljajo niz podatkov. Glede na uporabo niz podatkov delimo na niz učnih, niz verifikacijskih in niz testnih podatkov. Nevronske mreže učimo na vhodno-izhodnih parih niza učnih podatkov. Na nizu verifikacijskih podatkov določimo optimalno geometrijo nevronske mreže. Naučeno nevronske mreže z optimalno geometrijo nato uporabimo na vhodno-izhodnih parih niza testnih podatkov, v našem primeru za napovedovanje ploskve geoida. Vhodno-izhodni pari niza učnih podatkov, niza verifikacijskih podatkov in niza testnih podatkov se po obliki in pomenu ne razlikujejo. Če je predpisani pogrešek, ki ga zahtevamo v postopku učenja, premajhen, se lahko zgodi, da nevronske mreže predobro naučimo na danem nizu učnih podatkov. Že za malo spremenjene vrednosti testnih podatkov lahko dobimo velik pogrešek med izračunanimi in pričakovanimi vrednostmi. Rečemo, da mreži zmanjšamo sposobnost posploševanja. Za učenje nevronske mreže in za napovedovanje ploskve geoida naučene nevronske mreže uporabimo domača programa (Turk, 1993). Program NTRAIN aproksimira neznano funkcijo z večslojno usmerjeno nevronske mreže. Učenje opravi po posplošenem delta pravilu na vhodno-izhodnih parih niza učnih podatkov. S programom NTEST na podlagi niza verifikacijskih podatkov izberemo optimalno geometrijo mreže. Z istim programom izračunamo geoidne višine tudi na nizu testnih podatkov.

### 3 NUMERIČNA PRIMERA

Nevronske mreže smo uporabili za izračun geoidnih višin točk, ki so funkcija koordinat  $y$  in  $x$  teh točk. Ker želimo aproksimirati ploskev geoida na nekem območju, obravnavamo geoidne višine v posameznih točkah znotraj tega območja. Tako sestavimo posamezni vhodno-izhodni par iz koordinat  $y$  in  $x$  posamezne točke, ki predstavljata vhodna podatka ter geoidne višine  $N$  točke, ki predstavlja izhodni podatek. Nevronsko mrežo učimo na vhodno-izhodnih parih niza učnih podatkov tako, da iterativno spreminjamo uteži s posplošenim delta postopkom. Iteracije ponavljamo toliko časa, dokler je relativni pogrešek na vseh vhodno-izhodnih parih manjši od 5 odstotkov. Relativni pogrešek dobimo kot razliko med želeno in z nevronske mreže izračunano vrednostjo, deljeno z velikostjo največje vrednosti izhodnega podatka – najvišjo geoidno višino obravnavanih točk.

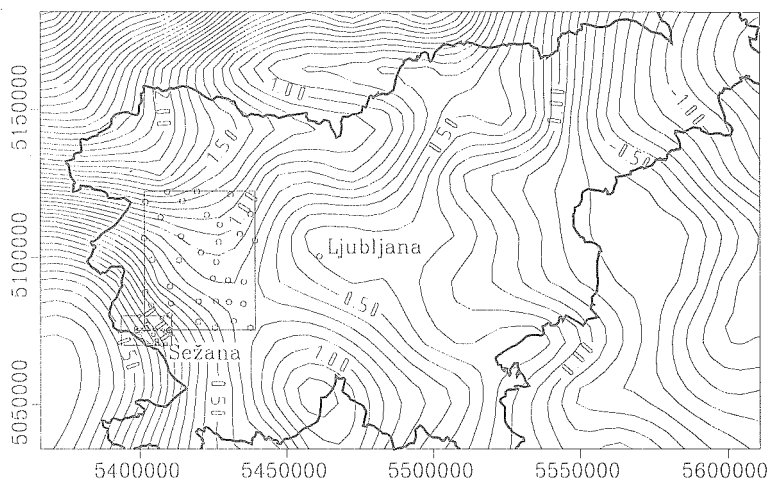
Kvantitativno vrednotenje uspešnosti učenja nevronske mreže opravimo na razliki med želeno in z nevronske mreže izračunano vrednostjo na testnih podatkih z različnimi statistikami (minimalna, maksimalna in srednja vrednost razlike, standardna deviacija razlike in povprečna absolutna vrednost razlike). V vseh primerih izračunamo še položaj ravnine in ploskve druge stopnje glede na učne podatke z metodo najmanjših kvadratov, nato pa z izračunanimi parametri ravnine in ploskve drugega reda izračunamo geoidne višine točk testnih podatkov. Kvantitativno vrednotenje uspešnosti linearne aproksimacije ali aproksimacije drugega reda opravimo z enakimi statistikami kot pri testiranju nevronske mreže. V naši raziskavi uporabljamo geoidne višine, dobljene na dva načina. V prvem primeru računamo geoidne višine točk na podlagi astrogeodetskega geoida v izbranem testnem pravokotniku  $40 \times 50$  km v zahodnem delu Slovenije. V drugem primeru pa računamo geoidne višine točk kot razliko med elipsoidno in ortometrično višino. Te točke sestavljajo realno geodetsko mrežo Sežana, kjer so bila izvedena GPS-opazovanja, višine točk mreže pa so bile določene z nivelmanom.

