

10921 / 27



Inv. št. 29577

Univerza Edvarda Kardelja v Ljubljani
FAKULTETA ZA NARAVOSLOVJE IN TEHNOLOGIJO
VTO MATEMATIKA IN MEHANIKA

Bojan Magajna

ELEMENTARNI OPERATORJI NA CALKINOVİ ALGEBRI
IN VON NEUMANN-SCHATTENOVİH RAZREDIH

Disertacija

Ljubljana 1985

KAZALO

UVOD	3
I. SISTEMI OPERATORSKIH ENAČB	6
1. Nekompaktnost elementarnih operatorjev na enostavnih Banachovih algebrah	8
2. Linearna neodvisnost zožitev operatorjev	15
3. Kompaktni elementarni operatorji na algebri $B(H)$	20
4. Bistveno linearno neodvisni operatorji	23
5. Razdalja operatorja od eno-razsežnega prostora	30
6. Numerična razdalja operatorja od množice skalarjev	36
II. POSPLOŠENA ODVAJANJA IN TENZORSKI PRODUKTI	39
7. Norme posplošenih odvajanj	42
8. Numerični zakladi posplošenih odvajanj	47
9. O bistvenih numeričnih zakladih posplošenih odvajanj	50
10. Nekaj opomb o numeričnem zakladu tenzorskega produkta operatorjev	60
11. Hiponormalna posplošena odvajanja in tenzorski produkti	65
12. Subnormalna posplošena odvajanja in tenzorski produkti	69
DODATEK (Posplošitev Jacobsonovega izreka o gostoti)	72
LITERATURA	76
OZNAKE	79

Math. Subj. Class. (1980): 47A62, 47B47, 47A12, 47B20, 46H10.

POVZETEK

Naj bo H Hilbertov prostor in $B(H)$ algebra vseh omejenih linearnih operatorjev na njem. V prvem delu disertacije raziskujemo sistem enačb

$$\sum_{j=1}^m X_j A_i Y_j = B_i, \quad i=1, \dots, r$$

kjer so A_i in B_i znani, X_j in Y_j pa neznani elementi algebre $B(H)$. V primeru $m=r$ podamo potreben in zadosten pogoj, ki mu morajo zadoščati operatorji A_i , da bo gornji sistem rešljiv pri poljubnih $B_i \in B(H)$. Dobljeni rezultat (katerega milejša oblika velja tudi v splošnejših Banachovih algebrah z enim samim maksimalnim idealom) je uporaben pri proučevanju vprašanja, kdaj je zaloga vrednosti danega elementarnega operatorja vsebovana v kakem idealu algebre $B(H)$. Kot posledico spoznamo, da na Calkinovi algebri ni neničelnih kompaktnih elementarnih operatorjev.

Drugi del naloge se omejuje na posebne primere elementarnih operatorjev, predvsem na t.i. posplošena odvajanja. Med drugim pokažemo, kako se izraža bistveni numerični zaklad zožitve posplošenega odvajanja na Hilbert-Schmidtov razred $C^2(H)$ z numeričnima in bistvenima numeričnima zakladoma operatorjev, ki ga inducirata. Nadalje opredelimo subnormalna in kvazi-normalna posplošena odvajanja na $C^2(H)$.

UVOD

I. Elementarni operator na Banachovi algebri A je operator oblike

$$E_{\underline{A}\underline{B}}(X) = \sum_{i=1}^r A_i X B_i, \quad X \in A$$

kjer sta $\underline{A}=(A_1, \dots, A_r)$ in $\underline{B}=(B_1, \dots, B_r)$ dani r -terki elementov algebre A . V zadnjem času je več avtorjev proučevalo predvsem spektralne lastnosti elementarnih operatorjev na algebri $B(H)$ vseh omejenih operatorjev Hilbertovega prostora H ([32],[17]), na Schattenovih idealih v $B(H)$ [24] in na splošnih C^* -algebrah [40]. Pokazali so, da je v primeru, ko sta r -terki $\underline{A}$ in $\underline{B}$ komutativni, spekter operatorja $E_{\underline{A}\underline{B}}$ mogoče izraziti z združenima spektroma r -terk $\underline{A}$ in $\underline{B}$. (Pojem združenega spektra je posplošitev pojma spektra enega operatorja na več operatorjev. Obstaja več takih posplošitev: zelo preprosta je Harte-jeva [31], najbolj zadovoljiva pa Taylor-jeva [55].) Posebno pomembni primeri elementarnih operatorjev, ki so jih najprej proučevali, so posplošena odvajanja, to je operatorji oblike

$$D_{AB}(X) = AX - XB, \quad X \in A$$

kjer sta A in B dana elementa algebre A . Spekter posplošenega odvajanja D_{AB} je mogoče izraziti kar z običajnima spektroma operatorjev A in B kot

$$\sigma(D_{AB}) = \{\lambda - \mu; \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$$

To zvezo je dokazal deloma že Rosenblum v [45], kasneje pa so njegove rezultate izboljšali in posplošili ([38],[21],[22],[23],[34]). Med drugim je Fialkow v [24] določil tudi bistvene spektre splošnih elementarnih operatorjev na $B(H)$. Kako izračunati Fredholmov indeks splošnega elementarnega operatorja pa je še vedno odprt problem. (Za posplošena odvajanja je ta problem rešen v [23].)

Poznavanje elementarnih operatorjev lahko pomaga tudi pri raziskovanju povsem splošnih omejenih linearnih operatorjev. Tako na primer iz opisa spektra posplošenih odvajanj takoj sledi, da spektra dveh kvazipodobnih operatorjev na Hilbertovem prostoru nista disjunktna. Kot drugi, mnogo globlji rezultat, ki je prispeval k boljšemu razumevanju algebraičnih operatorjev, omenimo Apostolovo karakterizacijo odvajanj na $B(H)$ z zaprto zalogo vrednosti [2]. Bralec lahko najde še druge uporabe odvajanj v [3].

II. Vsebino obeh poglavij tega dela bomo povzeli na začetku poglavij; zato omenimo na tem mestu le nekatere od novih rezultatov. Izhodišče za prvo poglavje je bila hipoteza Fonga in Sourour-a v [26], da na Calkinovi algebri ni netrivialnih kompaktnih elementarnih operatorjev. V prvem razdelku bomo spoznali kriterij o linearni neodvisnosti (izrek 1.2), ki nam bo omogočil dokazati, da velja ta hipoteza v vsaki kompleksni enostavni neskončno-razsežni Banachovi algebri z enoto. Ko je bilo to delo že napisano, smo izvedeli, da sta hipotezo Fonga in Sourour-a dokazala tudi Apostol in Fialkow, vendar velja njun dokaz (ki do trenutka pisanja teh vrstic še ni bil objavljen) samo za Calkinovo algebro in je bistveno drugačen od dokaza, ki ga bomo predstavili tukaj.

Prvi razdelek nam namigne, da je vprašanje linearne neodvisnosti elementov $A_1, \dots, A_r$ kake enostavne Banachove algebre v tesni zvezi z rešljivostjo sistema enačb

$$(*) \quad \sum_{j=1}^s X_j A_i Y_j = B_i, \quad i=1, \dots, r$$

pri vseh mogočih desnih straneh $B_i \in A$. Tukaj so neznanke X_j, Y_j elementi algebre A in s naravno število. Sedaj se porodi naravno vprašanje, kako je z rešljivostjo sistema enačb (*), če Banachova algebra A ni enostavna. Pri raziskovanju tega vprašanja smo se omejili na algebro omejenih operatorjev Hilbertovega prostora. Osrednji rezultat prvega poglavja (izrek 4.3) pove, kakšnemu pogoju morajo zadoščati operatorji $A_1, \dots, A_r$ iz $B(H)$, da bo sistem (*) (za $s=r$) rešljiv v $B(H)$ pri poljubnih $B_1, \dots, B_r$ iz $B(H)$. Ta rezultat je uporaben pri proučevanju zalog vrednosti elementarnih operatorjev na $B(H)$.

Drugo poglavje se omejuje na posplošena odvajanja in operatorje oblike $X \rightarrow AXB$. Zanimali nas bodo numerični zakladi takih operatorjev. Numerične

zaklade posplošenih odvajanj na $B(H)$ je določil že Kyle v [60], nedavno pa je Shaw v [49] posplošil Kyle-jeve rezultate. Od izida članka [25] igra pri raziskovanju operatorjev na Hilbertovem prostoru vidno vlogo tudi bistveni numerični zaklad. V drugem poglavju bomo spoznali (izrek 9.2), kako se izraža bistveni numerični zaklad zožitve posplošenega odvajanja na Hilbert-Schmidtov razred.

S pomočjo numeričnega zaklada je mogoče hitro ugotoviti, kdaj je posplošeno odvajanje hermitski, normalen ali hiponormalen operator ([60], [49]). Ker je Hilbert-Schmidtov razred $C^2(H)$ Hilbertov prostor, lahko govorimo tudi o subnormalnih operatorjih na $C^2(H)$. V zadnjem razdelku bomo karakterizirali subnormalna posplošena odvajanja ter operatorje oblike $X \rightarrow AXB$ na prostoru $C^2(H)$.

Na tem mestu se želim zahvaliti trem profesorjem in kolegu, brez katerih tega dela ne bi bilo.

Vesetje za operatorsko teorijo in funkcionalno analizo ter osnovno znanje iz teh področij sta mi posredovala prof. Ivan Vidav in prof. Anton Suhadolc.

To delo je bilo napisano pod mentorstvom profesorja Vidava. Profesor Vidav je spremljal njegov razvoj, me opozarjal na pomanjkljivosti in tako prispeval k večji jasnosti dokazov.

Ideja, da bi tudi v Ljubljani proučevali elementarne operatorje, pripada prof. Matjažu Omladiču. Na njegovo pobudo je imel Janko Gravner nekaj zanimivih predavanj, na katerih smo se seznanili z nekaj še odprtimi problemi o elementarnih operatorjih. Janku Gravnerju se zahvaljujem tudi za prijetne razgovore o operatorski teoriji.

I. SISTEMI OPERATORSKIH ENAČB

Uvod

V tem poglavju bomo najprej izpeljali kriterij za linearno neodvisnost elementov enostavne kompleksne Banachove algebre z enoto, ki nam bo omogočil dokazati, da na taki algebri ni neničelnih kompaktnih elementarnih operatorjev (če je algebra neskončno-razsežna). Kot poseben primer, bomo tako dokazali hipotezo Fonga in Sourourja, da na Calkinovi algebri ni neničelnih kompaktnih elementarnih operatorjev.

Naj bo H Hilbertov prostor, $B(H)$ algebra vseh omejenih linearnih operatorjev na H in $K(H)$ (edini) maksimalni ideal v $B(H)$. Potem je $C(H) := B(H)/K(H)$ enostavna Banachova algebra. Za poljubno r -terko operatorjev $A_1, \dots, A_r$ iz $B(H)$ in poljubno naravno število m opazujmo sistem operatorskih enačb

$$(1) \quad \sum_{j=1}^m X_j A_i Y_j = B_i, \quad i=1, \dots, r$$

kjer so neznanke X_j in Y_j omejeni operatorji na H . Opazujmo tudi ustrezni sistem enačb v algebri $C(H)$

$$(2) \quad \sum_{j=1}^m x_j a_i y_j = b_i, \quad i=1, \dots, r$$

kjer so a_i, b_i, x_j, y_j odseki v $C(H)$, ki pripadajo elementom A_i, B_i, X_j, Y_j . V prvem razdelku bomo videli, da sta ekvivalentni naslednji izjavi:

- (i) Obstaja tak m , da ima sistem (2) rešitev pri poljubnih $b_i \in C(H)$.
- (ii) Elementi $a_i, i=1, \dots, r$, so linearno neodvisni.

Ta ugotovitev takoj sproži naslednji vprašanja:

- (i) Koliko je, pri dani r -terki $a_1, \dots, a_r$, najmanjši tak m , da je sistem (2) rešljiv za poljubne $b_1, \dots, b_r$ iz $C(H)$?
- (ii) Ali je mogoče (pri danih A_i in B_i) vsako rešitev sistema (2) dvigniti do rešitve sistema (1)?

Odgovora na prvo vprašanje v splošnem ne poznam; toda, če je mogoče elemente a_j predstaviti s komutirajočimi normalnimi operatorji na separabilnem prostoru, potem je minimalni m enak 1. To bo sledilo s pomočjo nekega rezultata Browna, Douglasa in Fillmora. Odgovor na drugo vprašanje je negativen celo v separabilnem Hilbertovem prostoru, zato se je smiselno vprašati:

(iii) Kakšnemu pogoju morajo zadoščati operatorji $A_1, \dots, A_r$, da bo za kako naravno število m sistem (1) rešljiv pri poljubnih $B_1, \dots, B_r$ iz $B(H)$?

Na zadnje vprašanje bomo odgovorili v četrtem razdelku, kjer bomo pokazali, da je sistem enačb (1) rešljiv za $m=r$, če so elementi $A_i \in K(H)$ Calkinove algebre linearno neodvisni. Videli bomo, da lahko tedaj operatorje Y_j določimo kot izometrije s paroma ortogonalnimi zalogami vrednosti. V nekoliko splošnejših Banachovih algebrah kot $B(H)$ odgovarja na vprašanje (iii) korolar D 5 v dodatku.

Na koncu poglavja bomo še posplošili formulo za razdaljo danega operatorja od množice skalarnih operatorjev (ki jo je dokazal T. Ando, glejte [3]) in poiskali podobno formulo za numerično razdaljo danega operatorja od množice skalarnih operatorjev. Posplošitev Ando-jevega rezultata bomo potrebovali pri dokazovanju rešljivosti sistema operatorskih enačb

$$XA_1Y = B_1$$

$$XA_2Y = B_2$$

kjer sta B_1, B_2 poljubna, A_1 in A_2 pa bistveno linearno neodvisna omejena operatorja na H ter vsaj eden navzdol omejen.

Drugi razdelek je tehnična priprava za dokazovanje kasnejših izrekov, morda pa bodo rezultati tega razdelka zanimivi tudi sami zase. V tretjem razdelku pa bomo na nov način dokazali dva že znana rezultata o elementarnih operatorjih.

1. Nekompaktnost elementarnih operatorjev na enostavnih Banachovih algebrah

1.1. Definicija. Elementarni operator na algebri A je operator oblike

$$(1.1) \quad Ex = \sum_{i=1}^r c_i x a_i, \quad x \in A$$

kjer so a_i, c_i dani elementi algebre A .

V tem razdelku naj bo A enostavna kompleksna Banachova Algebra z enoto. Ker ima A enoto, to pomeni, da A ne vsebuje nobenega dvostranskega ideala (zaprtega ali ne) različnega od $\{0\}$ in A .

1.2. IZREK. Poljubna r -terka elementov a_i ($i=1, \dots, r$, $r \leq \dim A$) algebre A je linearno neodvisna natanko tedaj, ko za poljubne $b_i \in A$ obstajajo taki elementi $x_j, y_j \in A$, $j=1, \dots, m$, da velja

$$(1.2) \quad \sum_{j=1}^m x_j a_i y_j = b_i, \quad i=1, \dots, r$$

Dokaz. Predpostavimo najprej, da velja (1.2), kjer naj bodo b_i linearno neodvisni. Potem iz

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i = 0, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}$$

sledi

$$0 = \sum_{j=1}^m x_j \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i a_i \right) y_j = \sum_{i=1}^r \lambda_i \left(\sum_{j=1}^m x_j a_i y_j \right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i$$

Zaradi linearne neodvisnosti elementov b_i sledi od tod $\lambda_i = 0$, torej so elementi a_i linearno neodvisni.

Dokažimo še obratno smer. Označimo z E algebro vseh elementarnih operatorjev na A in naj bo E' njen komutant. (E' je torej množica vseh tistih linearnih operatorjev na A , ki komutirajo z vsemi elementarnimi operatorji na A .) Če je $T \in E'$, potem T komutira z vsemi levimi in desnimi

množenji, torej za poljubna $a, x \in A$ velja $T(ax) = aT(x)$ in $T(xa) = (Tx)a$. Ko vstavimo $x=1$, dobimo $Ta = a(T1) = (T1)a$, torej je T operator množenja s centralnim elementom $T1$. Med drugim, so vsi operatorji v E' omejeni, kar pove, da je E' Banachova algebra. Ker je algebra A enostavna, je ireducibilna kot E -modul (nima netrivialnih podmodulov); torej je E' obseg (po Schurovi lemi, [57], [36]). Toda vsaka kompleksna Banachova algebra, ki je hkrati obseg, je izomorfna obsegu kompleksnih števil $\mathbb{C}$ [57]; zato imamo sedaj $E' = \mathbb{C}1$. Torej so elementi a_i linearno neodvisni nad E' . Zato obstaja po Jacobsonovem izreku o gostoti (glejte dodatek) tak $E \in E$, da je $Ea_i = b_i$ za vse $i=1, \dots, r$. //

1.3. KOROLAR. Če je algebra A neskončno-razsežna, potem je operator 0 edini kompakten elementaren operator na A .

Dokaz. Naj bo E elementaren kompakten operator na A in denimo, da je $E \neq 0$. Očitno lahko E izrazimo v obliki (1.1), kjer so a_i linearno neodvisni in prav tako c_i linearno neodvisni elementi algebre A . Po izreku 1.2 obstajajo taki elementi x_j, y_j algebre A , da velja

$$(1.3) \quad \sum_{j=1}^m x_j a_i y_j = \delta_{1i} 1$$

Za vsak $a \in A$ označimo z R_a operator desnega množenja z a (t.j., $R_a x = xa$, $x \in A$). Ker je E kompakten, je kompakten tudi operator

$$E' = \sum_{j=1}^m y_j E R_{x_j}$$

Iz (1.3) in (1.1) dobimo $E'x = c_1 x$ za vsak $x \in A$. Če sedaj ponovimo isti argument, toda z levimi množenji namesto desnih, vidimo, da bi moral biti identični operator na algebri A kompakten. Toda to je nemogoče, ker je A neskončno-razsežen Banachov prostor. //

Korolar 1.3 je mogoče uporabiti, na primer, na najpopularnejši med vsemi C^* algebrami - Calkinovi algebri. Naj bo H separabilen Hilbertov prostor. Calkinova algebra prostora H , $C(H)$, je definirana kot faktor-ska algebra algebre $B(H)$ vseh omejenih operatorjev na H po idealu $K(H)$

vseh kompaktnih operatorjev na H .

$$C(H) = B(H)/K(H)$$

Calkinovo izvirno obravnavo algebre $C(H)$ lahko najde bralec v [15]. Kot kvocientna algebra C^* -algebre po dvostranskem idealu, je Calkinova algebra C^* -algebra. Ker je $K(H)$ maksimalni ideal v $B(H)$, je $C(H)$ enostavna algebra. Da na Calkinovi algebri ni netrivialnih kompaktnih elementarnih operatorjev, sta domnevala že Fong in Sourour v [26].

Izrek 1.2 omogoča tudi naslednjo posplošitev izreka 3 iz [26].

1.4. KOROLAR. Naj bo X poljuben Banachov prostor, K maksimalen ideal v $B(X)$ in $\pi: B(X) \rightarrow B(X)/K$ naravna preslikava. Nadalje naj bodo A_i, C_i , $i=1, \dots, r$, taki elementi algebre $B(X)$, da je operator

$$\sum_{i=1}^r C_i X A_i$$

v idealu K za vsak $X \in B(X)$. Če so elementi $\pi(A_i)$ linearno neodvisni, potem so vsi operatorji C_i v idealu K .

Dokaz. Po predpostavki je elementaren operator

$$x \rightarrow \sum_{i=1}^r \pi(C_i) x \pi(A_i)$$

ki deluje na algebri $B(X)/K$, enak 0. Če posnemamo dokaz korolarja 1.3, vidimo, da je potem tudi operator $x \rightarrow \pi(C_1)x$ enak 0. Torej je $\pi(C_1)=0$, oziroma $C_1 \in K$. Prav tako je $C_i \in K$ za $i=2, \dots, r$. //

Če je H separabilen Hilbertov prostor, potem je K ideal kompaktnih operatorjev in korolar 1.4 je v tem primeru že znan rezultat, dokazan v [26] s pomočjo Voiculescujevega izreka o približno ekvivalentnih reprezentacijah C^* -algeber.

Za poljuben Hilbertov prostor H je znano, kaj so vsi zaprti dvostranski ideali algebre $B(H)$; znano je, da vsebuje algebra $B(H)$ en sam maksimalni ideal $K(H)$. Ideal $K(H)$ je zaprtje množice vseh tistih operatorjev

$T \in B(H)$ za katere je $\dim T(H) < \dim H$ [27, str. 106]. (Tukaj pomeni $\dim$ kardinalno število ortonormirane baze.) Za separabilen Hilbertov prostor se $K(H)$ ujema z idealom kompaktnih operatorjev. Za splošen Banachov prostor X (mi) ni znana struktura maksimalnih idealov algebre $B(X)$, toda, če je X eden od prostorov l^p ($1 \leq p < \infty$) ali c_0 , potem je edini zaprt dvostranski ideal algebre $B(X)$ ideal kompaktnih operatorjev [42, str. 82].

Naj bodo $a_i, i=1, \dots, r$, linearno neodvisni elementi Calkinove algebre. Koliko je tedaj najmanjši m , da je sistem enačb (1.2) rešljiv pri poljubnih $b_i \in C(H)$? Odgovora na to vprašanje v splošnem ne poznam, toda pri dodatnih predpostavkah lahko pokažemo, da je minimalni m enak 1.

1.5. TRDITEV. Naj bo H separabilen Hilbertov prostor in a_i, b_i elementi Calkinove algebre $C(H)$ za $i=1, \dots, r$. Potem obstajata taka $x, y \in C(H)$, da je

$$xa_iy = b_i, \quad i=1, \dots, r$$

vsaj v primeru, ko je izpolnjen eden od naslednjih pogojev:

- (i) Elementi a_i so linearno neodvisni in obstajajo taki normalni operatorji $A_i \in B(H)$, da je $\pi(A_i) = a_i$ in $A_i A_j = A_j A_i$ za poljubna $i, j=1, \dots, r$.
- (ii) Obstajajo taki $A_i \in B(H)$, da je $\pi(A_i) = a_i$ in da C^* -algebra generirana z $A_i, i=1, \dots, r$, ne vsebuje nobenega neničelnega kompaktnega operatorja.

Dokaz. V obeh primerih so elementi a_i linearno neodvisni. Po izreku 1.2 obstajajo taki elementi $x_j, y_j, j=1, \dots, m$, v $C(H)$, da velja (1.2). Naj bodo $X_j, Y_j \in B(H)$ taki, da je $\pi(X_j) = x_j$ in $\pi(Y_j) = y_j$. Označimo s $H^{(m)}$ direktno vsoto m primerkov prostora H . Naj bosta

$$X: H^{(m)} \rightarrow H \quad \text{in} \quad Y^T: H \rightarrow H^{(m)}$$

operatorja, definirana z

$$X(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{j=1}^m X_j \xi_j \quad Y^T \xi = (Y_1 \xi, \dots, Y_m \xi)$$

Nadalje naj bo $A_i^{(m)}: H^{(m)} \rightarrow H^{(m)}$ direktna vsota m -primerkov operatorja A_i

za vsak $i=1, \dots, r$.

Obstaja tak unitaren operator $U: H^{(m)} \rightarrow H$, da je operator $U^{-1}A_i U - A_i^{(m)}$ kompakten za vsak i . V primeru (i) sledi eksistenca takega operatorja U iz dejstva, da predstavlja r -terka $(A_1, \dots, A_r)$ komutirajočih normalnih operatorjev trivialno ekstenzijo C^* -algebre zveznih funkcij na združenem bistvenem spektru operatorjev $A_1, \dots, A_r$. (Natančneje, inverzna preslikava od Gelfandove reprezentacije C^* -algebre generirane z $a_1, \dots, a_r$ je trivialna ekstenzija, [18], [20].) V primeru (ii) na zagotavlja eksistenco operatorja U Voiculescujev izrek ([59], [8, str. 343]), ki pove, da je identična reprezentacija, id , C^* -algebre generirane z operatorji A_i približno ekvivalentna direktni vsoti m primerkov identične reprezentacije. (Tukaj bomo opustili natančnejšo pojasnitev Voiculescuvega izreka, ker ga kasneje ne bomo več potrebovali.) Sedaj v diagramu

$$\begin{array}{ccccc} H & \xrightarrow{Y^T} & H^{(m)} & \xrightarrow{A_i^{(m)}} & H^{(m)} & \xrightarrow{X} & H \\ & & \downarrow U & & \uparrow U^{-1} & & \\ & & H & \xrightarrow{A_i} & H & & \end{array}$$

kvadrat komutira do kompaktnosti natančno. Postavimo $y = \pi(UY^T)$ in $x = \pi(XU^{-1})$. Potem imamo

$$x a_i y = \pi(XU^{-1}A_iUY^T) = \pi(XA_i^{(m)}Y^T) = \pi\left(\sum_{j=1}^m X_j A_i Y_j\right) = \sum_{j=1}^m x_j a_i y_j = b_i \quad //$$

1.6. Definicija. Naj bo H (ne nujno separabilen) Hilbertov prostor, $K(H)$ edini maksimalni ideal algebre $B(H)$ in $\pi: B(H) \rightarrow C(H) = B(H)/K(H)$ naravna preslikava. Operatorji $A_1, \dots, A_r$ iz $B(H)$ so bistveno linearno neodvisni, če in samo če so odseki $\pi(A_i)$ linearno neodvisni.

