Lehrbuch

der

Arithmetik

für die

Unter-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Močnik,
k. k. Schulrath.

Zweite Abtheilung.

Für die III. und IV. Klasse.

Zehnte, verbesserte Auflage.

Wien.
Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.
1866.

Inhalts-Verzeichniß

der zweiten Abtheilung der Arithmetik.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Fünfter Abschnitt.

Sechster Abschnitt.

Erster Abschnitt.

Von den algebraischen Zahlen.

I. Erklärungen.

§. 1. Es gibt Größen, welche mit einander in Verbindung gebracht, sich vermöge ihres Gegensatzes entweder ganz oder theilweise aufheben. Z. B. 6 fl. Vermögen und 6 fl. Schulden heben sich gegenseitig ganz auf, sie sind einander entgegengesetzt; 10 fl. Vermögen und 6 fl. Schulden heben sich nur theilweise auf, indem durch ihre Verbindung, d. i. nach der Tilgung der Schulden, noch 4 fl. Vermögen übrigbleiben. Ein solcher Gegensatz kommt auch vor bei Gewinn und Verlust, bei Einnahmen und Ausgaben, bei der Richtung nach vorwärts und rückwärts, nach rechts und links, bei der Zeit nach und vor Christi Geburt, bei Graden der Wärme und Kälte in Bezug auf die Temperatur des Eispunctes, u. dgl.

Derselbe Begriff des Gegensatzes drängt sich auch bei unbenannten Zahlen nothwendig auf, wenn die Subtraction zweier Zahlen allgemein ausführbar werden soll. Beim Subtrahieren muß man in der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, . . . von der Zahl, welche als Minuend gegeben ist, um so viele Einheiten, als der Subtrahend anzeigt, rückwärts schreiten, und es ist die Zahl, zu welcher man in der Zahlenreihe dadurch gelangt, der gesuchte Rest. Dieses ist zunächst nur möglich, wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Ist der Rest zweier gleicher Zahlen z. B. 6—6 zu bestimmen, so muß man in der natürlichen Zahlenreihe von 6 aus bis 1, und dann von 1 noch um eine Einheit zurückschreiten, wodurch man die Null (0) erhält, durch welche das Nichtvorhandensein der Einheit ausgedrückt wird; man muß also, damit in diesem Falle der Rest durch das Rückwärtszählen gefunden werde, die natürliche Zahlenreihe durch die Voranstellung der 0 erweitern.

Um endlich die Subtraction auch dann ausführen zu können, wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, ist man genöthigt, auch Zahlen anzunehmen, welche durch das Rückwärtszählen von 0 aus erhalten werden. Es kommt dabei nur darauf an, daß die ursprünglich bloß nach vorwärts ohne Ende fortschreitende Zahlenreihe nach dem gleichen Bildungsgesetze von 0 auch nach rückwärts erweitert, und daß der Gegensatz der von 0 nach vorwärts und rückwärts fortschreitenden Zahlen entsprechend ausgedrückt werde. Letzteres geschieht, indem man die ursprünglich vorhandenen Zahlen, welche von 0 aus immer um eine Einheit nach vorwärts schreiten, **positiv**, die Zahlen aber, zu denen man gelangt, wenn man von 0 nach demselben Bildungsgesetze rückwärts schreitet, **negativ** nennt, und die ersteren mit dem Zeichen + (mehr), die letzteren mit dem Zeichen — (weniger) bezeichnet. Die dadurch entstehende zweiseitige Zahlenreihe ist daher

$$\ldots -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ \ldots$$

Während hier die positiven Zahlen die ursprünglichen Zahlen der natürlichen Zahlenreihe vorstellen, treten die negativen als Zahlen einer neuen Form auf, die den Gegensatz zu den positiven ausdrücken.

Es bedeutet z. B. — 1 eine Zahl, zu welcher man in der erweiterten Zahlenreihe gelangt, wenn man von 0 um 1 Einheit zurückschreitet, oder eine Zahl, von welcher man um 1 Einheit vorwärtszählen muß, um zur 0 zu gelangen; — 2 bedeutet eine Zahl, zu welcher man gelangt, wenn man von 0 um 2 Einheiten zurückschreitet, oder eine Zahl, von welcher man um 2 Einheiten vorwärtszählen muß, um zur 0 zu gelangen.

Um die erweiterte Zahlenreihe, sowie auch die später folgende Addition und Subtraction positiver und negativer Zahlen zu versinnlichen, trage man auf eine nach beiden Seiten unbegrenzte Gerade von einem Punkte 0 aus nach rechts und nach links eine als Einheit angenommene Strecke wiederholt auf und schreibe an die Enden der so erhaltenen Längen die durch diese dargestellten Zahlen.

$$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4 \quad +5$$

§. 2. Die mit Vorzeichen versehenen Zahlen werden **relative** oder **algebraische Zahlen** genannt, im Gegensatze zu den ursprünglichen Zahlen, welche **absolute Zahlen** heißen.

Jede algebraische Zahl, z. B. + 4 oder — 4, besteht aus einem Vorzeichen + oder — und einem Zahlwerthe, hier 4. Das **Vorzeichen** zeigt an, ob sich die Zahl auf der positiven oder negativen Seite der Zahlenreihe befindet. Der **Zahlwerth** ist eine absolute Zahl und zeigt an, welche Stelle die Zahl in der Reihe der positiven oder der negativen Zahlen einnimmt.

Das Zeichen + wird am Anfange eines Zahlenausdruckes und nach dem Gleichheitszeichen nicht angeschrieben, das Zeichen — darf nie weggelassen werden. Wenn daher vor einer Zahl kein Zeichen steht, so ist sie als positiv anzusehen; z. B. 4 bedeutet so viel als + 4.

Zwei Zahlen, welche gleichen Zahlwerth, aber verschiedene Vorzeichen haben, heißen einander **entgegengesetzt**.

II. Die vier Rechnungsarten mit algebraischen Zahlen.

1. Die Addition.

§. 3. Beim Addieren zweier algebraischer Zahlen schreitet man in der zweiseitigen Zahlenreihe von der ersten Zahl in derjenigen Richtung, welche das Vorzeichen der zweiten angibt, um so viele Einheiten fort, als der Zahlwerth dieser zweiten Zahl anzeigt; diejenige Zahl, zu welcher man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Eine algebraische Zahl, welche zu einer anderen addiert oder von ihr subtrahiert werden soll, umgibt man mit Klammern; es bedeutet z. B. $+3+(-4)$ die Summe, und $+3-(-4)$ den Unterschied der Zahlen $+3$ und -4.

Es soll z. B. die Summe $+4+(+3)$ bestimmt werden. Man wird in der Zahlenreihe von $+4$ aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fortschreiten, wodurch man zur Zahl $+7$ gelangt; folglich ist

$$+4+(+3)=+7.$$

Ist die Summe $+4+(-3)$ zu suchen, so schreitet man von der Zahl $+4$ aus in negativer Richtung um 3 Einheiten fort, und gelangt auf diese Weise zur Zahl $+1$; also ist

$$+4+(-3)=+1.$$

Man bestimme ferner die Summe $-4+(+3)$. Hier wird man von der Zahl -4 aus in positiver Richtung um 3 Einheiten fortschreiten; man gelangt dadurch zur Zahl -1, und es ist also

$$-4+(+3)=-1.$$

Um endlich die Summe $-4+(-3)$ zu erhalten, schreitet man von -4 aus in negativer Richtung um 3 Einheiten fort, wodurch man zur Zahl -7 gelangt; es ist somit

$$-4+(-3)=-7.$$

Aufgaben.

1) $+6+(+2)=\ldots$ 2) $-7+(-3)=\ldots$
3) $-5+(+4)=\ldots$ 4) $+4+(-6)=\ldots$
5) $+16+(-11)=\ldots$ 6) $-15+(-25)=\ldots$
7) $+33+(+18)=\ldots$ 8) $+68+(-79)=\ldots$
9) $-1284+(-2351)=\ldots$
10) $-2905+(+5107)=\ldots$
11) $+4238+(-3870)=\ldots$
12) $-37181+(-4089)=\ldots$
13) $+12+(-15)+(+17)=-3+(+17)=+14.$
14) $-35+(-52)+(+71)=\ldots$
15) $+378+(+709)+(-592)=\ldots$
16) $+1246+(+988)+(-799)+(-1091)=\ldots$
17) $-51345+(-10982)+(+27460)+(-8912)=\ldots$
18) $-381354+(+908642)+(-213458)+(31087)=\ldots$

2. Die Subtraction.

§. 4. Um den Unterschied zweier algebraischer Zahlen zu finden, schreite man in der Zahlenreihe vom Minuend aus in der entgegengesetzten Richtung, als sie das Vorzeichen des Subtrahends angibt, um so viele Einheiten fort, wie der Zahlwerth des Subtrahends anzeigt; diejenige Zahl der Zahlenreihe, zu welcher man auf diese Art gelangt, ist der gesuchte Unterschied.

Man findet hiernach

$$+5-(+3)=+2,$$
$$+5-(-3)=+8,$$
$$-5-(+3)=-8,$$
$$-5-(-3)=-2.$$

Derselbe Rechnungsgang findet aber auch statt, wenn man jedesmal zu dem Minuend das Entgegengesetzte des Subtrahends addiert. Es ist nämlich

$$+5+(-3)=+2,$$
$$+5+(+3)=+8,$$
$$-5+(-3)=-8,$$
$$-5+(+3)=-2;$$

und somit

$$+5-(+3)=+5+(-3),$$
$$+5-(-3)=+5+(+3),$$
$$-5-(+3)=-5+(-3),$$
$$-5-(-3)=-5+(+3).$$

Von einer algebraischen Zahl wird daher eine andere algebraische Zahl subtrahiert, wenn man zu dem Minuend das Entgegengesetzte des Subtrahends addiert.

Aufgaben.

1) $+25-(+16)=\ldots$ 2) $-50-(-25)=\ldots$
3) $-31-(+58)=\ldots$ 4) $+107-(-93)=\ldots$
5) $+343-(+212)=\ldots$ 6) $-704-(-481)=\ldots$
7) $+1558-(-1374)=\ldots$ 8) $-6606-(+3419)=\ldots$
9) $-125-(+302)+(+287)=\ldots$
10) $+3640-(-2583)-(+4395)=\ldots$
11) $-395107+(-402864)-(-780312)=\ldots$
12) $+75386-(+28908)-(-54221)+(-13570)=\ldots$

3. Die Multiplication.

§. 5. Um zwei algebraische Zahlen zu multiplicieren, nimmt man, je nachdem der Multiplicator positiv oder negativ ist, den Multiplicand selbst oder das Entgegengesetzte desselben so vielmal als Addend, als der Zahlwerth des Multiplicators angibt.

In Bezug auf die Zeichen der beiden Factoren können vier Fälle vorkommen:

$$+5\,.\,+3,$$
$$-5\,.\,+3,$$
$$+5\,.\,-3,$$
$$-5\,.\,-3.$$

Ist erstlich $+5$ mit $+3$ zu multiplicieren, so muß man den Multiplicand $+5$ selbst 3mal als Addend setzen; es ist also

$$+5\,.\,+3=+5+(+5)+(+5)=+15.$$

Eben so findet man

$$-5\,.\,+3=-5+(-5)+(-5)=-15$$

Hat man ferner $+5$ mit -3 zu multiplicieren, so muß man das Entgegengesetzte des Multiplicands, also -5, 3mal als Addend nehmen; folglich ist

$$+5 \,.\, -3 = -5 + (-5) + (-5) = -15.$$

Auf gleiche Weise erhält man:

$$-5 \,.\, -3 = +5 + (+5) + (+5) = +15.$$

Hieraus folgt:

1. Zwei gleichbezeichnete Factoren geben ein positives Product, zwei ungleich bezeichnete Factoren geben ein negatives Product.

2. Der Zahlwerth des Productes ist gleich dem Producte aus den Zahlwerthen der Factoren.

Aufgaben.

1) $+9 \,.\, +7 = \ldots$ 2) $-18 \,.\, -5 = \ldots$
3) $-17 \,.\, +8 = \ldots$ 4) $+43 \,.\, -6 = \ldots$
5) $-128 \,.\, +25 = \ldots$ 6) $+304 \,.\, -45 = \ldots$
7) $+457 \,.\, +99 = \ldots$ 8) $-5678 \,.\, -11 = \ldots$
9) $-329 \,.\, +549 = \ldots$ 10) $-4302 \,.\, +880 = \ldots$

§. 6. Sind mehr als zwei algebraische Zahlen mit einander zu multiplicieren, so ist in Bezug auf das Vorzeichen des Productes Folgendes zu merken:

1. Wenn alle Factoren positiv sind, so ist auch das Product positiv. Z. B.:

$$+2 \,.\, +3 \,.\, +4 = +6 \,.\, +4 = +24,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, +4 \,.\, +5 = +24 \,.\, +5 = +120.$$

2. Sind alle Factoren negativ, so ist das Product positiv oder negativ, je nachdem die Anzahl der Factoren eine gerade oder ungerade ist. Z. B.:

$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 = +6 \,.\, -4 = -24,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 = -24 \,.\, -5 = +120,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, -6 = +120 \,.\, -6 = -720,$$
$$-2 \,.\, -3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, -6 \,.\, -7 = -720 \,.\, -7 = \\ = +5040.$$

3. Sind endlich die Factoren theils positiv, theils negativ, so richtet sich das Zeichen des Productes bloß nach der Anzahl der negativen Factoren; das Product wird nämlich positiv oder negativ, je nachdem jene Anzahl eine gerade oder ungerade ist. Z. B.:

$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 = +6 \,.\, -4 = -24,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 = -24 \,.\, -5 = +120,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, +6 = +120 \,.\, +6 = +720,$$
$$+2 \,.\, +3 \,.\, -4 \,.\, -5 \,.\, +6 \,.\, -7 = +720 \,.\, -7 = \\ = -5040.$$

Aufgaben.

1) $+13 \,.\, +8 \,.\, +7 = \ldots$ 2) $-38 \,.\, -9 \,.\, -6 = \ldots$
3) $+315 \,.\, -19 + 10 = \ldots$
4) $-209 \,.\, -11 \,.\, +8 = \ldots$

5) $- 1356 \,.\, - 8 \,.\, - 8 \,.\, - 472 = \ldots$
6) $- 428 \,.\, - 376 \,.\, - 219 \,.\, + 105 = \ldots$
7) $- 783 \,.\, - 570 \,.\, - 138 + 279 = \ldots$
8) $- 2906 \,.\, + 2076 \,.\, - 149 \,.\, - 89 = \ldots$
9) $+ 137 \,.\, - 28 \,.\, - 119 \,.\, + 83 \,.\, - 75 \,.\, - 125 = \ldots$
10) $- 4315 \,.\, - 25 \,.\, + 368 \,.\, - 11 \,.\, - 49 \,.\, + 31 = \ldots$
11) $+ 960 \,.\, - 99 \,.\, - 138 \,.\, + 27 \,.\, - 34 \,.\, + 63 = \ldots$

4. Die Division.

§. 7. Das Divisionsverfahren läßt sich aus dem Satze herleiten, daß der Quotient mit dem Divisor multipliciert den Dividend geben muß.

a) Ist erstlich $+ 12$ durch $+ 4$ zu dividieren, so muß der Quotient $+ 3$ sein, weil nur eine positive Zahl $+ 3$ mit einer positiven $+ 4$ multipliciert ein positives Product $+ 12$ geben kann; also
$$+ 12 : + 4 = + 3.$$
b) Es sei $+ 12$ durch $- 4$ zu dividieren; hier muß man den Quotienten 3 so bezeichnen, daß er mit $- 4$ multipliciert $+ 12$ gibt; nun kann nur eine negative Zahl mit einer negativen multipliciert ein positives Product geben; der Quotient muß also negativ sein, und man hat:
$$+ 12 : - 4 = - 3.$$
c) Um $- 12$ durch $+ 4$ zu dividieren, muß man eine Zahl suchen, welche mit $+ 4$ multipliciert $- 12$ gibt; diese Zahl kann nur $- 3$ sein; somit:
$$- 12 : - 4 = - 3.$$
d) Durch dieselbe Schlußfolge erhält man auch:
$$- 12 : - 4 = + 3.$$

1. Der Quotient ist also positiv, wenn Dividend und Divisor gleiche Zeichen haben, und negativ, wenn Dividend und Divisor ungleich bezeichnet sind.

2. Der Zahlwerth des Quotienten ist gleich dem Quotienten aus den Zahlwerthen des Dividends und des Divisors.

Aufgaben.

1) $+ 264 : + 4 = \ldots$ 2) $- 4648 : - 8 = \ldots$
3) $+ 3840 : - 30 = \ldots$ 4) $- 2568 : + 12 = \ldots$
5) $+ 10633 : - 49 = \ldots$ 6) $- 42435 : + 345 = \ldots$
7) $+ 326393 : - 529 = \ldots$ 8) $- 6709716 : - 729 = \ldots$
9) $- 123469037 : + 24679 = \ldots$
10) $+ 462191832 : - 79251 = \ldots$
11) $- 780937996 : - 51862 = \ldots$
12) $- 8612175 \,.\, + 90875 : - 782925 = \ldots$

Zweiter Abschnitt.

Von den allgemeinen Zahlen.

§. 8. Von den Zahlen, die wir bisher angewendet haben und die mit Ziffern ausgedrückt werden, zeigt jede eine ganz bestimmte Menge von Einheiten an; sie werden **besondere Zahlen** genannt. So drückt die besondere Zahl 7 eine genau bestimmte Anzahl von Einheiten aus, indem man sich darunter weder mehr noch weniger als 7 Einheiten vorstellen kann. Wegen dieser Eigenschaft der besonderen Zahlen können auch die Rechnungen, die man mit ihnen ausführt, nur für einzelne besondere Fälle gelten, und müßten so oft erneuert werden, als nur die mindeste Veränderung in der Angabe gemacht wird. Um nun auch allgemeine Rechnungen, die für alle ähnlichen Fälle gelten und von den besonderen Werthen der in einer Aufgabe vorkommenden Größen ganz unabhängig sind, vornehmen zu können, war man auf die Einführung von Zahlen bedacht, welche jede beliebige Menge von Einheiten und deren Theilen bedeuten können, und welche darum **allgemeine Zahlen** genannt werden. Als die zweckmäßigste Bezeichnung für solche allgemeine Zahlen stellten sich die **Buchstaben** dar, und zwar die kleinen lateinischen. So bedeutet z. B. a eine allgemeine Zahl, unter welcher man sich jede willkürliche Menge von Einheiten oder deren Theilen vorstellen kann; a kann 1, 2, 10, — 20, $\frac{3}{5}$, oder jede andere positive oder negative Zahl anzeigen. Nur ist zu bemerken, daß jeder Buchstabe den Werth, den man ihm beim Anfange der Rechnung beigelegt hat, durch die ganze Rechnung beibehalten muß; nimmt man für a in irgend einer Aufgabe einen bestimmten Werth, z. B. 5 an, so muß man in dieser Aufgabe für a durchgängig den Werth 5 beibehalten.