#### 3.1 Območje v zahodni Sloveniji

Izbrano testno območje prikazujemo na sliki 3. To območje izberemo zato, ker je geoid v tem delu Slovenije razgiban, poleg tega pa neenakomerno narašča od  $-0,35$  m do  $1,70$  m. Datoteke z učnimi podatki sestavimo iz različnega števila točk. Razporedimo jih tako, kot naj bi bila vzpostavljena nivelmanska mreža. Pri mreži 36 točk imamo eno točko na  $56 \text{ km}^2$ , pri mreži 13 točk imamo eno točko na  $154 \text{ km}^2$ , pri mreži 6 točk imamo eno točko na  $333 \text{ km}^2$ . Dodatno razporedimo 36 točk na testnem območju povsem naključno z generatorjem slučajnih števil ter drugič v rastru  $10 \times 8$  km. Datoteko s testnimi podatki sestavimo iz podatkov o točkah, ki jih razporedimo enakomerno v rastru  $5 \times 5$  km po celotnem testnem območju. Datoteka s testnimi podatki torej vsebuje podatke o 99 točkah. V vseh primerih testiramo naučene nevronske mreže z istimi testnimi podatki.

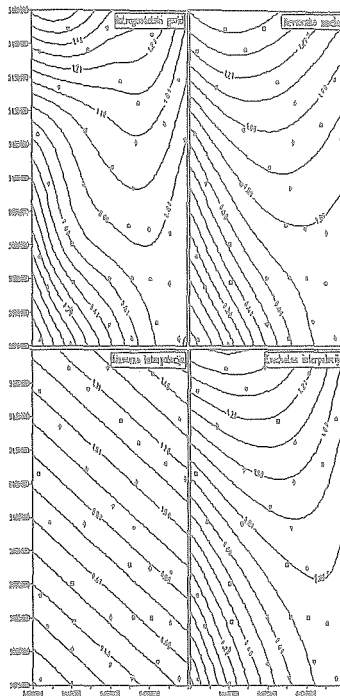
Pri učenju spreminjamo geometrijo nevronske mreže. Števila nevronov v vhodnem in izhodnem sloju seveda ne spreminjamo, spreminjamo pa število skritih slojev in število nevronov v posameznem skritem sloju. Najmanjšo nevronske mreže sestavimo z enim skritim slojem s petimi nevrni, največjo pa s tremi skritimi sloji s po petdesetimi nevrni. Geometrija najmanjše nevronske mreže je  $2 - 5 - 1$ . To

pomeni, da imamo dva nevrona v vhodnem sloju, pet nevronov v skritem sloju in en nevron v izhodnem sloju. Tako moramo v procesu učenja določiti  $2 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 15$  uteži, prav toliko, kot je povezav med nevroni. Geometrija največje nevronske mreže pa je  $2 - 50 - 50 - 50 - 1$ . To pomeni, da imamo dva nevrona v vhodnem sloju, po petdeset nevronov v treh skritih slojih in en nevron v izhodnem sloju, kar pomeni, da moramo v procesu učenja določiti  $2 \cdot 50 + 50 \cdot 50 + 50 \cdot 50 + 50 \cdot 1 = 5150$  uteži. Pri učenju najmanjše nevronske mreže iščemo minimum funkcije 15 spremenljivk (vrednosti uteži), pri učenju največje pa minimum funkcije kar 5150 spremenljivk.



*Slika 3: Slovenija in astrogeodetski geoid*

Po učenju in na podlagi testiranja ugotovimo, da nevronske mreže z enim oz. s tremi skritimi sloji nevronov ni možno naučiti, saj je relativni pogrešek po učenju na nekaterih vhodno-izhodnih parih večja od izbranih 5 odstotkov. Najboljše rezultate pri testiranju dobimo, ko izberemo mrežo z dvema skritima slojema tako, da je geometrija nevronske mreže  $2 - 50 - 40 - 1$ . Rezultate testiranja prikazujemo na sliki 4 in v preglednici 1.