Naj bodo A_i bistveno linearno neodvisni, B_i , $i=1, \dots, r$, pa poljubni omejeni linearni operatorji na H . Označimo, kot običajno, $a_i = \pi(A_i)$, $b_i = \pi(B_i)$ in naj bo x_j, y_j , $j=1, \dots, m$, poljubna rešitev sistema (1.2). Ali obstajajo taki operatorji $X_j, Y_j \in B(H)$, da je $\pi(X_j) = x_j$, $\pi(Y_j) = y_j$ in

$$(1.4) \quad \sum_{j=1}^m X_j A_i Y_j = B_i, \quad i=1, \dots, r$$

Kot pove naslednji primer, je odgovor v splošnem negativen.

1.7. Primer. Ni mogoče vsake rešitve enačbe $x \perp y = 1$ v Calkinovi algebri dvigniti do rešitve operatorske enačbe $X \perp Y = I$. Naj bo na primer x obrnljiv element z negativnim Fredholmovim indeksom in y njegov inverz. Vsak operator X , ki zadošča pogoju $\pi(X)=x$ ima potem tudi negativen indeks ($\text{ind } X = \text{ind } x$, [58, str. 60]), torej ni surjektiven in zato ne more zadoščati pogoju $XY=I$.

Ker ni mogoče vsake rešitve sistema (1.2) dvigniti do rešitve sistema (1.4), se lahko vprašamo, ali je sistem (1.4) sploh rešljiv, čeprav so operatorji A_i bistveno linearno neodvisni. Da bi lahko odgovorili na to vprašanje, bomo morali najprej ugotoviti, kakšna je zveza med linearno neodvisnostjo dane r -terke operatorjev in linearno neodvisnostjo njihovih zožitev na končno-razsežne podprostore. To bomo ugotovili v naslednjem razdelku, sedaj pa si oglejmo le najpreprostejši primer sistema (1.4), ko je $m=r=1$.

1.8. Nekaj opomb o operatorski enačbi

$$(1.5) \quad XAY = B$$

Znano je in lahko je pokazati, da je na končno-razsežnem prostoru enačba (1.5) rešljiva natanko tedaj, ko je rang operatorja B manjši ali enak rang operatorja A . Tudi v neskončno-razsežnem separabilnem Hilbertovem prostoru H obstaja enostaven kriterij za rešljivost enačbe (1.5). Imamo dve možnosti:

(i) Če operator A ni kompakten, vsebuje njegova zloga vrednosti kak neskončno-razsežen zaprt podprostor [19, str. 125]. Od tod je lahko videti, da je tedaj enačba (1.5) rešljiva za vsak $B \in B(H)$. To je opazil že Calkin [15, str. 842], sledilo pa bo tudi iz trditve 1.9.

(ii) Če je operator A kompakten in enačba (1.5) rešljiva, mora biti kompakten tudi operator B . Naj bodo $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$ lastne vrednosti pozitivnega kompaktne operatorja $|A| = (A^*A)^{1/2}$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq 0$ pa lastne vrednosti operatorja $|B|$. Iz (1.5) sledi $\mu_n \leq \|X\| \lambda_n \|Y\|$, [48, str. 22]. Torej je potreben pogoj za rešljivost enačbe (1.5) obstoj take konstante M , da je $\mu_n \leq M \lambda_n$ za vse $n=1,2,\dots$. Da je ta pogoj tudi

zadosten, je mogoče pokazati v dveh korakih. Najprej s pomočjo polar-nega zapisa operatorjev A in B prevedemo problem na pozitivna operatorja A in B . Nato brez škode enega od operatorjev nadomestimo z unitarno ekvivalentnim operatorjem, tako da lahko potem oba operatorja predstavimo z diagonalnima matrikama v isti ortonormirani bazi. Tedaj pa je lahko najti diagonalna operatorja X in Y , ki zadoščata enačbi (1.5). (Pri tem lahko vzamemo kar $X=I$ in nato določimo Y .) Podrobnosti prepuščamo bralcu.

Za zaključek razdelka, dodajmo še nek elementaren rezultat o rešljivosti enačbe (1.5) v posebnem razredu Banachovih prostorov.

1.9. TRDITEV. Naj bo X tak Banachov prostor, da vsak njegov neskončno-razsežen zaprt podprostor Y vsebuje zaprt podprostor $Z \leq Y$, ki je komplementiran v X in izomorfen prostoru X . Tedaj je pri danem $A \in B(X)$ enačba (1.5) rešljiva za vsak $B \in B(X)$ natanko tedaj, ko operator A ni strogo singularen.

Dokaz. Če je operator A strogo singularen, potem enačba $XAY=I$ ni rešljiva, saj sestavljajo strogo singularni operatorji pravi ideal algebre $B(X)$, [37].

Vzemimo, da A ni strogo singularen. To pomeni, da je za kak neskončno-razsežen zaprt podprostor $Y \leq X$ operator $A|_Y$ navzdol omejen. Naj bo $Z \leq A(Y)$ zaprt podprostor, komplementiran v X in izomorfen X ; označimo ta izomorfizem z $Y_1: X \rightarrow Z$. Kompozitum $Y=(A|_Y[A^{-1}(Z) \cap Y])^{-1}Y_1$ je izomorfizem prostora X na podprostor $A^{-1}(Z) \cap Y$. Torej je operator AY izomorfizem prostora X na podprostor Z . Ker je Z komplementiran podprostor prostora X , obstaja zvezna razširitev operatorja $(AY)^{-1}: Z \rightarrow X$ na ves prostor X ; označimo to razširitev z X . Sedaj je $XAY=I$. //

Edini (meni znani) primeri Banachovih prostorov, ki zadoščajo pogoju trditve 1.9, so prostori l^p , $1 \leq p < \infty$ in c_0 , [37, str. 53]. Za te prostore pa je ta trditev že znana [42].

2. Linearna neodvisnost zožitev operatorjev

Naj bodo $A_1, \dots, A_r$ taki linearni operatorji na H , da so za vsak $x \in H$ vektorji $A_1 x, \dots, A_r x$ linearno odvisni; potem operatorji A_i niso nujno linearno odvisni. (Za protiprimer lahko služi poljubna linearno neodvisna r -terka operatorjev, ki imajo zalogo vrednosti vsebovano v istem $(r-1)$ -razsežnem podprostoru.) Če pa so za vsak r -razsežen podprostor L zožitve $A_i|_L$ linearno odvisni operatorji, potem je mogoče pokazati, da so tudi operatorji A_i linearno odvisni.

Za omejene operatorje $A_1, \dots, A_r$ lahko definiramo mero linearne neodvisnosti kot

$$(2.1) \quad \alpha(A_1, \dots, A_r) = \min \left\{ \left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \right\|; (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r \right\}$$

kjer označuje S_r enotsko sfero v $\mathbb{C}^r$ ($S_r = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{C}^r; \sum_{i=1}^r |\lambda_i|^2 = 1\}$). Da smemo v (2.1) pisati "min" namesto "inf" sledi iz kompaktnosti sfere S_r . Očitno so operatorji $A_1, \dots, A_r$ linearno neodvisni natanko takrat, ko je $\alpha(A_1, \dots, A_r) > 0$.

Za vsak operator $A \in B(H)$ in vsak podprostor L Hilbertovega prostora H označimo z $A|_L$ zožitev operatorja A na L , s P_L ortogonalni projektor na L in z A_L kompresijo operatorja A na L (t.j., $A_L = P_L A|_L$). Za vsako naravno število r naj pomeni F_r družino vseh r -razsežnih podprostorov Hilbertovega prostora H . Za poljubne $A_1, \dots, A_r$ iz $B(H)$ postavimo

$$(2.2) \quad \beta(A_1, \dots, A_r) = \sup \{ \alpha(A_1|_L, \dots, A_r|_L); L \in F_r \}$$

in

$$(2.3) \quad \gamma(A_1, \dots, A_r) = \sup \{ \alpha(A_{1L}, \dots, A_{rL}); L \in F_r \}$$

Lahko je videti, da velja

$$(2.4) \quad \gamma(A_1, \dots, A_r) \leq \beta(A_1, \dots, A_r) \leq \alpha(A_1, \dots, A_r)$$

toda potrebovali bomo ocene v obratno smer. Pri izpeljavi le teh se izkaže, da so računi nekoliko preprostejši, če delamo z numeričnim radijem namesto operatorske norme. Naj $w(A)$ označuje numerični radij

operatorja A . Spomnimo se, da iz polarizacijske identitete sledi

$$(2.5) \quad 1/2 \|A\| \leq w(A) \leq \|A\|$$

2.1. LEMA. Naj bodo $A_1, \dots, A_r$ taki omejeni operatorji na H , da je

$$(2.6) \quad w\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i\right) \leq w(A_1)$$

za vse $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r$ in naj bo (ω_n) tako zaporedje enotskih vektorjev iz prostora H , da je

$$(2.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} | \langle A_1 \omega_n, \omega_n \rangle | = w(A_1)$$

Potem je

$$(2.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_i \omega_n, \omega_n \rangle = 0 \quad \text{za } i=2, \dots, r.$$

Dokaz. Po (2.6) je

$$(2.9) \quad \left| \sum_{i=1}^r \lambda_i \langle A_i \omega_n, \omega_n \rangle \right| \leq w(A_1)$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$ in vsak $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r$. Izberimo $j \in \{2, \dots, r\}$ in poljuben $t \in (0, 1)$. Pri fiksnem n postavimo $\lambda_i = 0$ za $i \neq 1, j$, $\lambda_j = t \exp(-\sqrt{-1} \arg \langle A_j \omega_n, \omega_n \rangle)$ in $\lambda_1 = (1-t^2)^{1/2} \exp(-\sqrt{-1} \arg \langle A_1 \omega_n, \omega_n \rangle)$. Potem dobimo iz (2.9)

$$t | \langle A_j \omega_n, \omega_n \rangle | + (1-t^2)^{1/2} | \langle A_1 \omega_n, \omega_n \rangle | \leq w(A_1)$$

oziroma

$$(2.10) \quad | \langle A_j \omega_n, \omega_n \rangle | \leq \frac{1}{t} [w(A_1) - | \langle A_1 \omega_n, \omega_n \rangle |] + \frac{1}{t} [1 - (1-t^2)^{1/2}] | \langle A_1 \omega_n, \omega_n \rangle |$$

Naj bo (t_n) zaporedje števil iz intervala $(0, 1)$, ki konvergira proti 0 tako počasi, da tudi zaporedje $\frac{1}{t} [w(A_1) - | \langle A_1 \omega_n, \omega_n \rangle |]$ konvergira proti 0. (To je mogoče zaradi (2.7).) Če sedaj vstavimo v (2.10) $t = t_n$ in pošljemo n proti neskončnosti, dobimo (2.8) za $i=j$. //

V naslednji lemi bomo dokazali nekoliko več kot bomo kasneje

potrebovali, toda dokaz zaradi tega ne bo daljši. Lema bo med drugim povedala naslednje: če so operatorji $A_1, \dots, A_r$ linearno neodvisni, potem obstaja tak r -razsežen podprostor $L \leq H$, da so kompresije teh operatorjev na L linearno neodvisne.

2.2. LEMA. Za poljubne omejene operatorje $A_1, \dots, A_r$ na H velja

$$(2.11) \quad \gamma(A_1, \dots, A_r) \geq \frac{1}{2} q_r \alpha(A_1, \dots, A_r)$$

kjer je

$$q_r = \left(\frac{3}{4^r - 1} \right)^{1/2}$$

Dokaz. Postavimo

$$(2.12) \quad \alpha'(A_1, \dots, A_r) = \min \left\{ w \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \right); (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r \right\}$$

in

$$(2.13) \quad \gamma'(A_1, \dots, A_r) = \sup \{ \alpha'(A_{1L}, \dots, A_{rL}); L \in F_r \}$$

Dovolj je dokazati oceno

$$(2.14) \quad \gamma'(A_1, \dots, A_r) \geq q_r \alpha'(A_1, \dots, A_r)$$

kajti potem sledi po (2.5)

$$\gamma(A_1, \dots, A_r) \geq \gamma'(A_1, \dots, A_r) \geq q_r \alpha'(A_1, \dots, A_r) \geq \frac{1}{2} q_r \alpha(A_1, \dots, A_r)$$

Pri dokazovanju relacije (2.14) smemo predpostaviti, da je izpolnjen pogoj (2.6). V nasprotnem primeru namreč lahko nadomestimo operatorje A_i z operatorji

$$A_i' = \sum_{k=1}^r \mu_{ki} A_k, \quad i=1, \dots, r$$

kjer so koeficienti μ_{ki} taki, da je matrika $[\mu_{ki}]$ unitarna in je njen prvi stolpec tako izbran, da je

$$w(A_1') = \max \left\{ w \left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \right); (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r \right\}$$

Ker je matrika $[\mu_{ki}]$ unitarna in ker vsaka unitarna matrika preslika sfero S_r bijektivno samo vase, je $\alpha'(A_1', \dots, A_r') = \alpha'(A_1, \dots, A_r)$ in $\gamma'(A_1', \dots, A_r') = \gamma'(A_1, \dots, A_r)$. Privzemimo torej, da velja (2.6).

Neenakost (2.14) bomo dokazali z indukcijo na r . Za $r=1$ velja očitno enakost v (2.14) (obe strani neenačbe sta tedaj enaki $w(A_1)$). Privzemimo, da velja (2.14) za $r-1$ operatorjev, da je torej

$$(2.15) \quad \gamma'(A_2, \dots, A_r) \geq q_{r-1} \alpha'(A_2, \dots, A_r)$$

Zaradi krajšega zapisa postavimo

$$\alpha_r' = \alpha'(A_1, \dots, A_r), \quad \alpha_{r-1}' = \alpha'(A_2, \dots, A_r)$$

Po (2.15) in (2.13) obstaja za vsako naravno število n tak podprostor $M_n \in F_{r-1}$, da velja

$$(2.16) \quad \alpha'(A_{2M_n}, \dots, A_{rM_n}) \geq q_{r-1} \alpha_{r-1}' - \frac{1}{n}$$

Naj bo (ω_n) tako zaporedje enotskih vektorjev v H , da je

$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_1 \omega_n, \omega_n| = w(A_1)$ in za vsako naravno število n naj bo L_n tak podprostor v H , da je $M_n \leq L_n$, $\omega_n \in L_n$ in $\dim L_n = r$. Z namenom, da bi pokazali (2.14), ocenimo najprej $\alpha'(A_{1L_n}, \dots, A_{rL_n})$. Naj bo $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r$. Če je $|\lambda_1| \geq q_r \alpha_r' / w(A_1)$, potem imamo

$$\begin{aligned} w\left(\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i\right)_{L_n}\right) &\geq \left| \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \omega_n, \omega_n \right| \quad (\text{ker je } \omega_n \in L_n) \\ &\geq |\lambda_1| |A_1 \omega_n, \omega_n| - \sum_{i=2}^r |\lambda_i| |A_i \omega_n, \omega_n| \\ &\geq \frac{q_r \alpha_r'}{w(A_1)} |A_1 \omega_n, \omega_n| - \sum_{i=2}^r |\lambda_i| |A_i \omega_n, \omega_n| \end{aligned}$$

Po lemi 2.1 konvergira desna stran te ocene proti $q_r \alpha_r'$, ko gre n proti neskončnosti. Predpišimo poljuben $\varepsilon > 0$. Potem je

$$(2.17) \quad w\left(\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i\right)_{L_n}\right) \geq q_r \alpha_r' - \varepsilon$$

za vse dovolj velike n , če je $|\lambda_1| \geq q_r \alpha_r' / w(A_1)$. Če pa je $|\lambda_1| < \frac{q_r \alpha_r'}{w(A_1)}$,

potem imamo

$$\begin{aligned}
 & w\left(\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i\right)_{L_n}\right) \geq w\left(\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i\right)_{M_n}\right) \quad (\text{ker je } M_n \leq L_n) \\
 & \geq w\left(\left(\sum_{i=2}^r \lambda_i A_i\right)_{M_n}\right) - |\lambda_1| w(A_1) \quad (\text{ker ima } w \text{ lastnosti norme}) \\
 & \geq \left(\sum_{i=2}^r |\lambda_i|^2\right)^{1/2} \alpha^-(A_{2M_n}, \dots, A_{rM_n}) - |\lambda_1| w(A_1) \quad (\text{po definiciji količine } \alpha^- \\
 & \quad \text{za } r-1 \text{ operatorjev}) \\
 & \geq \left[1 - \left(\frac{q_r \alpha_r^-}{w(A_1)}\right)^2\right]^{1/2} \left(q_{r-1} \alpha_{r-1}^- - \frac{1}{n}\right) - |\lambda_1| w(A_1) \quad (\text{po (2.16) in zaradi } \sum_{i=2}^r |\lambda_i|^2 \\
 & \quad = 1 - |\lambda_1|^2 \geq 1 - (q_r \alpha_r^- / w(A_1))^2) \\
 & \geq (1 - q_r^2)^{1/2} \left(q_{r-1} \alpha_{r-1}^- - \frac{1}{n}\right) - q_r \alpha_r^- \quad (\text{zaradi } |\lambda_1| < q_r \alpha_r^- / w(A_1) \text{ in ker je očitno} \\
 & \quad \alpha_r^- \leq w(A_1) \text{ ter } \alpha_r^- \leq \alpha_{r-1}^-) \\
 & = q_r \alpha_r^- - \frac{1}{n} (1 - q_r^2)^{1/2} \quad (\text{ker je } (1 - q_r^2)^{1/2} q_{r-1} - q_r = q_r)
 \end{aligned}$$

Od tod sledi, da velja ocena (2.17) pri dovolj velikem n tudi, če je $|\lambda_1| < q_r \alpha_r^- / w(A_1)$; torej velja za vse $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r$. Zato je $\alpha^-(A_{1L_n}, \dots, A_{rL_n}) \geq q_r \alpha_r^- - \varepsilon$ za vsak dovolj velik n , od koder sledi

$$\gamma^-(A_1, \dots, A_r) \geq q_r \alpha_r^- - \varepsilon$$

če pošljemo v zadnji neenakosti ε proti 0, dobimo (2.14). //

Kasneje bomo potrebovali le naslednjo posledico leme 2.2.

2.3. KOROLAR. Za poljubne $A_1, \dots, A_r \in \mathcal{B}(H)$ velja neenakost

$$(2.18) \quad \beta(A_1, \dots, A_r) \geq \frac{1}{2} q_r \alpha(A_1, \dots, A_r)$$

kjer je q_r konstanta iz leme 2.2.

Dokaz. Neenakost (2.18) sledi takoj iz (2.4) in (2.11). //

2.4. Opomba. Ocena (2.18) ni najboljša možna. Mogoče je dokazati,

da je faktor $1/2$ na desni strani te neenakosti odveč. Čeprav je to brez pomena za naše nadalnje rezultate, bi bilo zanimivo vedeti, ali katera od enakosti $\alpha=\beta$, $\alpha=\gamma$, $\beta=\gamma$ velja pri poljubni r -terki operatorjev.

2.5. Opomba. Iz korolarja 2.3 sledi naslednje: če so $A_1, \dots, A_r$ linearno neodvisni omejeni operatorji na Hilbertovem prostoru H , potem obstaja tak r -razsežen podprostor $L \subseteq H$, da so zožitve operatorjev A_i na L linearno neodvisne. To dejstvo je mogoče dokazati tudi neposredno, z indukcijo in sicer v poljubnem vektorskem prostoru za poljubne linearne operatorje.

Količine $\alpha(A_1, \dots, A_r)$ in $\beta(A_1, \dots, A_r)$ lahko definiramo tudi za omejene operatorje na splošnem Banachovem prostoru. Tudi tedaj obstaja neka zveza med α in β , ki je analogna relaciji (2.18), vendar v njej $\alpha(A_1, \dots, A_r)$ ne nastopa linearno.

3. Kompaktni elementarni operatorji na algebri $B(H)$

Da bi bila razprava celovitejša, bomo v tem razdelku dokazali dva že znana rezultata o elementarnih operatorjih, ki smo ju vzeli iz [26]. Dokaza, ki ju bomo navedli kot prvi preprost primer uporabe izsledkov prejšnjega razdelka, se nekoliko razlikujeta od dokazov v [26].

Spomnimo se, da je mogoče vsak operator P ranga 1 napisati v obliki $P = \psi \otimes \phi$, kjer je $\phi, \psi \in H$, $\|\phi\| = 1$ in (po definiciji) $(\psi \otimes \phi)\omega = \langle \omega, \phi \rangle \psi$ za vsak $\omega \in H$.

Oba izreka tega razdelka bosta hitro sledila iz naslednje leme.

3.1. LEMA. Naj bodo $A_1, \dots, A_r$ linearno neodvisni elementi algebre $B(H)$, $P = \psi \otimes \phi$ pa poljuben operator ranga 1 na prostoru H , kjer je $\|\phi\| = 1$. Potem obstajajo taki $X_j, Y_j \in B(H)$, da je

$$(3.1) \quad \sum_{j=1}^r X_j A_i Y_j = \delta_{1i} P$$

Dokaz. Po korolarju 2.3 obstaja tak r -razsežen podprostor $L \leq H$, da so operatorji $A_i|_L$ linearno neodvisni. Naj bo $\{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ baza prostora L in naj označuje $H^{(r)}$ direktno vsoto r -primerkov prostora H . Ker so operatorji $A_i|_L$ linearno neodvisni, so vektorji $(A_i\omega_1, \dots, A_i\omega_r) \in H^{(r)}$, $i=1, \dots, r$, linearno neodvisni. Zato obstaja tak omejen linearen operator $X: H^{(r)} \rightarrow H$, da je

$$X(A_i\omega_1, \dots, A_i\omega_r) = \delta_{1i}\psi, \quad i=1, \dots, r$$

Naj bodo operatorji $X_j \in B(H)$ definirani z $X(\xi_1, \dots, \xi_r) = \sum_{j=1}^r X_j \xi_j$, operatorji $Y_j \in B(H)$ pa z

$$Y_j \phi = \omega_j, \quad Y_j|_{\{\phi\}^\perp} = 0$$

Potem imamo

$$\begin{aligned} \text{in} \quad & \left(\sum_{j=1}^r X_j A_i Y_j \right) \phi = \sum_{j=1}^r X_j A_i \omega_j = \delta_{1i} \psi = (\delta_{1i} P) \phi \\ & \left(\sum_{j=1}^r X_j A_i Y_j \right) |_{\{\phi\}^\perp} = 0 = (\delta_{1i} P) |_{\{\phi\}^\perp} \end{aligned}$$

Od tod takoj sledi (3.1). //

3.2. Opomba. Lema 3.1 velja tudi v splošnem Banachovem prostoru; dokaz je tak kot v Hilbertovem prostoru, če upoštevamo opombo 2.5.

3.3. IZREK. (Fong, Sourour [26]) Naj bodo $C_1, \dots, C_r$ poljubni, $A_1, \dots, A_r$ pa linearno neodvisni omejeni operatorji na Hilbertovem prostoru H . Če je

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^r C_i X A_i = 0$$

za vsak $X \in B(H)$, potem je $C_i = 0$ za vsak $i=1, \dots, r$.

Dokaz. Naj bo $P = \phi\phi$ poljuben projektor ranga 1 na H . Po lemi 3.1 obstajajo taki $X_j, Y_j \in B(H)$, da je izpolnjena enakost (3.1). Če sedaj uporabimo idejo dokaza korolarja 1.3, vidimo, da iz (3.2) sledi

$$(3.3) \quad C_1 X P = 0 \quad \text{za vsak } X \in B(H)$$

Ko vstavimo v (3.3) namesto X operator $\psi \otimes \phi$, kjer je ψ poljuben vektor iz H , dobimo $(C_1 \psi) \otimes \phi = 0$. Ker sta tukaj vektorja ϕ in ψ poljubna (le $\|\phi\| = 1$), sledi $C_1 = 0$. Podobno vidimo, da je $C_i = 0$ za $i=2, \dots, r$. //

3.4. IZREK. (Fong, Sourour [26]) Bodita $\{A_1, \dots, A_r\}$ in $\{C_1, \dots, C_r\}$ linearno neodvisni podmnožici algebre $B(H)$. Potem je elementaren operator

$$E: B(H) \rightarrow B(H), \quad EX = \sum_{i=1}^r C_i X A_i$$

kompakten natanko tedaj, ko so kompaktni vsi operatorji A_i, C_i .