Wenn in einer Rechnung verschiedene Buchstaben vorkommen, so werden dadurch im Allgemeinen auch eben so viele verschiedene Zahlen angedeutet; in besonderen Fällen ist es jedoch möglich, daß zwei Buchstaben denselben Werth haben.

Die Wahl der Buchstaben zu allgemeinen Zahlzeichen rührt wahrscheinlich davon her, daß man anfänglich die Wörter selbst in die Rechnung setzte, und später nur die Anfangsbuchstaben beibehielt. Wir haben z. B. in der Proportionsrechnung nachgewiesen, daß der Betrag der Procente berechnet wird, wenn man die Menge, worauf sich die Procente beziehen, mit den Procenten multipliciert und das Product durch 100 dividiert. Man könnte diesen Satz auf folgende Art allgemein ersichtlich machen:

$$\text{Betrag} = \frac{\text{Menge} \times \text{Procent}}{100},$$

oder, wenn man statt der Wörter nur ihre Anfangsbuchstaben setzt, und zwar die kleinen lateinischen,

$$b = \frac{m \times p}{100}.$$

Hier kann m jede willkürliche große oder kleine Menge, p jedes beliebige Procent vorstellen; b ist dann die Zahl, welche den zu der angenommenen Menge und dem angenommenen Procent gehörigen Betrag anzeigt. Der Ausdruck $b = \frac{m \times p}{100}$ stellt daher den oben angeführten Satz ganz allgemein und doch so klar dar, daß ihn jeder sogleich herauslesen kann, wenn er nur die Bedeutung der Buchstaben b, m, p kennt.

Die Lehre vom Rechnen mit allgemeinen Zahlen heißt die **allgemeine Arithmetik** oder **Algebra**, zum Unterschiede von der **besonderen Arithmetik**, in welcher nur besondere Zahlen angewendet werden.

§. 9. Wenn man in der Zahlenreihe nach beiden Seiten, anstatt um eine Einheit, um die Zahl a fortschreitet, so erhält man die Reihe

$$\ldots -4a, -3a, -2a, -1a, 0, +1a, +2a, +3a, +4a, \ldots,$$

welche die Reihe der **Vielfachen** von a heißt. Die vor a stehenden besonderen Zahlen $+3, +2, +1, -1, -2, -3, \ldots$ werden die **Coefficienten** von a genannt. Es bedeutet demnach der Coefficient die Zahl, wie vielmal die nach ihm stehende allgemeine Zahl in positivem oder negativem Sinne zu setzen sei, je nachdem derselbe das Vorzeichen + oder − hat. Z. B.:

$$+4a = +a + a + a + a = a \cdot +4,$$
$$-4a = -a - a - a - a = a \cdot -4.$$

Man ersieht daraus, daß der Coefficient einer allgemeinen Zahl immer als Multiplicator derselben betrachtet werden kann.

1 wird als Coefficient nicht angeschrieben; es bedeutet demnach a so viel als 1 a, und − a so viel − 1 a.

Wenn zwei oder mehrere durch Buchstaben ausgedrückte Zahlen mit einander zu multiplicieren sind, so wird das Multiplicationszeichen gewöhnlich weggelassen; z. B.:

statt $a \times b$ oder $a \cdot b$ schreibt man $a\,b$,
„ $a \times b \times c$ „ $a \cdot b \cdot c$ „ „ $a\,b\,c$.

Der Ausdruck $a\,b\,c$ darf mit jenem $a + b + c$ nicht verwechselt werden, da ersterer ein Product, letzterer eine Summe vorstellt. Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, so ist:

$$a\,b\,c = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$a + b + c = 2 + 3 + 4 = 9.$$

§. 10. Um in der Folge die zum leichtern Verständniß nöthigen Abkürzungen anwenden zu können, wollen wir hier eine Bezeichnung und einen Begriff einschalten, über welche erst später ausführlicher gesprochen werden wird.

Wenn mehrere gleiche Buchstaben neben einander als Factoren stehen, so schreibt man zur Abkürzung einen solchen Factor nur einmal, und setzt demselben rechts oben die Zahl, welche angibt, wie oft dieser Buchstabe als Factor steht. Z. B.

statt aa schreibt man a^2,

„ bbb „ „ b^3,

„ xxxxx „ „ x^5.

Ein Product aus mehreren gleichen Factoren nennt man eine Potenz; die Zahl der gleichen Factoren heißt der Potenzexponent, und der Factor, der so oft steht, als der Exponent anzeigt, die Wurzel. So ist b^3 eine Potenz, 3 ist der Exponent und b die Wurzel. Der Exponent 1 wird nicht angeschrieben, so daß b so viel bedeutet als b^1.

Die Begriffe Coefficient und Exponent müssen von einander wohl unterschieden werden; es ist

$$4a = a + a + a + a,$$
$$a^4 = a \times a \times a \times a,$$

welche Ausdrücke wesentlich verschieden sind; setzt man z. B. $a = 3$, so ist

$$4a = 3 + 3 + 3 + 3 = 12,$$
$$a^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81.$$

§. 11. Eine Größe, welche aus einem Coefficienten und einem Buchstaben oder auch mehreren ohne Zeichen mit einander verbundenen Buchstaben besteht, wird ein eingliedriger algebraischer Ausdruck oder ein Monom genannt; z. B. a, $2ab$, $-3a^2x$, $5bc^2y^2$.

Eine Größe, welche mehrere durch das Zeichen + oder — verbundene Ausdrücke enthält, heißt ein mehrgliedriger Ausdruck oder ein Polynom; die einzelnen durch das Zeichen + oder — verbundenen Bestandtheile eines solchen Ausdruckes nennt man seine Glieder. Enthält der Ausdruck zwei Glieder, so heißt er insbesondere ein Binom; eine dreigliedrige Größe wird ein Trinom genannt. So sind:

$$a + b,\ 2m - 3n,\ ax^2 - by^2$$

Binome,

$$a - b + c,\ 2ax + 3by + 4cz,\ 3a^3 - 2a^2b + ab^2$$

Trinome, und alle diese Größen mehrgliedrige Ausdrücke.

Wenn in einem mehrgliedrigen algebraischen Ausdrucke mehrere Potenzen derselben Wurzel vorkommen, so pflegt man wegen der leichteren Uebersicht die einzelnen Glieder nach den Potenzexponenten jener Wurzel zu ordnen. Fängt man mit der höchsten Potenz an und läßt dann immer niedrigere Potenzen folgen, so heißt das Polynom fallend geordnet; setzt man dagegen erst jenes Glied, welches keine oder die niedrigste Potenz der gemeinschaftlichen Wurzel enthält, und geht dann zu immer höheren Potenzen über, so nennt man das Polynom steigend geordnet. So erhält z. B. der Ausdruck:

$$5x^2 + 1 - 3x + x^5 - 4x^3 - 6x^4$$

fallend geordnet folgende Form:

$$x^5 - 6x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1,$$

und steigend geordnet:

$$1 - 3x + 5x^2 - 4x^3 - 6x^4 + x^5.$$

Wenn mit mehrgliedrigen Größen Rechnungsoperationen vorzunehmen sind, so werden sie in Klammern eingeschlossen. Um z. B. anzuzeigen, daß $a + b$ mit $c + d$ zu multiplicieren ist, schreibt man $(a + b) . (c + d)$; würde man die Klammern weglassen und $a + b . c + d$ schreiben, so würde dieser Ausdruck nicht bedeuten, daß $a + b$ mit $c + d$ zu multiplicieren ist, sondern daß man nur b mit c zu multiplicieren und zu dem Producte a und d zu addieren habe. Setzt man z. B.:

$a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, so ist

$$(a + b) . (c + d) = (2 + 3) . (4 + 5) = 5 . 9 = 45;$$

$$a + b . c + d = 2 + 3 . 4 + 5 = 2 + 12 + 5 = 19.$$

§. 12. Wenn in zwei algebraischen Ausdrücken gleiche Buchstaben und diese auch in gleicher Anzahl vorkommen, so heißen jene Ausdrücke **gleichnamig**; die Coefficienten können auch verschieden sein. Dagegen heißen zwei algebraische Ausdrücke **ungleichnamig**, wenn sie entweder verschiedene Buchstaben, oder gleiche Buchstaben, aber in ungleicher Anzahl enthalten. Z. B.:

$$\left.\begin{array}{ll} 2a, & 6\tfrac{1}{2}a \\ ab, & 3ab \\ -5mx^2, & 8mx^2 \end{array}\right\} \text{sind gleichnamige,}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2a, & 3b \\ 5mn, & -2mp \\ 3ax, & 3a^2x \end{array}\right\} \text{ungleichnamige Größen.}$$

Zwei oder mehrere gleichnamige Ausdrücke lassen sich immer in einen einzigen zusammenfassen, und zwar nach folgenden Sätzen:

1. **Gleichnamige Ausdrücke, welche dasselbe Vorzeichen haben, werden zusammengezogen, wenn man die Zahlwerthe der Coefficienten addiert, und die Summe mit dem gemeinschaftlichen Vorzeichen vor den gemeinschaftlichen Buchstabenausdruck setzt.**

Z. B. $+ 3a + 5a = + 8a$,
$- 4a - 6a = - 10a$.

Wenn man nämlich in der Reihe der Vielfachen von a in der positiven Richtung von o aus zuerst um $3a$ Einheiten, und dann noch um $5a$ Einheiten fortschreitet, so gelangt man zur Zahl $+ 8a$. Eben so kommt man, wenn man in derselben Reihe von 0 aus in negativer Richtung zuerst um $4a$ Einheiten, dann noch um $6a$ Einheiten fortschreitet, auf die Zahl $- 10a$.

2. **Zwei gleichnamige Ausdrücke, welche ungleich bezeichnet sind, werden zusammengezogen, wenn man den Zahlwerth des kleineren Coefficienten von dem Zahlwerthe des größeren Coefficienten subtrahiert und den Rest mit dem Zeichen des größeren Coefficienten dem gemeinschaftlichen Buchstabenausdrucke voransetzt.**

Es sei $+ 9a - 3a$. Hier muß man in der Reihe der Vielfachen von a von 0 aus zuerst um $9a$ Einheiten vorwärts schreiten, und von der Zahl $+ 9a$ aus, zu welcher man dadurch gelangt, um $3a$ Einheiten zurückschreiten, wodurch man zur Zahl $+ 6a$ kommt; also ist $+ 9a - 3a = + 6a$.

Eben so findet man, daß $+4a - 7a = -3$ ist.

3. **Zwei entgegengesetzte gleichnamige Ausdrücke heben sich auf.**

Z. B. $+5a - 5a = 0$.

Aufgaben.

1) $a + 3a + 3a = \ldots$ 2) $-3bx - 2bx - 8bx = \ldots$
3) $2abc - 2abc = \ldots$ 4) $5ab - 3ab = \ldots$
5) $abx - 4abx = \ldots$
6) $mp - 2mp + 3mp + 4mp = \ldots$
7) $8b + 2by - 7by = \ldots$
8) $7ax - 4by - 3ax + 2by = \ldots$
9) $5b + 3b - 4b + 3b \ldots$
10) $a^2 + ab + ab + b^2 = \ldots$
11) $3a^2x - 2a^2x + a^2x = \ldots$
12) $5my^3 + 2my^3 - 6my^3 = \ldots$
13) $6ax - 76y - 5ax + 86y = \ldots$
14) $5m + 6m - 2px + 4px - px = \ldots$
15) $3px - px - 15m + 3m = \ldots$
16) $7am - 4y - 2am + 8y - 2y + 3am = \ldots$
17) $6ab + 3ac - 21ad - 5ac + ad - 6ad + 9ad = \ldots$
18) $23bx - 25cx + 17bx + 18x - 17cx - 19bx - 27cx = \ldots$
19) $5mx + 6ny - 7pz - 3mx - 2ny + pz + 9mx - 3ny + 7pz = \ldots$
20) $9x^2y^2 - 6xy - 6xy + 4 - 4x^2y^2 + 2xy + 2xy - 1 = \ldots$

I. Die vier Rechnungsarten mit eingliedrigen algebraischen Ausdrücken.

1. Die Addition.

§. 13. Es sei zuerst die Summe $+ a + (+ b)$ zu bestimmen. Hier muß man nach §. 3 in der erweiterten Zahlenreihe von $+ a$ um b Einheiten vorwärts schreiten, wodurch man zu der Zahl $+ a + b$ gelangt; es ist also

$$+ a + (+ b) = + a + b.$$

Um $+ a + (- 6)$ zu bestimmen, schreitet man in der Zahlenreihe von $+ a$ um b Einheiten zurück, wodurch man $+ a + b$ erhält; es ist somit

$$+ a + (- b) = + a - b,$$

welche Summe eine positive oder negative Zahl bedeutet, je nachdem a größer oder kleiner als b ist.

Eben so überzeugt man sich, daß

$$- a + (+ b) = - a + b,$$
$$- a + (- b) = - a - b$$

ist, wobei die erstere Summe eine positive oder negative Zahl vorstellt, je nachdem a kleiner oder größer als b ist.

Hieraus folgt:
Eingliedrige algebraische Ausdrücke werden addiert, wenn man sie mit unveränderten Zeichen neben einander setzt.

Wenn in der Summe gleichnamige Ausdrücke vorkommen, werden sie zusammengezogen.

Aufgaben.

1) $3a + 5a = 8a$ oder $\begin{array}{r} 3a \\ 5a \\ \hline 8a \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 4a \\ -8a \\ \hline -4a \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -2ax \\ +3ax \\ \hline ax \end{array}$

4) $5ab + (-5ac) = \ldots$ 5) $8mx + (-2mx) = \ldots$
6) $-13mnq + (-7mnq) = \ldots$
7) $-5x^2 + (+8x^2) = \ldots$ 8) $25my^2 + (-18m^2y) = \ldots$
9) $7abc + (-5my) = \ldots$ 10) $120my + (-95my) = \ldots$
11) $-33ab^2 + (-11ab^2) = \ldots$
12) $-75xy + (+20x^2y) = \ldots$
13) $9a^2x^2 + (+5a^2x^2) + (-10a^2x^2) = \ldots$
14) $-b^2m^3 + (7b^2m^3) + (-4b^3m^2) = \ldots$

2. Die Subtraction.

§. 14. Für das Subtrahieren eingliedriger algebraischer Ausdrücke gilt derselbe Satz, welcher für das Subtrahieren algebraischer Zahlen in §. 4 begründet wurde. Wir wollen jedoch hier die Richtigkeit dieses Satzes für die verschiedenen Fälle, welche hinsichtlich der Zeichen vorkommen können, auch noch auf eine andere Art nachweisen.

a) Es soll von $+a$ die Größe $+b$ subtrahiert werden. Der Minuend $+a$ bleibt ungeändert, wenn man ihm $+b$ und $-b$ hinzusetzt, weil $+b-b=0$ ist; statt $+a$ kann man also $+a+b-b$ setzen. Nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend $+a+b-b$ den Subtrahend $+b$ hinweg, so bleibt $+a-b$ als Rest; man hat also:

Minuend $+a$ } statt $+a$ darf $+a+b-b$ gesetzt werden.
Subtrahend $+b$ } davon $+b$ subtrahiert,
bleibt $+a$ $-b$ als Rest.

b) Ist von $+a$ die Größe $-b$ zu subtrahieren, so hat man:

Minuend $+a$ } oder $+a+b-b$
Subtrahend $-b$ } davon $-b$ subtrahiert,
bleibt $+a+b$ als Rest.

c) Von $-a$ soll $+b$ subtrahiert werden. Es ist:

Minuend $-a$ } oder $-a+b-b$
Subtrahend $+b$ } davon $+b$ subtrahiert,
bleibt $-a$ $-b$ als Rest.

d) Ist von $-a$ die Größe $-b$ zu subtrahieren, so hat man:

Minuend $-a$ } oder $-a+b-b$
Subtrahend $-b$ } davon $-b$ weggenommen,
bleibt $-a+b$ als Rest.

Man hat demnach:

$$+a-(+b)=+a-b$$
$$+a-(-b)=+a+b$$
$$-a-(+b)=-a-b$$
$$-a-(-b)=-a+b;$$

d. h. eingliedrige algebraische Ausdrücke werden subtrahiert, wenn man zu dem Minuend den mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Subtrahend hinzufügt.

Wenn der Subtrahend unter den Minuend geschrieben wird, so pflegt man im Subtrahend das geänderte Zeichen sogleich unter das gegebene zu setzen. Sind Minuend und Subtrahend gleichnamig, so wird die Reduction vorgenommen.

Aufgaben.

1) $5x-(-4x)=5x+4x=9x.$

2) $-3ab-(+5ab)=-3ab-5ab=-8ab.$

3) $\begin{array}{r} 2mx \\ -4mx \\ + \quad \\ \hline 6mx \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} -3cp \\ +3cp \\ - \quad \\ \hline -6cp \end{array}$ 5) $\begin{array}{r} 8ax \\ -3ay \\ + \quad \\ \hline 8ax+3ay \end{array}$

6) $\begin{array}{r} -abc \\ -2abc \\ \hline \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} 3ab^2 \\ +10ab^2 \\ \hline \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} 15m^2x^2 \\ -7m^2x^2 \\ \hline \end{array}$

9) $-7ay-(-3ay)=\dots$ 10) $-3mp(+4mp)=\dots$

11) $5a^2x-(-3a^2x)=\dots$ 12) $2ab^2y-(+aby)=\dots$

13) $9x^2+(-5x^2)-(+8x^2)=\dots$

14) $5m^2n-(-18m^2n)+(-10m^2n)=\dots$

15) $17ax^3-(-8ax^3)-(+24ax^3)=\dots$

3. Die Multiplication.

§. 15. Besondere Zahlen kann man wirklich multiplicieren, d. i. man erhält als Product eine neue Zahl, in welcher von den Factoren durchaus keine Spur mehr zu finden ist, z. B. $3\times 6=18$. Bei allgemeinen Zahlen ist dieses nicht der Fall; ihr Product kann nur angezeigt werden, indem man die Buchstaben, durch die sie ausgedrückt werden, ohne Zeichen, und zwar wegen der leichteren Uebersicht in alphabetischer Ordnung neben einander setzt. So wird das Product aus a und b durch ab, das Product aus ap und bq durch abpq angezeigt.