Slika 4: Astrogeodetski geoid, nevronska mreža, linearna in kvadratna interpolacija

| mreža<br>36 točk |          | min.<br>(m) | max.<br>(m) | sred.<br>(m) | st. dev.<br>(m) | sr. abs. vred.<br>(m) |
|------------------|----------|-------------|-------------|--------------|-----------------|-----------------------|
| simul.           | nevr. m. | -0,216      | 0,108       | 0,000        | 0,055           | 0,039                 |
| nivel.           | linear.  | -0,501      | 0,538       | 0,020        | 0,200           | 0,152                 |
| mreža            | kvadr.   | -0,176      | 0,115       | 0,002        | 0,056           | 0,043                 |
| simul.           | nevr. m. | -0,310      | 0,215       | -0,015       | 0,080           | 0,052                 |
| naključna        | linear.  | -0,512      | 0,567       | -0,004       | 0,205           | 0,155                 |
| mreža            | kvadr.   | -0,250      | 0,087       | -0,017       | 0,063           | 0,046                 |
| rastr.           | nevr. m. | -0,161      | 0,141       | -0,003       | 0,063           | 0,053                 |
| mreža            | linear.  | -0,468      | 0,452       | -0,009       | 0,191           | 0,147                 |
|                  | kvadr.   | -0,136      | 0,121       | -0,002       | 0,055           | 0,044                 |

Preglednica 1: Primerjava nevronske mreže z linearno in kvadratno interpolacijo na 36 točkah

Vidimo, da dobimo boljše rezultate v primeru nivelirane in rastrske mreže, slabše pa za naključno mrežo. Vzrok zato je v razporeditvi točk po območju. Prav tako vidimo, da dobimo v vseh treh primerih podobne rezultate pri aproksimaciji geoida z nevronske mreže in s ploskvijo druge stopnje, slabše pa pri aproksimaciji z ravnino.

**R**ezultate testiranja za primere nivelirane mreže s 13 in 16 točkami prikazujemo v preglednici 2.

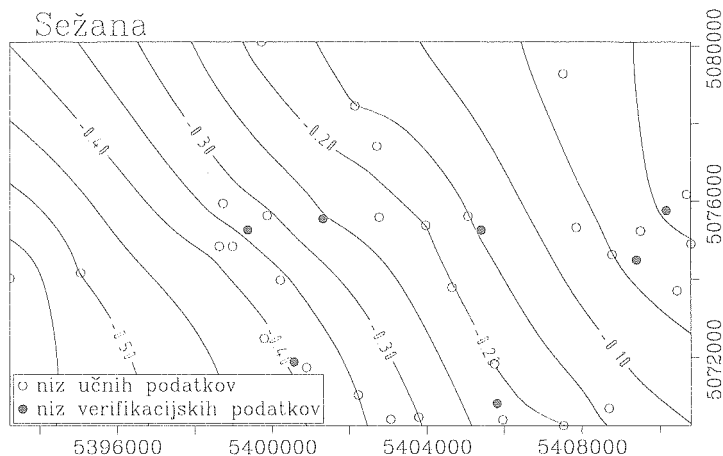
| mreža   |          | min.<br>(m) | max.<br>(m) | sred.<br>(m) | st. dev.<br>(m) | sr. abs. vred.<br>(m) |
|---------|----------|-------------|-------------|--------------|-----------------|-----------------------|
| 13 točk | nevr. m. | -0,293      | 0,364       | 0,022        | 0,097           | 0,074                 |
|         | linear.  | -0,408      | 0,608       | 0,045        | 0,202           | 0,157                 |
|         | kvadr.   | -0,108      | 0,180       | 0,015        | 0,064           | 0,053                 |
| 6 točk  | nevr. m. | -0,290      | 0,378       | 0,025        | 0,145           | 0,117                 |
|         | linear.  | -0,508      | 0,670       | 0,052        | 0,216           | 0,162                 |
|         | kvadr.   | -0,288      | 0,393       | -0,002       | 0,151           | 0,119                 |

**Preglednica 2:** Primerjava nevronske mreže z linearno in kvadratno interpolacijo na 13 in 6 točkah

Na podlagi preglednic 1 in 2 lahko rečemo, da dobimo boljše rezultate v mrežah z več točkami, kar je pričakovano. Tudi v mrežah z malo točkami dobimo podobne rezultate pri aproksimacijami geoida z nevronske mreže in ploskvijo druge stopnje, slabše pa pri aproksimaciji z ravnino.

### 3.2 Mreža v okolici Sežane

**G**eoidne višine izračunamo kot razlike elipsoidnih in ortometričnih višin točk. Datoteko z učnimi podatki sestavimo iz 30 točk realne geodetske mreže Sežana (Slika 5). Datoteko s testnimi podatki sestavimo tako, da vsebuje podatke o sedmih slučajno izbranih točkah, ki jim želimo določiti geoidno višino. Tako imamo v testnem nizu le 7 vhodno-izhodnih parov.