Dokaz. Privzemimo, da je E kompakten operator in naj bo $P = \phi \otimes \phi$ poljuben projektor ranga 1 na H . Z uporabo leme 3.1 in dokaza korolarja 1.3 vidimo, da je tedaj kompakten tudi operator

$$B(H) \rightarrow B(H), \quad X \rightarrow C_1 X P$$

Toda potem je kompakten tudi kompozitum

$$\begin{aligned} H &\rightarrow B(H) \rightarrow B(H) \rightarrow H \\ \xi &\rightarrow \xi \otimes \phi \rightarrow C_1(\xi \otimes \phi)P \rightarrow [C_1(\xi \otimes \phi)P]\phi = C_1 \xi \end{aligned}$$

Torej je C_1 kompakten operator in podobno dokažemo, da so kompaktni tudi vsi ostali operatorji C_i, A_i .

Za dokaz v obratno smer je dovolj videti, da je operator $X \rightarrow C X A$ kompakten, če sta kompaktna operatorja A in C (Saj je E vsota takih operatorjev) To pa je dobro znano dejstvo, ki ga ne bomo dokazovali [9, str. 20]. //

Oba izreka veljata tudi za operatorje na splošnih Banachovih prostorih.

4. Bistveno linearno neodvisni operatorji

4.1. Definicija. Za poljubne operatorje $A_1, \dots, A_r$ iz algebre $B(H)$ definirajmo mero bistvene linearne neodvisnosti kot

$$(4.1) \quad \alpha_e(A_1, \dots, A_r) = \min \left\{ \left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi(A_i) \right\|; (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r \right\}$$

kjer je π naravna preslikava iz $B(H)$ v $C(H) = B(H)/K(H)$. ($K(H)$ označuje, kot ponavadi, edini maksimalni ideal v $B(H)$.)

V idealu $K(H)$ so natanko tisti operatorji $T \in B(H)$, za katere ne obstaja tak podprostor $L \subset H$, da bi bilo $\dim L = \dim H$ in operator TL navzdol omejen [48, str. 25]. Razlago strukture množice zaprtih idealov algebre $B(H)$ za neseparabilen prostor H lahko najde bralec v [27]; brez škode za osnovno idejo pa lahko vzame, da je H separabilen prostor.

Kot običajno bomo s P_L označevali ortogonalni projektor na podprostor $L \leq H$ in z A_L kompresijo operatorja A na podprostor L .

4.2. TRDITEV. Za poljubne $A_i \in B(H)$, $i=1, \dots, r$, velja

$$(4.2) \quad \alpha_e(A_1, \dots, A_r) = \inf \{ \alpha(A_{1L}, \dots, A_{rL}); L \leq H, \dim L^\perp < \dim H \}$$

Dokaz. Če je $\dim L^\perp < \dim H$, potem je $\dim L = \dim H$, torej je $I - P_L \in K(H)$. Od tod sledi $A_i - P_L A_i P_L \in K(H)$ za vsak i (saj je $A_i - P_L A_i P_L = (I - P_L) A_i + P_L A_i (I - P_L)$). Zato imamo

$$\begin{aligned} \alpha_e(A_1, \dots, A_r) &= \alpha_e(P_L A_1 P_L, \dots, P_L A_r P_L) \leq \alpha(P_L A_1 P_L, \dots, P_L A_r P_L) \\ &= \alpha(A_{1L}, \dots, A_{rL}) \end{aligned}$$

Torej leva stran v (4.2) ni večja od desne strani.

Naj bo F posplošeno zaporedje vseh takih podprostorov $L \leq H$, ki zadoščajo pogoju $\dim L^\perp < \dim H$, urejeno z obratno inkluzijo: $L_1 \supset L_2$, če je L_2 podprostor prostora L_1 . Potem je posplošeno zaporedje projektorjev $\{I - P_L; L \in F\}$ približna enota ideala $K(H)$. (Čeprav je to verjetno

dobro znano dejstvo, nisem uspel najti nobenega vira, na katerega bi se lahko sklical, zato bom navedel kratek dokaz. Za poljuben sebi-adjungiran operator $A \in K(H)$ naj bo $E(\cdot)$ projektorska spektralna mera. Za vsako naravno število n naj bo $\Delta_n = \sigma(A) - (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ in $E_n = E(\Delta_n)$. Zaradi

$$E_n = A \int_{\Delta_n} \frac{1}{\lambda} dE(\lambda)$$

je $E_n \in K(H)$. Velja tudi

$$\|A - E_n A\| = \left\| \int_{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})} \lambda dE(\lambda) \right\| \leq \frac{1}{n}$$

Poljuben projektor $Q \in B(H)$ je v idealu $K(H)$ natanko tedaj, ko je $\dim Q(H) < \dim H$, torej, ko se da zapisati kot $Q = I - P_L$ za kak $L \in F$. Če je $Q \geq E_n$, potem imamo $\|A - QA\| = \|(I - Q)(I - E_n)A\| \leq \|(I - E_n)A\| \leq \frac{1}{n}$, od koder sledi

$$\lim_{Q \in K(H)} \|A - QA\| = 0$$

za vsak sebi-adjungiran operator $A \in K(H)$. Ker lahko vsak operator $A \in K(H)$ napišemo kot $A = A_1 + iA_2$, kjer sta A_1 in A_2 sebi-adjungirana operatorja iz $K(H)$, je posplošeno zaporedje projektorjev $\{I - P_L; L \in F\}$ res približna enota ideala $K(H)$. Kot poseben primer znane lastnosti aproksimativnih enot v C^* -algebrah ([56, str. 33], [7]) imamo sedaj

$$\|\pi(A)\| = \inf\{\|AP_L\|; L \in F\}, \text{ za vsak } A \in B(H)$$

Ker je $\|P_L AP_L\| \leq \|AP_L\|$ in ker je $A - P_L AP_L \in K(H)$, sledi iz te enakosti $\|\pi(A)\| = \inf\{\|P_L AP_L\|; L \in F\}$, oziroma

$$\|\pi(A)\| = \inf\{\|A_L\|; L \in F\}$$

za vsak $A \in B(H)$. Ko uporabimo zadnjo enakost na operatorju $A = \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i$, pri čemer je r -terka $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r$ tako izbrana, da velja

$$\left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i \pi(A_i) \right\| = \alpha_e(A_1, \dots, A_n)$$

dobimo

$$\alpha_e(A_1, \dots, A_r) = \|\pi(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i)\| = \inf\{\|(\sum_{i=1}^r \lambda_i A_i)_L\|; L \in F\} \\ \geq \inf\{\alpha(A_{1L}, \dots, A_{rL}); L \in F\}$$

Zato tudi desna stran v (4.2) ne more biti večja od leve. //

Za algebro $C(H)$ lahko sedaj izboljšamo izrek 1.2.

4.3. IZREK. Naj bodo $A_1, \dots, A_r$ omejeni operatorji na Hilbertovem prostoru H . Sistem operatorskih enačb

$$(4.3) \quad \sum_{j=1}^r X_j A_i Y_j = B_i, \quad i=1, \dots, r$$

je rešljiv v algebri $B(H)$ pri poljubnih $B_i \in B(H)$ natanko tedaj, ko so operatorji A_i bistveno linearno neodvisni.

Dokaz. Če je sistem (4.3) rešljiv pri bistveno linearno neodvisnih operatorjih B_i , potem morajo biti operatorji A_i bistveno linearno neodvisni. To vidimo kot v dokazu izreka 1.2.

Predpostavimo, da so A_i bistveno linearno neodvisni operatorji. Potem za vsak zaprt podprostor $L \leq H$, ki zadošča pogoju $\dim L^\perp < \dim H$, velja $\alpha(A_{1L}, \dots, A_{rL}) \geq \alpha_e(A_1, \dots, A_r)$ (po trditvi 4.2). Zato je

$$(4.4) \quad \beta(A_{1L}, \dots, A_{rL}) \geq \frac{1}{2} q_r \alpha_e(A_1, \dots, A_r)$$

po korolarju 2.3. Označimo $\tau = \frac{1}{4} q_r \alpha_e(A_1, \dots, A_r)$. Iz (4.4) (in (2.2)) sledi obstoj takega r -razsežnega podprostora $M \leq L$, da je $\alpha(A_{1M}, \dots, A_{rM}) > \tau$. Potem je tudi

$$\alpha(A_{1M}, \dots, A_{rM}) \geq \tau$$

Na podlagi tega dejstva lahko s transfinitno rekurzijo (ali pa s pomočjo Zornove leme) definiramo tako družino $\{M_n; n < d\}$ podprostorov Hilbertovega prostora H , indeksiranih z vsemi zaporednimi ordinalnimi števili manjšimi od $d := \dim H$, da so izpolnjeni naslednji pogoji:

$$(4.5) \quad \dim M_n = r \text{ za vsak } n < d$$

$$(4.6) \quad \text{če je } n \geq 1, \text{ potem je } M_n \leq \left[\sum_{k < n} (M_k + \sum_{i,j=1}^r (A_i^* A_j M_k)) \right]^\perp$$

$$(4.7) \quad \alpha(A_1 | M_n, \dots, A_r | M_n) \geq \tau \text{ za vsak } n < d$$

(Tukaj obravnavamo kardinalna števila kot posebne primere ordinalnih; kardinalno število je najmanjše ordinalno število z dano močjo [53], [29].)

Za dokaz eksistence družine $\{M_n; n < d\}$, naj bo $p < d$ poljubno ordinalno število in označimo s $\text{card}(p)$ najmanjše med vsemi ordinalnimi števili ekvipolentnimi s p . Privzemimo induktivno, da smo že dobili podprostore M_n za vse $n < p$ in pokažimo, da obstaja M_p . Ker je $p < d$ in d kardinalno število, je kardinalno število $\text{card}(p)$ manjše od d . Naj bo

$$L_p = \left[\sum_{n < p} (M_n + \sum_{i,j=1}^r (A_i^* A_j M_n)) \right]^\perp$$

Ker je $\dim M_n = r$ končno kardinalno število, je $\dim L_p^\perp = \text{card}(p)$. Ker je torej dimenzija prostora $L_p^\perp$ strogo manjša od $\dim H$, obstaja (po drugem odstavku tega dokaza) tak r -razsežen podprostor $M_p \leq L_p$, da je $\alpha(A_1 | M_p, \dots, A_r | M_p) > \tau$. Tako lahko s transfinitno indukcijo definiramo iskano družino podprostorov $\{M_n; n < d\}$. (Formalno je mogoče tako definicijo opravičiti z načelom transfinitne rekurzije [29, str. 70] in aksiomom izbire.)

Naj bo $\{\omega_{1n}, \dots, \omega_{rn}\}$ ortonormirana baza prostora M_n za vsak $n < d$, označimo

$$(4.8) \quad \xi_{in} = (A_i \omega_{1n}, \dots, A_i \omega_{rn}), \quad i=1, \dots, r$$

in naj bo

$$(4.9) \quad N_n = \text{linearna lupina } (\{\xi_{1n}, \dots, \xi_{rn}\})$$

Iz (4.6) sledi, da so N_n paroma ortogonalni podprostorji Hilbertovega prostora $H^{(r)} = H \oplus \dots \oplus H$; torej je $\bigoplus_{n < d} N_n$ podprostor v $H^{(r)}$.

Naj bo $\{\psi_{1n}, \dots, \psi_{rn}\}$ ortonormirana baza prostora N_n za vsak $n < d$.

(Opazimo, da so zaradi (4.7) vektorji $\xi_{1n}, \dots, \xi_{rn}$ linearno neodvisni pri vsakem n , torej je $\dim N_n = r$.) Definirajmo linearen operator $R_n \in \mathcal{B}(N_n)$ s predpisom

$$R_n \xi_{in} = \psi_{in}, \quad i=1, \dots, r$$

Brez težav sledi iz (4.7) in (4.8), da je

$$\|R_n\| \leq \frac{1}{\tau} \quad \text{za vsak } n < d$$

(Dovolj je videti, da je $\|R_n^{-1} \xi\| \leq \tau \|\xi\|$ za vsak $\xi \in N_n$, $\|\xi\|=1$. Za $\xi = \sum_{i=1}^r \lambda_i \psi_{in}$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in S_r$, imamo

$$\begin{aligned} \|R_n^{-1} \xi\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i \xi_{in} \right\|^2 = \sum_{j=1}^r \left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i \omega_{jn} \right\|^2 \quad (\text{po (4.8)}) \\ &\geq \left\| \sum_{i=1}^r \lambda_i A_i M_n \right\|^2 \quad (\text{ker Hilbert-Schmidtova norma dominira operatorsko}) \\ &\geq \tau^2 \quad (\text{po (4.7)}) \end{aligned}$$

Torej je operator

$$R = \bigoplus_{n < d} R_n, \quad R: \bigoplus_{n < d} N_n \rightarrow \bigoplus_{n < d} N_n$$

omejen. Za vsak $i=1, \dots, r$ postavimo

$$H_i = \text{linearna lupina } (\{\psi_{in}; n < d\})$$

Naj bo $\{\phi_n; n < d\}$ ortonormirana baza prostora H . Opazujmo operator

$X: \bigoplus_{n < d} N_n \rightarrow H$, definiran kot kompozitum

$$\bigoplus_{n < d} N_n \xrightarrow{R} \bigoplus_{n < d} N_n = \bigoplus_{i=1}^r H_i \xrightarrow{\bigoplus U_i} H^{(r)} := \bigoplus_{i=1}^r H \xrightarrow{B} H$$

kjer je za vsak $i=1, \dots, r$ operator $U_i: H_i \rightarrow H$ izometrija, definirana z $U_i \psi_{in} = \phi_n$ ($n < d$) in kjer je operator B definiran z $B(\eta_1, \dots, \eta_r) = \sum_{i=1}^r B_i \eta_i$ za vsak vektor $(\eta_1, \dots, \eta_r) \in H^{(r)}$. Operator X je omejen in velja

$$(4.10) \quad X_{\xi_{in}} = B_i \phi_n \quad \text{za vse } i=1, \dots, r \text{ in vsak } n < d$$

Razširimo X kot omejen operator na ves prostor $H^{(r)}$ (to razširitev bomo spet označili kar z X) in naj bodo $X_j: H \rightarrow H$ linearni operatorji, definirani z

$$X(\eta_1, \dots, \eta_r) = \sum_{j=1}^r X_j \eta_j$$

Operatorji X_j so očitno omejeni in po (4.10) ter (4.8) imamo

$$(4.11) \quad \sum_{j=1}^r X_j A_i \omega_{jn} = B_i \phi_n \quad \text{za vse } i=1, \dots, r \text{ in } n < d$$

Končno naj bodo $Y_j: H \rightarrow H$ ($j=1, \dots, r$) izometrije, definirane z

$$Y_j \phi_n = \omega_{jn}, \quad n < d$$

Potem sledi iz (4.11)

$$\left(\sum_{j=1}^r X_j A_i Y_j \right) \phi_n = B_i \phi_n \quad \text{za vsak } n < d$$

Ker je $\{\phi_n; n < d\}$ ortonormirana baza prostora H , je zadnja enakost ekvivalentna s (4.3). //

4.4. Opomba. Dokaz izreka 4.3 pove, da so operatorji Y_j izometrije s paroma pravokotnimi zalogami vrednosti, operatorje X_j pa lahko določimo tako, da velja

$$\|X_j\| \leq c_r \max\{\|B_j\|; j=1, \dots, r\} / \alpha_e(A_1, \dots, A_r), \quad c_r = 4(r(4^r-1)/3)^{1/2}$$

Ker te ocene ne bomo potrebovali, bomo opustili njeno podrobnejšo izpeljavo.

Izkaže se, da velja milejša oblika izreka 4.3 v vsaki kompleksni Banachovi algebri z enoto, ki vsebuje samo en maksimalni ideal. V tem delu ne bomo raziskovali kriterijev za rešljivost sistema enačb

$$(4.12) \quad \sum_{j=1}^m x_j a_i y_j = b_i, \quad i=1, \dots, r$$

v splošnih Banachovih algebrah; omenimo le problem, ki bi bil lahko predmet kakšne kasnejše raziskave.

4.5. Problem. Naj bo A kompleksna Banachova algebra z enoto in $a_1, \dots, a_r$ taki njeni elementi, da so za vsak maksimalen ideal $K \leq A$ odseki $a_i + K$ linearno neodvisni v algebri A/K . Ali potem pri poljubnih elementih $b_1, \dots, b_r$ algebre A obstaja tako naravno število m , da je sistem (4.12) rešljiv v algebri A ? Kakšnemu pogoju mora ustrezati algebra A , da bo odgovor pritrdilen?

Da je odgovor na gornje vprašanje pritrdilen v enostavnih Banachovih algebrah, pove že izrek 1.2. Korolar D 5 (v dodatku) pove, da je odgovor pritrdilen v vsaki Banachovi algebri z enim samim maksimalnim idealom - take algebre so na primer vsi von Neumannovi faktorji [54]. Odgovor pa je gotovo pritrdilen tudi v nekaterih algebrah, ki vsebujejo mnogo maksimalnih idealov. Tako je na primer problem trivialen za algebro zveznih kompleksnih funkcij $C(X)$ na kompaktnem Hausdorffovem prostoru X (in sploh za vsako komutativno algebro). Pokazati je mogoče, da ima problem 4.5 pozitivno rešitev tudi v algebri $C(X) \otimes \mathbb{C}^{n,n}$ vseh $n \times n$ zveznih matričnih funkcij na kompaktnem Hausdorffovem prostoru X .

Naslednji problem s tem v zvezi je, določiti pri danem r minimalni m , da je sistem (4.12) rešljiv. Izrek 4.3 pove, da je za algebro $B(H)$ minimalni m manjši ali enak r (če so operatorji A_i bistveno linearno neodvisni). V prihodnjem razdelku bomo obravnavali poseben primer, ko je $r=2$.

4.6. Opomba. Za poljuben $A \in B(H)$ je količina $\alpha_e(A, I)$ povezana z η -funkcijo Browna in Percy-a [13]. Po [3, str. 208] lahko $\eta(A)$ definiramo kot razdaljo elementa $\pi(A) \in C(H)$ od množice vseh skalarnih večkratnikov enote. Kot poseben primer neenakosti (5.10) iz naslednjega razdelka, imamo $\alpha_e(A, I) \leq \eta(A) \leq \alpha_e(A, I)(1 + 2\|\pi(A)\|)$.

5. Razdalja operatorja od eno-razsežnega podprostora

T. Ando je izpeljal naslednji izraz za razdaljo operatorja A od množice skalarnih operatorjev [3, str. 206]:

$$(5.1) \quad \text{dist.}(A, \mathcal{L}I) = \sup\{| \langle A\xi, \eta \rangle |; \xi, \eta \in H, \|\xi\| = \|\eta\| = 1, \xi \perp \eta\}$$

V tem razdelku bomo posplošili formulo (5.1) in s pomočjo te posplošitve izboljšali izrek 4.3 za primer dveh operatorjev. Najprej pa bomo posplošili dva Stampflijeva rezultata iz [52]; dokaza teh posplošitev sta (razen morda kake nepomembne poenostavitve) skoraj identična s Stampflijevimi dokazi njegovih rezultatov.

5.1. Definicija. Za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(H)$ definirajmo

$$W_A(B^*A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \exists (\xi_n) \subset H, \|\xi_n\| = 1, \lim \langle B^*A\xi_n, \xi_n \rangle = \lambda, \lim \|A\xi_n\| = \|A\|\}$$

V primeru $B=I$ nam ta definicija da Stampflijev maksimalni numerični zaklad operatorja A ([52], [33, str. 54]). Očitno je $W_A(B^*A)$ neprazna zaprta podmnožica zaprtja numeričnega zaklada operatorja B^*A .

5.2. LEMA. $W_A(B^*A)$ je konveksna množica.

Dokaz. Naj bo $a, b \in W_A(B^*A)$, $a \neq b$ in (ξ_n) , (η_n) taki zaporedji enotskih vektorjev v H , da je

$$(5.2) \quad \lim \langle B^*A\xi_n, \xi_n \rangle = a \quad \text{in} \quad \lim \langle B^*A\eta_n, \eta_n \rangle = b$$

ter

$$(5.3) \quad \lim \|A\xi_n\| = \|A\| = \lim \|A\eta_n\|$$

Naj bo c poljubno kompleksno število na daljici od a do b . Za vsak $n \in \mathbb{N}$ je klasični numerični zaklad kompresije operatorja B^*A na dvorazsežni podprostor, napet na vektorja ξ_n in η_n , konveksna množica (po Hausdorff-Toeplitzovem izreku, [30, str. 113]). Zato obstaja tako zaporedje vektorjev

$$\zeta_n = \alpha_n \xi_n + \beta_n \eta_n$$

da je

$$(5.4) \quad \|\zeta_n\| = 1$$

in

$$\lim \langle B^* A \zeta_n, \zeta_n \rangle = c$$

Torej zadošča pokazati, da je $\lim \|A \zeta_n\| = \|A\|$. Najprej opazimo, da iz (5.2) in iz $a \neq b$ sledi

$$(5.5) \quad |\langle \xi_n, \eta_n \rangle| \leq \theta < 1$$

kjer je θ neko pozitivno število. (Za dokaz, uporabimo identiteto $\|\xi - e^{i\phi} \eta\|^2 = 2(1 - |\langle \xi, \eta \rangle|)$, kjer je $\|\xi\| = \|\eta\| = 1$ in $\phi = \arg \langle \xi, \eta \rangle$. Če bi se števila $|\langle \xi_n, \eta_n \rangle|$ lahko poljubno približala številu 1, bi s pomočjo te identitete iz (5.2) sledilo $b=a$.) Iz (5.5) in (5.4) sledi, da sta zaporedji skalarjev α_n in β_n omejeni. (Po (5.4) imamo namreč $|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 + 2\operatorname{Re}(\alpha_n \bar{\beta}_n \langle \xi_n, \eta_n \rangle) = 1$, torej (po (5.5)) $|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 - 2|\alpha_n \beta_n| \theta \leq 1$. Zadnja neenakost da najprej $2|\alpha_n \beta_n| \leq 1/(1-\theta)$, nato še $|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 \leq 1/(1-\theta)$.) Iz (5.3) in iz omejenosti zaporedij (α_n) , (β_n) sledi, da gredo na desni strani enakosti

$$\begin{aligned} \|A \zeta_n\|^2 - \|A\|^2 &= \|A \zeta_n\|^2 - \|A\|^2 \|\zeta_n\|^2 \\ &= |\alpha_n|^2 (\|A \xi_n\|^2 - \|A\|^2) + |\beta_n|^2 (\|A \eta_n\|^2 - \|A\|^2) \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(\alpha_n \bar{\beta}_n \langle (A^* A - \|A\|^2) \xi_n, \eta_n \rangle) \end{aligned}$$

vsi členi, razen morda zadnji člen, proti 0. Da gre tudi zadnji člen proti 0, ko gre n proti neskončnosti pa vidimo iz ocene

$$\begin{aligned} \|(A^* A - \|A\|^2) \xi_n\|^2 &= \|A^* A \xi_n\|^2 - 2\|A\|^2 \|A \xi_n\|^2 + \|A\|^4 \\ &\leq \|A\|^2 \|A \xi_n\|^2 - 2\|A\|^2 \|A \xi_n\|^2 + \|A\|^4 \end{aligned}$$

v kateri gre desna stran proti 0 po (5.3). Tako vidimo, da je res $\lim \|A \zeta_n\| = \|A\|$. //

5.3. LEMA. Neenakost

$$(5.6) \quad \|A + \lambda B\| \geq \|A\|$$

velja za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ natanko tedaj, ko je $0 \in W_A(B^*A)$.

Dokaz. Naj bo $0 \in W_A(B^*A)$, (ξ_n) pa tako zaporedje enotskih vektorjev, da je $\lim \langle B^*A\xi_n, \xi_n \rangle = 0$ in $\lim \|A\xi_n\| = \|A\|$. Potem imamo pri vsakem $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\|A + \lambda B\|^2 \geq \limsup_n \|(A + \lambda B)\xi_n\|^2 \geq \limsup_n (\|A\xi_n\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda \langle B^*A\xi_n, \xi_n \rangle)) = \|A\|^2$$

Predpostavimo sedaj, da velja (5.6) in pokažimo, da je potem $0 \in W_A(B^*A)$. Pokazali bomo, da nasprotna možnost, $0 \notin W_A(B^*A)$, pelje v protislovje. Če pomnožimo operator B s poljubnim skalarjem τ z absolutno vrednostjo 1, se relacija (5.6) ohrani, množica $W_A(B^*A)$ pa se pomnoži s $\bar{\tau}$. Recimo, da $0 \notin W_A(B^*A)$. Potem smemo privzeti, da je za kak $\delta > 0$

$$(5.7) \quad \operatorname{Re} W_A(B^*A) \leq -\delta$$

saj je $W_A(B^*A)$ kompaktna in konveksna množica (lema 5.2). Iz (5.6) sledi, da za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ obstaja tak vektor $\xi_\lambda \in H$, $\|\xi_\lambda\| = 1$, da je

$$(5.8) \quad \|(A + \lambda B)\xi_\lambda\|^2 \geq \|A\|^2 - |\lambda|^2$$

Iz (5.8) sledi $2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle B^*A\xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle) \geq -|\lambda|^2(\|B\|^2 + 1)$. Torej obstaja tako proti 0 konvergirajoče zaporedje (λ_n) , da konvergira zaporedje $(\operatorname{Re} \langle B^*A\xi_{\lambda_n}, \xi_{\lambda_n} \rangle)$ proti nekemu nenegativnemu številu. Toda, ker konvergira zaporedje $(\|A\xi_{\lambda_n}\|)$ proti $\|A\|$ (po (5.8)), je to v protislovju z (5.7). //

Pri poljubnih $A, B \in \mathcal{B}(H)$ označimo z $\delta_B(A)$ razdaljo operatorja A od množice skalarnih mnogokratnikov operatorja B . Spomnimo se, da za dan Hilbertov prostor H označuje F_1 družino vseh 1-razsežnih podprostorov.