Es seien nun die eingliedrigen Ausdrücke 5a und $-4b$ mit einander zu multiplicieren. Da man die Koefficienten als Factoren der allgemeinen Zahlen betrachten kann, und die Factoren in jeder beliebigen Ordnung mit einander multipliciert dasselbe Product geben, so hat man:

$$5a\times -4b=5\times -4\times a\times b=-20\times ab=-20ab.$$

Eingliedrige algebraische Ausdrücke werden daher multipliciert, wenn man die Coefficienten (nach §. 5) multipliciert und ihr Product dem Producte der allgemeinen Zahlen voraussetzt.

Sehr einfach gestaltet sich das Multiplicieren, wenn in den Factoren Potenzen, welche eine gleiche Wurzel haben, vorkommen. Es ist

$$a^2 \,.\, a = aa \,.\, a = aaa = a^3,$$
$$a^3 \,.\, a^2 = aaa \,.\, aa = aaaaa = a^5,$$
$$a^5 \,.\, a^3 = aaaaa \,.\, aaa = aaaaaaaa = a^8,$$
$$a^3 \,.\, a^2 \,.\, a^4 = aaa \,.\, aa \,.\, aaaa = aaaaaaaaa = a^9.$$

Man sieht sogleich, daß der Exponent im Producte immer gleich ist den Exponenten der Factoren zusammengenommen.

Potenzen derselben Wurzel werden also multipliciert, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel beibehält und ihr die Summe aus den Exponenten der Factoren zum Exponenten gibt.

Aufgaben.

1) $+a \,.\, +b = +ab.$ 2) $+a \,.\, -b = -ab.$
3) $-a \,.\, +b = -ab.$ 4) $-a \,.\, -b = +ab.$
5) $7a \,.\, 5b = 35ab.$ 6) $-3px \,.\, 8m = -24mpx.$
7) $3b^2 \,.\, -b^3 = -3b^5.$ 8) $-3a \,.\, 2a^5 = -6a^6.$
9) $6a \,.\, -2a = \ldots$ 10) $5mn \,.\, 9m = \ldots$
11) $3ax \,.\, -4by = \ldots$ 12) $-8cm \,.\, -dn = \ldots$
13) $-7ab \,.\, 2ac = \ldots$ 14) $5m^2x \,.\, 3mx^2 = \ldots$
15) $5a^m \,.\, -2a^n = \ldots$ 16) $3a^2x^2 \,.\, 7a^3x^4 = \ldots$
17) $37a \,.\, -24b \,.\, -18c = \ldots$
18) $8ab^2 \,.\, 3ac \,.\, -4c^2 = \ldots$
19) $7ab \,.\, -9mp \,.\, 8ap = \ldots$
20) $6ab^2y^3 \,.\, 2b^3y^3 \,.\, -5a^2y \ldots$
21) $7m^2x \,.\, 3mx^2 \,.\, -2mq = \ldots$
22) $-3pq^2 \,.\, 6p^3q \,.\, 8p^2q^3 = \ldots$
23) $2a^2m^3x^4 \,.\, 3am^5x^2 \,.\, 4a^3mx^2 = \ldots$
24) $6x^2yz^3 \,.\, -9x^2y^2z^2 \,.\, -3x^4yz = \ldots$
25) $3ax \,.\, -2am \,.\, -4mx \,.\, b^2 = \ldots$
26) $2c^3 \,.\, -3c^7 \,.\, -7c^4 \,.\, -c = \ldots$
27) $-97ax \,.\, 53by \,.\, 82cz \,.\, -acy = \ldots$
28) $3a^3x \,.\, -15ax^2 + 8a^2x^2 \,.\, 6a^2x = \ldots$
29) $7am^2 \,.\, 3b^2n^2 \,.\, 4ab \,.\, 8a^2bn \,.\, 2b^2m \,.\, 3mn^2 = \ldots$
30) $8m^3p^5 \,.\, 7mp^3 - 9m^2p^2 \,.\, 6m^2p^6 \,.\, m^4p = \ldots$

4. Die Division.

§. 16. Es ist

$$abc : bc = \frac{abc}{bc} = a, \qquad aabx : aby = \frac{aabx}{aby} = \frac{ax}{y}.$$

Daraus folgt:

Um den Quotienten zweier durch Buchstaben ausgedrückten Zahlen zu finden, läßt man im Dividende diejenigen Buchstaben, welche auch im Divisor vorkommen, und zwar in gleicher Anzahl weg; die übrigbleibenden bilden den Buchstabenausdruck des Quotienten. Kommen im Divisor auch solche Buchstaben vor, die der Dividend nicht enthält, so zeigt man die Division durch diese Buchstaben nur an, indem man sie in den Nenner des Quotienten setzt.

Sind nun zwei eingliedrige algebraische Ausdrücke durch einander zu dividieren, so dividiert man zuerst die Coeffitienten (nach §. 7) und setzt ihren Quotienten dem Quotienten der allgemeinen Zahlen voran:

Kommen im Dividend und im Divisor Potenzen derselben Wurzel vor, so ist zu unterscheiden, ob der Exponent des Dividends größer, kleiner oder eben so groß als jener des Divisors ist.

1. Es sei der Potenzexponent des Dividends größer als jener des Divisors. Man findet

$$a^5 : a^2 = aaaaa : aa = aaa = a^3,$$
$$a^6 : a^4 = aaaaaa : aaaa = aa = a^2,$$
$$a^4 : a = aaaa : a = aaa = a^3,$$

so daß der Exponent des Quotienten immer gleich ist dem Exponenten des Dividends weniger jenem des Divisors.

2. Ist der Exponent des Dividends kleiner als der Exponent im Divisor, so erscheint der Quotient in Form eines Bruches; man hat z. B.:

$$a^2 : a^5 = aa : aaaaa = 1 : aaa = \frac{1}{a^3},$$
$$a^3 : a^5 = aaa : aaaaa = 1 : aa = \frac{1}{a^2},$$
$$a^4 : a^8 = aaaa ; aaaaaaaa = 1 : aaaa = \frac{1}{a^4},$$

Drückt man nun den Bruch $\frac{1}{a^m}$, welcher das Umgekehrte des Bruches a^{+m} ist, durch a^{-m} aus, was man eine Potenz mit negativem Exponenten nennt, während a^m eine Potenz mit positivem Exponenten heißt; so ist:

$$a^2 : a^5 = \frac{1}{a^3} = a^{-3},$$
$$a^3 : a^5 = \frac{1}{a^2} = a^{-2},$$
$$a^4 : a^8 = \frac{1}{a^4} = a^{-4},$$

und man sieht, daß auch in diesem Falle der Potenzexponent im Quotienten erhalten wird, wenn man von dem Exponenten im Dividend jenen des Divisors subtrahiert.

3. Es seien endlich die Exponenten im Dividend und im Divisor gleich, z. B. beide gleich 3, so ist

$$a^3 : a^3 = 1.$$

In diesem Falle ist also der Quotient keine Potenz von a, sondern die Einheit. Betrachtet man daher 1 auch als eine Potenz von a, und zwar als die 0te, so daß $a^0 = 1$ ist, so hat man

$$a^3 : a^3 = 1 = a^0,$$

und es findet die in den beiden früheren Fällen nachgewiesene Gesetzmäßigkeit auch in diesem Falle Statt.

Man kann daher allgemein sagen:

Potenzen derselben Wurzel werden dividiert, wenn man die gemeinschaftliche Wurzel beibehält und ihr zum Exponenten eine Zahl gibt, welche gleich ist dem

Exponenten des Dividends weniger dem Exponenten des Divisors.

Aufgaben.

1) $+ab : +a = +b$. 2) $+ab : -a = -b$.
3) $-ab : +a = -b$. 4) $-ab : -a = +b$.
5) $6mx : 2x = 3m$. 6) $12a^4 : -3a = -4a^3$.
7) $10ab : 2bc = \frac{5a}{c}$. 8) $x^3 : -x^5 = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.
9) $-12am : 2m = \ldots$ 10) $35abcd : 5bd = \ldots$
11) $abx : 5aby = \ldots$ 12) $27a^7 : -3a^3 = \ldots$
13) $-3bmx : 4ax^2 = \ldots$
14) $ab^2c^3 : abc = \ldots$ 15) $-51abdy^2 : 3bdy = \ldots$
16) $-m^5p^2x^4 : mp^2x^2 = \ldots$
17) $225m^2y : 25my^2 = \ldots$
18) $30x^2y^3 : -5x^3y = \ldots$
19) $4a^2m^4x^5 : 5a^5m^3x = \ldots$
20) $42x^3y^2z^4 : 7xy^2z^3 = \ldots$
21) $85a^{4m+1} : 5a^{4m-2} = \ldots$
22) $84a^{n-4} : 12a^2 = \ldots$
23) $-3a^2b^3c^4d^5 : -a^4b^2cd^3 = \ldots$
24) $12am^5n^4p^3q^2 : -4m^2n^3p^4q^5 = \ldots$
25) $104ab^3x^9 : (91a^5b^6x^7 : 7a^4b^4x) = \ldots$
26) $24a^5b^3x : 3a^2b^2 + 35a^6b^2x^2 : -5a^3bx = \ldots$

II. Die vier Rechnungsarten mit mehrgliedrigen algebraischen Ausdrücken, oder die Auflösung der Klammern.

1. Die Addition.

§. 17. Mehrgliedrige algebraische Ausdrücke sind als addiert zu betrachten, wenn man sie mit ungeänderten Zeichen neben einander stellt. (§. 13.)

Kommen in der Summe gleichnamige Ausdrücke vor, so werden sie zusammengezogen. In solchen Fällen thut man am besten, wenn man die Addenden unter einander schreibt, und zwar so, daß die gleichnamigen Größen gerade unter einander zu stehen kommen.

Aufgaben.

1) $a + (b + c) = a + b + c$.
2) $3a - 2b + (3c - 4d) = 3a - 2b + 3c - 4d$.
3) $5a + 2x + (3b - 2y) + (3c - 2d + z) =$
$5a + 2x + 3b - 2y + 3c - 2d + z$.
4) $8x - 5y + (5x + 2y) = 8x - 5y + 5x + 2y = 13x - 3y$

oder
$$\begin{array}{r} 8x - 5y \\ 5x + 2y \\ \hline 13x - 3y. \end{array}$$

5) $\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad + ab + b^2 \\ \hline a^2 + 2ab + b^2 \end{array}$

6) $\begin{array}{l} a^2 + ab \\ \quad - ab - b^2 \\ \hline a^2 \quad\quad - b^2 \end{array}$

7) $\begin{array}{r} 6m - 5n + 2p \\ 5m + 8n - 5p \\ -4m - n + 3p \\ \hline \end{array}$

8) $\begin{array}{r} 3a + 5b - 7c \\ 4a - 8b + 12c \\ 2a + 4b - 3c \\ \hline \end{array}$

9) $\begin{array}{r} 2a + 2b - c + d \\ 3a - b + 2c + d \\ -4a + b + 5c + 4d \\ \hline \end{array}$

10) $\begin{array}{r} 7x - 9y + 8z \\ -6x + 5y - 12z \\ 14x - 5y + 4z \\ \hline \end{array}$

11) $3ab + (5ab - 4m) + (6m - 2ab) = \ldots$

12) $17x^2 - 25ax - 10a^2 + (3x^2 + 12ax - 5a^2) = \ldots$

13) $64m^3 - 96m^2x + 36mx^2 + (-48m^2x + 72mx^2 - 27x^3) = \ldots$

14) $\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 3x - 6 \\ 3x^3 + 2x^2 + 5x + 8 \\ \hline \end{array}$

15) $\begin{array}{l} x^4 - 3x^3y + 5x^2y^2 + 7xy^3 \\ \quad + x^3y - 3x^2y^2 - 3xy^3 - 8y^4 \\ \hline \end{array}$

16) $2a^2b - 3ab^2 + 7 + (3a^2b - 2) + (5a^2b - 3ab^2) + (5ab^2 - 6) = \ldots$

17) $3a^3 - 7a^2x - 5ax^2 + (6a^3 - 3a^2x + 8ax^2 - x^3) + [4a^2x - 2ax^2 + 7x^3 + (2a^2x - 9ax^2 + 3x^3)] = \ldots$

2. Die Subtraction.

§. 18. **Mehrgliedrige algebraische Ausdrücke werden subtrahiert, wenn man zu dem Minuend die Glieder des Subtrahends mit entgegengesetzten Zeichen hinzufügt.**

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, nehme man $a + b - c$ als Minuend, und $m - n + p$ als Subtrahend an; anstatt $a + b - c$ kann auch $a + b - c + m - m + n - n + p - p$ gesetzt werden; nimmt man nun von dem so ausgedrückten Minuend den Subtrahend $m - n + p$ hinweg, so bleibt $a + b - c - m + n - p$ als Rest; man hat nämlich:

Minuend $a + b - c$ oder	$a + b - c$	$+ m$	$- m$	$+ n$	$- n$	$+ p$	$- p$
davon der Subtrahend		$+ m$			$- n$	$+ p$	
hinweggenommen, bleibt	$a + b - c$		$- m$	$+ n$			$- p$

als Rest; es ist also:

$$a + b - c - (m - n + p) = a + b - c - m + n - p.$$

Daraus ist auch ersichtlich, daß man, wenn vor einem eingeklammerten Ausdrucke das Zeichen — steht, die Klammern auflösen könne, wenn das Zeichen eines jeden Gliedes innerhalb der Klammern in das entgegengesetzte verwandelt wird.

Wenn im Minuend und Subtrahend gleichnamige Ausdrücke vorkommen, so ist es wegen des Reducierens am zweckmäßigsten, den Subtrahend so unter den Minuend zu schreiben, daß die gleichnamigen Größen unter einander zu stehen kommen, und dann im Subtrahend die geänderten Zeichen sogleich unter die gegebenen zu stellen.

Aufgaben.

1) $3a - (2b + 4c) = 3a - 2b - 4c.$

2) $9x - 2a - (2y - 3b) = 9x - 2a - 2y + 3b.$

3) $5ax + 6by - (3cx - 4ay + 5bz) =$
$= 5ax + 6by - 3cx + 4ay - 5bz.$

4) $3a + (4b - 5c) - (6d - 7e) = 3a + 4b - 5c - 6d + 7e.$

5) $8a - 4b + 3c - (6a + 2b - 3c) =$
$= 8a - 4b + 3c - 6a - 2b + 3c = 2a - 6b + 6c,$

oder

$$\begin{array}{r} 8a - 4b + 3c \\ 6a + 2b - 3c \\ - \quad - \quad + \\ \hline 2a - 6b + 6c. \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{r} 3ax - 4by \\ 2ax - 2by \\ - \qquad + \\ \hline \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} x^2 + 6ax + a^2 \\ x^2 - 4ax \\ - \quad + \\ \hline \end{array}$$

8) $5x^2 + 7x - 5 - (3x^2 - 2x - 6) = \ldots$

9) $2a - 3b - (5a + 2b) + (4a + b) = \ldots$

10) $2a^2 - 3a + 4 - (a^2 + a - 5) = \ldots$

11) $8m^3 - 7m^2y - 3my^2 - (3m^2y - 5my^2 + 8y^3) = \ldots$

12) $5abx - 3bcy - (-abx + 4bcy - 3cdz) = \ldots$

13) $-3a + 5b - 7c + 9d - (-8a + 6b + 4c - 2d) = \ldots$

14) $8a^2b - 7ab^2 + 4b^3 - (-2a^3 + 3a^2b - 9ab^2) = \ldots$

15) $4m^2x - 3n^3y + 6p^4z - (-3m^2x - 3n^3y + 5p^4z) = \ldots$

16) $5a^4 - 4a^3 + 3a^2 - 2a + 1 - (3a^4 - 3a^3 - 5a^2 +$
$+ 5a + 7) = \ldots$

17) $9 + 8m - 7m^2 - 6m^3 + 5m^4 - (-5 + 4m - 3m^2 +$
$+ 2m^3 - m^4) = \ldots$

18) $27x - [31y + (108 - 45y + 17x)] - (9x - 48y - 101) = \ldots$

3. Die Multiplication.

§. 19. 1. Ist $a + b$ mit n zu multiplicieren, also $n$mal als Addend zu setzen, so hat man

$$(a + b).n = a + b + (a + b) + (a + b) + \ldots (n\text{mal})$$
$$= a + a + a \ldots (n\text{mal}) + b + b + b + \ldots (n\text{mal})$$
$$= a.n + b.n;$$

es ist somit

$$(a + b).n = an + bn.$$

Da es für das Product gleichgiltig ist, in welcher Ordnung die Factoren multipliciert werden, so ist auch

$$n.(a + b) = an + bn.$$

Daraus folgt:

Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem eingliedrigen multipliciert, wenn man jedes Glied des mehrgliedrigen Ausdruckes mit dem eingliedrigen multipliciert und die Theilproducte addiert.

Aufgaben.

1) $5a.(3b + 4c - d) = 15ab + 20ac - 5ad.$

2) $-3ax.(by - 2cz + 5) = -3abxy + 6acxz - 15ax.$

3) $(6a - 5b) . 3c = 18ac - 15bc.$
4) $(7m - 6n + 5p) . -3x = -21mx + 18nx - 15px.$
5) $(2 + 3a - 4a^2 - 5a^3) . 6a^2 = 12a^2 + 18a^3 - 24a^4 - 30a^5.$
6) $(3ax - 5by - cz) . -2mp = \ldots$
7) $(5a^2 - 3a + 2) . -6ax = \ldots$
8) $8by(1 - 2x + 3x^2) = \ldots$
9) $(7am + 6bn - 5cp + 4dp) . 3fx = \ldots$
10) $3a(4bx - 2cy) - 5a(2bx + 3by) = \ldots$
11) $(2a^2b - 3ab^2 - 4b^3) . 17a^3b^4 = \ldots$
12) $-15a^2x^3(2a^4 - 4a^3x + 6a^2x^2) = \ldots$
13) $2x(1 - 3x - 5x^2) + 5x^2(3 - 7x) = \ldots$
14) $5y(x^2 - 2xy + 3y^2) - 3x^2(6y - 3) = \ldots$

§. 20. Hat man $a + b + c$ mit $n + p + q$ zu multiplicieren, so ist, wenn man den Multiplicand $a + b + c$ vorläufig durch m bezeichnet,

$$m . (n + p + q) = m . n + m . p + m . q;$$

somit, wenn man statt m wieder seinen Werth setzt,

$$\begin{aligned}(a + b + c) . (n + p + q) = & \ (a + b + c) . n \\ & + (a + c + c) . p \\ & + (a + b + c) . q\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(a + b + c) . (n + p + q) = & \ an + bn + cn \\ & + ap + bp + cp \\ & + aq + bq + cq;\end{aligned}$$

d. h. **zwei mehrgliedrige algebraische Ausdrücke werden mit einander multipliciert, wenn man den ganzen Multiplicand mit jedem Gliede des Multiplicators multipliciert, oder, was einerlei ist, wenn man jedes Glied des einen Factors mit jedem Glied des anderen Factors multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.**

Man pflegt bei der Ausführung der Multiplication die mehrgliedrigen Factoren gewöhnlich unter einander zu schreiben und in den Theilproducten die etwa vorkommenden gleichnamigen Größen wegen des leichteren Reducierens ebenfalls gerade unter einander zu stellen.

