

Mednarodna matematična olimpijada 2023 na Japonskem



LUKA HORJAK

→ Med 2. in 13. julijem je v Chibi na Japonskem potekala 64. Mednarodna matematična olimpijada. Slovensko ekipo so na tekmovanju zastopali Erik Červek Roškarič (II. gimnazija Maribor), Lenart Dolinar (Gimnazija Bežigrad), Katarina Grilj (Srednja šola Slovenska Bistrica), Kaja Rajter (II. gimnazija Maribor), Matija Skrt (Gimnazija Nova Gorica) in Hugo Trebše (Gimnazija Bežigrad). Tekmovalce sva na olimpijadi spremljala Gregor Dolinar in Luka Horjak.

Matija Skrt je ponovil svoj lanski dosežek in znova osvojil bronasto medaljo. Tokrat se z Japonskega prav vsi naši tekmovalci vračajo s pohvalo, ki jo prejmejo tisti udeleženci, ki v celoti pravilno rešijo vsaj eno izmed šestih zahtevnih nalog. Slovenija je med 112 sodelujočimi državami zasedla 64. mesto. Prvo mesto je že petič zapored osvojila Kitajska – edina država, ki si je letos prislužila 6 zlatih medalj, sledile pa so ji ZDA, Južna Koreja in na 4. mestu še Romunija, ki je bila najuspešnejša med evropskimi državami.

Na olimpijadi sta tekmovalce čakala dva tekmovalna dneva. Vsak dan so imeli 4 ure in pol časa za reševanje treh zahtevnih nalog. Te nekaj mesecev pred tekmovanjem predlagajo države, ki ne gostijo tekmovanja, organizator pa je zadolžen za sestavo komisije, ki izmed teh izberejo najprimernejše, s katerimi sestavijo ožji izbor. Letos je 52 držav skupaj predlagalo 167 nalog, izmed teh jih je v ožji izbor prišlo 30. Izmed teh nekaj dni pred samim tekmovanjem vodje ekip glasujejo za 6 problemov, ki se nato pojavijo na tekmovanju. O njihovi težavnosti priča dejstvo, da je vseh 42 možnih točk doseglo le 5 izmed 618 tekmovalcev, povprečno število točk pa je bilo 17,7. Da si bomo te izzive lažje predstavljali, si oglejmo dve nalogi s tekmovanja in njuni rešitvi. Nalogi sta predlagali Kolumbija in Nizozemska.



SLIKA 1.

Slovenska ekipa na 64. Mednarodni matematični olimpijadi

Naloga 1. Določi vsa sestavljena naravna števila $n > 1$, ki imajo naslednjo lastnost: če so $d_1, d_2, \dots, d_k$ vsi pozitivni delitelji števila n , pri čemer je $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$, potem d_i deli $d_{i+1} + d_{i+2}$ za vsak $1 \leq i \leq k - 2$.

Rešitev 1. naloge Da razvijemo intuicijo, katera naravna števila sploh rešijo nalogo, si oglejmo nekaj posebnih primerov. Pogosta strategija je vstavljanje konkretnih vrednosti, na primer $n = 12$, lahko pa se tega lotimo splošneje. Oglejmo si najprej števila, ki imajo zelo malo deliteljev. Ker naloga sprašuje le o sestavljenih številih, začnimo s primerom $n = pq$, kjer sta p in q praštevili.

Če velja $p < q$, se lahko hitro prepričamo, da so 1, p , q in pq kar vsi delitelji števila n , poleg tega pa so še urejeni po velikosti. Tako mora veljati

$$\blacksquare \quad 1 \mid p + q \quad \text{in} \quad p \mid q + pq.$$

Prva deljivost očitno vedno velja, pri drugi pa naletimo na težavo, saj mora veljati $p \mid q$. To seveda

ne velja, saj smo predpostavili, da sta p in q različni praštevil.

Majhno število deliteljev dobimo tudi v primeru $p = q$ oziroma $n = p^2$, kjer je p praštevilo. Vsi delitelji števila n so tako kar 1, p in p^2 . Ni težko videti, da je v tem primeru pogoj z deljivostjo izpolnjen, zato kvadrati praštevil izpolnijo dan pogoj.

Na podlagi primera $n = pq$ se zdi, da imajo iskana naravna števila n največ enega praštevilskega delitelja, oziroma, da so to natanko potence praštevil. Ta sum lahko dodatno potrdimo z dejstvom, da vse potence praštevil res izpolnijo dan pogoj. Če je $n = p^\ell$, so namreč vsi delitelji kar 1, p , p^2 , ..., p^ℓ . Pogoj je tako ekvivalenten

$$\blacksquare \quad p^i \mid p^{i+1} + p^{i+2}$$

za vse $0 \leq i \leq \ell - 2$, kar seveda drži.