5.4. IZREK. Če je operator B navzdol omejen, potem je

$$(5.9) \quad \delta_B(A) = \sup\{\delta_{B|L}(A|L); L \in F_1\}$$

Dokaz. Naj bo $\theta > 0$ tako število, da je $\|B\omega\| \geq \theta \|\omega\|$ za vsak $\omega \in H$. Ker je $\|A + \lambda B\|$ veliko število za velike $|\lambda|$, obstaja (zaradi kompaktnosti zaprtih krogov v $\mathbb{C}$) tak $\mu \in \mathbb{C}$, da je $\|A + \mu B\| = \inf\{\|A + \lambda B\|; \lambda \in \mathbb{C}\} = \delta_B(A)$. Ker je očitno $\delta_B(A + \mu B) = \delta_B(A)$ in $\delta_{B|L}((A + \mu B)|L) = \delta_{B|L}(A|L)$ za vsak podprostor $L \subseteq H$, smemo vzeti, da je $\mu = 0$. (V nasprotnem primeru nadomestimo operator A z operatorjem $A + \mu B$.) Potem je $0 \in W_A(B^*A)$ (po lemi (5.3)). Torej obstaja tako zaporedje enotskih vektorjev $\omega_n \in H$, da je $\lim \|A\omega_n\| = \|A\|$ in $\lim \langle B^*A\omega_n, \omega_n \rangle = 0$. Naj bo $L_n = \mathbb{C}\omega_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in ocenimo $\delta_{B|L_n}(A|L_n)$ pri velikih n . Vzemimo poljuben $\lambda \in \mathbb{C}$. Če je $|\lambda| \geq 2\|A\|/\theta$, potem n je

$$\|(A + \lambda B)|L_n\| = \|(A + \lambda B)\omega_n\| \geq |\lambda| \|B\omega_n\| - \|A\omega_n\| \geq \frac{2\|A\|}{\theta} - \|A\| = \|A\|$$

za vsak n . Po drugi strani pa velja pri poljubnem $\varepsilon > 0$ za vsak dovolj velik n neenakost

$$\|(A + \lambda B)|L_n\|^2 = \|(A + \lambda B)\omega_n\|^2 \geq \|A\omega_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\lambda} \langle B^*A\omega_n, \omega_n \rangle) \geq \|A\|^2 - \varepsilon$$

enakomerno za vse $|\lambda| \leq 2\|A\|/\theta$. Torej je $\|(A + \lambda B)|L_n\|^2 \geq \|A\|^2 - \varepsilon$ za vsak λ , če je n dovolj velik. Ker je tukaj ε poljubno pozitivno število, sledi od tod, da desna stran v relaciji (5.9) ni manjša od leve. Da tudi leva stran ni manjša od desne, je skoraj očitno. //

Desno stran enakosti (5.9) je mogoče izraziti tudi nekoliko drugače. Če je ξ enotski vektor v 1-razsežnem podprostoru $L \subseteq H$ in ζ ortogonalna projekcija vektorja $A\xi$ na podprostor $\mathbb{C}B\xi$, potem je

$$\begin{aligned} \delta_{B|L}(A|L) &= \inf\{\|(A + \lambda B)\xi\|; \lambda \in \mathbb{C}\} = \|A\xi - \zeta\| \\ &= \sup\{|\langle A\xi - \zeta, \eta \rangle|; \eta \in H, \|\eta\| = 1, \eta \perp B\xi\} \\ &= \sup\{|\langle A\xi, \eta \rangle|; \eta \in H, \|\eta\| = 1, \eta \perp B\xi\} \end{aligned}$$

Po 5.9 je potem $\delta_B(A) = \sup\{\langle A\xi, \eta \rangle; \xi, \eta \in H, \|\xi\| = 1 = \|\eta\|, \eta \perp B\xi\}$. Za $B = I$ smo tako dokazali enakost (5.1).

V dokazu naslednjega izreka bomo potrebovali še neko elementarno

neenakost. Za poljubna neničelna vektorja ω_1, ω_2 v danem normiranem prostoru naj bo

$$\alpha(\omega_1, \omega_2) = \min\{\|\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\|; (\lambda_1, \lambda_2) \in S_2\}$$

in

$$\delta_{\omega_2}(\omega_1) = \min\{\|\omega_1 + \lambda\omega_2\|; \lambda \in \mathbb{C}\}$$

Prva od naslednjih dveh neenakosti

$$(5.10) \quad \alpha(\omega_1, \omega_2) \leq \delta_{\omega_2}(\omega_1) \leq (1 + 2 \frac{\|\omega_1\|}{\|\omega_2\|}) \alpha(\omega_1, \omega_2)$$

je skoraj očitna in jo ne bomo dokazovali. Da bi dokazali drugo neenakost, pišimo $\theta = (1 + 2\|\omega_1\|/\|\omega_2\|)^{-1}$, vzemimo poljuben par $(\lambda_1, \lambda_2) \in S_2$ in pokažimo, da je $\|\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\| \geq \theta \delta_{\omega_2}(\omega_1)$. Če je $|\lambda_1| \geq \theta$, potem imamo $\|\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\| = |\lambda_1| \|\omega_1 + (\lambda_2/\lambda_1)\omega_2\| \geq \theta \delta_{\omega_2}(\omega_1)$. Če pa je $|\lambda_1| < \theta$, potem imamo

$$\begin{aligned} \|\lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2\| &\geq |\lambda_2| \|\omega_2\| - |\lambda_1| \|\omega_1\| = (1 - |\lambda_1|^2)^{1/2} \|\omega_2\| - |\lambda_1| \|\omega_1\| \\ &\geq (1 - \theta^2)^{1/2} \|\omega_2\| - \theta \|\omega_1\| \\ &\geq \theta \|\omega_1\| \quad (\text{To sledi po kratkem računu iz izraza za } \theta) \\ &\geq \theta \delta_{\omega_2}(\omega_1) \end{aligned}$$

Za poseben primer dveh operatorjev lahko sedaj izboljšamo izrek 4.3.

5.5. IZREK. Naj bodo A_i, B_i , $i = 1, 2$, omejeni operatorji na Hilbertovem prostoru H , pri čemer sta A_1 in A_2 bistveno linearno neodvisna in A_2 navzdol omejen operator. Potem obstajata taka $X, Y \in B(H)$, da je

$$XA_iY = B_i, \quad i=1, 2$$

Dokaz. Označimo z $\delta_{eA_2}(A_1)$ razdaljo elementa $\pi(A_1)$ od množice $\mathcal{L}\pi(A_2)$, ki je podprostor v $\mathcal{C}(H)$. Naj bo $\theta > 0$ tako število, da je $\|A_2\omega\| \geq \theta \|\omega\|$ za vsak $\omega \in H$. Velja enakost

$$\delta_{eA_2}(A_1) = \inf\{\delta_{A_{2L}}(A_{1L}); L \leq H, \dim L^\perp < \dim H\}$$

kjer označuje A_{1L} kompresijo operatorja A_1 na podprostor L . Dokaz te enakosti pa je tako podoben dokazu trditve 4.2, da ga bomo na tem mestu opustili. Za vsak podprostor $L \leq H$, ki zadošča pogoju $\dim L^\perp < \dim H$, obstaja po izreku 5.4 tak 1-razsežen podprostor $M \leq L$, da je

$$\delta_{A_2|_M}(A_1|_M) \geq \frac{1}{2} \delta_{eA_2}(A_1)$$

torej tembolj

$$\delta_{A_2|_M}(A_1|_M) \geq \frac{1}{2} \delta_{eA_2}(A_1)$$

Uporabimo sedaj drugo neenakost v (5.10) na vektorjih $\omega_1 = A_1|_M$ in $\omega_2 = A_2|_M$; dobimo

$$\begin{aligned} \alpha(A_1|_M, A_2|_M) &\geq \left(1 + 2 \frac{\|A_1|_M\|}{\|A_2|_M\|}\right)^{-1} \delta_{A_2|_M}(A_1|_M) \geq \frac{1}{2} \left(1 + 2 \frac{\|A_1\|}{\theta}\right)^{-1} \delta_{eA_2}(A_1) \\ &= \tau \quad (\text{po definiciji}) \end{aligned}$$

Tako smo ugotovili naslednje: v vsakem podprostoru $L \leq H$, kjer je $\dim L^\perp < \dim H$, obstaja tak 1-razsežen podprostor $M \leq L$, da je $\alpha(A_1|_M, A_2|_M) \geq \tau$, kjer je τ pozitivno število. Sedaj lahko na enak način kot v dokazu izreka 4.3 pokažemo eksistenco družine $\{M_n; n < \dim H\}$ 1-razsežnih paroma ortogonalnih podprostorov, ki zadoščajo pogojem (4.5)-(4.7) (kjer je $r=1$). Od tod naprej se dokaz ujema z dokazom izreka 4.3. Ker je sedaj $r=1$, dobimo en sam operator X in en sam operator Y . //

Ni mi znano, ali je pogoj, da mora biti operator A_2 navzdol omejen, potreben za veljavnost izreka 5.5.

6. Numerična razdalja operatorja od množice skalarjev

Za poljuben $A \in B(H)$ definirajmo numerično razdaljo od množice skalar-
nih operatorjev kot

$$\rho(A) = \min\{w(A + \lambda I); \lambda \in \mathbb{C}\}$$

kjer označuje w numerični radij operatorjev [10].

Geometrijsko, je $\rho(A)$ polmer najmanjšega zaprtega kroga, ki še vsebuje numerični zaklad operatorja A . Izpeljali bomo formulo za $\rho(A)$, ki bo analogna formuli za normno razdaljo operatorja od množice skalar-nih operatorjev. To bo formula 6.1.

6.1. TRDITEV. Za poljuben $A \in B(H)$ velja zveza

$$(6.1) \quad \rho(A) = \sup\{\rho(A_L); L \in F_3\}$$

kjer označuje A_L kompresijo operatorja A na podprostor L in F_3 družino vseh 3-razsežnih podprostorov Hilbertovega prostora H .

Preden začnemo dokazovati to trditev, se prepričajmo, da na desni strani v (6.1) ne bi zadoščali dvo-razsežni podprostori. Očitno eno-razsežni podprostori ne zadoščajo, kajti za vsak eno-razsežen podprostor L je kompresija A_L skalaren operator, torej $\rho(A_L)=0$.

6.2. Primer. Naj bo A normalen operator na $\mathbb{C}^3$, podan z diagonalno matriko, ki ima na diagonalni vse tri kubične korene enote. Numerični zaklad operatorja A je enakostranični trikotnik, katerega oglišča so kubični koreni enote. Polmer najmanjšega kroga, ki vsebuje numerični zaklad $W(A)$ je torej 1; zato je $\rho(A)=1$.

Oglejmo si sedaj numerični zaklad kompresije operatorja A na poljub-nen dvo-razsežen podprostor L prostora $\mathbb{C}^3$. Numerični zaklad operatorja na dvo-razsežnem Hilbertovem prostoru je lahko samo elipsa (skupaj z notranjim območjem), če se dogovorimo, da so krogi, daljice in točke

posebni primeri elips. Ker je $W(A_L) \subseteq W(A)$, je torej $W(A_L)$ elipsa, vsebovana v enakostraničnem trikotniku. Pol-os take elipse ne more biti daljša od polovice stranice trikotnika, polmer najmanjšega kroga, ki vsebuje elipso, pa je enak pol-osi elipse. Od tod sledi, da je $\rho(A_L) \leq \sqrt{3}/2$ za vsak dvo-razsežen podprostor $L \in \mathcal{L}^3$.

Pri dokazovanju trditve 6.1 bomo potrebovali lemo, ki je analogna lemi 5.3.

6.3. LEMA. Naj bo $A \in B(H)$, $A \neq 0$ in

$$(6.2) \quad w(A + \lambda I) \geq w(A)$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$. Potem obstajajo take točke $\zeta_i \in C := \{\zeta \in \overline{W(A)}; |\zeta| = w(A)\}$, $i=1,2,3$, da za vsak $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ velja vsaj ena od neenakosti

$$(6.3) \quad |\arg(\lambda) - \arg(\zeta_i)| \leq \frac{\pi}{2}, \quad i=1,2,3$$

Pri tem dopuščamo možnost, da se dve od točk ζ_i zlijeta v eno; tedaj imamo dve diametralno nasprotni točki. (Argument kompleksnih števil pa naj zavzema vrednosti med 0 in 2π .)

Dokaz. Recimo, da take točke ζ_i ne bi obstajale. Potem bi obstajala taka premica skozi koordinatno izhodišče, da bi celotna množica C ležala na enem njenem bregu. Če pomnožimo operator A s kako konstanto z absolutno vrednostjo 1, se neenakost (6.2) ohrani, zato smemo privzeti, da je omenjena premica kar ordinatna os. Ker je C kompaktna množica, obstaja tako pozitivno število θ , da je

$$(6.4) \quad \operatorname{Re} \zeta > \theta \quad \text{za vsak } \zeta \in C$$

Ker je kompaktna množica $\{\zeta \in \overline{W(A)}; \operatorname{Re} \zeta \leq \theta\}$ vsebovana v notranjosti kroga $|\lambda| < w(A)$, je

$$(6.5) \quad M := \max\{|\zeta|; \zeta \in \overline{W(A)}, \operatorname{Re} \zeta \leq \theta\} < w(A)$$

Naj bo sedaj λ kako tako majhno pozitivno število, da sta izpolnjena pogoja $M_1 := (w(A)^2 - 2\theta\lambda + \lambda^2)^{1/2} < w(A)$ in $M_2 := (M^2 + 2\lambda w(A) + \lambda^2)^{1/2} < w(A)$. (Drugemu pogoju je mogoče zadostiti zaradi (6.5).) Potem velja za vsak enotski vektor $\omega \in H$ neenakost

$$(6.6) \quad | \langle (A - \lambda I) \omega, \omega \rangle | = (| \langle A \omega, \omega \rangle |^2 - 2\lambda \operatorname{Re} \langle A \omega, \omega \rangle + \lambda^2)^{1/2} \leq M_3$$

kjer je $M_3 = \max \{M_1, M_2\}$. (Če je namreč $\operatorname{Re} \langle A \omega, \omega \rangle \leq \theta$, potem lahko desno stran v enakosti (6.6) omejimo navzgor z M_2 (po (6.5)), v nasprotnem primeru pa z M_1 .) Iz (6.6) sledi $w(A - \lambda I) < w(A)$ za tako izbrani λ , toda to nasprotuje privzetku (6.2). //

Dokaz trditve 6.1. Brez škode smemo vzeti, da je izpolnjen pogoj (6.2) (sicer nadomestimo A z operatorjem $A + \lambda I$ za primeren $\lambda \in \mathbb{C}$). Privzeti smemo, da je $A \neq 0$, sicer je dokaz trivialen. Po lemi 6.3 obstajajo tedaj take točke $\zeta_i \in \overline{w(A)}$, $|\zeta_i| = w(A)$, za $i=1,2,3$, da za vsak $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ velja vsaj ena od neenakosti (6.3). Naj bodo (ω_{in}) , $i=1,2,3$, taka zaporedja enotskih vektorjev v H , da je

$$(6.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A \omega_{in}, \omega_{in} \rangle = \zeta_i, \quad i=1,2,3$$

Za vsak n naj bo L_n 3-razsežen podprostor v H , ki vsebuje vektorje ω_{1n}, ω_{2n} in ω_{3n} . Naj bosta ε in θ majhni pozitivni števili (taki, da velja $\varepsilon < w(A)$ in $(w(A) - \varepsilon/2)(1 - 8\sin\theta)^{1/2} \geq w(A) - \varepsilon$). Po (6.7) in (6.3) obstaja tak (dovolj velik) n , da je

$$| \langle A \omega_{in}, \omega_{in} \rangle | \geq w(A) - \frac{\varepsilon}{2}$$

in da za vsak $\lambda \neq 0$ velja vsaj ena od neenakosti

$$(6.8) \quad | \arg(\lambda) - \arg(\langle A \omega_{in}, \omega_{in} \rangle) | \leq \frac{\pi}{2} + \theta, \quad i=1,2,3$$

če pri danem $\lambda \neq 0$, $|\lambda| \leq 2w(A)$, izberemo i tako, da velja (6.8), potem preprosto račun pove, da je $| \langle (A + \lambda I) \omega_{in}, \omega_{in} \rangle | \geq w(A) - \varepsilon$. Ta ocena očitno velja tudi, če je $|\lambda| \geq 2w(A)$ ali če je $\lambda = 0$. Ker podprostor L_n vsebuje vektorje ω_{in} , $i=1,2,3$, sledi $w((A + \lambda I)|_{L_n}) \geq w(A) - \varepsilon$ za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, torej $\rho(A|_{L_n}) \geq w(A) - \varepsilon$. Ko pošljemo ε proti 0, vidimo, da desna stran v (6.1) ni manjša od leve. Da leva stran ni manjša od desne, je očitno. //

II. POSPLOŠENA ODVAJANJA IN TENZORSKI PRODUKTI

Uvod

V prejšnjem poglavju smo obravnavali splošne elementarne operatorje, v tem poglavju pa se bomo omejili na posebne vrste elementarnih operatorjev: posplošena odvajanja in operatorje oblike $X \rightarrow AXB$. Te operatorje bomo opazovali na ireducibilnih C^* -podalgebrah algebre $B(H)$ in na simetričnih normiranih idealih (v Schattenovem smislu) algebre $B(H)$.

Ideal J algebre $B(H)$ imenujemo simetrični normiran ideal, če obstaja kaka norma na J , za katero je J Banachov prostor, norma pa ima še naslednji lastnosti:

- (i) $\|A\| = \|A^*\|$ za vsak operator ranga 1. ($\|\cdot\|$ je običajna norma);
- (ii) $\|AX\| \leq \|X\| \|A\|$ za vsak $A \in J$ in poljubna $X, Y \in B(H)$.

V zvezi s točko (i) naj pripomnimo, da vsebuje vsak ideal algebre $B(H)$ vse operatorje končnega ranga [15]. Vsak ideal v $B(H)$ je tudi sebi-adjungiran: če je $T \in J$, potem je $T^* \in J$. Če je J simetrični normiran ideal z normo $\|\cdot\|$, potem velja $\|T^*\| = \|T\|$ za vsak $T \in J$. Zelo dostopno razlago normiranih idealov v $B(H)$, kjer so dokazana vsa pravkar omenjena dejstva, lahko najdemo v [48].

Posebni primeri simetričnih normiranih idealov so von Neumann-Schattenovi razredi $C^p(H)$ za $1 \leq p < \infty$, ki jih bomo sedaj definirali. Za poljuben kompakten operator T naj bo (λ_n) zaporedje vseh (pozitivnih) lastnih vrednosti operatorja $|T| (= \sqrt{T^*T})$ in

$$\|T\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^p \right)^{1/p}$$

Po definiciji, je $C^p(H)$ množica vseh tistih kompaktnih operatorjev na prostoru H , za katere je $\|T\|_p < \infty$. Da se dokazati, da je $\|\cdot\|_p$ norma in $C^p(H)$ simetrični normiran ideal za to normo (glejte [44]).

Ideal $C^1(H)$ imenujemo tudi razred operatorjev s sledjo; za vsak $T \in C^1(H)$ lahko namreč definiramo sled s predpisom

$$\tau(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle T\omega_n, \omega_n \rangle$$

kjer je $\{\omega_n; n=1,2,\dots\}$ poljubna ortonormirana baza prostora H . (če H ni separabilen prostor, je v ustrezni vsoti še vedno samo števno od 0 različnih členov.)

Ideal $C^2(H)$ imenujemo tudi Hilbert-Schmidtov razred, njegove elemente pa Hilbert-Schmidtovi operatorji. $C^2(H)$ je za normo $\|\cdot\|_2$ celo Hilbertov prostor; skalarni produkt, ki porodi normo $\|\cdot\|_2$, je definiran z

$$\langle T, S \rangle = \tau(S^*T)$$

(Dokazati je namreč mogoče, da je produkt poljubnih dveh Hilbert-Schmidtovih operatorjev element ideala $C^1(H)$, tako da obstaja sled τ operatorja S^*T .)

Ker je $C^2(H)$ Hilbertov prostor, ni presenetljivo, da bomo lahko še največ povedali prav o elementarnih operatorjih na $C^2(H)$. Včasih je ugodno te operatorje izraziti s tenzorskimi produkti, kot bomo sedaj opisali.

Naj bo $\bar{H}$ prostoru H konjugirani Hilbertov prostor. ($\bar{H}$ je ista množica kot H , seštevanje vektorjev je enako kot v H , množenje s skalarjem je definirano z $\lambda \cdot \omega = \bar{\lambda} \omega$ ($\lambda \in \mathbb{C}$, $\omega \in H$), skalarni produkt pa z $[\xi, \eta] = \langle \eta, \xi \rangle$.) Vsak linearen operator A na prostoru H inducira linearen operator $\bar{A}$ na prostoru $\bar{H}$, $\bar{A}\omega = A\omega$ za vsak $\omega \in H$. Obstaja izometrični izomorfizem Hilbertovega prostora $H \otimes \bar{H}$ na Hilbertov prostor $C^2(H)$; inducira ga predpis

$$\xi \otimes \eta \mapsto S_{\xi\eta} \in C^2(H), \quad S_{\xi\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \eta \rangle \xi$$

Kot pokaže preprost račun, posreduje ta izomorfizem tudi unitarno ekvivalenco med operatorjema $A \otimes \bar{B}^*$ in $X \mapsto AXB$ na prostorih $H \otimes \bar{H}$ in $C^2(H)$, za poljubna $A, B \in \mathcal{B}(H)$. (Za dokaze glejte [47, str.110-113] ali [14].) Podobno odgovarja zožitvi posplošenega odvajanja $X \mapsto AX - XB$ na $C^2(H)$ na prostoru $H \otimes H$ operator $A \otimes I - I \otimes \bar{B}^*$. Tenzorske produkte bomo uporabljali v devetem in desetem razdelku, povsod drugod pa bomo izreke in dokaze oblikovali za elementarne operatorje na prostoru $C^2(H)$.

Da bi bilo poglavje kolikor toliko zaključena celota, bomo v sedmem

razdelku predstavili Stampfli-jev izrek o normi posplošenih odvajanj, v osmem razdelku pa Shaw-ov izrek o numeričnem zakladu posplošenih odvajanj. Pokazali bomo, da velja Shaw-ov rezultat tudi za posplošena odvajanja na ireducibilnih C^* -podalgebrah v $B(H)$. V devetem razdelku se bomo ukvarjali z bistvenim numeričnim zakladom posplošenih odvajanj na Hilbert-Schmidtovem razredu; nekaj pa bomo lahko povedali tudi o bistvenem numeričnem zakladu posplošenih odvajanj na poljubnih simetričnih normiranih idealih. Deseti razdelek je skoraj v celoti posvečen vprašanju, kakšnemu pogoju mora zadoščati omejen operator A , da bo za vsak omejen operator B algebraični numerični zaklad operatorja $A \otimes B$ enak konveksni ogrinjači produkta numeričnih zakladov operatorjev A in B . Zadnja dva razdelka pa vsebujeta karakterizacijo hiponormalnih in subnormalnih operatorjev oblike $A \otimes I - I \otimes A$ in $A \otimes B$.

7. Norme posplošenih odvajanj

Že v uvodu smo omenili, da je spekter posplošenega odvajanja neodvisen od tega, ali ga opazujemo kot operator na algebri $B(H)$ ali pa kot operator na kakem simetričnem normiranem idealu. V nasprotju s tem pa je norma posplošenega odvajanja odvisna od tega, na katerem prostoru ga opazujemo.