Aufgaben.

1) $(5a - 3b)(4c - 2d) = (5a - 3b) . 4c + (5a - 3b) . -2d$
$= 20ac - 12bc - 10ad + 6bd.$

2) $(m + 2n - 3p)(2x + 3y) = (m + 2n - 3p) . 2x + (m + 2n$
$- 3p) . 3y = 2mx + 4nx - 6px$
$+ 3my + 6ny - 9py.$

3) $(5a - 6b)(3a - 4b) = 15a^2 - 18ab - 20ab + 24b^2$
$= 15a^2 - 38ab + 24b^2,$

oder

$$\begin{array}{l} 5a - 6b \\ \underline{3a - 4b} \\ 15a^2 - 18ab \\ \underline{ - 20ab + 24b^2} \\ 15a^2 - 38ab + 24b^2. \end{array}$$

4) $(a+b)(a+b) = \ldots$ 5) $(a-b)(a-b) = \ldots$
6) $(a+b)(a-b) = \ldots$ 7) $(2m+2n)(2m-3n) = \ldots$
8) $(x^2 - 3x + 4)(7x - 3) = \ldots$
9) $(3 + 2a - b)(5mx - 7ny + 9pz) = \ldots$
10)
$$\begin{array}{rrrrrr}
3 + & 4x + & 5x^2 - & 6x^3 & & \\
4 - & 5x - & 6x^2 & & & \\
\hline
12 + & 16x + & 20x^2 - & 24x^3 & & \\
 - & 15x - & 20x^2 - & 25x^3 + & 30x^4 & \\
 & - & 18x^2 - & 24x^3 - & 30x^4 + & 36x^5 \\
\hline
12 + & x & - 18x^2 - & 73x^3 & & + 36x^5.
\end{array}$$
11) $(x^3 - 8x^2 + 5x - 7)(3x - 2) = \ldots$
12) $(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 1)(x - 1) = \ldots$
13) $(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1) = \ldots$
14) $(x - 2y - 3z)(3x + y - z) = \ldots$
15) $(m^2 + 2m - 3)(m^2 - 2m + 3) = \ldots$
16) $(4ab - 3cd + 2ef)(4ab + 3cd - 2ef) = \ldots$
17) $(2mx - 3ny + 4pz)(3mx + 4ny - 5pz) = \ldots$
18) $(a - 2b + c + 3d)(2a + b - 2c + 6d) = \ldots$
19) $(3 - 4x + 6x^2)(2 - 6x - 18x^2) = \ldots$
20) $(8a^4 - 9a^2 + 12)(5a^4 - 6a^2 + 7) = \ldots$
21) $(x^6 - 3x^5 + 8x^4 - 5x^3 + 2x + 8)(2x + 7) = \ldots$
22) $(3y^3 - 5y^2z + 7yz^2 - 4z^3)(2y^2 - 5yz + 3z^2) = \ldots$
23) $(2p^3 - 3p^2 - 8p + 12)(3p^3 + 4p^2 - 5p + 6) = \ldots$
24) $(3a + 4b)(2c - d)(5m - 6n) = \ldots$
25) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = \ldots$
26) $(x + 2)(x - 3)(x + 4)(x - 5) = \ldots$
27) $(3x - 7y)(5x + 2y)(3ax - 4by) = \ldots$
28) $(6m^2 - 5)(8m^2 + 4)(3m - 9) \ldots$
29) $(2x - 3)(3x - 4)(4x - 5)(5x - 6) \ldots$
30) $(3y^2 - 4y + 2)(5y^2 + 7y - 6)(y^2 - 2y + 5) \ldots$
31) $(4x^2 - 4xy - y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)(2x^2 + 2xy + 3y^2) = .$
32) $(11a - 6b + 5c)(3a - 5c) - (7a + 3b - 7c)(4a + 3c) = \ldots$
33) $(3m^2 - 8m - 5)(7m^2 + 5m - 6) - (6m^2 + 4m + 3)(3m^2 - 9m + 7) = \ldots$
34) $(x^2 - 4x + 4)(x^2 + 4x + 4) - (x + 1)(x + 2)(x - 4)(x - 5) = \ldots$

4. Die Division.

§. 21. 1. Es ist

$$(a + b + c) \,.\, p = ap + bp + cp.$$

Wenn man das Product zweier Factoren durch den einen Factor dividiert, so muß der andere Factor zum Vorschein kommen; es muß also

$$(ap + bp + cp) : p = a + b + c$$

sein; aber a, b, c sind die Quotienten, welche man erhält, wenn man folgeweise ap, bp, cp durch p dividiert; daher gilt der Satz:

Ein mehrgliedriger Ausdruck wird durch einen eingliedrigen dividiert, wenn man jedes Glied desselben durch den eingliedrigen Divisor dividiert.

Aufgaben.

1) $(8ab - 12ac) : 4a = 2b - 3c.$
2) $(15am - 10bm + 20cm) : -5m = -3a + 2b - 4c.$
3) $(18amy - 27bny + 36cpy) : -9y = -2am + 3bn - 4cp.$
4) $(20abmn - 16acmp + 9adnq) : 4am = 5bn - 4cp + \frac{9dnq}{4m}$
5) $(21ax - 18bx + 15cx) : -3x = \ldots$
6) $(30mnp - 25mnq - 15mnr + 10mns) : -5mn \ldots$
7) $(12x^5 - 8x^3 + 4x) : 4x = \ldots$
8) $(35m^3y + 28m^2y^2 - 14my^3) : -7m^2y = \ldots$
9) $(3x^3 - 6x^5 + 9x^7 - 12x^9) : 3x^2 = \ldots$
10) $(-16a^3bc^2 + 8a^4b^2c^2 - 12a^5b^2c^3 + 20a^6b^3c^3) : -4a^2b^2c^2 = \ldots$

2. Wenn der Dividend eingliedrig und der Divisor mehrgliedrig ist, so wird die Division nur angezeigt, indem man den Quotienten in Bruchform ausdrückt; z. B.:

$$a : (a + b) = \frac{a}{a + b}.$$

$$-3x : (5a - 2b) = -\frac{3x}{5a - 2b}.$$

§. 22. 3. Wenn der Dividend und der Divisor mehrgliedrige algebraische Ausdrücke sind.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Divisor} & a & + & b & + & c \\
\text{Quotient} & n & + & p & + & q \\
\hline
\text{Dividend} \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right. & \begin{array}{r} an \\ +\ ap \\ +\ aq \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array} & \begin{array}{c} bn \\ bp \\ bq \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array} & \begin{array}{l} cn \\ cp \\ cq. \end{array}
\end{array}$$

Das erste Glied des Dividends ist an, d. i. das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem ersten Gliede n des Quotienten; man findet daher das erste Glied n des Quotienten, wenn man das erste Glied an des Dividends durch das erste Glied a des Divisors dividiert. — Wenn man nun das Theilproduct, welches n im Dividende hervorbringt, bildet, indem man nämlich den ganzen Divisor mit a multipliciert, so ist, wenn dieses Theilproduct von dem Dividende abgezogen wird, das erste Glied ap des Restes das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem zweiten Gliede p des Quotienten; man erhält also dieses zweite Glied des Quotienten, wenn man das erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert. Bildet man wieder die Bestandtheile, welche p im Dividende hervorbringt, nämlich das Product aus dem ganzen Divisor und aus p, und zieht dieses Product von dem früheren Reste ab, so stellt das erste Glied aq des neuen Restes das Product aus dem ersten Gliede a des Divisors und dem dritten Gliede q des Quotienten vor; wird daher dieses erste Glied des Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert, so erhält man das dritte Glied q des Quotienten; u. s. f.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich für das Dividieren zweier zusammengesetzten algebraischen Ausdrücke folgendes Verfahren:

1. Man dividiere das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors, so hat man das erste Glied des Quotienten. Mit diesem ersten Gliede multipliciere man den ganzen Divisor und ziehe das Product vom Dividende ab.
2. Zu dem Reste setze man das folgende oder auch mehrere folgende Glieder des Dividends herab, und dividiere wieder das erste Glied dieses neuen Theildividends durch das erste Glied des Divisors; dadurch bekommt man das zweite Glied des Quotienten. Mit diesem zweiten Gliede wird nun der ganze Divisor multipliciert und das Product von dem letzten Theildividende abgezogen.
3. Zu dem neuen Reste setzt man wieder eines oder mehrere von den folgenden Gliedern des Dividends herab und wiederholt das vorhergehende Verfahren, bis alle Glieder des Dividends in Anspruch genommen wurden.
4. Wenn zuletzt ein Rest übrig bleibt, so ist dieser noch durch den Divisor zu dividieren; der Quotient davon wird jedoch nur angezeigt und in Form eines Bruches zu dem erhaltenen ganzen Quotienten dazu gesetzt.

Aufgaben.

1) $(24abc - 15cxy - 48abd + 30dxy) : (3c - 6d) = 8ab - 5xy$

$$\begin{array}{llll}
24abc & & -48abd & \\
- & & + & \\
\hline
 & -15cxy & & +30dxy \\
 & -15cxy & & +30dxy \\
 & + & & - \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}$$

2) $(10a^2 - 11ab - 6b^2) : (2a - 3b) = 5a + 2b$

$$\begin{array}{lll}
10a^2 & -15ab & \\
- & + & \\
\hline
 & +4ab & -6b^2 \\
 & +4ab & -6b^2 \\
 & - & + \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

3) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = \ldots$

4) $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b) = \ldots$

5) $(a^2 - b^2) : (a + b) = \ldots$

6) $(a^2 - b^2) : (a - b) \ldots$

7) $(a^4 - 1) : (a + 1) = \ldots$

8) $(8x^5 - 1) : (x - 1) = \ldots$

9) $(8x^3 - 22x^2 + 27x - 18) : (2x - 3) = \ldots$

$$
\begin{array}{l}
10)\ (9y^2 - 4x^2 - 4x - 1) : (3y - 2x - 1) = 3y + 2x + 1 \\
\quad 9y^2 - 6xy - 3y \\
\quad - \quad + \quad + \\
\hline
\qquad + 6xy + 3y - 4x^2 - 4x \\
\qquad + 6xy \qquad\quad - 4x^2 - 2x \\
\qquad - \qquad\qquad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad + 3y \qquad - 2x - 1 \\
\qquad\qquad + 3y \qquad - 2x - 1 \\
\qquad\qquad - \qquad\quad + \quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

11) $(16x^3 - 2a^3) : (2x - a) = \ldots$

12) $(7a^2 + 10ab + 19ac + 11bc + 3b^2 + 10c^2) : (a + b + 2c) = \ldots$

13) $(m^8 - 1) : (m + 1) = \ldots$

14) $(m^7 - 1) : (m - 1) = \ldots$

15) $(6a^2 - 13ab + 4ax + 6b^2 - 11bx - 10x^2) : (3a - 2b + 5x) = \ldots$

16) $(24x^4 - 38a^2x^2 + 15a^4) : (4x^2 - 3a^2) = \ldots$

17) $(6x^3 - 15x^2 + 12x - 3) : (x^2 - 2x + 1) = \ldots$

18) $(6 + 2a - 23a^2 + 49a^3 - 30a^4) : (2 + 4a - 5a^2) = \ldots$

19) $(9x^4 - 16x^2 + 12x - 5) : (3x^2 - 2x + 1) = \ldots$

20) $(16m^4 - 8m^2n^2 + n^4) : (4m^2 + 4mn + n^2) = \ldots$

21) $(y^6 - 2y^5 - 7y^4 + 20y^3 - 21y^2 - 18y + 27) : (y^2 - 2y - 3) = \ldots$

22) $(a^4 + 4b^4) : (a^2 - 2ab + 26^2) = \ldots$

23) $(8p^6 + 27) : (4p^4 - 6p^2 + 9) = \ldots$

24) $(2x^4 + 7bx^3 + b^2x^2 + 2b^3x + 24b^4) : (2x^2 - 3bx + + 4b^2) = \ldots$

25) $(24b^4 - 38ab + 31a^2b^2 - 13a^2b + 2a^4) : (4b^2 - 3ab + 2a^2) = \ldots$

III. Das Rechnen mit gebrochenen algebraischen Ausdrücken.

§. 23. Für die Bruchrechnung mit Buchstaben gelten dieselben Sätze, welche für das Rechnen mit besonderen Brüchen entwickelt wurden; es wird daher hier genügen, die Anwendung jener Sätze an Beispielen mit Buchstabengrößen durchzuführen.

Nur eine Bemerkung hinsichtlich der gemischten Zahlen muß hier vorausgeschickt werden. Während bei besonderen gemischten Zahlen der mit der ganzen Zahl verbundene Bruch immer als positiv zu betrachten ist, so daß z. B. $5\frac{3}{4}$ so viel bedeutet als $5 + \frac{3}{4}$; kann bei einer allgemeinen gemischten Zahl der angehängte Bruch, so wie die ganze Zahl, positiv oder negativ sein, und es kann eine gemischte algebraische Größe eine der folgenden Formen haben:

$$a + \frac{m}{n},\quad a - \frac{m}{n},\quad -a + \frac{m}{n},\quad -a - \frac{m}{n}.$$

Wenn mit gemischten Zahlen Rechnungsoperationen vorzunehmen sind, werden sie zuerst in unechte Brüche verwandelt. Bei dieser Verwandlung wird auch, wie bei besonderen Zahlen, die ganze Zahl mit dem Nenner des dabei stehenden Bruches multipliciert, aber dann der Zähler zu diesem Producte addiert oder davon subtrahiert, je nachdem der Bruch positiv oder negativ ist.

§. 24. Aufgaben über die Verwandlung gemischter Zahlen in Brüche.

1) $a + \frac{m}{n} = \frac{an + m}{n}$ 2) $a - \frac{m}{n} = \frac{an - m}{n}$.

3) $\frac{m}{n} - a = \frac{m - an}{n}$. 4) $2x - \frac{3y}{4z} = \frac{8xz - 3y}{4z}$.

5) $1 + \frac{x - y}{x + y} = \frac{x + y + x - y}{x + y} = \frac{2x}{x + y}$.

6) $1 - \frac{x - y}{x + y} = \ldots$ 7) $\frac{1 + 2x^2}{x} - 3x = \ldots$

8) $2a + \frac{3b}{x} = \ldots$ 9) $a + b - \frac{a^2 + b^2}{a + b} = \ldots$

10) $\frac{2 - 3a + 4a^2}{5 - 6a} - 7a = \ldots$ 11) $\frac{a^2 + x^2}{a - x} + a - x = \ldots$

12) $5a - 2b + \frac{3a^2 - 4b^2}{5a - 6b} = \ldots$

§. 25. Aufgaben über die Darstellung mehrerer Brüche mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

1. Es seien die Brüche $\frac{a}{2}, \frac{2a}{3}, \frac{3a}{5}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Der kleinste gemeinschaftliche Nenner ist $2.3.5 = 30$; man hat daher

$30 : 2 = 15, \; a \times 15 = 15a,$ also $\frac{a}{2} = \frac{15a}{30}$;

$30 : 3 = 10, \; 2a \times 10 = 20a,$ „ $\frac{2a}{3} = \frac{20a}{30}$;

$30 : 5 = 5, \; 3a \times 6 = 18a,$ „ $\frac{3a}{5} = \frac{18a}{30}$.

2. Man bringe die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{bd}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner.

Da b und d als Factoren in bd erscheinen, so ist bd der kleinste gemeinschaftliche Nenner, und man erhält:

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}, \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}, \frac{e}{bd} = \frac{e}{bd}.$$

3. Man soll die Brüche $\frac{1}{a}, \frac{2}{a^2}, \frac{3}{a^3}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner bringen.

$$\begin{array}{cc|cl}
\multicolumn{2}{c}{a^3} & & \\
\frac{1}{a} & a^2 & a^2 & \text{daher } \frac{1}{a} = \frac{a^2}{a^3} \\
\frac{2}{a^2} & a & 2a & \quad " \quad \frac{2}{a^2} = \frac{2a}{a^3} \\
\frac{3}{a^3} & 1 & 3 & \quad " \quad \frac{9}{a^3} = \frac{3}{a^3}
\end{array}$$

4. Es seien die Brüche $\frac{1}{3}, \frac{a}{b}, \frac{3x}{4cd}, \frac{5y}{6d^2}$ auf den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

§. 26. Aufgaben über das Addieren der Brüche.

1) $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}$.

2) $\frac{x+y}{2p} + \frac{x-y}{2p} + \frac{x+y+x-y}{2p} = \frac{2x}{2p} = \frac{x}{p}$.

3) $\frac{n+p}{3} + \frac{n-p+q}{3} + \frac{n-q}{3} = \frac{3n}{3} = n$.

4) $\frac{a}{m} + \frac{b}{n} + \frac{an}{mn} + \frac{bm}{mn} = \frac{an+bm}{mn}$.

5) $\frac{2x+3y}{2} + \frac{x-2y}{3} = \ldots$ 6) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \ldots$

7) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x-a} = \ldots$ 8) $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} = \ldots$

9) $\frac{3x}{4} + \frac{2x}{3} - \frac{7x}{10} = \ldots$ 10) $\frac{3m-2n}{m+2n} + \frac{3m+2n}{m-2n} = \ldots$

11) $\frac{a-3b}{cb} + \frac{a}{b} + \frac{a^2-ab-b^2}{bcd} + \frac{4b}{cd} = \ldots$

12) $\frac{mpx+n}{mx-1} + n + \frac{mnx+p}{mx+1} = \ldots$

13) $\frac{7x+4a}{9x-5a} + \frac{8x-3a}{3x-2a} + 1 = \ldots$

14) $\frac{ax}{a^2-x^2} + \frac{a-x}{a+x} + \frac{a+x}{a-x} = \ldots$

15) $\frac{a}{2} + \frac{2b}{3} + \frac{3c}{4} + \left(\frac{4a}{5} + \frac{5b}{6} + \frac{6c}{7}\right) = \ldots$

16) $\frac{3x^2-4x+5}{x^2-2x+1} + \frac{8x^2+4x-7}{x^2+x+1} = \ldots$

§. 27. Aufgaben über das Subtrahieren der Brüche.