Sedaj predpostavimo, da ima n vsaj dva različna praštevilska delitelja. Naj bosta p, q , kjer je $p < q$, njegova najmanjša praštevilska delitelja. Za delitelje števila n torej velja $d_1 = 1$, $d_2 = p$, za d_3 pa imamo 2 možnosti – lahko velja $d_3 = q$, ali pa $d_3 = p^2$.

Obravnavajmo najprej primer, ko je $d_3 = q$. V tem primeru mora veljati deljivost

$$\blacksquare \quad p \mid q + d_4.$$

Za primerno izbiro delitelja d_4 bi ta deljivost lahko bila izpolnjena. To nam celo zagotavlja Dirichletov izrek, ki pravi, da za vsaki tuji si naravni števili a in b obstaja neskončno mnogo praštevil oblike $ak + b$.⁴ Dovolj je namreč najti praštevilo oblike $d_4 = kp - q$, ki obstaja po Dirichletovem izreku. Izrek sicer ne zagotavlja, da bo pri tem še vedno izpolnjena urejenost deliteljev, nam pa pove, da ne bomo prišli do protislovja na elementaren način. Z najmanjšimi delitelji tako ne bomo prišli prav daleč.

Drugi ekstrem so največji delitelji števila n . Znano je, da delitelji naravnih števil nastopajo v parih – če je d delitelj števila n , je to tudi $\frac{n}{d}$. S tem predpisom se najmanjši delitelji preslikajo v največje. Največji delitelji števila n so torej n , $\frac{n}{p}$ in $\frac{n}{q}$. Sledi, da mora veljati

$$\blacksquare \quad \frac{n}{q} \mid \frac{n}{p} + n,$$

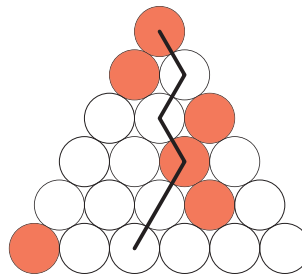
kar je ekvivalentno

$$\blacksquare \quad \frac{\frac{n}{p} + n}{\frac{n}{q}} = \frac{q}{p} + q \in \mathbb{N}.$$

To seveda ni mogoče, saj sta p in q različni praštevil.

Preostane nam še primer, ko je $d_3 = p^2$. V tem primeru so najmanjši delitelji števila n po vrsti 1, p , p^2 , ..., p^ℓ in q . Tudi tu lahko hitro pridemo do protislovja, in sicer z zaporednimi delitelji $p^{\ell-1}$, p^ℓ in q ali pa $\frac{n}{q}$, $\frac{n}{p^\ell}$ in $\frac{n}{p^{\ell-1}}$. Pogoj tako res izpolnijo natanko potence praštevil.

Naloga 5. Naj bo n naravno število. *Japonski trikotnik* je sestavljen iz $1 + 2 + \dots + n$ krogov, ki so razporejeni v obliki enakostraničnega trikotnika, tako da je za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ v i -ti vrstici natanko i krogov in je v vsaki vrstici natanko en krog pobarvan rdeče. *Nindževa pot* v japonskem trikotniku je zaporedje n krogov, ki se začne v krogu v najvišji vrstici, nato pa se ponavljajoče nadaljuje iz trenutnega kroga v enega izmed krogov, ki sta neposredno pod njim, in se konča v najnižji vrstici. V odvisnosti od n poišči največji k , tako da za vsak japonski trikotnik obstaja nindževa pot, ki vsebuje vsaj k rdečih krogov.



SLIKA 2.

Primer nindževe poti za $n = 6$, ki vsebuje 2 rdeča kroga

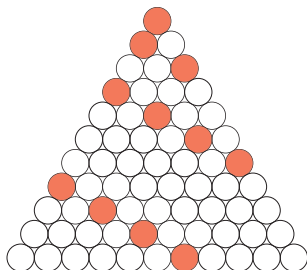
Rešitev 5. naloge Za začetek si oglejmo, kaj se zgodi za majhne vrednosti števila n . Ni težko videti, da pri $n = 1$ vedno dobimo nindževo pot dolžine 1, pri $n = 2$ pa pot dolžine 2. Podobno za $n = 3$ dobimo pot dolžine 2.