Naj bosta ϕ, ψ ortogonalna enotska vektorja v Hilbertovem prostoru H ter U ortogonalni projektor na linearno lupino vektorjev ϕ in ψ . Za vsak normiran ideal J z normo $\|\cdot\|_J$ označimo

$$\theta_J = \|U\|_J$$

(Količina θ_J je neodvisna od izbora vektorjev ϕ, ψ , ker je norma $\|\cdot\|_J$ invariantna za unitarno ekvivalenco. Invariantnost norme $\|\cdot\|_J$ je dokazana v [48], sledi pa zelo hitro iz točke (ii) v uvodu k temu poglavju.)

Za poljubna $A, B \in B(H)$ definirajmo

$$\delta(A, B) = \min\{\|A + \lambda I\| + \|B + \lambda I\|; \lambda \in \mathbb{C}\}$$

7.1. IZREK. (i) (Stampfli [52]) Naj bo A ireducibilna C^* -podalgebra algebre $B(H)$, $A, B \in A$ in D_A zožitev posplošenega odvajanja D_{AB} na A . Potem je

$$(7.1) \quad \|D_A\| = \delta(A, B)$$

(ii) (Fialkow [21]) Pri poljubnih $A, B \in B(H)$ velja za normo zožitve D_J posplošenega odvajanja na poljuben simetričen normiran ideal J ocena

$$(7.2) \quad \frac{1}{\theta_J} \delta(A, B) \leq \|D_J\| \leq \delta(A, B)$$

Fialkov je v [21] dokazal oceno (7.2) le za primer $B=A$. Pri dokazovanju izreka 7.1 bomo v osnovni ideji sledili Stampfliju.

V razdelku 5 smo že omenili maksimalni numerični zaklad $W_A(A)$ (definicija 5.1). Tukaj bomo potrebovali še normalizirani maksimalni numerični zaklad, $W_n(A)$, ki je (po definiciji) enak maksimalnemu numeričnemu zakladu

operatorja $A/\|A\|$. Po lemi 5.2 je $W_n(A)$ vedno konveksna množica.

7.2. LEMA. Bodita $A, B \in \mathcal{B}(H)$ neničelna operatorja. Če velja neenakost

$$(7.3) \quad \|A + \lambda I\| + \|B + \lambda I\| \geq \|A\| + \|B\|$$

za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$, potem je $W_n(A) \cap W_n(-B) \neq \emptyset$.

Velja tudi obratna trditev, vendar jo ne bomo potrebovali. Dokaz leme 7.2 je v osnovni ideji podoben dokazu leme 5.3.

Dokaz leme 7.2. Predpostavimo nasprotno, da bi bilo $W_n(A) \cap W_n(-B) = \emptyset$. Ker sta množici $W_n(A)$ in $W_n(B)$ konveksni in kompaktni, smemo privzeti (ko pomnožimo A in B s primerno konstanto z absolutno vrednostjo 1), da je $\operatorname{Re} W_n(A) \leq M - \epsilon$ in $\operatorname{Re} W_n(-B) \geq M$, kjer sta $M \in \mathbb{R}$ in $\epsilon > 0$ primerni konstanti. Potem imamo

$$(7.4) \quad \operatorname{Re}(W_n(A) + W_n(B)) \leq -\epsilon$$

Po drugi strani pa obstajata zaradi (7.3) za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ taka enotska vektorja $\xi_\lambda, \eta_\lambda \in H$, da je

$$(7.5) \quad \|(A + \lambda I)\xi_\lambda\| + \|(B + \lambda I)\eta_\lambda\| \geq \|A\| + \|B\| - |\lambda|^2$$

Ko gre λ proti 0, mora zaradi (7.5) $\|A\xi_\lambda\|$ konvergirati proti $\|A\|$, $\|B\eta_\lambda\|$ pa proti $\|B\|$. Za dovolj majhne pozitivne λ lahko prvi člen na levi strani relacije (7.5) ocenimo takole:

$$\begin{aligned} \|(A + \lambda I)\xi_\lambda\| &\leq \|A\| \left(1 + 2\lambda \operatorname{Re} \frac{\langle A\xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle}{\|A\|^2} + \frac{|\lambda|^2}{\|A\|^2} \right)^{1/2} \\ &= \|A\| + \lambda \operatorname{Re} \frac{\langle A\xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle}{\|A\|} + o(\lambda^2) \end{aligned}$$

Pri tem je $o(\lambda^2)$ taka funkcija argumenta λ^2 , da ostane izraz $o(\lambda^2)/\lambda^2$ omejen, ko gre λ proti 0 po pozitivnih vrednostih. Če ocenimo na enak način še drugi člen na levi strani relacije (7.5), potem dobimo iz (7.5)

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\langle A\xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle}{\|A\|} + \frac{\langle B\eta_\lambda, \eta_\lambda \rangle}{\|B\|}\right) \geq \phi_1(\lambda)$$

kjer je $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \phi_1(\lambda) = 0$. Toda, ko gre λ proti 0, je zadnja neenakost v protislovju z neenakostjo (7.4). //

V dokazu izreka 7.1 bomo potrebovali še tranzitivnostni izrek za ireducibilne C^* -podalgebre v $B(H)$. (C^* -podalgebra A v $B(H)$ je ireducibilna, če ne obstaja netrivialen skupen invarianten podprostor za vse operatorje iz A .)

Izrek o tranzitivnosti. Naj bo A ireducibilna C^* -podalgebra v $B(H)$ in $P \in B(H)$ poljuben projektor končnega ranga.

(i) Za vsak $B \in B(H)$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $A \in A$, da je $AP = BP$ in $\|A\| \leq (1 + \varepsilon)\|BP\|$.

(ii) Če je $I \in A$, potem za vsak unitaren operator $U \in B(H)$ obstaja tak unitaren operator $V \in A$, da je $UP = VP$.

Navedli smo samo tisti del tranzitivnostnega izreka, ki ga bomo potrebovali. Točko (i) bomo uporabili že v naslednjem dokazu, točko (ii) pa v prihodnjem razdelku. Popolna formulacija in dokaz tranzitivnostnega izreka sta v [54, str. 92]. Točka (i) pove med drugim, da lahko vsako končno linearno neodvisno množico vektorjev iz H operatorji iz A preslikajo v poljubno množico z isto močjo.

Dokaz izreka 7.1. Če je eden od operatorjev A, B skalarni večkratnik identičnega operatorja, se odvajanje reducira na levo ali pa desno množenje in tedaj je dokaz tako enostaven, da ga bomo opustili. Vzemimo torej, da nobeden od operatorjev A, B ni skalarni večkratnik identičnega operatorja.

(i) Ker je za vsak $\lambda \in \mathbb{C}$ in vsak $X \in A$

$$D_A X = (A + \lambda I)X - X(B + \lambda I)$$

je neenakost $\|D_A\| \leq \delta(A, B)$ očitna. V dokazu nasprotne neenakosti smemo vzeti, da zavzame funkcija $\|A + \lambda I\| + \|B + \lambda I\|$ minimum v točki $\lambda = 0$. (V nasprotnem primeru nadomestimo operatorja A in B z $A + \lambda_0 I$ in $B + \lambda_0 I$, kjer je λ_0

točka, v kateri je minimum dosežen.) Potem je po lemi 7.2 množica $W_n(A) \cap W_n(-B)$ neprazna. Naj bo $\mu \in W_n(A) \cap W_n(-B)$. Po definiciji normaliziranega maksimalnega numeričnega zaklada obstajata taki zaporedji enotskih vektorjev $\xi_n, \eta_n \in H$, da velja

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\xi_n\| &= \|A\|, & \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu\xi_n - \frac{A}{\|A\|}\xi_n, \xi_n \rangle &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|B\eta_n\| &= \|B\|, & \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mu\eta_n + \frac{B}{\|B\|}\eta_n, \eta_n \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Iz teh enakosti sledi še

$$(7.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu\eta_n + \frac{B}{\|B\|}\eta_n\|^2 = 1 - |\mu|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu\xi_n - \frac{A}{\|A\|}\xi_n\|^2$$

Sedaj ločimo dve možnosti. Če je $|\mu| \neq 1$, potem sta vektorja

$$\eta_n \text{ in } \eta'_n = \frac{\eta_n + \frac{B}{\|B\|}\eta_n}{(1 - |\mu|^2)^{1/2}}$$

pri velikem n skoraj ortonormirana, isto pa velja tudi za vektorja

$$\xi_n \text{ in } \xi'_n = \frac{\xi_n - \frac{A}{\|A\|}\xi_n}{(1 - |\mu|^2)^{1/2}}$$

Zato lahko tedaj definiramo linearne operatorje $U_n \in B(H)$ s predpisom

$$U_n \eta_n = \xi_n, \quad U_n \eta'_n = \xi'_n, \quad U_n | \{\eta_n, \eta'_n\}^\perp = 0$$

Potem je očitno $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\| = 1$ in $U_n B \eta_n = -\frac{\|B\|}{\|A\|} A \xi_n$. Po tranzitivnostnem izreku za ireducibilne C^* -algebre obstajajo taki operatorji $V_n \in A$, da je

$$(7.7) \quad V_n \eta_n = \xi_n, \quad V_n B \eta_n = -\frac{\|B\|}{\|A\|} A \xi_n$$

in

$$(7.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n\| = 1$$

Sedaj imamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|D_A(V_n)\eta_n\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|AV_n\eta_n - V_n B \eta_n\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\xi_n + \frac{\|B\|}{\|A\|} A \xi_n\| \quad (\text{po (7.7)}) \end{aligned}$$

$$= \|A\| + \|B\| \quad (\text{ker je } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\xi_n\| = \|A\|)$$

Ker imajo vektorji η_n normo 1 in ker velja (7.8), sledi od tod, da je $\|D_A\| \geq \|A\| + \|B\| \geq \delta(A, B)$.

Obravnavati moramo še primer $|\mu|=1$. Tedaj definiramo linearne operatorje $U_n \in B(H)$ s predpisom $U_n \eta_n = \xi_n$, $U_n \perp \{\eta_n\}^\perp = 0$. Po tranzitivnostnem izreku obstajajo taki operatorji $V_n \in A$, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n\| = 1$ in

$$(7.9) \quad V_n \eta_n = \xi_n$$

Ker je zaradi (7.6) sedaj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B\eta_n + \mu \|B\| \eta_n\| = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\xi_n - \mu \|A\| \xi_n\| \quad (\text{saj je } |\mu|=1)$$

sledi iz (7.9), da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n B\eta_n + \frac{\|B\|}{\|A\|} A\xi_n\| = 0$$

Enak račun kot zgoraj sedaj pokaže, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_A(V_n)\eta_n\| = \|A\| + \|B\|$.

(ii) Neenakost $\|D_J\| \leq \delta(A, B)$ dokažemo tako kot v točki (i). Za dokaz neenakosti $\|D_J\| \geq \delta(A, B)/\theta_J$ pa je treba najprej opaziti, da pripadajo zgoraj definirani operatorji U_n idealu J (ker imajo končen rang) in da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n\| = \theta_J$, ko je $|\mu| \neq 1$ ter $\|U_n\| = 1$, ko je $|\mu|=1$. Z uporabo ocene $\|X\| \geq \|X\|$, $X \in J$ (glejte [48]), imamo $\|D_J(U_n)\| \geq \|D_J(U_n)\eta_n\|$, kjer so η_n vektorji, definirani v točki (i). Od tod naprej sklepamo kot v točki (i). //

7.3. Opombe. (i) S primeri se da pokazati, da sta lahko obe neenakosti v (7.2) strogi. Za normo posplošenega odvajanja na simetričnih normiranih idealih (mi) ni znana nobena eksplicitna formula.

(ii) Norme notranjih odvajanj na C^* -algebrah sta obravnavala tudi Apostol in Zsido v [4].

(iii) Lahko je pokazati, da je norma operatorja $X \rightarrow AXB$ (definiranega na algebr $B(H)$ ali pa na simetričnih normiranih idealih v $B(H)$) enaka $\|A\| \|B\|$. Za splošen elementaren operator na $B(H)$ pa ni znano, kako izračunati njegovo normo.

8. Numerični zakladi posplošenih odvajanj

8.1 Nekaj uvodnih opomb. Za poljubno Banachovo algebro A z enoto 1 ($\|1\|=1$) in poljuben $A \in A$ je algebraični numerični zaklad, $V(A)$ definiran z

$$V(A) = \{f(A); f \in A', \|f\|=1, f(1)=1\}$$

Tukaj označuje A' prostor vseh zveznih linearnih funkcionalov na A . Če je A algebra omejenih linearnih operatorjev na kakem Banachovem prostoru X , je za vsak njen element definiran tudi prostorski numerični zaklad $W(A)$ s predpisom

$$W(A) = \{f(Ax); x \in X, f \in X', \|x\|=\|f\|=f(x)=1\}$$

(X' označuje seveda dualni prostor prostora X .) Znano je, da je $V(A)$ kompaktna konveksna podmnožica v $\mathbb{C}$. Prostorski numerični zaklad $W(A)$ pa v splošnem ni niti kompaktna niti konveksna množica, toda zaprtje njene konveksne ogrinjače je vedno $V(A)$. Klasična vira za numerične zaklade sta [10] in [11].

Za vsak $A \in A$ naj pomeni L_A levo, R_A pa desno množenje z A na algebri A . Če je J poljuben invarianten podprostor za operator L_A (oziroma R_A), lahko govorimo o numeričnem zakladu zožitve $L_A|J$ (oziroma $R_A|J$). Iz dejstva, da sta preslikavi $A \rightarrow L_A|J$ in $A \rightarrow R_A|J$ linearni kontrakciji, ki preslikata enoto v enoto, sledi (s pomočjo Hahn-Banachovega izreka), da velja

$$(8.1) \quad V(L_A|J) \subseteq V(A), \quad V(R_A|J) \subseteq V(A)$$

če je A C^* -algebra, potem sta preslikavi $A \rightarrow L_A$ in $A \rightarrow R_A$ tudi izometrični, od koder sledi

$$(8.2) \quad V(L_A) = V(A), \quad V(R_A) = V(A)$$

8.2. IZREK. (i) (Shaw [49]) Numerični zaklad zožitve D_J posplošenega odvajanja D_{AB} na poljuben simetrični normiran ideal J se izraža kot

$$(8.3) \quad V(D_J) = V(A) - V(B) = \{\lambda - \mu; \lambda \in V(A), \mu \in V(B)\}$$

(ii) Isti rezultat velja tudi za zožitev posplošenega odvajanja na poljubno ireducibilno C^* -podalgebro $A \subseteq B(H)$ z enoto I , če je $A, B \in A$.

Dokaz. (i) Zaradi $D_J = L_A|_J - R_B|_J$ imamo $V(D_J) \subseteq V(L_A|_J) - V(R_B|_J) \subseteq V(A) - V(B)$, pri čemer smo uporabili (8.1). Torej je treba dokazati le še inkluzijo

$$V(A) - V(B) \subseteq V(D_J)$$

Ker sta množici $V(A)$ in $V(B)$ zaprti konveksni ogrinjači prostorskih numeričnih zakladov $W(A)$ in $W(B)$ ter $V(D_J)$ kompaktna in konveksna množica, zadošča dokazati inkluzijo

$$(8.4) \quad W(A) - W(B) \subseteq V(D_J)$$

V ta namen, vzemimo poljuben $\lambda \in W(A)$ in $\mu \in W(B)$ ter taka enotska vektorja $\xi, \eta \in H$, da je $\langle A\xi, \xi \rangle = \lambda$ in $\langle B\eta, \eta \rangle = \mu$. Potem je operator $\xi \otimes \eta$ v idealu J (ker ima končen rang) in $\|\xi \otimes \eta\| = 1$. Definirajmo linearen funkcional $f \in B(J)'$ s predpisom

$$f(T) = \langle [T(\xi \otimes \eta)]\eta, \xi \rangle, \quad T \in B(J)$$

Potem imamo $|f(T)| \leq \|T\|$ za vsak $T \in B(J)$ in $f(I) = 1$. Končno, je tudi $f(D_J) = \langle (D_J(\xi \otimes \eta))\eta, \xi \rangle = \langle A\xi, \xi \rangle - \langle B\eta, \eta \rangle = \lambda - \mu$, torej $\lambda - \mu \in V(D_J)$.

(ii) Dokaz je podoben dokazu točke (i). Zaradi (8.2) je dovolj dokazati inkluzijo $W(A) - W(B) \subseteq V(D_A)$. Naj bo $\lambda \in W(A)$, $\mu \in W(B)$ in $\xi, \eta \in H$ taka enotska vektorja, da je $\lambda = \langle A\xi, \xi \rangle$, $\mu = \langle B\eta, \eta \rangle$. S pomočjo tranzitivnosnega izreka za ireducibilne C^* -algebre (glejte prejšnji razdelek) dobimo tak unitaren operator $U \in A$, da je $U\eta = \xi$. Definirajmo sedaj linearen funkcional $f \in B(A)'$ s predpisom $f(T) = \langle T(U)\eta, \xi \rangle$, $T \in B(A)$. Tudi tukaj je $\|f\| = 1 = f(I)$ in $f(D_A) = \langle (AU - UB)\eta, \xi \rangle = \langle AU\eta, \xi \rangle - \langle B\eta, U^*\xi \rangle = \lambda - \mu$. //

S pomočjo točke (ii) izreka 8.2 lahko določimo numerični zaklad posplošenega odvajanja na Calkinovi algebri. Izražal se bo z bistvenima

numeričnima zakladoma operatorjev A in B , ki inducirata odvajanje. Bistveni numerični zaklad operatorja $A \in \mathcal{B}(H)$ je (po definiciji) numerični zaklad odseka $\pi(A)$ v Calkinovi algebri.

8.3. KOROLAR. Za posplošeno odvajanje D' inducirano z operatorjema $A, B \in \mathcal{B}(H)$ na Calkinovi algebri $(D'x = \pi(A)x - x\pi(B), x \in \mathcal{C}(H))$ velja

$$V(D') = V_e(A) - V_e(B)$$

kjer označuje $V_e(A)$ bistveni numerični zaklad operatorja A .

Dokaz. Ker Calkinova algebra ne vsebuje netrivialnih idealov, je vsaka njena neničelna reprezentacija injektivna. Iz vsakega čistega stanja na Calkinovi algebri $\mathcal{C}(H)$ lahko dobimo ireducibilno reprezentacijo $\rho: \mathcal{C}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H_\rho)$ (po Gelfand-Naimark-Segalovi konstrukciji, [7]), eksistenca čistih stanj pa je zagotovljena s Krein-Milmanovim izrekom. Ker je vsaka injektivna reprezentacija C^* -algebre izometrija, je Calkinova algebra $\mathcal{C}(H)$ izometrično izomorfná ireducibilni podalgebri $\rho(\mathcal{C}(H))$ v $\mathcal{B}(H_\rho)$. Korolar sedaj sledi iz izreka 8.2(ii). //

8.4. Pripomba. Omejen operator T na kakem Banachovem prostoru imenujemo hermitski (v Vidavovem smislu), če je njegov numerični zaklad realen ([10, str. 46], [58, str. 81]). S pomočjo izreka 8.2 lahko hitro dobimo karakterizacijo hermitskih posplošenih odvajanj na simetričnih normiranih idealih in ireducibilnih C^* -algebrah: Posplošeno odvajanje $X \mapsto AX - XB$ je hermitski operator natanko tedaj, ko sta za kak $\lambda \in \mathbb{R}$ operatorja $A + \lambda I$ in $B + \lambda I$ oba hermitska. Vendar je to le poseben primer znane karakterizacije vseh hermitskih operatorjev na normiranih idealih in C^* -algebrah. Sourour je namreč v [51] dokazal, da je vsak hermitski operator na minimalnem normiranem idealu $J \neq \mathcal{C}^2(H)$ oblike $X \mapsto AX - XB$, kjer sta A in B hermitska operatorja na H . Podoben rezultat velja tudi za algebro $\mathcal{B}(H)$, [50].

9. 0 bistvenih numeričnih zakladih posplošenih odvajanj

V prejšnjem razdelku smo videli, da se numerični zaklad posplošenega odvajanja izraža podobno kot spekter. (Kako se izraža spekter, smo omenili že v uvodnem pregledu.) Za bistveni spekter posplošenega odvajanja velja zveza $\sigma_e(D_{AB}) = (\sigma_e(A) - \sigma(B)) \cup (\sigma(A) - \sigma_e(B))$, [22]. Ali smemo pričakovati podobno zvezo za bistveni numerični zaklad?

Bistveni numerični zaklad, $V_e(T)$, operatorja T na Banachovem prostoru X je definiran kot numerični zaklad odseka $\pi(T)$ v algebri $B(X)/K(X)$, kjer označuje $K(X)$ ideal kompaktnih operatorjev. Znana je enakost

$$V_e(T) = \cap \{V(T+K); K \in K(X)\}$$

V Hilbertovem prostoru lahko bistveni numerični zaklad opredelimo tudi prostorsko. V resnici so po [25] ekvivalentne naslednje izjave:

- (i) $\lambda \in V_e(T)$;
- (ii) Obstaja tako ortonormirano zaporedje $(\omega_n) \subseteq H$, da je $\lim \langle T\omega_n, \omega_n \rangle = \lambda$;
- (iii) Obstaja tak ortogonalen projektor P neskončnega ranga, da je kompresija operatorja $T - \lambda I$ na podprostor PH kompaktna.

V točki (ii) lahko ortonormirano zaporedje nadomestimo z zaporedjem enotskih vektorjev, ki šibko konvergira proti 0.

Ker je bistveni numerični zaklad konveksna množica, lahko domnevamo, da se numerični zaklad posplošenega odvajanja izraža na naslednji način:

$$(9.1) \quad V_e(D_{AB}) = \text{co}[(V_e(A) - V(B)) \cup (V(A) - V_e(B))]$$

Tukaj je "co" znak za konveksno ogrinjačo, znak "-" pa pomeni razliko v številske (ne množično-teoretičnem) smislu. Inkluzije v eno smer ne bo zelo težko dokazati (trditev (9.1)). Inkluzijo v drugo smer pa znamo dokazati le za posplošena odvajanja na Hilbert-Schmidtovem razredu.

9.1. TRDITEV. Naj bo A ireducibilna C^* -podalgebra v $B(H)$ in $A, B \in A$ ali pa naj bo A simetričen normiran ideal in $A, B \in B(H)$. Za zožitev D posplošenega odvajanja D_{AB} na A velja inkluzija

$$(9.2) \quad V_e(D) \supseteq \text{co}[(V_e(A)-V(B)) \cup (V(A)-V_e(B))]$$

Dokaz. Ker je množica $V_e(D)$ kompaktna in konveksna in v Hilbertovem prostoru algebraični numerični zaklad enak zaprtju prostorskega, zadošča pokazati inkluziji

$$V_e(A)-W(B) \subseteq V_e(D), \quad W(A)-V_e(B) \subseteq V_e(D)$$

Dokazali bomo samo prvo inkluzijo, kajti dokaz druge je podoben. Naj bo torej $\lambda \in V_e(A)$ in $\mu \in W(B)$. Po že navedeni prostorski karakterizaciji bistvenega numeričnega zaklada obstaja tako ortonormirano zaporedje (ε_n) v H , da je $\lim \langle A\varepsilon_n, \varepsilon_n \rangle = \lambda$. Naj bo $\eta \in H$ tak enotski vektor, da je $\langle B\eta, \eta \rangle = \mu$. Če je A simetrični normiran ideal, naj bo $U_n = \varepsilon_n \otimes \eta$; če pa je A ireducibilna C^* -podalgebra, naj bo $U_n \in A$ tak unitaren operator, da je $U_n \eta = \varepsilon_n$ (obstaja po tranzitivnostnem izreku).

Naj bo Lim kaka kompleksna Banachova limita na l^∞ . (Po definiciji je Lim kompleksen linearen funkcional na l^∞ , ki zadošča še pogojem: $|\text{Lim } a_n| \leq \limsup |a_n|$ in $\text{Lim } a_{n+1} = \text{Lim } a_n$ za poljubno zaporedje $(a_n) \in l^\infty$. Med drugim, se Lim ujema z navadno limito na konvergentnih zaporedjih. Za dokaz eksistence Banachove limite glejte [46, str. 82].) Definirajmo linearen funkcional $f \in B(A)'$ s predpisom

$$f(T) = \text{Lim } \langle T(U_n)_\eta, \varepsilon_n \rangle, \quad T \in B(A)$$

Definicija je smiselna, saj je zaporedje $(\langle T(U_n)_\eta, \varepsilon_n \rangle)$ omejeno. Funkcional f je zvezen, saj velja

$$(9.3) \quad |f(T)| \leq \limsup |\langle T(U_n)_\eta, \varepsilon_n \rangle| \leq \|T\|$$

za vsak $T \in B(A)$. Zadošča tudi pogoju $f(I) = 1$ (kajti $f(I) = \text{Lim } \langle U_n \eta, \varepsilon_n \rangle = \lim 1 = 1$). Pokazali bomo, da f uniči vse kompaktne operatorje na A .