1) $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}$.

2) $\frac{x+y}{2m} - \frac{x-y}{2m} = \frac{x+y-x+y}{2m} = \frac{2y}{2m} = \frac{y}{m}$.

3) $\frac{5m-3n}{4} - \frac{m+n}{4} = \frac{5m-3n-m-n}{4} = \frac{4m-4n}{4} = m-n$.

4) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{bx}{ab} - \frac{ay}{ab} = \frac{bx-ay}{ab}$.

5) $\frac{5b}{6} - \frac{3b}{4} = \frac{10b}{12} - \frac{9b}{12} = \frac{b}{12}$.

6) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x+y)(x+y)-(x-y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{4xy}{x^2-y^2}$

7) $\frac{5a}{3} - \frac{3a}{4} = \ldots$ 8) $\frac{2b-5x}{3b+4x} - \frac{4b-5x}{3b+2x} = \ldots$

9) $\frac{3m}{2x} + \frac{5n}{3y} - \frac{4p}{5xy} = \ldots$ 10) $\frac{5a}{2a+1} - \frac{2a}{a-2} = \ldots$

11) $\frac{17m+3}{12m-15} - \frac{13}{21} + \frac{8m-1}{28m-35} = \ldots$

12) $\frac{np-mn}{mp-np} - \frac{q}{a} - \frac{npq-mpq+anp-amp}{amp+anp} = \ldots$

13) $\frac{5a^2+a-6}{2a^2-5a+3} - \frac{2a^2+3a-4}{3a^2-6a+9} = \ldots$

14) $\left(\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{2x^2}{15} + \frac{x}{5} - \frac{3}{8}\right) = \ldots$

15) $\frac{a+x}{a-x} - \frac{4x^2}{a^2-x^2} - \frac{a-x}{a+x} = \ldots$

§. 28. Aufgaben über das Multiplicieren der Brüche.

1) $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$. 2. $\frac{3}{4ab} \cdot 2b = \frac{3}{2a}$.

3) $\frac{2abx}{3m} \cdot -5c = -\frac{10abcx}{3m}$.

4) $\left(1+\frac{b}{a}\right) \cdot 3a = \frac{a+b}{a} \cdot 3a = 3a + 3b$.

5) $\frac{3a^2x^2}{4b^2y^2} \cdot 9y^3 = \ldots$ 6) $\frac{5x^2-4x+2}{7x^2+5x-3} \cdot (x-2) = \ldots$

7) $\left(x-y+\frac{x^2+y^2}{x+y}\right) \cdot (x+y) = \frac{2x^2}{x+y} \cdot (x+y) = 2x^2$.

8) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$. 9) $\frac{2a}{3m} \cdot \frac{3b}{4n} \cdot -\frac{4c}{5p} = -\frac{2abc}{5mnp}$.

10) $\left(1+\frac{x}{y}\right) \cdot \left(1-\frac{x}{y}\right) = \ldots$

11) $\left(2a+\frac{b}{3c}\right) \left(\frac{2b}{5c}-a\right) = \ldots$

12) $\left(1+\frac{m}{n}\right) \left(1-\frac{m}{n}\right) \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{m}{n-m} = \ldots$

13) $\frac{5x}{3a} \cdot -\frac{3y}{4b} \cdot \frac{2a}{5c} \cdot -\frac{7z}{8d} = \ldots$

14) $\left(3x - \frac{4ax-3}{2a}\right) \cdot -5ab = \ldots$

15) $\left(\frac{a+b}{a-b}+1\right) \left(\frac{a-b}{a+b}-1\right) = \ldots$

16) $\frac{5a-11}{6a-7} \cdot (3a^2-4a+9) = \ldots$

17) $\left(\frac{3x}{4}+\frac{2}{5}-\frac{2}{x}\right) \left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2x}\right) = \ldots$

18) $\frac{3y^2-5y+7}{5y^2+6y-8} \cdot \frac{y^2+2y+3}{2y^2-3y-4} = \ldots$

19) $\frac{a^2-1}{2a-3} \cdot \frac{a+1}{2a+3} \cdot \frac{a-1}{a+1} = \ldots$

20) $\left(\frac{2a^2}{5b^3} + \frac{a}{3} + \frac{2b^3}{7}\right) \left(\frac{a^2}{3b^2} - \frac{2ab}{9}\right) = \ldots$

§. 29. Aufgaben über das Dividieren der Brüche.

1) $\frac{ab}{b} : a = \frac{b}{c}$. 2) $\frac{3ab}{c} : 4d = \frac{3ab}{4cd}$.

3) $\frac{12mpx}{5nq} : -8x = -\frac{4mp}{5nq}$.

4) $\left(1 + \frac{b}{a}\right) : 2b = \frac{a+b}{a} : 2b = \frac{a+b}{2ab}$.

5) $\frac{10x^2y^3}{m^3n^2} : 5xy = \ldots$ 6) $\frac{3ax^3}{4by^3} : -6b^2y = \ldots$

7) $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$.

8) $2m : \left(1 - \frac{n}{m}\right) = 2m : \frac{m-n}{m} = 2m \cdot \frac{m}{m-n} = \frac{2m^2}{m-n}$.

9) $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \ldots$ 10) $\frac{2ax}{3by} : \frac{5mx}{6ny} = \ldots$

11) $\left(1 + \frac{m}{x}\right) : \left(1 - \frac{m}{x}\right) = \ldots$

12) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \ldots$

13) $\left(\frac{5a-2x}{4} + 6a - 3x\right) : -\frac{a}{4} = \ldots$

14) $\frac{2x-7}{3x+3} : \frac{5x-1}{4x+3} = \ldots$

15) $\frac{21mn - 17nx}{12mp} : \frac{9mx - 33x^2}{16np} = \ldots$

16) $\frac{5z^2+3z-9}{6z^2-5z-2} : \frac{3z^2-7z-1}{4z^2+8z+3} = \ldots$

17) $\left(\frac{x+3y}{2} - \frac{3x-y}{4}\right) : \left(\frac{2x-y}{3} - \frac{x+7y}{4}\right) = \ldots$

18) $\left(\frac{5x^6}{12a^7} - \frac{43x^2}{24a^2} + \frac{9a^3}{5x^2}\right) : \left(\frac{3x^2}{4a^3} - \frac{6a^2}{5x}\right) = \ldots$

IV. Vermischte Aufgaben
über das Rechnen mit allgemeinen Zahlen.

§. 30. 1) $8abc \cdot 4 = \ldots$ 2) $9a^2 \cdot a = \ldots$

3) $2a + 5m + 3a - 2m = \ldots$

4) $7a - 11b - (3a + b) = \ldots$

5) $7x - 3y + 4z - 2x + 4y - 3z + x - 2y + 5z = \ldots$

6) $28m - 15m^2 + 7m^3 - 21m - 8m^2 - 10m^3 = \ldots$

7) $81ac : -9a = \ldots$ 8) $-65m^2pq : 13ap = \ldots$

9) $5x - (2x + 3z) = \dots$ 10) $24 + (8a - 10) = \dots$
11) $-5x5y \,.\, -3x^2 = \dots$ 12) $ab^2c^3 \,.\, -3a^3b^2c = \dots$
13) $-\frac{3ab}{4x} \,.\, 56 = \dots$ 14) $\frac{a-b}{c} \,.\, x = \dots$
15) $\frac{15bc}{14ax} : -3c = \dots$ 16) $-\frac{5ax^2}{by} : 6y = \dots$
17) $a - 2a^2 + 3a^3 - 3a - 4a^2 - 5a^3 + 6a + 7a^2 = \dots$
18) $17a - 13b + 10c - (5a + 7b + 6c) = \dots$
19) $(a - 2b + 3c) \,.\, 2x = \dots$
20) $(21a^2x - 18ax^2) : 3ax = \dots$
21) $(5m - 2n - p) \,.\, -7m = \dots$
22) $(35y^3 + 28y^2) : -7y^2 = \dots$
23) $-36x^6y^5z^4 : -4x^4y^4z^4 = \dots$
24) $18a^3b^2 : 6ab^4 = \dots$
25) $\frac{3a}{4x} + \frac{5a}{6x} = \dots$ 26) $\frac{ax}{b} - \frac{2ax}{3b} = \dots$
27) $\frac{4a+b}{3} - \frac{3a-2b}{4} = \dots$ 28) $\frac{5x-a}{2} + \frac{2x-3a}{4} = \dots$
29) $(a^3 + 3a^2b + 4ab^2 + b^3)(a + b) = \dots$
30) $(63abc - 72b^2c + 81bcx) : 9bc = \dots$
31) $2a(2x - a) - 3x(2a + x) = \dots$
32) $(6a - 3b - 4c) \,.\, -5abcx = \dots$
33) $(ab + bc + ax + cx) : (b + x) = \dots$
34) $\frac{2a-9}{15a-25} \,.\, (3a - 5) = \dots$ 35) $\frac{15ax - 3bx}{8ab} : -5x = \dots$
36) $\frac{1}{2a} + \frac{1}{3b} - \frac{1}{c} = \dots$ 37) $\frac{5a+8b}{a+b} - \frac{3a-b}{a-b} = \dots$
38) $\frac{m+n}{a+b} \,.\, \frac{m-n}{a+b} = \dots$ 39) $\frac{a-4}{a+1} \,.\, \frac{6a}{a-2} = \dots$
40) $-8a + 13b - 12c - 9d - (3a + 8b + 2c - 7d) = \dots$
41) $13x - (8m - 5n) + (4x + 5m) - (7x - 3n) = \dots$
42) $\frac{8x - 2y + 5z}{12} - \frac{3x + 10y - 15z}{12} - \frac{5m - 24y - 4z}{12} = \dots$
43) $(2a^2 - ab - 6b^2) : (2a + 3b) = \dots$
44) $1 - [3m + 4n + 1 - (5m + 2n + 4)] = \dots$
45) $a - (2b - a) + [3a - (3b - 5a) + 5b] = \dots$
46) $(3ax - 4by)(5ax + 6by) = \dots$
47) $(3m - 5n + 6p)(7m + 8n - 9p) = \dots$
48) $m(a - b + c) - (m - n)(a + b - c) = \dots$
49) $(6ab - 15ax - 4bc + 10cx) : (2b - 5x) = \dots$
50) $\frac{5m + 2n}{4p} : (2m - 3n) = \dots$
51) $\frac{21ab - 77bx}{12ac} : \frac{9ax - 33x^2}{16bc} = \dots$
52) $\frac{3mn - 15my}{6mx - 20nx} \,.\, \frac{9mx - 33nx}{14mn - 6my} = \dots$
53) $(x^2 + 2x - 3)(2x^2 - 3x + 4) = \dots$
54) $(a^2 - 3ab + 2b^2 + 3ac - 3bc) : (a - b)$
55) $(15a^2 - 26ab + 8b^2)(4a - 9b) = \dots$
56) $(8x^2 - 9xy + 6y^2)(12x^2 + 5xy - 8y^2) = \dots$

57) $(9a + 3b)(2a - 5b)(a - 4b) = \ldots$

58) $\frac{3x-4}{4} + \frac{2x+3}{5} - \frac{x-2}{6} = \ldots$

59) $\frac{ab - 6a}{2b} - \frac{2c - ad}{2d} + \frac{bc - 3ad}{bd} = \ldots$

60) $4a^2 - (2a^2 - 9b) - [6a^2 + 3b - (4a^2 - 5b)] = \ldots$

61) $x^3 - 2x^2 + 3x - (-2x^2 + 6x - 7) = \ldots$

62) $(8 - 12a + 16a^2 - a^3)(4 - 8a + a^2) = \ldots$

63) $(a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3)(2a - 3b) = \ldots$

64) $(6a^4 + 9a^3 + 4a^2 + 5a + 4) : (a^2 + 2a + 1) = \ldots$

65) $(x^7 + 1) : (x + 1) = \ldots$

66) $\left(\frac{3a^2}{4b} - \frac{3b}{10a}\right)\left(\frac{5a}{9b} - \frac{6b}{7a^2}\right) = \ldots$

67) $\left(1 + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} + \frac{m^3}{4}\right)\left(1 - \frac{m}{2} + \frac{m^2}{3} - \frac{m^3}{4}\right) = \ldots$

68) $6(a - 2b + 3c) - 4(2a - b + 5c) + 5(3b - 2a - c) = \ldots$

69) $(7a - 2b + 4c + 3d)(-2a + 4b - 3c + 5d) = \ldots$

70) $(28am + 26ap - 35mn - 20np) : (4a - 5n) = \ldots$

71) $(2a^4 + a^3b - 5a^2b^2 + 7ab^3 - 4b^4) : (a^2 - 2ab + b^2) = \ldots$

72) $\frac{3m + n - p}{4n} + \frac{4 - 2m - n}{2n} + \frac{3 + 7n - 9p}{9n} = \ldots$

73) $\left(a - \frac{am - b}{m}\right) : \left(a - \frac{am - b}{m}\right) = \ldots$

74) $\left(\frac{2a^3}{5b^3} + \frac{a}{3} - \frac{2b^3}{7}\right)\left(\frac{a^2}{3b^2} - \frac{2ab}{9}\right) = \ldots$

75) $\frac{3a - 8x}{2a - 3x} + \frac{4a + 7x}{5a - 9x} = \ldots$

76) $\frac{5x^2 - 7x + 2}{x^2 - 4x - 2} - \frac{x - 3}{x + 3} = \ldots$

77) $x : \frac{x - b}{c} + \frac{m - c}{x} : \frac{x - b}{m - c} = \ldots$

78) $(5a - 7b + 9c)(8a + 5b - 4c) - (40a^2 - 35b^2 - 36c^2) = \ldots$

79) $(27x^4 - 6x^2 + 1) : (3x^2 + 2x + 1) = \ldots$

80) $46(x - 2y + 5z) + 28(3y - 6z) + 18(2y - x - 5z) = \ldots$

81) $(8x^6 - 36x^4y^3 + 54x^2y^6 - 27y^9) : (2x^2 - 3y^3) = \ldots$

82) $\frac{5a + 6bx}{4a + 5bx} - \frac{aax - x^2}{2a - 3x} = \ldots$

83) $5x - \frac{19x^2 + 17x}{4x - 3} - 1 = \ldots$

84) $a - b + \frac{b^2}{a + b} - \frac{a^2}{a + b} = \ldots$

85) $\left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) : \frac{a^2 - b^2}{ab} = \ldots$

86) $\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}b + \frac{1}{5}c - \frac{5}{6}d - \left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b - \frac{3}{10}c + \frac{2}{3}d\right) = \ldots$

87) $\frac{6x - 13}{10x - 55} + \frac{17}{20} - \frac{5x - 47}{8x - 44} = \ldots$

88) $(x - y)(3m - 2n + 5) - (x - y)(3m - 3n + 5) = \ldots$

89) $7a - 5x - [4b - 3x - (9a - 6b) + (9x - 3a)] = \ldots$

90) $(a^2 - 3a - 6)(a^2 + 4a - 5)(a - 3) = \ldots$

91) $(x - 18x^3 + 81x^5) : (1 - 6x + 9x^2) = \ldots$

92) $(9x - 2y + 4z)(3x + 4y - 2z)(6x - 6y + 2z) = \ldots$

93) $(15a^8x + a^7x^2 - 40a^6x^3 + 16a^5x^4) : (3a^3x - 4a^2x^2) = \ldots$

94) $\left(\frac{5}{8}a - \frac{1}{2}b - \frac{5}{12}c\right)\left(\frac{3}{5}a - \frac{5}{6}b + \frac{4}{5}c\right) = \ldots$

95) $\frac{x}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{y}{x-y} = \ldots$

96) $\frac{6z-(4x+3z)}{a(x+z)} : \frac{3z-4x}{ax-az} : \frac{b+m}{9m-(3m-3b)-36} = \ldots$

97) $(512 - 5184a^6 + 17496a^{12} - 19683a^{18})$
$: (8 - 36x^2 + 54x^4 - 27x^6) = \ldots$

98) $(2a-3b)(4a-5b(3a+4b)(6a-5b) = \ldots$

99) $(7x-6y)(3x+4y) - (6x+3y)(5x+7y)$
$+ (2x-5y)(8x-y) = \ldots$

100) $(x^6 - 16x^3y^3 + 6y^6) : (x^4 + 4x^3y + 12x^2y^2 + 16xy^3 + 16y^4) = .$

101) $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)(x-9) = \ldots$

102) $(1 - 5a + 10a^2 - 10a^3 + 5a^4 - a^5) : (1 - 3a + 3a^2 - a^3) = \ldots$

103) $\frac{6(x-1)}{5(x+1)} \cdot \frac{3(n-x)}{5(x-1)} \cdot \frac{9(n-x)}{25(y+1} = \ldots$

104) $\frac{3n(5a-b)-3a}{5a-2b} - \frac{(3n-4)a-5bn}{3a+2b} = \ldots$

105) $(15a^2 - 11ab + \frac{43}{2}ac + \frac{6}{5}b^2 - \frac{61}{5}bc + 2c^2) : (\frac{3}{2}a - \frac{1}{5}b + 2c) = \ldots$

Dritter Abschnitt.

Von den Potenzen und Wurzelgrößen.

§. 31. **Wenn** eine Zahl mehrere Male als Factor gesetzt wird, so nennt man, wie schon oben in §. 10 bemerkt wurde, das Product eine Potenz jener Zahl, und zwar die so vielte Potenz, wie oft jene Zahl als Factor gesetzt wurde; die Zahl, welche öfters als Factor gesetzt wird, heißt eine Wurzel des erhaltenen Productes, und zwar die so vielte Wurzel, wie oft sie als Factor gesetzt werden muß, um jenes Product zu geben. Z. B.:

$$3 \times 3 = 9$$
$$3 \times 3 \times 3 = 27$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$$

Hier ist 9 die 2te Potenz, 27 die 3te, 81 die 4te, 243 die 5te Potenz von 3; umgekehrt ist 3 die 2te Wurzel von 9, die 3te Wurzel von 27, die 4te von 81, die 5te von 243.

Die zweite Potenz wird gewöhnlich auch das Quadrat, die dritte Potenz der Kubus genannt; eben so heißt die zweite Wurzel die Quadratwurzel, die dritte die Kubikwurzel.