**Slika 5:** Mreža Sežana z geoidom iz geoidnih višin

Poglejmo uspešnost aproksimiranja geoida z nevronskimi mrežami na primeru realne geodetske mreže, ko imamo geoidne višine točk izračunane iz razlike med elipsoidno in ortometrično višino. V preglednici 3 prikazujemo rezultat testiranja pri geometriji nevronske mreže 2 – 50 – 40 – 1.

|                 | <i>min.</i><br>(m) | <i>max.</i><br>(m) | <i>sred.</i><br>(m) | <i>st. dev.</i><br>(m) | <i>sr. abs. vred.</i><br>(m) |
|-----------------|--------------------|--------------------|---------------------|------------------------|------------------------------|
| <i>nevr. m.</i> | -0,019             | 0,039              | 0,008               | 0,015                  | 0,012                        |
| <i>linear.</i>  | -0,038             | 0,040              | -0,001              | 0,016                  | 0,013                        |
| <i>kvadr.</i>   | -0,020             | 0,026              | -0,002              | 0,011                  | 0,009                        |

*Preglednica 3: Primerjava nevronske mreže z linearno in kvadratno interpolacijo na mreži Sežana*

Ugotovimo, da dobimo precej podobne rezultate aproksimacije geoida pri različnih geometrijah nevronske mreže. Glede na rezultate, dobljene z nevronske mreže, dobimo nekoliko boljše aproksimacijo geoida s ploskvijo druge stopnje. Razlog za to je verjetno majhnost območja, na katerem je funkcija geoida zelo podobna kvadratni funkciji. Rezultati, pridobljeni z nevronske mreže, so primerljivi z aproksimacijo geoida z ravnino.

#### 4 ZAKLJUČEK

Za modeliranje geoida lahko uporabimo različne funkcije in modele. V prispevku smo prikazali izračun geoidnih višin točk z nevronskimi mrežami. Natančnost tako aproksimiranega astro-geodetskega geoida je reda velikosti nekaj centimetrov, natančnost aproksimiranega lokalnega geoida pa centimeter, kar je enakega velikostnega reda kot pri običajno uporabljenih funkcijah za modeliranje geoida. Poznavanje geoidnih višin zadovoljive natančnosti omogoča določanje uporabnih ortometričnih višin z GPS-višinomerstvom, kar je velika prednost pred zamudnim niveliranjem in manj natančnim trigonometričnim višinomerstvom.

#### Zahvala:

Za uporabljene podatke se zahvaljujemo Geodetski upravi Republike Slovenije.

#### Literatura:

- Čolić, K. et al., *Improved Geoid Solution for Slovenia and Part of Croatia. V: Proceedings of the 7th International Symposium "Geodesy and Physics of the Earth". Potsdam, 1993, str. 141–144*
- Fiedler, J., *Orthometric Heights from Global Positioning System. Journal of Surveying Engineering, New York, 1992, št. 118, str. 70–79*
- Funahashi, K., *On the Approximate Realization of Continuous Mappings by Neural Networks. Neural Networks, New York, 1989, št. 2, str. 183–192*
- Holloway, R. D., *The Integration of GPS Heights into the Australian Height Datum. Unisurv reports S–33. Kensington, School of Surveying Engineering, 1988*
- Hornik, K. et al., *Multi-layer Feed-forward Networks are Universal Approximations. Neural Networks, New York, 1989, št. 2, str. 359–366*
- Janakiraman, J., Honavar, V., *Adaptive Learning Rate for Increasing Learning Speed in Backpropagation Networks. V: World Congress on Neural Networks. Portland, 1993. Knjiga IV, str. 378–381*
- Kuhar, M., Žele, G., *GPS-višinomerstvo. Geodetski vestnik, Ljubljana, 1998, letnik 42, št. 3, str. 286–293*
- Lippmann, R. P., *An Introduction to Computing with Neural Nets. IEEE ASSP Magazine, New Jersey, 1987, št. 4/2, str. 4–22*
- Potterfield, M., *Accurate Orthometric Heights from GPS: Combined Network Adjustment Using GPS. Differential Levelling and Correlated Geoid Models. International Geoid Service, Milano, 1994, št. 3, str. 19–33*

- Rumelhart, D. E., McClelland, J. L., *Parallel Distributed Processing. Knjiga 1: Foundations*. Cambridge, The MIT Press, 1986
- Sarle, W. S., ed., *Neural Network FAQ. Periodic posting to the Usenet newsgroup comp.ai.neural-nets*. URL: <ftp://ftp.sas.com/pub/neural/FAQ.html>, 1998
- Stopar, B., Kuhar, M., *Astrogeodetska mreža Slovenije in geoid*. Geodetski vestnik, Ljubljana, 1997, letnik 41, št. 2, str. 91–100
- Turk, G., *NTRAIN & NTEST – programski paket za učenje in testiranje nevronske mreže*. Interna izdaja. Ljubljana, FAGG OGG, 1993
- Recenzija: prof.dr. Dušan Kogoj  
prof. dr. Florjan Vodopivec