Naj bo K poljuben kompakten operator na A . Trdimo, da je $\lim \langle K(U_n)_\eta, \varepsilon_n \rangle = 0$. Od tod takoj sledi, da f uniči kompaktne operatorje. Za dokaz trditve, naj bo $\varepsilon > 0$ in $\{V_1, \dots, V_m\}$ končna ε -mreža za množico $K(A_1)$. (Tukaj označuje A_1 zaprto enotsko kroglo v algebri A .) Ker je

zaporedje (ε_n) ortonormirano, obstaja tak $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $1 < \langle V_j \eta, \varepsilon_n \rangle < \varepsilon$ za vsak $n > n_0$ in vsak $j=1, \dots, m$. Za poljuben $n > n_0$ obstaja tak $j \in \{1, \dots, m\}$, da je $\|K(U_n) - V_j\| < \varepsilon$. Od tod sledi $1 < \langle K(U_n) \eta, \varepsilon_n \rangle \leq \|K(U_n) - V_j\| + \langle V_j \eta, \varepsilon_n \rangle \leq 2\varepsilon$.

Ker funkcional f uniči ideal $K(A)$ vseh kompaktnih operatorjev na A , inducira zvezen funkcional f' na algebri $B(A)/K(A)$. Lahko je preveriti, da je $f'(1) = 1 = \|f'\|$. (Za dokaz enakosti $\|f'\| = 1$ uporabimo oceno (9.3) na vseh kompaktnih motnjah $T+K$ operatorja T .) Končno, naslednji račun pove, da je $\lambda - \mu \in V_e(D)$.

$$\begin{aligned} f'(D + K(A)) &= f(D) = \lim \langle D(U_n) \eta, \varepsilon_n \rangle = \lim \langle (AU_n - U_n B) \eta, \varepsilon_n \rangle \\ &= \lim \langle A \varepsilon_n, \varepsilon_n \rangle - \lim \langle B \eta, U_n^* \varepsilon_n \rangle \\ &= \lim \langle A \varepsilon_n, \varepsilon_n \rangle - \lim \langle B \eta, \eta \rangle \\ &= \lambda - \mu \end{aligned} //$$

Čeprav v splošnem obratne inkluzije ne znamo dokazati, lahko problem nekoliko zreduciramo. Če bi uspeli dokazati inkluzijo

$$(9.4) \quad V_e(D_{AB}) \subseteq \text{co}[(V_e(A) - V(B)) \cup (V(A) - V_e(B))]$$

za posplošena odvajanja na algebri $B(H)$, bi potem hitro sledila tudi njena veljavnost za zožitev $D_{AB}|_A$ na poljubno Banachovo podalgebro A v $B(H)$. V splošnem namreč velja za poljuben omejen operator T na poljubnem Banachovem prostoru X in poljuben invarianten podprostor $Y \subseteq X$ inkluzija $V_e(T|_Y) \subseteq V_e(T)$. To takoj sledi iz dejstva, da inducira preslikava $S \rightarrow S|_Y$ linearno kontrakcijo algebre $B(X)/K(X)$ v algebro $B(Y)/K(Y)$. Nadalje lahko prenesemo problem iz algebre $B(H)$ na $C^1(H)$ z uporabo dualnosti

$$B(H) = C^1(H)'; \quad D_{AB} = -(D_{BA}|_{C^1(H)})'$$

in z uporabo splošno veljavnega dejstva $V_e(T') = V_e(T)$. Tukaj je T poljuben omejen operator, s črtico pa smo označili adjungirani operator. (Prva od teh treh enakosti je splošno znana, drugo lahko preverimo z neposrednim računom, zadnjo enakost, $V_e(T') = V_e(T)$, pa bomo sedaj dokazali. Ker velja

enakost $V(S')=V(S)$ za poljuben omejen operator S na Banachovem prostoru X (glejte [10]), imamo

$$\begin{aligned} V_e(T') &= n\{V(T'+H); H \in K(X')\} \subseteq n\{V(T'+K'); K \in K(X)\} \\ &= n\{V(T+K); K \in K(X)\} = V_e(T) \end{aligned}$$

če sedaj uporabimo pravkar dokazano inkluzijo $V_e(T') \subseteq V_e(T)$ na operatorju T' , dobimo še $V_e(T'') \subseteq V_e(T')$. Toda, ker je T v bistvu zožitev operatorja T'' na invariantni podprostor X , velja tudi $V_e(T) \subseteq V_e(T'')$. Torej je res $V_e(T')=V_e(T)$.) Morda je problem bistvenega numeričnega zaklada posplošenih odvajanj na razredu $C^1(H)$ lažji kot na algebri $B(H)$, ker poznamo konkretno predstavitev dualnega prostora od $C^1(H)$.

V nadaljevanju tega razdelka bomo obravnavali inkluzijo (9.4) za posplošena odvajanja na Hilbert-Schmidtovem razredu $C^2(H)$. Pri tem je ugodno izkoristiti jezik tenzorskih produktov. Za vsak Hilbertov prostor H bomo z I_H označili identični operator na H .

Bodita H in L separabilna Hilbertova prostora, $A \in B(H)$ in $B \in B(L)$. Dokazali bomo inkluzijo

$$(9.5) \quad V_e(A \otimes I_L - I_H \otimes B) \subseteq \text{co}[(V_e(A) - V(B)) \cup (V(A) - V_e(B))]$$

Že v uvodu k temu poglavju smo omenili, da je zožitev posplošenega odvajanja D_{AB} na Hilbert-Schmidtov razred $C^2(H)$ unitarno ekvivalentna operatorju $A \otimes I_H - I_H \otimes B^*$ na prostoru $H \otimes \bar{H}$; torej sledi iz inkluzije (9.5) in trditve 9.1 naslednji

9.2. IZREK. Naj bo H separabilen Hilbertov prostor. Za poljubna $A, B \in B(H)$ se bistveni numerični zaklad zožitve posplošenega odvajanja na $C^2(H)$ izraža z enakostjo (9.1).

Za dokaz inkluzije (9.5) potrebujemo najprej neko preprosto lemo. Za poljubno podmnožico V v $\mathbb{C}$ in poljuben $\epsilon > 0$ označimo

$$(V)_\epsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{razdalja}(\lambda, V) < \epsilon\}$$

9.3. LEMA. Za vsak $T \in \mathcal{B}(H)$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak podprostor H_ε v H , da je $\dim H_\varepsilon^\perp < \infty$ in da je numerični zaklad kompresije T_ε operatorja T na podprostor H_ε vsebovan v množici $(V_e(T))_\varepsilon$.

Dokaz. Najprej pokažimo, da za vsak $\lambda \in V(T) \setminus V_e(T)$ obstaja tak podprostor H_λ v H , da je $\dim H_\lambda^\perp < \infty$ in da $\lambda \notin V(T_\lambda)$, kjer je T_λ kompresija operatorja T na podprostor H_λ . Vzemimo nasprotno, da takega podprostora H_λ ne bi bilo. Ker je $\lambda \in V(T)$ ($= \overline{W(T)}$) obstaja tak enotski vektor $\omega_1 \in H$, da je $|\langle T\omega_1, \omega_1 \rangle - \lambda| < 1$. Privzemimo induktivno, da smo že dobili tako ortonormirano množico vektorjev $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}$, da je $|\langle T\omega_j, \omega_j \rangle - \lambda| < \frac{1}{j}$ za $j=1, \dots, n-1$. Postavimo $H_n = \{\omega_1, \dots, \omega_{n-1}\}^\perp$. Ker je $\dim H_n^\perp < \infty$, je točka λ v numeričnem zakladu kompresije operatorja T na podprostor H_n ; torej obstaja tak enotski vektor $\omega_n \in H_n$, da je $|\langle T\omega_n, \omega_n \rangle - \lambda| < \frac{1}{n}$. Na ta način konstruiramo tako ortonormirano zaporedje (ω_n) v H , da je $\lim \langle T\omega_n, \omega_n \rangle = \lambda$. Toda potem bi bilo $\lambda \in V_e(T)$ (po že omenjeni karakterizaciji bistvenega numeričnega zaklada). Torej mora podprostor H_λ res obstajati.

Ker je $V(T_\lambda)$ zaprta množica, obstaja za vsak $\lambda \in V(T) \setminus V_e(T)$ taka odprta okolica U_λ točke λ , da je $U_\lambda \cap V(T_\lambda) = \emptyset$. Naj bo $\{U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_n}\}$ končno pokritje kompaktne množice $V(T) \setminus (V_e(T))_\varepsilon$ s takimi okolici. Postavimo

$$H_\varepsilon = \bigcap_{j=1}^n H_{\lambda_j}$$

in naj bo T_ε kompresija operatorja T na podprostor H_ε . Potem je $\dim H_\varepsilon^\perp < \infty$ in imamo

$$V(T_\varepsilon) \subseteq \bigcap_{j=1}^n V(T_{\lambda_j}) \subseteq \bigcap_{j=1}^n (V(T) \setminus U_{\lambda_j}) \subseteq (V_e(T))_\varepsilon \quad //$$

Inkluzijo (9.5) bomo dokazali najprej v posebnem primeru, ko sta A in B kvazidiagonalna operatorja. Kvazidiagonalne operatorje je vpeljal Halmos v [28]. Danes je znanih več karakterizacij kvazidiagonalnih operatorjev (glejte na primer [33, str. 146]); za naše namene je najugodnejša naslednja. Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ je kvazidiagonalen natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ in za vsak končno-razsežen podprostor H_0 v H obstaja tak končno-razsežen podprostor H_1 v H , da H_1 vsebuje H_0 in da imata v matričnem zapisu operatorja T glede na razcep $H = H_1 \oplus H_1^\perp$ izven-diagonalna elementa normo manjšo od ε . (Z drugimi besedami, če je P ortogonalni projektor na H_1 , mora biti $\| (I-P)TP \| < \varepsilon$ in

$\|PT(I-P)\| < \epsilon$.) Naj dodamo še, da je razred kvazidiagonalnih operatorjev precej širok. Tako je na primer vsak normalen operator kvazidiagonalen. (To sledi iz Weyl-von Neumann-Bergovega izreka [41],[18, str.39].) Tudi vsak kompakten operator je kvazidiagonalen.

9.4. Dokaz inkluzije (9.5) za kvazidiagonalna operatorja $A \in B(H)$ in $B \in B(L)$. Izberimo poljuben $\epsilon > 0$. Bodita H_1 in L_1 končno-razsežna podprostora prostorov H in L (natančneje ju bomo opredelili kmalu), naj bo $H_2 = H_1^\perp$, $L_2 = L_1^\perp$, označimo z A_i in B_i kompresije operatorjev A in B na podprostore H_i in L_i za $i=1,2$ ter postavimo

$$R = A - (A_1 \oplus A_2), \quad S = B - (B_1 \oplus B_2)$$

Po lemi 9.3 lahko podprostora H_1 in L_1 izberemo tako, da je

$$(9.6) \quad V(A_2) \subseteq (V_e(A))_\epsilon, \quad V(B_2) \subseteq (V_e(B))_\epsilon$$

še več, ker sta operatorja A in B kvazidiagonalna, lahko dosežemo (če podprostora H_1 in L_1 še povečamo), da velja

$$(9.7) \quad \|R\| < \epsilon, \quad \|S\| < \epsilon$$

Za vsak Hilbertov prostor H naj bo I_H identični operator na H . Hilbertov prostor $H \otimes L$ razpade na ortogonalno vsoto

$$H \otimes L = \bigoplus_{i,j=1}^2 H_i \otimes L_j$$

Temu ustrezno lahko operator $D = A \otimes I_L - I_H \otimes B = [(A_1 \oplus A_2) + R] \otimes I_L - I_H \otimes [(B_1 \oplus B_2) + S]$ napišemo kot

$$(9.8) \quad D = [(A_1 \otimes I_{L_1} - I_{H_1} \otimes B_1) \oplus D'] + R \otimes I_L - I_H \otimes S$$

kjer je

$$D' = \bigoplus_{(i,j) \neq (1,1)} (A_i \otimes I_{L_j} - I_{H_i} \otimes B_j)$$

Ker za poljubna operatorja T_1 in T_2 velja inkluzija $V_e(T_1 + T_2) \subseteq V_e(T_1) + V_e(T_2)$ (to sledi takoj iz definicije numeričnega zaklada v normiranih algebrah),

sklepamo iz (9.8) in (9.7), da je

$$(9.9) \quad V_e(D) \subseteq (V_e[(A_1 \otimes I_{L_1} - I_{H_1} \otimes B_1) \oplus D'])_{2\epsilon}$$

Bistveni numerični zaklad poljubnega operatorja T na Hilbertovem prostoru je enak bistvenemu numeričnemu zakladu kompresije operatorja T na poljuben podprostor končne ko-dimenziije (glejte [25] ali [11, str. 129]). Ker je $H_1 \otimes L_1$ končno-razsežen podprostor prostora $H \otimes L$, sledi iz (9.9), da je $V_e(D) \subseteq (V_e(D'))_{2\epsilon}$, torej je tembolj

$$(9.10) \quad V_e(D) \subseteq (V(D'))_{2\epsilon}$$

Numerični zaklad operatorja D' bomo izrazili z uporabo znanega dejstva, da je numerični zaklad direktne vsote operatorjev na Hilbertovih prostorih enak konveksni ogrinjači unije numeričnih zakladov sumandov. (Za prostorske zaklade lahko to dejstvo preverimo z neposrednim računom; ker je algebraični zaklad enak zaprtju prostorskega, mora isto veljati tudi za algebraični numerični zaklad.) Če se za trenutek zopet spomnimo, da so operatorji $A_i \otimes I_{L_j} - I_{H_i} \otimes B_j$ v bistvu posplošena odvajanja na prostorih $C^2(\bar{L}_j, H_i)$, vidimo (kot v izreku 8.2(i)), da je $V(A_i \otimes I_{L_j} - I_{H_i} \otimes B_j) = V(A_i) - V(B_j)$. Tako imamo

$$(9.11) \quad V(D') = \text{co} \left[\bigcup_{(i,j) \neq (1,1)} (V(A_i) - V(B_j)) \right]$$

Sedaj sledi iz (9.10), (9.11), (9.6) in iz očitnih inkluzij $V(A_1) \subseteq V(A)$, $V(B_1) \subseteq V(B)$, da velja

$$V_e(D) \subseteq (\text{co}[(V(A) - (V_e(B))_\epsilon) \cup ((V_e(A))_\epsilon - V(B)) \cup ((V_e(A))_\epsilon - (V_e(B))_\epsilon)])_{2\epsilon}$$

Ko pošljemo v zadnji inkluziji ϵ proti 0, dobimo (9.5). //

Da bi dokazali inkluzijo (9.5) za splošna operatorja A in B , potrebujemo še eno lemo. V dokazu te leme bomo uporabili zvezo $V_e(T \oplus S) = \text{co}[V_e(T) \cup V_e(S)]$, ki velja za poljubna omejena operatorja T in S , delujoča na Hilbertovih prostorih. To zvezo, ki je verjetno splošno znana, lahko hitro dokažemo z uporabo karakterizacije (ii) bistvenega numeričnega zaklada (glejte začetek razdelka); le da ortonormirano zaporedje lahko nadomestimo s poljubnim zaporedjem enotskih vektorjev, ki šibko konvergira proti 0.

9.5. LEMA. Za vsak $T \in B(H)$ (kjer je H separabilen Hilbertov prostor) in vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak omejen linearen operator S (delujoč na nekem separabilnem Hilbertovem prostoru), da je operator $Q = T \oplus S$ kvazidiagonalen in

$$(9.12) \quad V(Q) \subseteq (V(T))_\epsilon, \quad V_e(Q) \subseteq (V_e(T))_\epsilon$$

Dokaz. Obstoj takega operatorja S , da je operator $Q = T \oplus S$ kvazidiagonalen, je dokazal Arveson v [8]. Tukaj bomo pokazali samo, da veljata za ustrezni Q tudi inkluziji (9.12).

Najprej pokažimo, da obstaja tak kompakten operator K na prostoru H , da za operator $T' = T - K$ velja

$$(9.13) \quad V(T') \subseteq (V_e(T))_{\epsilon/2}$$

Po lemi 9.3 obstaja tak podprostor H_0 končne ko-dimenziije v H , da je $V(T_0) \subseteq (V_e(T))_{\epsilon/2}$, kjer je T_0 kompresija operatorja T na podprostor H_0 . Naj bo P ortogonalni projektor na H_0 in μ poljubna točka iz $V(T_0)$. Potem je operator $K = T - PTP - \mu(I - P)$ kompakten (v resnici ima končen rang) in velja

$$V(T - K) = V(PTP + \mu(I - P)) = V(T_0 + \mu I_{H_0^\perp}) = V(T_0)$$

Po [8, str. 334-335] obstaja tako zaporedje pozitivnih operatorjev končnega ranga $E_n \in B(H)$ in tak kompakten operator K' z normo $\|K'\| < \epsilon/2$, delujoč na Hilbertovem prostoru

$$L = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n H$$

da je operator T' unitarno ekvivalenten nekemu direktnemu sumandu operatorja

$$Q' = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} T'_n \right) - K'$$

kjer je T'_n kompresija operatorja T' na podprostor $E_n H$ prostora H . To pomeni, da obstajata taka operatorja T'' in S , da je $Q' = T'' \oplus S$ in T'' unitarno ekvivalenten operatorju T' . Ker je očitno $V(T'_n) \subseteq V(T')$ za vsak n in ker je $\|K'\| < \epsilon/2$, imamo

$$V(Q') \subseteq V\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n'\right) - V(K') \subseteq (V(T'))_{\varepsilon/2}$$

Sedaj lahko zaključimo iz (9.13), da je $V(Q') \subseteq (V_e(T))_{\varepsilon}$. Ker je $Q' = T' \oplus S$, sledi od tod med drugim

$$(9.14) \quad V(S) \subseteq (V_e(T))_{\varepsilon}$$

Postavimo sedaj $Q = T \oplus S$. Ker je operator $Q' = T' \oplus S$ kvazidiagonalen in ker je operator $T' \oplus S$ unitarno ekvivalenten operatorju $T' \oplus S$, je tudi $T \oplus S$ kvazidiagonalen operator. Operator Q se razlikuje od operatorja $T \oplus S$ samo za kompakten operator, saj je $Q = T \oplus S = (T' \oplus S) + (K \oplus 0)$. Ker je vsota kvazidiagonalnega in kompaktnega operatorja kvazidiagonalna [33], je Q kvazidiagonalen operator. Končno sledi iz (9.14)

$$V(Q) = \text{co}[V(T) \cup V(S)] \subseteq \text{co}[V(T) \cup (V_e(T))_{\varepsilon}] \subseteq (V(T))_{\varepsilon}$$

in

$$V_e(Q) = \text{co}[V_e(T) \cup V_e(S)] \subseteq \text{co}[V_e(T) \cup V(S)] \subseteq (V_e(T))_{\varepsilon} \quad //$$

9.6. Dokaz inkluzije (9.5) za splošna operatorja $A \in B(H)$ in $B \in B(L)$.

Predpišimo poljuben $\varepsilon > 0$. Po lemi 9.5 obstajata taka omejena operatorja A' in B' (delujoča na separabilnih Hilbertovih prostorih), da sta operatorja $\hat{A} = A \oplus A'$ in $\hat{B} = B \oplus B'$ kvazidiagonalna in velja

$$(9.15) \quad V(\hat{A}) \subseteq (V(A))_{\varepsilon}, \quad V_e(\hat{A}) \subseteq (V_e(A))_{\varepsilon}$$

$$V(\hat{B}) \subseteq (V(B))_{\varepsilon}, \quad V_e(\hat{B}) \subseteq (V_e(B))_{\varepsilon}$$

Operator $D = A \otimes I_L - I_H \otimes B$ je direktni sumand operatorja $\hat{D} = \hat{A} \otimes I_L - I_H \otimes \hat{B}$ (kjer sta $\hat{A}$ in $\hat{B}$ prostora, na katerih delujeta operatorja $\hat{A}$ in $\hat{B}$), torej je $V_e(D) \subseteq V_e(\hat{D})$. Po že dokazanem, velja inkluzija (9.5) za operatorja $\hat{A}$ in $\hat{B}$ namesto operatorjev A in B . Torej iz (9.15) sledi

$$V_e(D) \subseteq \text{co}[(V_e(A))_{\varepsilon} - (V(B))_{\varepsilon}] \cup [(V(A))_{\varepsilon} - (V_e(B))_{\varepsilon}]$$

Ko v zadnji inkluziji konvergira ε proti 0, sledi (9.5). //

Za konec razdelka navedimo še dve preprosti posledici trditve 9.1.

9.7. KOROLAR. Posplošeno odvajanje D_{AB} na prostoru $B(H)$ je kompakten operator samo, če je $D_{AB}=0$. Enak zaključek velja tudi za zožitve operatorja D_{AB} na normirane ideale v $B(H)$.

Dokaz. Če je operator D_{AB} kompakten, potem je $V_e(D_{AB})=\{0\}$. Trditev 9.1 pove, da je tedaj

$$V_e(A)-V(B) = \{0\} \quad \text{in} \quad V(A)-V_e(B) = \{0\}$$

Prva od teh dveh enakosti je mogoča samo v primeru, ko je $V_e(A)=\{\lambda\}=V(B)$ za kak $\lambda \in \mathbb{C}$. Od tod dobimo $V(B-\lambda I)=\{0\}$, oziroma $B=\lambda I$. Podobno vidimo, da je $A=\mu I$ za nek $\mu \in \mathbb{C}$. Ker pa je $V_e(A)=\{\lambda\}$, mora biti $\mu=\lambda$. Potem je seveda $D_{AB}=0$. Dokaz za zožitve posplošenega odvajanja na normirane ideale v $B(H)$ je enak. //

Korolar 9.7 bi lahko dokazali tudi s pomočjo izreka 3.4.

Omejen operator T na Banachovem prostoru X imenujemo bistveno hermitski, če je hermitski element, ki mu pripada v Banachovi algebri $B(X)/K(X)$.

9.8. KOROLAR. Operator D_{AB} na prostoru $B(H)$ je bistveno hermitski natanko tedaj, ko obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$ in taka hermitska operatorja A_1 in B_1 na prostoru H , da je $A=A_1+\lambda I$ in $B=B_1+\lambda I$. Tedaj pa je D_{AB} hermitski operator. Ista trditev velja tudi za zožitve operatorja D_{AB} na normirane ideale v $B(H)$.

Dokaz. Operator D_{AB} je bistveno hermitski natanko tedaj, ko je $V_e(D_{AB}) \subseteq \mathbb{R}$. Po trditvi 9.1 sledi od tod

$$(9.16) \quad V_e(A)-V(B) \subseteq \mathbb{R} \quad \text{in} \quad V(A)-V_e(B) \subseteq \mathbb{R}$$

Brez škode smemo vzeti, da je $0 \in V_e(B)$ (sicer nadomestimo operatorja A in B z $A-\lambda I$ in $B-\lambda I$, kjer je $\lambda \in V_e(B)$). Potem iz druge inkluzije (9.16) sledi, da je $V(A) \subseteq \mathbb{R}$. Torej je tudi $V_e(A) \subseteq \mathbb{R}$ in zato sledi iz prve inkluzije (9.16) še $V(B) \subseteq \mathbb{R}$. To pove, da sta A in B hermitska operatorja. Po izreku 8.2 imamo sedaj $V(D_{AB}) \subseteq \mathbb{R}$, kar pomeni, da je tudi D_{AB} hermitski operator. //

10. Nekaj opomb o numeričnem zakladu tenzorskega produkta operatorjev

V tem razdelku bomo poskusili nekaj povedati o numeričnem zakladu operatorjev oblike

$$(10.1) \quad T_{AB}: C^2(H) \rightarrow C^2(H), \quad T_{AB}(X) = AXB$$

kjer sta A in B omejena operatorja na H . Že v uvodu k temu poglavju smo omenili, da je operator T_{AB} unitarno ekvivalenten operatorju $A \otimes \bar{B}^*$ na prostoru $H \otimes \bar{H}$. V resnici je tukaj ugodneje delati s tenzorskim produktom kot pa operatorjem T_{AB} , kajti potrebovali bomo nek rezultat iz teorije tenzorskih produktov C^* -algeber, ki ga nismo mogli elementarno dokazati v okviru operatorjev na $C^2(H)$.

Kako bi lahko izrazili numerični zaklad tenzorskega produkta dveh operatorjev? Najprej se domisljimo zveze

$$(10.2) \quad V(A \otimes B) = \text{co}[V(A)V(B)]$$

vendar so znani preprosti primeri 2×2 matrik, ko ta enakost ne velja, [35, str. 224]. Da enakost (10.2) ne velja vedno, bo sledilo tudi iz trditve 10.1. Vedno pa je res inkluzija

$$(10.3) \quad V(A \otimes B) \supseteq \text{co}[V(A)V(B)]$$

ki velja tudi v širšem okviru tenzorskih produktov Banachovih algeber [11, str. 44]. Ker je dokaz inkluzije (10.3) zelo kratek, ga bomo takoj navedli. Zadostuje dokazati inkluzijo $W(A)W(B) \subseteq V(A \otimes B)$, ki takoj sledi iz enakosti $\langle (A \otimes B)(\xi \otimes \eta), \xi \otimes \eta \rangle = \langle A\xi, \xi \rangle \langle B\eta, \eta \rangle$ ($\|\xi\| = \|\eta\| = 1$).