Die Zahl, welche anzeigt, wie oft die Wurzel als Factor gesetzt werden muß, damit eine andere Zahl als Potenz herauskomme, wird der Exponent genannt. In den früheren Beispielen stellen die Zahlen 2, 3, 4, 5 nach der Reihe die Exponenten vor.

Durch das Zusammentreten der Potenz, der Wurzel und des Exponenten ergeben sich drei wichtige Rechnungsoperationen, das Potenzieren, das Wurzelausziehen und die Bestimmung der Logarithmen. Die letztere Operation gehört übrigens nicht in das Gebiet der vorliegenden Abhandlung.

Eine Zahl zur 2ten, 3ten, . . . mten Potenz erheben, heißt diese Zahl 2mal, 3mal, . . . mmal als Factor setzen; z. B. 3 zur 4ten Potenz erheben, heißt 3 4mal als Factor setzen, $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$, die 4te Potenz von 3 ist also 81. Diese Operation wird dadurch angezeigt, daß man der Wurzel rechts oben den Exponenten beisetzt; es ist also:

$$3^4 = 2 \times 3 \times 3 \times 3.$$

Aus einer Zahl die 2te, 3te...mte Wurzel ausziehen, heißt eine Zahl suchen, welche 2mal, 3mal,...mmal als Factor gesetzt, jene vorgelegte Zahl gibt; z. B.: aus 32 die 5te Wurzel ausziehen, heißt eine Zahl suchen, welche 5mal als Factor gesetzt 32 gibt; diese Zahl ist 2, denn $2.2.2.2.2 = 32$. Für das Wurzelausziehen hat man das Zeichen $\sqrt{}$, in dessen Oeffnung der Exponent gesetzt wird; so bezeichnet man die 5te Wurzel aus 32 durch $\sqrt[5]{32}$. Bei der zweiten Wurzel wird der Exponent 2 nicht angeschrieben, so daß $\sqrt{5}$ so viel bedeutet als $\sqrt[2]{5}$; es kann hier kein Mißverständniß entstehen, weil die erste Wurzel einer Zahl immer der Zahl selbst gleich ist, und man daher bei der ersten Wurzel gar kein Wurzelzeichen anzuschreiben braucht.

I. Zeichen der Potenzen.

§. 32. Es ist:

$(+a)^2 = +a \cdot +a = +aa = +a^2$,
$(+a)^3 = +a \cdot +a \cdot +a = +aaa = +a^3$,
$(+a)^4 = +a \cdot +a \cdot +a \cdot +a = +aaaa = +a^4$,
u. s. w.

Eine positive Wurzel gibt also, zu einer geraden oder ungeraden Potenz erhoben, stets ein positives Resultat.

Ferner ist

$(-a)^2 = -a \cdot -a = +aa = +a^2$
$(-a)^3 = -a \cdot -a \cdot -a = -aaa = -^3$
$(-a)^4 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = +aaaa = +a^4$
$(-a)^5 = -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a \cdot -a = -aaaaa = -a^5$
u. s. w.

Eine negative Wurzel gibt also, zu einer geraden Potenz erhoben, ein positives, zu einer ungeraden Potenz erhoben, ein negatives Resultat.

II. Die vier Rechnungsarten mit Potenzgrößen.

1. Das Addieren und Subtrahieren.

§. 33. Für das Addieren und Subtrahieren der Potenzgrößen gelten dieselben Sätze, wie für das Addieren und Subtrahieren algebraischer Ausdrücke überhaupt. Eine Zusammenziehung im Resultate kann nur dann Statt finden, wenn die Potenzgrößen gleichnamig sind, d. i. wenn sie sowohl gleiche Wurzeln als gleiche Exponenten haben.

Aufgaben.

1) $3a^4 + (-4b^3) = \ldots$ 2) $3a^4 - (-4b^3) = \ldots$
3) $2a^3 + (5a^2) - (3a) = \ldots$
4) $3a^2 + (-5a^2) - (4a^2) - (-7a^2) = \ldots$
5) $7a^2b^3 - 3a^3b^2 + 4a^3b^2 - 2a^2b^3 = \ldots$

§. 34.

2. Das Multiplicieren.

Bei der Multiplication werden die Potenzgrößen ohne Zeichen neben einander gestellt. Z. B:

$a^3x^2 \times by^2 = a^3bx^2y^2$; $3am^2 \cdot -5b^2n^3 = -15ab^2m^2n^3$.

Eine Abkürzung kann nur dann eintreten, wenn die Potenzgrößen entweder gleiche Wurzeln oder gleiche Exponenten haben.

a) Wenn die Wurzeln gleich sind.

Das Multiplicationsverfahren für diesen Fall, sowie Beispiele darüber findet man in §. 15.

b) Wenn die Potenzexponenten gleich sind.

Man hat:

$$a^2 . b^2 = aa . bb = ab . ab = (ab)^2.$$
$$a^3 . b^3 = aaa . bbb = ab . ab . ab = (ab)^3.$$
$$a^4 . b^4 = aaaa . bbbb = ab . ab . ab . ab = (ab)^4.$$
$$a^3 . b^3 . c^3 = aaa . bbb . ccc = abc . abc . abc = (abc)^3.$$

Potenzgrößen desselben Exponenten werden daher mit einander multipliciert, wenn man die Wurzeln multipliciert und ihr Product zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Aufgaben.

1) $2^3 . 5^3 = (2 . 5)^3 = 10^3.$
2) $4^4 . 5^4 . 5^4 = \ldots$ 3) $2^5 . a^5 . b^5 = \ldots$
4) $(x + y)^2 (x - y)^2 = (x^2 - y^2)^2.$
5) $x^4 . y^4 . z^4 . 3^4 = \ldots$
6) $\left(\frac{3x}{4a}\right)^3 . \left(-\frac{4y}{5b}\right)^3 . \left(-\frac{2ax}{3by}\right)^3 = \ldots$

3. Das Dividieren.

§. 35. Potenzgrößen werden auf dieselbe Art wie algebraische Größen überhaupt dividiert. Z. B.:

$$24a^2b^3c^4 : 6a^2c^4 = 4b^3;\ 15ab^2x^3 : -3b^2y^3 = -\frac{5ax^3}{y^3}.$$

Eine Abkürzung im Verfahren kann nur dann Statt haben, wenn entweder die Wurzeln oder die Exponenten gleich sind.

a) Wenn die Wurzeln gleich sind.

Wie in diesem Falle die Division der Potenzen ausgeführt wird, wurde schon oben in §. 16 angegeben, wo man auch Beispiele hierüber findet.

b) Wenn die Potenzexponenten gleich sind.

Es ist

$$a^2 : b^2 = \frac{a^2}{b^2} = \frac{aa}{bb} = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^2,$$
$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3,$$
$$a^4 : b^4 = \frac{a^4}{b^4} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} . \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^4.$$

Daraus folgt:

Potenzgrößen desselben Exponenten werden dividiert, wenn man die Wurzeln dividiert und ihren Quotienten zur gemeinschaftlichen Potenz erhebt.

Aufgaben.

1) $36^3 : 4^3 = \left(\frac{36}{4}\right)^3 = 9^3$.

2) $(5a^2bc^3)^4 : (5ac)^4 = \left(\frac{5a^2bc^3}{5ac}\right)^4 = (abc^2)^4$.

3) $(32m^3x^4)^5 : (8m^2xy)^5 = \ldots$

4) $(84a^2b^4x^3)^2 : (6ab^3x)^2 = \ldots$

5) $(3mn^2p^3)^3 : (5m^2n)^3 = \ldots$

III. Das Potenzieren mit Rücksicht auf den verschiedenen arithmetischen Bau der Wurzel.

1. Potenzieren einer Summe oder Differenz.

§. 36. Es wird für den Zweck dieses Lehrbuches genügen, zu zeigen, wie die Summe oder Differenz zweier Zahlen, d. i. ein Binom, auf die zweite und dritte Potenz erhoben wird.

Um das Quadrat des Binoms $a + b$ zu erhalten, darf man das letztere nur mit $a + b$ multiplicieren; man findet dadurch

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Ebenso erhält man:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Das Quadrat eines Binoms ist also gleich der Summe aus dem Quadrate des ersten Theiles, dem doppelten Producte beider Theile und dem Quadrate des zweiten Theiles.

Die beiden Quadrate sind immer positiv, das Zeichen des doppelten Productes ist $+$ oder $-$, je nachdem die beiden Theile des gegebenen Binoms gleiche oder entgegengesetzte Zeichen haben.

Multipliciert man das Quadrat einer Zahl mit dieser Zahl selbst, so erhält man ihren Kubus. Es ist also

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(a - b)^3 &= (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)\\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Der Kubus eines Binoms ist also gleich der Summe aus dem Kubus des ersten Theiles, dem dreifachen Quadrate des ersten Theiles multipliciert mit dem zweiten Theile, dem dreifachen ersten Theile multipliciert mit dem Quadrate des zweiten Theiles und dem Kubus des zweiten Theiles.

Wenn der zweite Theil des Binoms negativ ist, so sind auch der zweite und vierte Bestandtheil im Kubus negativ.

Beispiele.

1) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$.

2) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.

3) $(5 + a)^2 = 25 + 10a + a^2$.

4) $(3 - a)^2 = 9 - 6a + a^2$.

5) $(y + 2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$.

6) $(3 - b)^3 = 27 - 27b + 9b^2 - b^3$.

2. Potenzieren eines Productes.

§. 37. Es ist

$$(ab)^2 = ab\,.\,ab = aabb = a^2b^2$$
$$(ab)^3 = ab\,.\,ab\,.\,ab = aaabbb = a^3b^3,$$
$$(ab)^4 = ab\,.\,ab\,.\,ab\,.\,ab = aaaabbbb = a^4b^4.$$

Ein Product wird daher zu einer Potenz erhoben, wenn man jeden Factor zu jener Potenz erhebt und diese Potenzen mit einander multipliciert.

Aufgaben.

1) $(xy)^5 = x^5y^5.$ 2) $(2x)^3 = 8x^3.$
3) $(5ax)^4 = \ldots$ 4) $(10abc)^5 = \ldots$
5) $(abc)^{10} = \ldots$ 6) $(3amxy)^3 = \ldots$
7) $(3a + 4b)^2 = \ldots$ 8) $(2x - 3y)^2 = \ldots$
9) $(4a - 3)^3 = \ldots$ 10) $(5m - 4n)^3 = \ldots$

3. Potenzieren eines Quotienten (Bruches).

§. 38. Man hat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \frac{a^3}{b^3},$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{aaaa}{bbbb} = \frac{a^4}{b^4}.$$

Ein Bruch wird daher zu einer Potenz erhoben, wenn man Zähler und Nenner zu derselben Potenz erhebt und die Potenz des Zählers durch die Potenz des Nenners dividiert.

Aufgaben.

1) $\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{8}.$ 2) $\left(\frac{y}{10}\right)^4 = \frac{y^4}{10000}.$
3) $\left(\frac{3a}{4b}\right)^2 = \frac{9a^2}{16b^2}.$ 4) $\left(-\frac{2x}{5y}\right)^3 = -\frac{8x^3}{125y^3}.$
5) $\left(\frac{m+n}{2p}\right)^2 = \frac{m^2 + 2mn + n^2}{4p^2}.$
6) $\left(\frac{mx}{ny}\right)^3 = \ldots$ 7) $\left(\frac{5am}{7bn}\right)^7 = \ldots$
8) $\left(\frac{4a - 2x}{3a + 2x}\right)^2 = \ldots$ 9) $\left(\frac{2a}{b} - \frac{3x}{y}\right)^2 = \ldots$
10) $\left(\frac{3x - 2y}{5x + 4y}\right)^3 = \ldots$ 11) $\left(\frac{7m}{3n} + \frac{5p}{6q}\right)^3 = \ldots$

4. Potenzieren einer Potenz.

§. 39. Es ist

$$(a^3)^2 = a^3\,.\,a^3 = a^6 = a^{3\,.\,2}.$$
$$(a^2)^4 = a^2\,.\,a^2\,.\,a^2\,.\,a^2 = a^8 = a^{2\,.\,4}.$$
$$(a^m)^2 = a^m\,.\,a^m = a^{2m}.$$
$$(a^m)^3 = a^m\,.\,a^m\,.\,a^m = a^{3m}.$$

Eine Potenz wird also zu einer Potenz erhoben, wenn man die Wurzel zum Producte der Exponenten erhebt.

Aufgaben.

1) $(a^5)^3 = a^{15}$. 2) $(10a^2)^3 = 1000a^6$.
3) $(3m^2n^2)^2 = 9m^4n^4$. 4) $\left(\frac{2ax^2}{3bx^2}\right)^2 = \frac{4a^2x^4}{9b^2x^4}$.
5) $\left(\frac{3a^4m^3y^2}{4b^2n^3x^5}\right)^4 = \ldots$ 6) $(5a^2 - 6y^3)^2 = \ldots$
7) $(2ax^2 + 3by^2)^3 = \ldots$ 8) $\left(\frac{4x^2}{3} - \frac{5z^3}{a}\right)^2 = \ldots$
9) $\left(\frac{3ax^2}{5m^3} - \frac{7by^2}{12n^3}\right)^2 = \ldots$ 10) $\left(\frac{a^3m^2}{3x} + \frac{6x^2}{a^2m}\right)^2 = \ldots$
11) $\left(\frac{5m^2y^3}{6n^2z^3} - \frac{3an^3}{4bm^3}\right)^2 = \ldots$ 12) $\left(\frac{8a^2x^4 + 7b^2y^4}{3ax^2 - 4by^2}\right)^3 = \ldots$

IV. Erheben auf das Quadrat und Ausziehen der Quadratwurzel bei besonderen Zahlen.

§. 40. Das Quadrat einer Zahl wird gefunden, wenn man diese Zahl mit sich selbst multipliciert. Z. B.

$$305^2 = 305 \times 305 = 93025,$$
$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{2}{3} = \tfrac{4}{9}$$
$$(1{\cdot}25)^2 = 1{\cdot}25 \times 1{\cdot}25 = 1{\cdot}5625.$$

Es ist von selbst klar, daß das Quadrat eines Decimalbruches doppelt so viel Decimalen enthält, als der gegebene Decimalbruch, woraus folgt, daß im Quadrate die Decimalen immer in gerader Anzahl vorkommen müssen.

Die Quadrate der einzifferigen Zahlen sind:

Quadratwurzel	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
Quadrat	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81.

Wegen der späteren Begründung der Lehre vom Ausziehen der Quadratwurzel soll hier noch ein anderes Verfahren, eine Zahl auf's Quadrat zu erheben, entwickelt werden.

Um z. B. die Zahl 47 auf das Quadrat zu erheben, zerlege man sie in zwei Theile 40 + 7, und bilde das Quadrat nach der Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Man erhält

$$47^2 = (40 + 7)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 7 + 7^2.$$

Um eine dreizifferige Zahl 368 zum Quadrate zu erheben, zerlege man sie ebenfalls in zwei Theile 360 + 8, und man hat

$$368^2 = (360 + 8)^2 = 360^2 + 2 \times 360 \times 8 + 8^2;$$

aber nach der früher angeführten Formel ist

$$360^2 = (300 + 60)^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2,$$

daher, wenn oben statt 360^2 dieser Werth gesetzt wird,

$$368^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 60 + 60^2 + 2 \times 360 \times 8 + 8^2,$$

oder wenn man diese Bestandtheile unter einander schreibt,

$$
\begin{array}{rlr}
368^2 = & 300^2 \;.\;.\;. & 90000 \\
& + 2 \times 300 \times 60 \;.\;.\;. & 36000 \\
& + 60^2 \;.\;.\;. & 3600 \\
& + 2 \times 360 \times 8 \;.\;.\;. & 5760 \\
& + 8^2 \;.\;.\;. & 64 \\
\hline
& & 135424.
\end{array}
$$

Auf dieselbe Art erhält man auch

$$
\begin{array}{rlr}
2438^2 = & 2000^2 \;.\;.\;. & 4000000 \\
& + 2 \times 2000 \times 400 \;.\;.\;. & 1600000 \\
& + 400^2 \;.\;.\;. & 160000 \\
& + 2 \times 2400 \times 30 \;.\;.\;. & 144000 \\
& + 30^2 \;.\;.\;. & 900 \\
& + 2 \times 2430 \times 8 \;.\;.\;. & 38880 \\
& + 8^2 \;.\;.\;. & 64 \\
\hline
& & 5943844.
\end{array}
$$

Wenn man die Stellung der Ziffern in den einzelnen Bestandtheilen gehörig berücksichtigt, so können die Nullen beim Anschreiben ganz weggelassen werden; es darf nur jeder folgende Bestandtheil um eine Stelle rechts hinaus gerückt werden. Mit Hinweglassung der Nullen würden sich die früheren Beispiele so stellen:

$$
\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{368^2} \\
\hline
3^2 \;.\;.\; & 9. \\
2 \times 3 \times 6 \;.\;.\; & 36. \\
6^2 \;.\;.\; & 36. \\
2 \times 36 \times 8 \;.\;.\; & 576. \\
8^2 \;.\;.\; & 64 \\
\hline
& 135424
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\multicolumn{2}{l}{24382^2} \\
\hline
2^2 \;.\;.\; & 4 \\
2 \times 2 \times 4 \;.\;.\; & 16. \\
4^2 \;.\;.\; & 16. \\
2 \times 24 \times 3 \;.\;.\; & 144. \\
3^2 \;.\;.\; & 9. \\
2 \times 243 \times 8 \;.\;.\; & 3888. \\
8^2 \;.\;.\; & 64 \\
\hline
& 5943844.
\end{array}
$$

Aus diesen und anderen auf ähnliche Weise durchgeführten Beispielen ergibt sich für das Quadrat einer mehrzifferigen Zahl folgendes Bildungsgesetz:

1. Die erste oder höchste Ziffer der Wurzel gibt ihr eigenes Quadrat.

2. Jede folgende Ziffer gibt im Quadrate zwei Bestandtheile: das Doppelte der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer und ihr eigenes Quadrat.

Werden alle diese Bestandtheile so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann, so wie sie stehen, addiert, so ist die Summe das Quadrat der vorgelegten Wurzel.

Aufgaben.