Nadaljnje konstrukcije lahko poiščemo rekurzivno. Intuitivno bi želeli v zaporednih vrsticah imeti

⁴Pri tem je število b lahko tudi negativno.



rdeče kroge čim bližje, a ne tako blizu, da bi lahko nindževa pot vsebovala oba. Tako lahko začnemo z rdečim krogom skrajno levo, v vsaki naslednji vrstici pa pozicijo rdečega trikotnika povečamo za 2. Tako dobimo nekakšne »diagonale«, ki jih vidimo na sliki 3.



SLIKA 3.

Japonski trikotnik, ki nam da mejo $k \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$

Opazimo, da lahko nindževa pot vsebuje kvečjemu en rdeč krog z vsake diagonale. Za omejitev števila k zadošča, da preštejemo te diagonale. Ni se težko prepričati, da i -ta diagonala vsebuje 2^{i-1} rdečih krogov (lahko tudi manj, če vsebuje rdeč krog v zadnji vrstici). Če trikotnik vsebuje ℓ diagonal, mora tako veljati

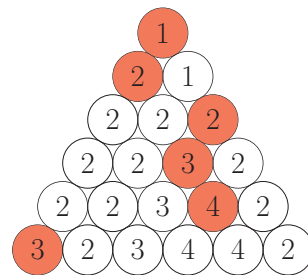
$$\blacksquare \quad n \leq 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{\ell-1} = 2^\ell - 1.$$

Ta neenakost je prvič izpolnjena pri $\ell = \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$. Tako dobimo $k \leq \lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$.

Sedaj moramo dokazati še, da vsak japonski trikotnik vsebuje nindževo pot z vsaj $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$ rdečimi krogi. Začnimo tako, da v vsak krog v japonskem trikotniku zapišemo število, in sicer največje možno število rdečih krogov, ki so vsebovani v neki poti od vrha trikotnika do tega kroga. Primer takega oštevilčenja lahko vidimo na sliki 4.

Sedaj je dovolj pokazati, da v zadnji vrstici obstaja krog s številom vsaj $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1$. Seveda se je dovolj omejiti na števila $n = 2^m$, saj lahko vsako nindževo pot razširimo do nindževe poti v večjem trikotniku.

Oglejmo si števila v dveh zaporednih vrsticah. Da dobimo števila v novi vrstici, za vsak krog vzamemo največje število v njegovih dveh predhodnikih. Če je krog rdeč, na koncu še prištejemo 1. Denimo, da so $v_1, v_2, \dots, v_i$ števila v i -ti vrstici, v_m pa je največje izmed teh. Sledi, da so števila v vrstici $i + 1$ večja ali enaka od $v_1, v_2, \dots, v_{m-1}, v_m, v_m, v_{m+1}, \dots, v_i$,



SLIKA 4.

Oštevilčenje trikotnika

pri čemer še nismo upoštevali rdečega kroga v vrstici $i + 1$.

Sedaj pridemo do naslednje pomembne ideje – opazujemo lahko vsoto števil v vrstici. Večja kot bo vsota, večja morajo namreč biti števila v tej vrstici. Po zgornji opazki je vsota števil v vrstici $i + 1$ večja ali enaka

$$\blacksquare \quad v_1 + v_2 + \dots + v_i + v_m + 1.$$

Sedaj zadošča dokazati, da je v vrstici $n = 2^t$ vsota večja ali enaka $t \cdot n + 1$. Po Dirichletovem principu bo namreč sledilo, da obstaja krog s številom vsaj $t + 1$, kar je ravno naš cilj. To dokažimo z indukcijo. Baza je seveda izpolnjena, saj je za $t = 0$ neenakost trivialno izpolnjena.

Sedaj si oglejmo $n = 2^{t+1}$. Vsota števil v vrstici $\frac{n}{2}$ je po indukcijski predpostavki večja ali enaka $t \cdot 2^t + 1$. V naslednji vrstici se vsota poveča za vsaj $v_m + 1$, kjer je v_m največji element vrstice 2^t . Po Dirichletovem principu pa velja, da je

$$\blacksquare \quad v_m \geq \frac{t \cdot 2^t + 1}{2^t} > t,$$

zato je vsota naslednje vrstice enaka vsaj

$$\blacksquare \quad t \cdot 2^t + 1 + (t + 1) + 1.$$

Opazimo lahko še, da se največji element z vsako novo vrstico lahko kvečjemu poveča. Tako je vsota v zadnji vrstici enaka vsaj

$$\blacksquare \quad t \cdot 2^t + 1 + 2^t \cdot (t + 1) + 2^t \cdot 1 = (t + 1) \cdot 2^{t+1} + 1,$$

kar smo želeli dokazati.

xxx