Videli bomo, da obstaja precej širok razred operatorjev A , ki imajo lastnost, da za vsak operator B velja enakost (10.2).

10.1. TRDITEV. Naj bo A tak omejen operator, da za vsak omejen operator B (na poljubnem Hilbertovem prostoru) velja enakost (10.2). Potem je operator A normaloiden (to pomeni, da je $w(A) = \|A\|$).

Dokaz. Naj A deluje na Hilbertovem prostoru H in naj bo B operator na ℓ^2 , predstavljen z matriko

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

glede na naravno bazo v ℓ^2 . Prostor $H \otimes \ell^2$ lahko naravno izenačimo z direktno vsoto $H \oplus H$, operator $A \otimes B$ pa z matriko

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za poljuben vektor $\tilde{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in H \oplus H$ je $\langle \tilde{A}\tilde{\omega}, \tilde{\omega} \rangle = \langle A\omega_2, \omega_1 \rangle$, torej

$$\begin{aligned} w(\tilde{A}) &= \sup\{|\langle A\omega_2, \omega_1 \rangle|; \omega_1, \omega_2 \in H, \|\omega_1\|^2 + \|\omega_2\|^2 = 1\} \\ &\geq \sup\{|\langle A\omega_2, \omega_1 \rangle|; \omega_1, \omega_2 \in H, \|\omega_1\| = \|\omega_2\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\} \\ &= \frac{1}{2} \|A\| \end{aligned}$$

Preprost račun pove, da je $w(B) = 1/2$. Če naj velja enakost (10.2), mora biti $w(\tilde{A}) = w(A \otimes B) \leq w(A)w(B) = \frac{1}{2}w(A)$ (kajti desna stran v (10.2) je vsebovana v krogu s središčem v 0 in radijem $w(A)w(B)$). Iz obeh pravkar izpeljanih neenakosti, $w(\tilde{A}) \geq \frac{1}{2}\|A\|$ in $w(\tilde{A}) \leq \frac{1}{2}w(A)$, sledi $\|A\| \leq w(A)$. Ker vedno velja tudi $w(A) \leq \|A\|$, je trditev dokazana. //

Oglejmo si sedaj še nek zadosten pogoj za enakost (10.2). Kompaktna množica $X \subseteq \mathbb{C}$ je spektralna za operator $A \in \mathcal{B}(H)$, če je $\sigma(A) \subseteq X$ in $\|f(A)\| \leq \|f\|_X$ za vsako racionalno funkcijo f s poli izven množice X . Tukaj je $\|f\|_X = \sup\{|f(x)|; x \in X\}$. Za vsako kompaktno množico $X \subseteq \mathbb{C}$ je njena polinomska ogrinjača, $\hat{X}$, unija množice X in vseh omejenih komponent množice $\mathbb{C} \setminus X$.

10.2. TRDITEV. Naj bo $A \in \mathcal{B}(H)$ tak operator, da je polinomska ogrinjača njegovega spektra, $\hat{\sigma}(A)$, spektralna množica za A . Potem velja za vsak $B \in \mathcal{B}(L)$ enakost (10.2). (H in L sta Hilbertova prostora.)

Dokaz. Po dilacijskem izreku Bergerja, Foiasa in Lebowa obstaja tak

normalen operator N , delujoč na Hilbertovem prostoru $M \supseteq H$, da je $\sigma(N) \subseteq \partial \hat{\sigma}(A)$ in $A = PN|_H$, kjer označuje P ortogonalni projektor iz M na H . (V resnici dilacijski izrek pove še več, da je $A^n = PN^n|_H$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, vendar tega ne bomo potrebovali. Privlačna in splošna obravnava dilacijske teorije je v [5] in [6].) Sedaj imamo

$$A \otimes B = (P \otimes I)(N \otimes B)|_{H \otimes L}$$

torej je $V(A \otimes B) \subseteq V(N \otimes B)$. Nadalje iz $\sigma(N) \subseteq \sigma(A)$ sledi $V(N) = \text{co}[\sigma(N)] \subseteq \text{co}[\sigma(A)] \subseteq V(A)$. Pri tem smo upoštevali, da algebraični numerični zaklad vedno vsebuje konveksno ogrinjačo spektra in ji je za normalne operatorje enak. Če pokažemo, da je

$$(10.4) \quad V(N \otimes B) \subseteq \text{co}[V(N)V(B)] =: V$$

bomo imeli $V(A \otimes B) \subseteq \text{co}[V(N)V(B)] \subseteq \text{co}[V(A)V(B)]$. Ker obratna inkluzija vedno velja, bo s tem trditev dokazana. Torej je dovolj dokazati inkluzijo (10.4).

Naj bo A_1 C^* -algebra generirana z N in enoto I_M , A_2 C^* -algebra generirana z B in I_L , A pa njun tenzorski produkt v minimalni C^* -normi, $A = A_1 \otimes A_2$. Algebra A je napolnitev algebraičnega tenzorskega produkta algeber A_1 in A_2 v operatorski normi prostora $B(M \otimes L)$. Da bi dokazali (10.4), zadostuje videti, da je $\omega(N \otimes B) \in V$ za vsako stanje ω na C^* -algebri A . Ker je vsako stanje limita konveksnih kombinacij čistih stanj v šibki* topologiji, zadošča pokazati relacijo $\omega(N \otimes B) \in V$ za čista stanja ω . Toda, ker je C^* -algebra A_1 komutativna, so vsa čista stanja ω na A oblike $\omega = \omega_1 \otimes \omega_2$, za primerni čisti stanji ω_1 in ω_2 na A_1 in A_2 (glejte [54, str. 211]). Torej imamo $\omega(N \otimes B) = \omega_1(N)\omega_2(B) \in V(N)V(B) \subseteq V$. //

10.3. KOROLAR. Za poljubna omejena operatorja A in B je numerični zaklad njunega tenzorskega produkta vsebovan v zaprtem krogu s središčem 0 in polmerom $\|A\|w(B)$.

Dokaz. Operator $A/\|A\|$ je kontrakcija in ima zato unitarno dilacijo N , [30, str. 326]. Po prejšnji trditvi je $V(N \otimes B) = \text{co}[V(N)V(B)]$, torej je $V(N \otimes B)$ vsebovan v krogu s polmerom $w(B)$ in središčem 0. Sedaj upoštevamo

še, da je operator $A/\|A\| \otimes B$ kompresija operatorja $N \otimes B$, torej $V(A/\|A\| \otimes B) \subseteq V(N \otimes B)$. //

Za konec, si oglejmo še, kako je mogoče izraziti numerični zaklad tenzorskega produkta s pomočjo matričnih zakladov faktorjev.

Za vsak omejen operator T na Hilbertovem prostoru H in vsako naravno število n je n -ti prostorski matrični zaklad operatorja T , $W_n(T)$, definiran kot množica tistih linearnih operatorjev na $\mathbb{C}^n$, ki so unitarno ekvivalentni kakšni kompresiji operatorja T na n -razsežen podprostor prostora H . Obstaja tudi algebraični matrični zaklad, ki ga je definirala Arveson v [6], vendar ga tukaj ne bomo potrebovali. Matrične zaklade operatorjev je obravnavalo že več avtorjev; občutek, da so uporabni, lahko dobi bralec že iz [11].

Če za trenutek identificiramo Hilbertov prostor $H \otimes L$ s prostorom vseh Hilbert-Schmidtovih operatorjev iz $\mathcal{L}$ v H , vidimo, da so elementi oblike

$$(10.5) \quad X = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \otimes \eta_i, \quad \lambda_i \geq 0, \quad \xi_i \in H, \quad \eta_i \in L, \quad \langle \xi_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij} = \langle \eta_i, \eta_j \rangle, \quad n \in \mathbb{N}$$

gosti v $H \otimes L$. Norma elementa X , izraženega v obliki (10.5), je

$$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

Potemtakem je numerični zaklad operatorja $A \otimes B$ enak zaprtju množice vseh števil oblike

$$(10.6) \quad \langle (A \otimes B)X, X \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \langle A \xi_i, \xi_j \rangle \langle B \eta_i, \eta_j \rangle$$

Tipični matriki v matričnem zakladu operatorjev A in B izgledata kot

$$R = \begin{bmatrix} \langle A \xi_1, \xi_1 \rangle & \dots & \langle A \xi_n, \xi_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle A \xi_1, \xi_n \rangle & \dots & \langle A \xi_n, \xi_n \rangle \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} \langle B \eta_1, \eta_1 \rangle & \dots & \langle B \eta_n, \eta_1 \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle B \eta_1, \eta_n \rangle & \dots & \langle B \eta_n, \eta_n \rangle \end{bmatrix}$$

kjer sta $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ in $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ ortonormirani množici v H in L .

če označimo z Λ stolpec z elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in z $R \boxtimes S$ matriko, ki jo dobimo, ko pomnožimo enakoležne elemente matrik R in S , potem lahko desno stran enakosti (10.6) napišemo v obliki

$$\Lambda^T (R \boxtimes S) \Lambda$$

kjer označuje Λ^T stolpcu Λ transponirano vrstico. Tako spoznamo, da je

$$V(A \otimes B) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \Lambda^T (R \boxtimes S) \Lambda; R \in W_{(n)}(A), S \in W_{(n)}(B), \Lambda \in S_n^+ \}}$$

kjer smo označili

$$S_n^+ = \{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n; \lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 = 1 \}$$

Na ta način se numerični zaklad operatorja $A \otimes B$ izraža z matričnimi zakladi operatorjev A in B .

11. Hiponormalna posplošena odvajanja in tenzorski produkti

Posamezni razredi posplošenih odvajanj so bili v preteklosti deležni precejšnje pozornosti. V [1] sta Anderson in Foias karakterizirala spektralna posplošena odvajanja, v [49] pa je Shaw karakteriziral hermitska in normalna posplošena odvajanja na podprostorih v $B(H)$, ki zadoščajo določenim pogojem. Če se omejimo na Hilbert-Schmidtov razred $C^2(H)$, lahko govorimo o raznih posplošitvah pojma normalnosti, kajti $C^2(H)$ je Hilbertov prostor. V tem razdelku bomo karakterizirali hiponormalna, v prihodnjem pa subnormalna posplošena odvajanja in tenzorske produkte. Rezultati so vzeti iz [39].

Skozi ves razdelek bosta A, B dana omejena operatorja na H , D_{AB} zožitev posplošenega odvajanja na Hilbert-Schmidtov razred $C^2(H)$, L_A levo, R_A pa desno množenje z A na prostoru $C^2(H)$.

Z upoštevanjem definicije skalarnega produkta v prostoru $C^2(H)$ je lahko preveriti zveze $(L_A)^* = L_{A^*}$, $(R_B)^* = R_{B^*}$, $(D_{AB})^* = D_{A^*B^*}$. Naj pomeni znak $[S, T]$ komutator elementov S in T , $[S, T] = ST - TS$; komutator $[T^*, T]$ pa označimo kar z $[T]$. Dejstvo, da je operator T normalen, lahko napišemo kot $[T] = 0$. Z neposrednim računom lahko preverimo identiteto

$$(11.1) \quad [D_{AB}] = D_{[A][B]}$$

Operator T , delujoč na Hilbertovem prostoru, imenujemo hiponormalen, če in samo če je $[T] \geq 0$. Oglejmo si, kdaj je posplošeno odvajanje hiponormalen operator.

Iz (11.1) sledi, da je D_{AB} hiponormalen operator natanko tedaj, ko je $D_{[A][B]} \geq 0$. Ta zahteva pa je po izreku o numeričnem zakladu posplošenih odvajanj (izrek 8.2) ekvivalentna s pogojem

$$(11.2) \quad V([A]) - V([B]) \geq 0$$

če za trenutek priznamo dejstvo, da je za poljuben operator $S \in B(H)$ vedno $0 \in V([S])$, potem vidimo, da je pogoj (11.2) ekvivalenten z zahtevama $V([A]) \geq 0$ in $V([B]) \leq 0$. To pa pomeni, da sta operatorja A in B^* hiponormalna.

Pokažimo sedaj, da je vedno $0 \in V([S])$ za poljuben $S \in B(H)$. Če je $[S] \geq 0$, potem velja za vsak $\omega \in H$ in $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(11.3) \quad \| (S - \lambda I) \omega \|^2 - \| (S - \lambda I)^* \omega \|^2 = \langle [S] \omega, \omega \rangle \geq 0$$

Vstavimo sedaj v (11.3) za λ kako aproksimativno lastno vrednost operatorja S in naj bo (ω_n) ustrezno zaporedje približnih lastnih vektorjev. Potem sledi iz (11.3) najprej $0 \leq \limsup \| (S - \lambda I)^* \omega_n \| \leq \lim \| (S - \lambda I) \omega_n \| = 0$, nato še $\lim \| [S]^{1/2} \omega_n \|^2 = \lim \langle [S] \omega_n, \omega_n \rangle = 0$. Torej je $0 \in \sigma([S]^{1/2})$ in zato tudi $0 \in \sigma([S])$, $0 \in V([S])$. Če je $[S] \leq 0$, sklepamo podobno. Če pa ni niti $[S] \geq 0$ niti $[S] \leq 0$, potem je v numeričnem zakladu hermitskega operatorja $[S]$ vsaj eno pozitivno in vsaj eno negativno število. Zaradi konveksnosti numeričnega zaklada, mora biti potem tudi $0 \in V([S])$.

Podobno lahko karakteriziramo tudi hiponormalne tenzorske produkte. Tukaj je ugodno obravnavati tenzorski produkt v konkretni predstavitvi (10.1).

11.1. IZREK. (i) Posplošeno odvajanje D_{AB} na prostoru $C^2(H)$ je hiponormalen operator natanko tedaj, ko sta hiponormalna operatorja A in B^* .

(ii) Za $A \neq 0$, $B \neq 0$ je operator T_{AB} (definiran z (10.1)) hiponormalen natanko tedaj, ko sta A in B^* hiponormalna operatorja.

Dokaz. Točko (i) smo že dokazali, zato ostane za dokazati le še točka (ii). Pogoji za hiponormalnost

$$(11.4) \quad 0 \leq \langle T_{AB} X, X \rangle = \tau[X^*(A^*AXBB^* - AA^*XB^*B)], \quad X \in C^2(H)$$

lahko napišemo v obliki

$$(11.5) \quad \tau(B^*X^*(A^*A - AA^*)XB) + \tau(A^*X(BB^* - B^*B)X^*A) \geq 0, \quad X \in C^2(H)$$

(Tukaj smo uporabili identiteto $\tau(YZ) = \tau(ZY)$ za $Y \in B(H)$, $Z \in C^1(H)$ in za $Y, Z \in C^2(H)$, [44, str. 100].) Če sta operatorja A in B^* hiponormalna, potem je $(XB)^*[A]XB \geq 0$ in $(X^*A)^*[B^*]X^*A \geq 0$ za vse $X \in B(H)$, torej velja tedaj tudi (11.5).

Obratno, če je T_{AB} hiponormalen operator, vstavimo $X = \xi \otimes \eta$ v (11.4), kjer sta ξ, η poljubna vektorja iz H . Po kratkem računu dobimo

$$(11.6) \quad \|A\xi\|^2 \|B^*\eta\|^2 - \|A^*\xi\|^2 \|B\eta\|^2 \geq 0$$

Pokazali bomo, kako iz (11.6) sledi hiponormalnost operatorja B^* ; da je tudi A hiponormalen operator, pokažemo podobno. Privzemimo za trenutek, da obstaja zaporedje enotskih vektorjev $\xi_n \in H$, ki zadošča pogoju

$$(11.7) \quad \lim \|A^*\xi_n\| = \lim \|A\xi_n\| > 0$$

Potem sledi hiponormalnost operatorja B^* takoj, ko vstavimo $\xi = \xi_n$ v (11.6) in pošljemo n proti neskončnosti.

Pri dokazovanju eksistence zaporedja (ξ_n) ločimo tri primere. Če je $[A] \geq 0$, zadošča pogoju (11.7) poljubno zaporedje približnih lastnih vektorjev ξ_n , odgovarjajočih kaki neničelni približni lastni vrednosti λ operatorja A . (Za λ lahko vzamemo katerokoli neničelno robno točko spektra operatorja A .) Da je temu res tako, pove sklep v odstavku, ki vsebuje identiteto (11.3). Če je $[A] \leq 0$, sklepamo podobno, le da začnemo z neničelno približno lastno vrednostjo operatorja A^* . Ostane še tretja možnost, ko ni niti $[A] \geq 0$ niti $[A] \leq 0$. Tedaj nam samo dejstvo, da je $0 \in W([A])$, ne pomaga, ker bi bili limiti v (11.7) lahko enaki 0. Pač pa uporabimo spektralni izrek za sebi-adjungiran operator $[A]$, v obliki, v kakršni je naveden v [43, str. 13]. Po spektralnem izreku je operator $[A]$ unitarno ekvivalenten množenju z neko merljivo funkcijo f na določenem prostoru $L^2(\mu)$, kjer je μ pozitivna mera na nekem merljivem prostoru. Ker zavzame funkcija f tako pozitivne kot negativne vrednosti na množici s pozitivno mero, ni težko dokazati eksistence take funkcije $\phi \in L^2(\mu)$, da je

$$\int f \bar{\phi} d\mu = 0 \quad \text{in} \quad \int f |\phi|^2 d\mu > 0$$

To pomeni, da obstaja tak enotski vektor $\xi \in H$, da je $\langle [A]\xi, \xi \rangle = 0$ in $\|[A]\xi\| \neq 0$. Tedaj ustreza pogoju (11.7) kar konstantno zaporedje $\xi_n = \xi$. //

Izrek 11.1 karakterizira tudi normalna posplošena odvajanja, saj je

poljuben operator T normalen natanko tedaj, ko sta operatorja T in T^* hiponormalna. Potemtakem je operator D_{AB} normalen natanko tedaj, ko sta normalna operatorja A in B . Iz točke (ii) izreka 11.1 sledi, da je tenzorski produkt dveh neničelnih operatorjev hiponormalen natanko tedaj, ko sta oba faktorja hiponormalna.

Za splošne elementarne operatorje ne obstaja nobena podobna karakterizacija normalnosti. Na primer operator $X \rightarrow AXB + A^*XB^*$ je sebi-adjungiran na prostoru $C^2(H)$ za poljubna (ne nujno normalna) operatorja $A, B \in B(H)$.

11.2. Opombi. (i) Pojem hiponormalnega operatorja je mogoče definirati tudi na Banachovih prostorih. Omejen operator T na Banachovem prostoru X imenujemo hiponormalen, če ga lahko napišemo v obliki $T = H + iK$, kjer sta H in K hermitska operatorja in operator $H' = i(HK - KH)$ ne-negativen (t.j., $V(H') \subseteq \{\lambda \in \mathbb{R}; \lambda \geq 0\}$). članek [61], ki obravnava lastnosti hiponormalnih operatorjev na enakomerno c -konveksnih prostorih (v Globevnikovem smislu), vsebuje med drugim tudi karakterizacijo sploh vseh hiponormalnih operatorjev na prostorih $K(H)$ in $C^p(H)$, $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$. Edini hiponormalni operatorji na teh prostorih so posplošena odvajanja D_{AB} , pri čemer sta operatorja A in B^* na prostoru H hiponormalna. V [61] je dokazana tudi točka (i) izreka 11.1 in sicer v precej splošnejšem okviru Banachovih prostorov.

(ii) Normalna odvajanja na algebri $B(X)$, kjer je X Banachov prostor, je obravnaval tudi Kyle v [60]. Del izreka 8.2, ki smo ga pripisali Shawu, izvira dejansko iz [60]. V [60] je namreč dokazana formula (8.3) za posplošena odvajanja na algebri $B(X)$.

12. Subnormalna posplošena odvajanja in tenzorski produkti

Operator $A \in \mathcal{B}(H)$ imenujemo subnormalen, če obstaja tak normalen operator $N \in \mathcal{B}(L)$, kjer je $L \supseteq H$, da je $N|_H = A$. Z drugimi besedami, subnormalen operator je zožitev normalnega operatorja na invarianten podprostor.

Naj imata oznaki T_{AB} in D_{AB} enak pomen kot v prejšnjem razdelku.

12.1 IZREK. (i) Operator D_{AB} je subnormalen natanko tedaj, ko sta subnormalna operatorja A in B^* .

(ii) če je $A \neq 0$ in $B \neq 0$, velja isti zaključek tudi za operator T_{AB} .

Dokaz. Predpostavimo najprej, da sta A in B^* subnormalna operatorja ter označimo z M in N^* njuni (ne nujno minimalni) normalni razširitvi. Vzeti smemo, da delujeta operatorja M in N na istem Hilbertovem prostoru $L \supseteq H$. Glede na razcep $L = H \oplus H^\perp$ lahko predstavimo operatorja M in N^* z matrikama

$$M = \begin{bmatrix} A & A_1 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad N^* = \begin{bmatrix} B^* & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$$

kjer so A_1, A_2, B_1, B_2 določeni linearni operatorji. Hilbertov prostor $C^2(H)$ lahko smatramo za podprostor v $C^2(L)$, saj obstaja naravna vložitev

$$C^2(H) \rightarrow C^2(L), \quad x \rightarrow \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Po prejšnjem razdelku je posplošeno odvajanje D_{MN} normalen operator na prostoru $C^2(L)$. Neposredno matrično množenje pokaže, da je $C^2(H)$ invarianten podprostor za D_{MN} in $D_{MN}|_{C^2(H)} = D_{AB}$. Torej je D_{AB} subnormalen operator in podoben sklep pove, da je subnormalen tudi operator T_{AB} .

Za dokaz v obratno smer bomo potrebovali naslednji izrek Brama in Halmosa ([16],[12]):

Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ je subnormalen natanko tedaj, ko je

$$(12.1) \quad \sum_{j,k=0}^n \langle T^j \varepsilon_k, T^k \varepsilon_j \rangle \geq 0$$

za vsako končno podmnožico $\{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n\} \subseteq H$.

Predpostavimo, da je D_{AB} subnormalen operator. Potence operatorja D_{AB} lahko izrazimo po formuli

$$D_{AB}^j X = \sum_{s=0}^j (-1)^s \binom{j}{s} A^{j-s} X B^s, \quad X \in C^2(H), j=0,1,2,\dots$$

če upoštevamo še definicijo skalarnega produkta v $C^2(H)$, vidimo, da se pogoj (12.1) za operator $T=D_{AB}$ glasi takole:

$$(12.2) \quad \sum_{j,k=0}^n \sum_{r=0}^j \sum_{s=0}^k (-1)^{r+s} \binom{j}{r} \binom{k}{s} \tau(B^{*s} X_j^* A^{k-s} A^{j-r} X_k B^r) \geq 0$$

kjer so $X_0, \dots, X_n$ poljubni elementi prostora $C^2(H)$. Vstavimo sedaj v (12.2) $X_j = \xi_j \otimes \eta_j$, kjer so ξ_j, η_j poljubni vektorji iz prostora H za vsak $j=0, \dots, n$. Po enostavnem računu dobimo

$$(12.3) \quad \sum_{j,k=0}^n \sum_{r=0}^j \sum_{s=0}^k (-1)^{r+s} \binom{j}{r} \binom{k}{s} \langle A^{j-r} \xi_k, A^{k-s} \xi_j \rangle \langle B^{*s} \eta_j, B^{*r} \eta_k \rangle \geq 0$$

Pokazali bomo, kako sledi iz (12.3) subnormalnost operatorja A . Dokaz, da je operator B^* subnormalen, je podoben. Brez škode za splošnost smemo vzeti, da je 0 približna lastna vrednost operatorja B^* . (V nasprotnem primeru nadomestimo operatorja A in B z $A-\lambda I$ in $B-\lambda I$, kjer je $\bar{\lambda}$ približna lastna vrednost operatorja B^* .) Naj bo (ζ_m) odgovarjajoče zaporedje približnih lastnih vektorjev ($\|\zeta_m\|=1$ in $\lim \|B^* \zeta_m\|=0$). Vstavimo v (12.3) $\eta_0 = \eta_1 = \dots = \eta_n = \zeta_m$ in nato pošljimo m proti neskončnosti. Dobimo

$$\sum_{j,k=0}^n \langle A^j \xi_k, A^k \xi_j \rangle \geq 0$$

Po Bram-Halmosevem izreku je to zadosten pogoj za subnormalnost operatorja A .