1) 1234^2

$$
\begin{array}{rl}
1^2 \;.\;.\; & 1. \\
2 \times 1 \times 2 \;.\;.\; & 4. \\
2^2 \;.\;.\; & 4. \\
2 \times 12 \times 3 \;.\;.\; & 72. \\
3^2 \;.\;.\; & 9. \\
2 \times 123 \times 4 \;.\;.\; & 984. \\
4^2 \;.\;.\; & 16 \\
\hline
& 1522756.
\end{array}
$$

2)
$$\begin{array}{rrrrl}
 & & 94{\cdot}907^2 & & \\
\hline
 & & 9^2 & . \; . & 81. \\
2 \times & 9 \times & 4 & . \; . & 72. \\
 & & 4^2 & . \; . & 16. \\
2 \times & 94 \times & 9 & . \; . & 1692. \\
 & & 9^2 & . \; . & 81.. \\
2 \times & 9490 \times & 7 & . \; . & 132860. \\
 & & 7^2 & . \; . & 49 \\
\hline
 & & & & 9007{\cdot}338649.
\end{array}$$

3) $723^2 = ?$ 4) $109{\cdot}2^2 = ?$ 5) $0{\cdot}34081^2 = ?$

6) Wie groß ist die Fläche eines Quadrates, dessen jede Seite 3′ 5″ ist? (Man erhebe die Maßzahl einer Seite auf das Quadrat.)

7) Was kostet ein quadratförmiger Bauplatz, dessen Seite 9° 3′ ist, wenn jede Quadratklafter mit 35 fl. 20 kr. bezahlt wird?

§. 41. Das Verfahren, nach welchem aus einer Zahl die Quadratwurzel ansgezogen wird, läßt sich aus dem Gesetze ableiten, nach welchem die Ziffern der Quadratwurzel in dem Quadrate zusammengestellt erscheinen.

Erhebt man z. B. 7342^2 zum Quadrate, so hat man:

$$\begin{array}{rrrl|l|l|l}
 & & 7342^2 & & & & \\
\hline
 & & 7^2 & . \; . \; . & 49 & . & \\
2 \times & 7 \times & 3 & . \; . \; . & 4 & 2. & \\
 & & 3^2 & . \; . \; . & & 9 & . \\
2 \times & 73 \times & 4 & . \; . \; . & & 58 & 4. \\
 & & 4^2 & . \; . \; . & & & 16 & . \\
2 \times & 734 \times & 2 & . \; . \; . & & 2 & 93 & 6. \\
 & & 2^2 & . \; . \; . & & & & 4 \\
\hline
 & & & & 53 & 90 & 49 & 64
\end{array}$$

Da die erste Wurzelziffer im Quadrate eine oder zwei Stellen gibt, wegen jeder folgenden Wurzelziffer aber im Quadrate immer zwei Stellen zuwachsen, so enthält das Quadrat einer Zahl entweder doppelt so viel Ziffern, als deren die Wurzel hat, oder um eine weniger. Theilt man daher das Quadrat von der Rechten gegen die Linke in Classen zu zwei Ziffern, wo sodann die erste Classe links auch nur eine Ziffer enthalten kann, so hat man so viele Classen, als die Quadratwurzel Ziffern enthält.

Das Quadrat der ersten Wurzelziffer kommt in der ersten Classe vor; man findet daher die erste Ziffer der Quadratwurzel, wenn man die größte Ziffer nimmt, deren Quadrat in der ersten Classe enthalten ist; dieselbe ist 7.

Erhebt man die erste Wurzelziffer 7 zum Quadrate, zieht dieses von der ersten Classe ab und setzt zu dem Reste 4 die zweite Classe 90 hinzu, so kommen in der so entstehenden Zahl 490 die Bestandtheile vor, welche die zweite Wurzelziffer hervorbringt, nämlich das Product aus ihr und der doppelten ersten Ziffer und ihr Quadrat, und zwar erstreckt sich das Product aus der zweiten und doppelten ersten Wurzelziffer nur bis auf die erste Ziffer in der zweiten Classe, ist also in 49 enthalten. Dividiert man daher die Zahl, welche aus dem früheren Reste und der zweiten Classe entsteht, mit Ausschluß der letzten Ziffer, nämlich 49, durch das Doppelte der ersten Wurzelziffer, nämlich durch 14, so erhält man die zweite Wurzelziffer 3. — Wenn dann die Bestandtheile des Quadrates, welche aus dieser zweiten Ziffer der Wurzel hervorgehen, zu bilden sind, so kann man, anstatt zuerst die doppelte erste Wurzelziffer mit der zweiten, dann diese zweite Wurzelziffer mit sich selbst zu multiplicieren, das zweite Product um eine Stelle weiter rechts unter das erste zu stellen, und hierauf die Addition zu verrichten, kürzer verfahren, wenn man sogleich zu der doppelten ersten Wurzelziffer, d. i. zu dem Divisor 14, die zweite Ziffer anhängt, und die so gebildete Zahl 143 mit der zweiten Wurzelziffer 3 multipliciert. Man kann nämlich

anstatt $2 \cdot 7 \cdot 3 = 14 \cdot 3 = 42$. kürzer $143 \cdot 3 = 429$
$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ machen.
$\overline{429}$

Wird das Ergebniß 429 aus der zweiten Wurzelziffer von dem Reste der ersten zwei Classen subtrahiert und zu dem Reste 61 die dritte Classe hinzugesetzt, so enthält die dadurch entstandene Zahl 6149 die Bestandtheile, welche die dritte Wurzelziffer im Quadrate hervorbringt, und zwar kommt das Product aus dieser Wurzelziffer und dem Doppelten der ihr vorangehenden bereits bekannten Zahl in der Zahl 6149 mit Ausschluß der letzten Ziffer, also in 614 vor. Dividiert man daher 614 durch das Doppelte 146 der bereits gefundenen Wurzel, so ist der Quotient 4 die dritte Ziffer der Wurzel, u. s. w.

Die ganze Rechnung wird so stehen:

$\sqrt{53|90|49|64} = 7342$
$\underline{49}$. $2 \times 7 = 14$
49,0 : 143×3
$\underline{429}$ $2 \times 73 = 146$
614,9 : 1464×4
$\underline{5856}$ $2 \times 734 = 1468$
2936,4 : 14682×2
$\underline{29364}$
= = = = =

Man kann das Product aus dem jedesmaligen Divisor, nachdem man ihm die neugefundene Ziffer anhängt, und aus dieser neuen Ziffer sogleich während des Multiplicierens von dem Dividende abziehen. Die Rechnung steht dann:

$\sqrt{53|90|49|64} = 7342$
49,0 : 143×3
614,9 : 1464×4
2936,4 : 14682×2

Für das Ausziehen der Quadratwurzel gilt daher folgendes Verfahren:

1. Man theile die Zahl, von den Einern angefangen, in Classen zu zwei Ziffern; die erste Classe zur Linken kann auch nur eine

Ziffer enthalten. Bei einem Decimalbruch geschieht die Eintheilung der Ganzen vom Decimalpuncte gegen die Linke und die Eintheilung der Decimalen vom Decimalpuncte gegen die Rechte; wenn in den Decimalen die letzte Classe rechts nur eine Ziffer enthalten sollte, so wird, damit die Anzahl der Decimalen eine gerade werde, eine Null angehängt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Quadrat in der ersten Classe zur Linken enthalten ist, und schreibe sie als erste Ziffer der Wurzel an. Diese Ziffer wird zum Quadrat erhoben und dasselbe von der ersten Classe subtrahiert.

3. Die folgenden Ziffern der Quadratwurzel werden durch die Division gefunden. Man setze nämlich zu dem Reste die nächstfolgende Classe hinzu; diese Zahl, mit Hinweglassung der letzten Ziffer, ist der Dividend. Den Divisor findet man, wenn man den bereits gefundenen Theil der Wurzel mit 2 multipliciert. Nun wird dividiert, und der Quotient als eine neue Ziffer in die Wurzel und zugleich zu dem Divisor geschrieben.

4. Der so veränderte Divisor wird dann mit der neu gefundenen Ziffer der Wurzel multipliciert und das Product von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen Ziffer sogleich während der Multiplication selbst abgezogen.

5. Zu dem Reste setze man wieder die nächste Classe hinzu und wiederhole dasselbe Verfahren wie früher, bis man alle Zifferclassen heruntergesetzt hat. Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so kann man ohne zu multiplicieren und abzuziehen sogleich die nächste Classe herabsetzen, nur muß diese Null sowohl in die Wurzel als zu dem Divisor geschrieben werden.

6. Enthält das Quadrat Decimalclassen, so setzt man in der Wurzel den Decimalpunct, bevor man die erste Classe von Decimalen in Rechnung zieht.

7. Bleibt zuletzt kein Rest, so hat man die Quadratwurzel vollständig gefunden und die vorgelegte Zahl ist ein vollkommenes Quadrat. Bleibt aber am Ende ein Rest, so ist die Wurzel nicht vollkommen genau; sie kann jedoch mit jeder beliebigen Genauigkeit in Decimalen bestimmt werden, indem man nämlich jedem Reste eine Classe von zwei Nullen anhängt und übrigens so wie vorhin verfährt.

§. 42. Aufgaben.

1) $\sqrt{3|76|36} = 194$
27,6 : 29 × 9
153,6 : 384 × 4
= = = =

2) $\sqrt{34|86|78|44|01} = 59049$
98,6 : 109 × 9
5784,4 : 11804 × 4
1062801 : 118089 × 9
= = = = = = =

3) $\sqrt{3|15} = 17{\cdot}7482\ldots$

3‚1‚5 : 27 × 7
2 60‚0 : 347 × 7
17 10‚0 : 3544 × 4
2 92 40‚0 : 35488 × 8
8 49 60‚0 : 354962 × 2
1 39 67 6

4) $\sqrt{17|76{\cdot}62|25} = 42{\cdot}15$

17‚6 : 82
1 26‚2 : 841
42 12‚5 : 8425

5) $\sqrt{\tfrac{7}{8}} = \sqrt{0{\cdot}87|5_0} = 0{\cdot}935414\ldots$

6 5‚0 : 183
1 0 10‚0 : 1865
77 50‚0 : 18704
2 68 40‚0 : 187081
81 36 90‚0 : 1870824
6 48 70 4

Soll die Quadratwurzel sehr viele Decimalstellen enthalten, so kann die Arbeit bedeutend abgekürzt werden. Nachdem man nämlich um eine Ziffer mehr als die halbe Anzahl der Wurzelziffern nach dem gewöhnlichen Verfahren gefunden hat, läßt man, anstatt zu dem Reste eine neue Classe anzuhängen, in dem neuen Divisor die letzte Ziffer weg und entwickelt die folgenden Wurzelziffern mittelst der abgekürzten Division. Z. B.:

6. Um die Quadratwurzel aus 7·3891 in 7 Decimalen zu erhalten, hat man

ohne Abkürzung

$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899\ldots$

3 3‚8 : 47
9 9‚1 : 541
4 5 00‚0 : 5428
1 57 60‚0| : 54362
48 87 6|0‚0 : 543648
5 38 4|1 60‚0 : 5436569
49 1|2 47 90‚0 : 5436589
1|9 55 79 9

abgekürzt

$\sqrt{7{\cdot}38|91} = 2{\cdot}7182899$

3 38 : 47
991 : 541
45000 : 5428
157600 : 54362
48876 : 54‚3‚6‚4
5385
492
3

7) $\sqrt{1{\cdot}57823} = \ldots$
8) $\sqrt{5{\cdot}743178} = \ldots$
9) $\sqrt{582169} = \ldots$
10) $\sqrt{6849.2176} = \ldots$
11) $\sqrt{0{\cdot}000256} = \ldots$
12) $\sqrt{0{\cdot}0144144036} = \ldots$
13) $\sqrt{321} = \ldots$
14) $\sqrt{235689} = \ldots$
15) $\sqrt{1343281} = \ldots$
16) $\sqrt{65157184} = \ldots$
17) $\sqrt{19{\cdot}45372} = \ldots$
18) $\sqrt{0{\cdot}76143076} = \ldots$
19) $\sqrt{3{\cdot}52} = \ldots$
20) $\sqrt{0{\cdot}35821} = \ldots$
21) $\sqrt{1\frac{1}{25}} = \ldots$
22) $\sqrt{\frac{27}{56}} = \ldots$
23) $\sqrt{455625} = \ldots$
24) $\sqrt{21650409} = \ldots$
25) $\sqrt{30{\cdot}09} = \ldots$
26) $\sqrt{68492176} = \ldots$
27) $\sqrt{2890137} = \ldots$
28) $\sqrt{961{\cdot}33482916} = \ldots$

29) Eine quadratförmige Wiese hat einen Flächenraum von 1201 $\square^{\circ}$ 28 $\square'$; wie groß ist die Länge einer Seite?

Um aus dem Flächeninhalte eines Quadrates die Länge einer Seite zu finden, muß man aus der gegebenen Zahl der Flächeneinheiten die Quadratwurzel ausziehen.

$$1201\,\square^{\circ}\ 28\,\square' = 43264\,\square'; \quad \sqrt{43264} = 208' = 34^{\circ}\ 4'.$$

30) Die Fläche eines Quadrates ist 2 $\square^{\circ}$ 15 $\square'$ 16 $\square''$; wie groß ist eine Seite?

31) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, welches so groß ist, als drei Quadrate zusammengenommen, deren Seiten 1′ 4″, 2′ 1″, 2′ 3″ sind?

32) Ein Haus, dessen Grundfläche die Form eines Rechteckes hat, ist 12° 5′ lang und 8° 4′ breit; wie groß ist die Entfernung zweier entgegengesetzter Ecken des Hauses?

Die Länge und die Breite des Hauses kann man als Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes betrachten, dessen Hypotenuse dann die Entfernung zweier entgegengesetzter Ecken ist. Wenn aber in einem rechtwinkeligen Dreiecke die beiden Katheten gegeben sind, so findet man die Hypotenuse, wenn man jede Kathete zum Quadrate erhebt, diese Quadrate addiert und aus der Summe die Quadratwurzel auszieht.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Länge} = 12^{\circ}\,5' = 77'\\ \text{Breite} = \ \ 8^{\circ}\,4' = 52'\end{array}\right\}\ \text{Katheten}\ \begin{array}{l}77^2 = 5929\\ 52^2 = 2704\end{array}$$

$$\text{Hypot.} = \sqrt{8633} = 92{\cdot}91' = 15^{\circ}\,2'\,11''.$$

33) Wie groß ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Katheten 3·56° und 4·75° sind?

34) Wie lang muß eine Leiter sein, damit sie bei einem Gebäude 2° 2′ hoch hinauf reiche, wenn sie unten 1° 2′ weit vom Gebäude aufgestellt werden soll?

35) Eine Thür, welche 7·2′ hoch und 4·5′ breit ist, soll mit Kreuzbug versehen werden; wie lang muß ein Kreuzbug werden?

36) Der Boden eines Zimmers ist 5° 8′ 4″ lang und 4° 1′ 8″ breit; der Boden eines anderen Zimmers hat den gleichen Flächeninhalt, aber die Form eines Quadrates; wie groß ist eine Seite desselben?

37) Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Fläche 3 $\square'$ 42 $\square''$ enthält?

Hier muß man die Zahl der Flächeneinheiten durch 3·1416 dividieren und aus dem Quotienten die Quadratwurzel ausziehen.

38) Jemand will eine Scheibe machen, welche 2 $\square'$ 39 $\square''$ enthalten soll; wie groß wird er den Halbmesser nehmen?

V. Erheben auf den Kubus und Ausziehen der Kubikwurzel bei besonderen Zahlen.

§. 43. Um eine Zahl zum Kubus zu erheben, darf man dieselbe nur dreimal als Factor setzen. Z. B.:

$$738^3 = 738 \times 738 \times 738 = 401947272$$
$$\left(\tfrac{9}{16}\right)^3 = \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} \times \tfrac{9}{16} = \tfrac{729}{4096}$$
$$7{\cdot}02^3 = 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 \times 7{\cdot}02 = 345{\cdot}948408.$$

Aus dem dritten Beispiele ist ersichtlich, daß der Kubus eines Decimalbruches dreimal so viel Decimalen enthalten müsse als der gegebene Decimalbruch, daß somit in einem vollständigen Kubus die Anzahl der Decimalen immer ein Vielfaches von 3 ist.

Die dritten Potenzen der einzifferigen Zahlen sind:

Kubikwurzel:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9;
Kubus:	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729.

Um später die Lehre vom Ausziehen der Kubikwurzel begründen zu können, soll hier ein zweites Verfahren, eine Zahl zum Kubus zu erheben, abgeleitet, und dabei die Formel

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

zu Grunde gelegt werden.