Dokaz, da tudi subnormalnost operatorja T_{AB} vključuje subnormalnost operatorjev A in B^* je podoben. Namesto pogoja (12.3) imamo sedaj analogen pogoj

$$(12.4) \quad \sum_{j,k=0}^n \langle A^j \xi_k, A^k \xi_j \rangle \langle B^{*k} \eta_j, B^{*j} \eta_k \rangle \geq 0$$

Ker smo privzeli, da je $A \neq 0$ in $B \neq 0$, imamo $T_{AB} \neq 0$. Ker je norma vsakega

subnormalnega operatorja enaka njegovemu spektralnemu radiju [30, str. 311], je $\sigma(T_{AB}) \neq 0$. Izrek Browna in Pearcy-a [14] pove, da je $\sigma(T_{AB}) = \sigma(A)\sigma(B)$; torej je $\sigma(B) \neq 0$. Zato obstaja točka $\beta \neq 0$ v robu množice $\sigma(B^*)$. Ta točka je približna lastna vrednost operatorja B^* ; naj bo (ε_m) ustrezno zaporedje približnih lastnih vektorjev. Nadomestimo sedaj v (12.4) vse vektorje η_j z istim vektorjem ε_m in pošljimo nato m proti neskončnosti. Dobimo

$$\sum_{j,k=0}^n \beta^k \bar{\beta}^j \langle A^j \varepsilon_k, A^k \varepsilon_j \rangle \geq 0$$

To pa je zadosten pogoj za subnormalnost operatorja A , saj so vektorji ε_j poljubni in $\beta \neq 0$. //

Opombe. (i) Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ imenujemo kvazinormalen, če komutira z operatorjem T^*T . Vsak normalen operator je očitno kvazinormalen. Dokazati je mogoče, da je vsak kvazinormalen operator subnormalen [16, str. 115] in ni težko videti, da je vsak subnormalen operator hiponormalen. Kljub tem odnosom pa je karakterizacija kvazinormalnih posplošenih odvajanj na $C^2(H)$ nekoliko drugačna od karakterizacije subnormalnih in hiponormalnih posplošenih odvajanj. Operator D_{AB} je kvazinormalen natanko v enem od naslednjih primerov: (1) operatorja A in B sta oba normalna; (2) obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da je $A = \lambda I$ in operator $(B - \lambda I)^*$ kvazinormalen; (3) obstaja tak $\lambda \in \mathbb{C}$, da je $B = \lambda I$ in operator $A - \lambda I$ kvazinormalen. Za operatorje T_{AB} pa velja pričakovana trditev: T_{AB} je kvazinormalen operator natanko tedaj, ko sta kvazinormalna operatorja A in B^* (pri pogoju $A \neq 0 \neq B$). Dokaz obeh trditev je v [39].

(ii) Za poljubna unitarna operatorja U, V na Hilbertovem prostoru H je T_{UV} unitaren operator na prostoru $C^2(H)$. Ker je $C^2(H)$ Hilbertov prostor, je na njem mnogo unitarnih operatorjev, ki se ne dajo izraziti v obliki T_{AB} . V nasprotju s tem pa je mogoče na ostalih simetričnih normiranih idealih in na algebri $\mathcal{B}(H)$ opredeliti vse surjektivne izometrije. Vse imajo obliko $X \mapsto UXV$ ali pa $X \mapsto UX^T V$, kjer sta U in V unitarna operatorja na prostoru H in kjer označuje X^T operatorju X transponirani operator glede na dano ortonormirano bazo prostora H . Za algebre je dokazal to že Kadison, za simetrične normirane ideale pa Sourour v [51].

DODATEK

Posplošitev Jacobsonovega izreka o gostoti

V tem dodatku bomo posplošili Jacobsonov izrek o gostoti na module, ki vsebujejo pravi absolutno maksimalni podmodul in navedli dve posledici te posplošitve za elementarne operatorje.

Levi modul A nad kolobarjem E imenujemo ireducibilen, če je $A \neq \{0\}$ in če A ne vsebuje nobenega pravega netrivialnega podmodula.

Vsak netrivialen endomorfizem ireducibilnega E -modula A je izomorfizem, kajti njegovo jedro in zaloga vrednosti sta podmodula v A . Torej je kolobar vseh endomorfizmov modula A , $\text{End}_E(A)$, obseg. (To preprosto dejstvo je znano kot Schurova lema.)

D 1. IZREK (Jacobsonov izrek o gostoti). Naj bodo $a_1, \dots, a_r$ nad obsegom $\text{End}_E(A)$ linearno neodvisni, $b_1, \dots, b_r$ pa poljubni elementi E -modula A . Potem obstaja tak $E \in E$, da je

$$(D1) \quad Ea_i = b_i, \quad i=1, \dots, r$$

Dokaz izreka D 1 najdemo lahko v [36] in [57], izrek sam pa sledi tudi iz naslednje posplošitve, ki jo bomo dokazali tukaj.

D 2. IZREK. Naj bo A modul nad kolobarjem E in K vsota vseh pravih podmodulov modula A . (K torej vsebuje vse prave podmodule modula A .) Privzemimo, da $EA \not\subseteq K$ (torej je $K \neq A$) in naj bo $\pi: A \rightarrow A/K$ naravna preslikava. Naj bodo a_i , $i=1, \dots, r$, taki elementi modula A , da so elementi $\pi(a_i)$ linearno neodvisni nad obsegom

$$E' = \text{End}_E(A/K)$$

(E' je obseg, ker je E -modul A/K ireducibilen.) Potem za poljubne $b_i \in A$, $i=1, \dots, r$, obstaja tak $E \in E$, da velja (D1).

Izrek D 1 je poseben primer izreka D 2, ko je $K=\{0\}$. Izrek D 2 bomo dokazali z indukcijo na r , pri čemer pa bomo primer $r=2$ obravnavali posebej v naslednji lemi. Ker je dokaz te leme podoben dokazu leme 9 v [57, str. 77], ne bomo navedli vseh podrobnosti.

D 3. LEMA. Izrek D 2 velja za $r=2$.

Dokaz. Najprej se prepričajmo, da je dovolj dokazati obstoj takega elementa $F \in E$, da velja

$$(D2) \quad Fa_1 = 0 \quad \text{in} \quad \pi(Fa_2) \neq 0$$

Iz $\pi(Fa_2) \neq 0$ namreč sledi $\pi(EFa_2) = E\pi(Fa_2) \neq 0$ (ker je modul A/K ireducibilen, [57, str. 71]). Torej podmodul EFa_2 modula A ni vsebovan v K in je zato $EFa_2 = A$. Potemtakem obstaja tak $G \in A$, da je $GFa_2 = b_2$. Element $E_2 = GF$ sedaj ustreza zahtevama $E_2a_1 = 0$ in $E_2a_2 = b_2$. Ker sta elementa a_1 in a_2 enakovredna, obstaja tudi tak $E_1 \in E$, da je $E_1a_1 = b_1$ in $E_1a_2 = 0$. Potem vsota $E = E_1 + E_2$ ustreza pogoju (D1) za $r=2$.

Denimo, da element F ne bi obstajal. Potem za vsak $X \in E$ iz $Xa_1 = 0$ sledi $X\pi(a_2) = \pi(Xa_2) = 0$. Torej je s predpisom $f(Xa_1) = X\pi(a_2)$ definirana (enolična) preslikava $f: Ea_1 \rightarrow A/K$. Lahko je preveriti, da je f homomorfizem E -modulov. Ker je po hipotezi $\pi(a_1) \neq 0$, je $Ea_1 = A$. (Tukaj sklepamo tako kot v prejšnjem odstavku za element Fa_2 .) Ker je $\pi(a_2) \neq 0$ in A/K ireducibilen modul, je $E\pi(a_2) = A/K$. Tako vidimo, da je f homomorfizem modula A na modul A/K . Zaradi ireducibilnosti modula A/K je $\ker f$ maksimalni podmodul v A , torej $\ker f = K$ (tukaj je $\ker f$ seveda jedro homomorfizma f). Potemtakem inducira f endomorfizem f' modula A/K , pri čemer velja $f'(X\pi(a_1)) = X\pi(a_2)$ za vsak $X \in E$. Od tod sledi med drugim $f'(\pi(a_1)) = \pi(a_2)$ (glejte [57, str. 77]), kar pa nasprotuje linearni neodvisnosti elementov $\pi(a_1)$ in $\pi(a_2)$ nad obsegom E ; saj je $f' \in E$. //

D 4. Dokaz izreka D 2. Izrek bomo dokazali z indukcijo na r . Za $r=1$ očitno velja. Privzemimo, da velja za $r-1$. Kot v dokazu leme D 3 vidimo, da je tudi tukaj dovolj dokazati existenco takega elementa $F \in E$, da je

$$(D3) \quad Fa_1 = \dots = Fa_{r-1} = 0 \quad \text{in} \quad \pi(Fa_r) \neq 0$$

Po indukcijski predpostavki obstaja tak $C \in E$, da je

$$(D4) \quad Ca_1 = \dots = Ca_{r-2} = 0 \quad \text{in} \quad Ca_r = a_r$$

Sedaj imamo dve možnosti. Če sta elementa $\pi(Ca_{r-1})$ in $\pi(a_r)$ linearno neodvisna nad obsegom E' , potem obstaja po lemi D 3 tak $D \in E$, da je $DCa_{r-1} = 0$ in $Da_r = a_r$. Tedaj pa element $F = DC \in E$ ustreza pogoju (D3). Tako preostane za dokazati še druga možnost, ko je

$$\pi(Ca_{r-1}) = f(\pi(a_r))$$

za kak $f \in E'$. Izberimo tak $a \in A$, da je $\pi(a) = f(\pi(a_r))$. Potem je $\pi(a) = \pi(Ca_{r-1})$, torej

$$(D5) \quad Ca_{r-1} = a + c$$

za primeren $c \in K$. Ker so elementi $\pi(a_1), \dots, \pi(a_{r-2}), \pi(a_{r-1} - a - c)$ očitno linearno neodvisni nad obsegom E' (saj je $\pi(a_{r-1} - a - c) = \pi(a_{r-1}) - \pi(a) = \pi(a_{r-1}) - f(\pi(a_r))$ in $f \in E'$), obstaja po indukcijski predpostavki tak $D \in E$, da velja

$$(D6) \quad Da_1 = \dots = Da_{r-2} = 0$$

in

$$(D7) \quad D(a_{r-1} - a - c) = -a - c$$

Postavimo sedaj $F = D - DC + C$. Potem imamo $Fa_1 = \dots = Fa_{r-2} = 0$ (po (D4) in (D6)),

$$\begin{aligned} Fa_{r-1} &= D(a_{r-1} - a - c) + a + c && \text{(po (D5))} \\ &= 0 && \text{(po (D7))} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} Fa_r &= Da_r - Da_r + a_r && \text{(po (D4))} \\ &= a_r \end{aligned}$$

Ker je $\pi(a_r) \neq 0$, ustreza F vsem zahtevam (D3). //

Denimo sedaj, da je E kompleksna normirana algebra in A normiran E -modul (glejte [57, str. 28] za definicijo normiranih modulov nad algebra-mi). Če je vsota K vseh pravih podmodulov modula A pravi zaprt podmodul, potem je A/K ireducibilen normiran E -modul. Vsak endomorfizem modula A/K je hkrati omejen operator normiranega prostora A/K (glejte dokaz trditve

13 v [57, str. 80]). Torej je $\text{End}_E(A/K)$ normiran obseg. Ker je edina kompleksna algebra, ki je hkrati normiran obseg, algebra kompleksnih števil $\mathbb{C}$, je $\text{End}_E(A/K) = \mathbb{C}1$. Linearna neodvisnost elementov $\pi(a_i)$ v izreku D 2 je tedaj običajna linearna neodvisnost nad $\mathbb{C}$. Kot poseben primer teh razmišljanj lahko dokažemo milejšo obliko izreka 4.3 za normirane algebre z enim samim maksimalnim idealom.

D 5. KOROLAR. Naj vsebuje kompleksna normirana algebra A z enoto natanko en maksimalni dvostranski ideal K in naj bodo $a_i \in A$, $i=1, \dots, r$, taki elementi algebre A , da so odseki $a_i + K$ linearno neodvisni v A/K . Potem za poljubne $b_i \in A$, $i=1, \dots, r$, obstaja tako naravno število m in taki elementi x_j, y_j algebre A , da velja

$$\sum_{j=1}^m x_j a_i y_j = b_i, \quad i=1, \dots, r$$

Za dokaz korolarja zadošča opaziti, da je A normiran modul nad algebro E vseh elementarnih operatorjev na A , K absolutno maksimalni podmodul ter uporabiti izrek D 2.

Na podoben način kot smo v prvem razdelku dokazali korolar 1.3 sledi sedaj iz korolarja D 5

D 6. KOROLAR. Naj vsebuje normirana kompleksna algebra z enoto samo en pravi maksimalni ideal K . Nadalje naj bo J poljuben dvostranski ideal algebre A in

$$Ex = \sum_{i=1}^r a_i x b_i, \quad x \in A$$

elementaren operator na algebri A . Če je zaloga vrednosti operatorja E vsebovana v idealu J in elementi $b_i + K$ algebre A/K linearno neodvisni, potem je $a_i \in J$ za vsak $i=1, \dots, r$.

Za algebro $B(H)$ sta korolar D 6 dokazala že Apostol in Fialkow.

LITERATURA

- [1] J. Anderson, C. Foias; Properties which normal operators share with normal derivations and related operators, *Pac. J. Math.* 61 (1975) 313-325.
- [2] C. Apostol; Inner derivations with closed range, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 21 (1976) 249-265.
- [3] C. Apostol, L.A. Fialkow, D.A. Herrero, D. Voiculescu; Approximation of Hilbert space operators Vol.II, Research Notes in Math., Nr. 102, Pitman, Boston (1984).
- [4] C. Apostol, L. Zsido; Ideals in W^* -algebras and the function η of A. Brown and C. Pearcy, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 18 (1973) 1151-1170.
- [5] W.B. Arveson; Subalgebras of C^* -algebras, *Acta Math.* 123 (1969) 141-224.
- [6] W.B. Arveson; Subalgebras of C^* -algebras II, *Acta Math.* 128 (1972) 271-308.
- [7] W.B. Arveson; An invitation to C^* -algebras, Grad. Texts in Math. Nr. 39, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [8] W.B. Arveson; Notes on extensions of C^* -algebras, *Duke Math. J.* 44 (1977) 329-355.
- [9] B.A. Barnes, G.J. Murphy, M.R.F. Smyth, T.T. West; Riesz and Fredholm theory in Banach algebras, Research Notes in Math., Nr. 67, Pitman, Boston (1982).
- [10] F.F. Bonsall, J. Duncan; Numerical ranges of operators on normed spaces and elements of normed algebras, London Math. Soc. Lecture Note Series 2, Cambridge University Press, Cambridge (1971).
- [11] F.F. Bonsall, J. Duncan; Numerical ranges II, London Math. Soc. Lecture Note Series 10, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [12] J. Bram; Subnormal operators, *Duke Math. J.* 22 (1955) 75-94.
- [13] A. Brown, C.M. Pearcy; Structure of commutators of operators, *Ann. of Math.* 82 (1965) 112-127.
- [14] A. Brown, C.M. Pearcy; Spectra of tensor product of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966) 162-169.
- [15] W. Calkin; Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, *Ann. of Math.* 42 (1941) 839-873.
- [16] J.B. Conway; Subnormal operators, Research Notes in Math., Nr. 102, Pitman, Boston (1981).
- [17] R.E. Curto; The spectra of elementary operators, *Indiana Univ. Math. J.* 32 (1983) 193-197.
- [18] A.M. Davie; Classification of essentially normal operators, Spaces of Analytic Functions, Springer-Verlag Lecture Notes 512 (1976) 31-55.

- [19] R.G. Douglas; Banach algebra techniques in operator theory, Pure and Applied Math., Vol. 49, Academic Press, New York (1972).
- [20] R.G. Douglas; C*-algebra extensions and K-homology, Annals of Math. Studies, Nr. 95, Princeton University Press, Princeton (1980).
- [21] L.A. Fialkow; A note on norm ideals and the operator $X \rightarrow AX - XB$, *Israel J. Math.* 32 (1979) 331-348.
- [22] L.A. Fialkow; Elements of spectral theory for generalized derivations, *J. Operator Theory* 3 (1980) 89-113.
- [23] L.A. Fialkow; Elements of spectral theory for generalized derivations II: the semi-Fredholm domain, *Can. J. Math.* 33 (1981) 1205-1231.
- [24] L.A. Fialkow; Spectral properties of elementary operators II (Preprint).
- [25] P.A. Fillmore, J.G. Stampfli, J.P. Williams; On the essential numerical range, the essential spectrum, and a problem of Halmos, *Acta Sci. Math. (Szeged)* 33 (1972) 179-192.
- [26] C.K. Fong, A.R. Sourour; On the operator identity $\sum A_k X B_k = 0$, *Can. J. Math.* 31 (1979) 845-857.
- [27] B. Gramsch; Eine Idealstruktur Banachscher Operatoralgebren, *J. Reine Angew. Math.* 225 (1967) 97-115.
- [28] P.R. Halmos; Ten problems in Hilbert space, *Bull. Amer. Math. Soc.* 76 (1970) 887-933.
- [29] P.R. Halmos; Naive set theory, Undergraduate Texts in Math., Springer-Verlag, Berlin (1974).
- [30] P.R. Halmos; A Hilbert space problem book, Graduate Texts in Math., Nr. 19, Springer, New York (1982).
- [31] R. Harte; Spectral mapping theorems, *Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A* 72 (1972) 89-107.
- [32] R. Harte; Tensor products, multiplication operators and the spectral mapping theorem, *Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A* 73 (1973) 285-302.
- [33] D.A. Herrero; Approximation of Hilbert space operators Vol. I, Research Notes in Math. Nr. 72, Pitman, Boston (1982).
- [34] T. Ichinose; Spectral properties of tensor products of linear operators I, *Trans. Amer. Math. Soc.* 235 (1978) 75-113.
- [35] V.I. Istratescu; Introduction to linear operator theory, Pure and Applied Math. 65, Marcel Dekker, INC, New York (1981).
- [36] N. Jacobson; Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 37, Providence (1956).
- [37] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri; Classical Banach spaces I (sequence spaces), *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 92, Springer-Verlag, Berlin (1977).
- [38] G. Lumer, M. Rosenblum; Linear operator equations, *Proc. Amer. Math. Soc.* 10 (1959) 32-41.
- [39] B. Magajna; On subnormality of generalized derivations and tensor products, *Bull. Austral. Math. Soc.* 31 (1985) 235-243.

- [40] M. Mathieu; Spectral theory for multiplication operators on C^* -algebras, *Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A* 83 (1983) 231-249.
- [41] J. von Neumann; Charakterisierung des Spectrums eines Integral Operators, Hermann, Paris (1935).
- [42] A. Pietsch; Operator ideals, Mathematische Monographien, Nr. 16, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1978).
- [43] H. Radjavi, P. Rosenthal; Invariant subspaces, *Ergebnisse der Math.*, Nr. 77, Springer-Verlag, Berlin (1973).
- [44] J.R. Ringrose; Compact non-self-adjoint operators, Van Nostrand Reinhold Math. Studies 35, London (1971).
- [45] M. Rosenblum; On the operator equation $BX - XA = 0$, *Duke Math. J.* 23 (1956) 263-269.
- [46] W. Rudin; Functional analysis, McGraw-Hill Book Company, New York (1973).
- [47] R. Schatten; A theory of cross spaces, *Annals of Math. Studies*, Nr. 26, Princeton University Press, Princeton (1950).
- [48] R. Schatten; Norm ideals of completely continuous operators, *Ergebnisse der Math.*, Nr. 27, Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [49] S.Y. Shaw; On numerical ranges of generalized derivations and related properties, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* 36 (1984) 134-142.
- [50] A.M. Sinclair; Jordan homomorphisms and derivations on semi-simple Banach algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 24 (1970) 209-214.
- [51] A.R. Sourour; Isometries of norm ideals of compact operators, *J. Funct. Anal.* 43 (1981) 69-77.
- [52] J.G. Stampfli; The norm of a derivation, *Pac. J. Math.* 33 (1970) 737-747.
- [53] P. Suppes; Axiomatic set theory, D. Van Nostrand Company, Inc., London (1960).
- [54] M. Takesaki; Theory of operator algebras I, Springer-Verlag, New York (1979).
- [55] J.L. Taylor; A joint spectrum for several commuting operators, *J. Funct. Anal.* 6 (1970) 172-191.
- [56] I. Vidav; Uvod v teorijo C^* -algeber, Postdiplomski seminar iz matematike 12, Ljubljana (1979).
- [57] I. Vidav; Banachove algebre, Postdiplomski seminar iz matematike 11, Ljubljana (1982).
- [58] I. Vidav; Linearni operatorji v Banachovih prostorih, Postdiplomski seminar iz matematike 14, Ljubljana (1982).
- [59] D. Voiculescu; A non-commutative Weyl-von Neumann theorem, *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.* 21 (1976) 97-113.
- [60] J. Kyle; Numerical ranges of derivations, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 21 (1978) 33-39.
- [61] K. Mattila; Complex strict and uniform convexity and hyponormal operators, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 96 (1984) 483-493.

OZNAKE

števila, ki sledijo pojasnilom, pomenijo strani, kjer so simboli definirani.

Prostori

X, Y, Z	Banachovi prostori
H, L, M	Hilbertovi prostori
$L \leq H$	L je podprostor prostora H
$L^\perp$	ortogonalni komplement podprostora L
$\bar{H}$	prostoru H konjugirani (nasprotni) Hilbertov prostor, 40
$H \oplus L$	direktna vsota Hilbertovih prostorov H in L
$H \otimes L$	tenzorski produkt Hilbertovih prostorov H in L

Algebre in ideali

A	splošna (Banachova) algebra
$B(H)$	algebra vseh omejenih operatorjev na prostoru H
$K(H)$	ideal kompaktnih operatorjev ali pa maksimalni ideal v $B(H)$
$C(H)$	Calkinova algebra, 9
$C^p(H)$	von Neumann-Schattenov razred, 39
E	algebra elementarnih operatorjev na splošni (Banachovi) algebri
$\text{End}_E(A)$	kolobar endomorfizmov E -modula A

Splošni operatorji

A, B, C, T, X, Y	linearni operatorji
$A \oplus B$	direktna vsota operatorjev na Hilbertovih prostorih
$A \otimes B$	tenzorski produkt operatorjev na Hilbertovih prostorih
$P_{\rightarrow L}$	ortogonalni projektor na podprostor L
$A L$	zožitev operatorja A na podprostor L
A_L	kompresija operatorja A na podprostor L , 15
A^*	operatorju A adjungirani operator

$[A, B]$	$AB - BA$
$[A]$	$A^*A - AA^*$

Elementarni operatorji

E_{AB}, E	splošni elementarni operator, 3, 8
D_{AB}	posplošeno odvajanje, 3
T_{AB}	operator $X \rightarrow AXB$, 66
L_A	levo množenje z operatorjem A, 47
R_A	desno množenje z operatorjem A, 47

Operatorjem prirejeni parametri

$\sigma(A)$	spekter operatorja A
$W(A)$	prostorski numerični zaklad operatorja A, 47
$V(A)$	algebraični numerični zaklad operatorja A, 47
$w(A)$	numerični radij operatorja A
$V_e(A)$	bistveni numerični zaklad operatorja A, 49, 50
$W_A(A)$	maksimalni numerični zaklad operatorja A, 30
$W_n(A)$	normalizirani maksimalni numerični zaklad, 42
$W_{(n)}(A)$	n-ti prostorski matrični zaklad operatorja A, 63
$\rho(A)$	numerična razdalja operatorja A od množice skalarnih operatorjev, 36
$\tau(A)$	sled operatorja A, 40

Množicam operatorjev prirejeni parametri

$\alpha(A_1, \dots, A_r)$	mera linearne neodvisnosti, 15
$\beta(A_1, \dots, A_r)$	str. 15
$\gamma(A_1, \dots, A_r)$	str. 15
$\alpha_e(A_1, \dots, A_r)$	mera bistvene linearne neodvisnosti, 23
$\delta_B(A)$	razdalja operatorja A od množice skalarnih mnogo- kratnikov operatorja B, 32
$\delta(A, B)$	str. 42

Nekatere splošne oznake

$\bar{V}$	zaprtje množice V
$(V)_\varepsilon$	str. 53
$\text{co}[V]$	konveksna ogrinjača množice V
$\hat{\sigma}$	polinomska ogrinjača podmnožice σ kompleksne ravnine
$\arg(\lambda)$	argument kompleksnega števila λ
$\text{Re}(\lambda)$	realni del kompleksnega števila λ
$\langle \xi, \eta \rangle$	skalarni produkt vektorjev ξ in η
S_r	enotska sfera v $\mathbb{R}^r$
F_r	družina vseh r -razsežnih podprostorov danega Hilbertovega prostora
π	kvocientna preslikava (npr. iz $B(H)$ v $B(H)/K(H)$)