Um z. B. 57 nach dieser Formel auf den Kubus zu erheben, hat man

$$57^3 = (50 + 7)^3 = 50^3 + 3 \times 50^2 \times 7 + 3 \times 50 \times 7^2 + 7^3.$$

Ist eine dreizifferige Zahl 429 zum Kubus zu erheben, so zerlege man sie zuerst in zwei Theile, 420 und 9, und man hat nach der obigen Formel

$$429^3 = (420 + 9)^3 = 420^3 + 3 \times 420^2 \times 9 + 3 \times 420 \times 9^2 + 9^3;$$

aber nach derselben Formel ist

$$420^3 = (400 + 20)^3 = 400^3 + 3 \times 400^2 \times 20 + 3 \times 400 \times 20^2 + 20^3;$$

daher, wenn oben statt 420^3 dieser Werth gesetzt wird,

$$\begin{aligned}429^3 = {} & 400^3 + 3 \times 400^2 \times 20 + 3 \times 400 \times 20^2 + 20^3 \\ & + 3 \times 420^2 \times 9 + 3 \times 420 \times 9^2 + 9^3;\end{aligned}$$

oder wenn man die einzelnen Bestandtheile unter einander schreibt und wirklich entwickelt,

$$\begin{array}{lrrl} 429^3 = & & 400^3 \;.\;.\;. & 64000000 \\ & + 3 \times 400^2 \times & 20 \;.\;.\;. & 9600000 \\ & + 3 \times 400 \times & 20^2 \;.\;.\;. & 480000 \\ & + & 20^3 \;.\;.\;. & 8000 \\ & + 3 \times 420^2 \times & 9 \;.\;.\;. & 4762800 \\ & + 3 \times 420 \times & 9^2 \;.\;.\;. & 102060 \\ & + & 9^3 \;.\;.\;. & 729 \\ \hline & & & 78953589. \end{array}$$

Eben so erhält man auch

$$
\begin{array}{lllllr}
1284^3 = & & & & 1000^3 \;.\;. & 1000000000 \\
+\, 3 & \times & 1000^2 & \times & 200 \;.\;. & 600000000 \\
+\, 3 & \times & 1000 & \times & 200^2 \;.\;. & 120000000 \\
 & & & + & 200^3 \;.\;. & 8000000 \\
+\, 3 & \times & 1200^2 & \times & 80 \;.\;. & 345600000 \\
+\, 3 & \times & 1200 & \times & 80^2 \;.\;. & 23040000 \\
 & & & + & 80^3 \;.\;. & 512000 \\
+\, 3 & \times & 1280^2 & \times & 4 \;.\;. & 19660800 \\
+\, 3 & \times & 1280 & \times & 4^2 \;.\;. & 61440 \\
 & & & + & 4^3 \;.\;. & 64 \\
\hline
 & & & & & 2116874304.
\end{array}
$$

Die Nullen kann man beim Anschreiben der einzelnen Bestandtheile auch ganz weglassen, nur muß jeder folgende Bestandtheil um eine Stelle weiter rechts hinausgerückt werden. Mit Uebergehung der Nullen stellen sich die zwei letzten Beispiele so heraus:

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{429^3} \\
\hline
 & & & & 4^3 \;.\;.\;. & 64. \\
3 & \times & 4^2 & \times & 2 \;.\;.\;. & 96. \\
3 & \times & 4 & \times & 2^2 \;.\;.\;. & 48. \\
 & & & & 2^3 \;.\;.\;. & 8. \\
3 & \times & 42^2 & \times & 9 \;.\;.\;. & 47628. \\
3 & \times & 42 & \times & 9^2 \;.\;.\;. & 10206. \\
 & & & & 9^3 \;.\;.\;. & 729. \\
\hline
 & & & & & 78953589.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\multicolumn{6}{l}{1284^3} \\
\hline
 & & & & 1^3 \;.\;.\;. & 1. \\
3 & \times & 1^2 & \times & 2 \;.\;.\;. & 6. \\
3 & \times & 1 & \times & 2^2 \;.\;.\;. & 12. \\
 & & & & 2^3 \;.\;.\;. & 8. \\
3 & \times & 12^2 & \times & 8 \;.\;.\;. & 3456. \\
3 & \times & 12 & \times & 8^2 \;.\;.\;. & 2304. \\
 & & & & 8^3 \;.\;.\;. & 512. \\
3 & \times & 128^2 & \times & 4 \;.\;.\;. & 196608. \\
3 & \times & 128 & \times & 4^2 \;.\;.\;. & 6144. \\
 & & & & 4^3 \;.\;.\;. & 64 \\
\hline
 & & & & & 2116874304.
\end{array}
$$

Aus diesen Beispielen ergibt sich für die **Bildung des Kubus einer mehrzifferigen Zahl folgendes Verfahren:**

1. Man nehme den Kubus der ersten Ziffer der Wurzel.

2. Von jeder folgenden Wurzelziffer bilde man drei Bestandtheile, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser Ziffer und ihren Kubus.

3. Diese Bestandtheile werden in der Ordnung so unter einander geschrieben, daß jeder folgende um eine Stelle weiter rechts erscheint, und dann addiert.

Aufgaben.

1) 3915^3

3^3 . . .	27.
$3 \times 3^2 \times 9$ . . .	243.
$3 \times 3 \times 9^2$ . . .	729.
9^3 . . .	729.
$3 \times 39^2 \times 1$ . . .	4563.
$3 \times 39 \times 1^2$ . . .	117.
1^3 . . .	1.
$3 \times 391^2 \times 5$ . . .	2293215.
$3 \times 391 \times 5^2$ . . .	29325.
5^3 . . .	125
	60006085875.

2) $2{\cdot}1806^3$

2^3 . . .	8.
$3 \times 2^2 \times 1$ . . .	12.
$3 \times 2 \times 1^2$ . . .	6.
1^3 . . .	1.
$3 \times 21^2 \times 8$ . . .	10584.
$3 \times 21 \times 8^2$ . . .	4032.
8^3 . . .	512. . . .
$3 \times 2180^2 \times 6$ . . .	85543200.
$3 \times 2180 \times 6^2$ . . .	235440.
6^3 . . .	216
	10·368788674616.

3) $237^3 = ?$ 4) $17{\cdot}83^3 = ?$ 5) $0{\cdot}081053^3 = ?$

6) Wie groß ist der Körperinhalt eines Würfels, dessen Seite 2′ 8″ beträgt? (Man erhebt die Länge der Seite zum Kubus.)

7) Die Seite eines Quadersteines ist 1·75′; wie groß ist der Kubikinhalt?

§. 44. Um das Verfahren für das Ausziehen der Kubikwurzel zu entwickeln, wird man in Betrachtung ziehen, wie im Kubus die Bestandtheile der Kubikwurzel zusammengestellt erscheinen, um sie beim Wurzelausziehen wieder gehörig auseinander nehmen zu können.

Erhebt man zu diesem Ende z. B. 4567 zum Kubus, so hat man:

4567^3

4^3 . . .	64	.		
$3 \times 4^2 \times 5$ . . .	24	0.		
$3 \times 4 \times 5^2$ . . .	3	00.		
5^3 . . .		125	.	
$3 \times 45^2 \times 6$ . . .	3	645	0.	
$3 \times 45 \times 6^2$ . . .		48	60.	
6^3 . . .			216	.
$3 \times 456^2 \times 7$ . . .		436	665	6.
$3 \times 456 \times 7^2$ . . .			670	32.
7^3 . . .				343
	95	256	152	263

Indem die erste Wurzelziffer im Kubus eine, zwei oder drei Stellen gibt und wegen jeder folgenden Wurzelziffer im Kubus immer drei Stellen zuwachsen, so enthält der Kubus einer Zahl immer entweder dreimal so viel Ziffern als deren die Kubikwurzel hat, oder um eine oder zwei weniger. Theilt man daher den Kubus, von der Rechten angefangen, in Classen zu drei Ziffern, wo die erste Classe zur Linken auch nur eine oder zwei Ziffern enthalten kann, so hat man so viele Classen, als die Kubikwurzel Ziffern enthält.

Der Kubus der ersten Wurzelziffer ist in der ersten Classe enthalten; die erste Ziffer der Kubikwurzel wird daher gefunden, wenn man die größte Ziffer nimmt, deren Kubus in der ersten Classe vorkommt; in 95 ist der Kubus von 4, nämlich 64, enthalten; die erste Wurzelziffer ist demnach 4.

Wird der Kubus der ersten Wurzelziffer von der ersten Classe abgezogen und zu dem Reste 31 die zweite Classe herabgesetzt, so enthält diese Zahl 31256 die drei Bestandtheile, welche aus der zweiten Wurzelziffer hervorgehen, nämlich das dreifache Quadrat der ersten Ziffer multipliciert mit der zweiten, die dreifache erste Ziffer multipliciert mit dem Quadrate der zweiten, und den Kubus der zweiten Ziffer, jeden Bestandtheil um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt, und zwar erstreckt sich das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffer multipliciert mit der zweiten nur auf die erste Ziffer in der zweiten Classe. Wird daher 31256 mit Hinweglassung der zwei letzten Ziffern durch das dreifache Quadrat der ersten Wurzelziffern, nämlich durch 48, dividiert, so erhält man die zweite Wurzelziffer 5.

Entwickelt man die drei Bestandtheile, welche diese neue Wurzelziffer im Kubus hervorbringt, und rückt jeden derselben um eine Stelle weiter gegen die Rechte, subtrahiert dann diese drei Zahlen von dem Reste der ersten zwei Classen und setzt zu dem neuen Reste 4131 die dritte Classe hinzu, so muß die so gebildete Zahl 4131152 die drei Bestandtheile enthalten, welche die dritte Wurzelziffer im Kubus hervorbringt, und zwar kommt das dreifache Quadrat der ersten zwei Ziffern, als Zahl betrachtet, multipliciert mit der dritten Wurzelziffer, in jener Zahl, mit Ausschluß der letzten zwei Ziffern, also in 41311 vor. Dividiert man daher 41311 durch das dreifache Quadrat der Zahl, welche die ersten zwei Wurzelziffern bilden, nämlich durch 6075, so erhält man 6 als dritte Wurzelziffer; u. s. f.

Die ganze Rechnung steht:

$$\begin{array}{lrl}
 & \sqrt[3]{95|256|152|263} = 4567 & \\
 & 64 & \\
\hline
 & 31\,256 & :\ 48\ldots\ 3 \times 4^2 \\
3 \times 4^2 \times 5\ . \ . & 24\,0. & \\
3 \times 4 \times 5^2\ . \ . & 3\,00. & \\
5^3\ . \ . & 125 & \\
\hline
 & 4\,131\,152 & :\ 6075\ldots\ 3 \times 45^2 \\
3 \times 45^2 \times 6\ . \ . & 3\,645\,0 & \\
3 \times 45 \times 6^2\ . \ . & 48\,60 & \\
6^3\ . \ . & 216 & \\
\hline
 & 437\,336\,263 & :\ 623808\ \ 3 \times 456^2 \\
3 \times 456^2 \times 7\ . \ . & 436\,665\,6. & \\
3 \times 456 \times 7^2\ . \ . & 670\,32. & \\
7^3\ . \ . & 343 & \\
\hline
\end{array}$$

Beim Ausziehen der Kubikwurzel ist dem Vorhergehenden gemäß folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man theile die Zahl, von den Einern angefangen, gegen die Linke in Classen zu drei Ziffern; die erste Classe zur Linken kann auch nur eine oder zwei Ziffern enthalten. Kommen in der gegebenen Zahl auch Decimalen vor, so werden diese, vom Decimalpunct angefangen, gegen die Rechte hin in Classen eingetheilt; hat die letzte Decimalclasse zur Rechten weniger als drei Ziffern, so werden die fehlenden durch Nullen ergänzt.

2. Man suche die größte Ziffer, deren Kubus in der ersten Classe zur Linken enthalten ist, und schreibe sie als die erste Ziffer der Wurzel an. Diese Ziffer wird zum Kubus erhoben und derselbe von der ersten Classe abgezogen.

3. Die folgenden Ziffern der Kubikwurzel werden durch die Division gefunden. Setzt man zu dem letzten Reste die nächstfolgende Classe hinzu, so bildet diese Zahl nach Ausschluß der zwei letzten Ziffern rechts den Dividend; der Divisor ist das dreifache Quadrat des bereits gefundenen Theiles der Kubikwurzel. Der Quotient wird als eine neue Ziffer in die Wurzel geschrieben.

4. Man bildet die Bestandtheile, welche diese neue Ziffer im Kubus hervorbringt, nämlich das dreifache Quadrat der ihr vorangehenden Zahl multipliciert mit dieser Ziffer, die dreifache vorangehende Zahl multipliciert mit dem Quadrate dieser Ziffer und ihren eigenen Kubus, schreibt den ersten Bestandtheil unter den Dividend, jeden folgenden aber um eine Stelle weiter rechts darunter und subtrahiert die Summe der so angesetzten Bestandtheile von dem Dividende mit Zuziehung der früher weggelassenen zwei Ziffern.

5. Zu dem Reste setzt man wieder die neue Classe hinzu und wiederholt dasselbe Verfahren wie früher, bis man alle Zifferclassen heruntergesetzt hat. Findet man 0 als eine Ziffer der Wurzel, so kann man, ohne die drei Bestandtheile zu entwickeln und abzuziehen, so-

15) $\sqrt[3]{22{\cdot}164361129} = \ldots$ 16) $\sqrt[3]{56800{\cdot}235584} = \ldots$
17) $\sqrt[3]{13{\cdot}0835} = \ldots$ 18) $\sqrt[3]{0{\cdot}0000297} = \ldots$
19) $\sqrt[3]{\frac{5}{6}} = \ldots$ 20) $\sqrt[3]{2\frac{7}{12}} = \ldots$
21) Wie groß ist die Seite eines Würfels, dessen Inhalt 438976 Kubikzoll beträgt?

Um aus dem Körperinhalte eines Würfels die Länge einer Seite zu finden, zieht man aus der gegebenen Zahl der Kubikeinheiten die Kubikwurzel aus.

22) Der Inhalt eines Würfels beträgt 4 Kub.′ 237 Kub.″; wie lang ist eine Seite desselben?
23) Wie lang ist die Seite eines Würfels, welcher so viel Raum enthält, als zwei Würfel zusammen, deren Seiten 2′ 5″ und 1′ 8″ sind?
24) Ein Kupferschmied hat einen würfelförmigen Kessel zu verfertigen, der 5 Eimer 18 Maß fassen soll; wie lang muß eine Seite desselben werden, wenn 1 Eimer 1·792 Kubikfuß enthält?
25) Wie groß ist der Durchmesser einer Kugel, deren Kubikinhalt 25 Kub.′ 1402 Kub.″ beträgt?

Man multipliciere den Körperinhalt mit 1·9099, und ziehe aus dem Producte die Kubikwurzel aus.

26) Eine messingene Kugel wiegt 4 Pfund; wie groß ist der Durchmesser derselben, wenn ein Kubikzoll Messing $8\frac{1}{2}$ Loth wiegt?

VI. Vermischte Aufgaben über das Rechnen mit Potenzen und Wurzelgrößen.

§. 46. 1) $(8a^3b^4)^2 = \ldots$ 2) $72x^8 : -8x^5 = \ldots$
3) $[(-a^2bx^3)^2]^3 = \ldots$
4) $5a^4 - 3a^4 + 8a^4 - a^4 = \ldots$ 5) $\left(-\frac{2a^2x^3}{3by^4}\right)^3 = \ldots$
6) $\left[\left(\frac{3m^2z^3}{2n}\right)^4\right]^2 = \ldots$
7) $\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^3 \cdot \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^3 = \ldots$ 8) $\frac{9a^3b^4}{cd^3} \cdot \frac{5a^2d^3}{6b^2c^2} = \ldots$
9) $2x^2y^3z^2 \cdot -5xy^2z^4 \cdot 3x^3y = \ldots$
10) $35a^2b^4c \cdot -2a^5b^2c^4 : -7a^4b^4c^4 = \ldots$
11) $\left(\frac{5ab^2c^3x^4}{6m^3n^2py^4}\right)^5 = \ldots$ 12) $\frac{6a^3m^2x}{7bn^3y} \cdot \frac{an^2y^2}{4b^2mx^2} \cdot \frac{b^2x^3}{a^2y} = \ldots$
13) $[3(a-b)]^3 = \ldots$ 14) $[-(a+b)^2]^3 = \ldots$
15) $(9a^2 - 5)^2 = \ldots$ 16) $(8a^3 + 3x^2)^2 = \ldots$
17) $(5m + 4n)^3 = \ldots$ 18) $(2ax^2 - 5by^2)^3 = \ldots$
19) $(7a^2 - 5ab)^2 = \ldots$ 20) $(6a^2b^3 + 5x^3y^2)^3 = \ldots$
21) $8a^2bx^2 \cdot -3ab^2y^3 \cdot -2b^2x^2y \cdot 5a^2b = \ldots$
22) $(2a^3 - 5a^2b - 4ab^2 + 3b^3) \cdot 6a^2b^3 = \ldots$
23) $(a-b)^3 \cdot (a-b)^2 \cdot (a-b)^{m-4} = \ldots$
24) $(14a^3b^2c + 28a^2b^3c^2 - 35ab^4c^3) : -7ab^2c = \ldots$
25) $(30a^2)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{15a}\right)^2 = \ldots$ 26) $\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 \cdot (a+1)^3 = \ldots$

27) $\frac{(a^4 - m^4)^3}{(3a^2 - 3m^2)^3} = \ldots$ 28) $\frac{3^5 \cdot 8^5 \cdot 5^5}{2^5 \cdot 6^5 \cdot 20^5} = \ldots$

29) $\frac{(a-1)^2}{(x-2)^2} \cdot \frac{(x-2)^3}{a-1} = \ldots$ 30) $\left(\frac{x^2-1}{a^2-1}\right)^3 : \left(\frac{x+1}{a-1}\right)^3 = \ldots$

31) $\left(\frac{3x}{8} - \frac{5a}{6}\right)^2 = \ldots$ 32) $\left(\frac{9a}{b} - \frac{4b}{a}\right)^3 = \ldots$

33) $\left(\frac{5a^2}{4x} + \frac{7x^2}{10a}\right)^2 = \ldots$ 34) $\left(\frac{3x^4}{2} + \frac{2y^3}{3}\right)^3 = \ldots$

35) $\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^3}{2a}\right)^3 = \ldots$ 36) $\left(\frac{2a^4}{m^3} + \frac{3m^2}{2a}\right)^2 = \ldots$

37) $\left(\frac{3a^2b}{4x^4} - \frac{2ax^2}{9b^3}\right)^2 = \ldots$ 38) $\left(\frac{8a^5c^4}{9b^3x^6} - \frac{3a^2b^4}{4c^3x^3}\right)^3 = \ldots$

39) $\sqrt{56169} = \ldots$ 40) $\sqrt{29844369} = \ldots$

41) $\sqrt{27329} = \ldots$ 42) $\sqrt{63123025} = \ldots$

43) $\sqrt[3]{13144256} = \ldots$ 44) $\sqrt[3]{268336125} = \ldots$

45) $\sqrt[3]{96702579} = \ldots$ 46) $\sqrt{318611987} = \ldots$

47) $\sqrt{\tfrac{3}{4}} = \ldots$ 48) $\sqrt[3]{3\tfrac{4}{5}} = \ldots$

49) $\sqrt{2583 \cdot 6889} = \ldots$ 50) $\sqrt[3]{1 \cdot 191016} = \ldots$

51) $(1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + 9x^8)(1 - 2x + 3x^2) = \ldots$

52) $(2a^4 - 13a^3b + 31a^2b^2 - 38ab^3 + 24b^4) : (2a^2 - 3ab + 4b^2) = \ldots$

53) $\frac{(4a^2 \cdot 5b^3)^4 \cdot (2a^3 \cdot b^3)^2}{(30a^4b^3)^5} = \ldots$

54) $\left(1 - \frac{2x}{3} + \frac{3x^2}{4} - \frac{4x^3}{5}\right)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2x^2}{3}\right) = \ldots$

55) $\left(\frac{2a^6}{7b^3} + \frac{3a^3}{5b} - \frac{b}{2}\right)\left(\frac{5a^6}{8b} - \frac{2a^3b}{3} + \frac{3ab^3}{4}\right) = \ldots$

56) $(3a^2b - 2ab^2 + 7b^3)(5a^3b - 4a^2b^2 - 3ab^3) = \ldots$

57) $(3a^2 + 3ab - 6b^2)^2 : (a-b)^2 (a+2b)^2 = \ldots$

58) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4 - 6x^2 + 9} - \frac{x+2}{x^3 - 3x} = \ldots$

59) $\frac{3a - b}{25a^2 - 20ab + 4b^2} + \frac{2a + b}{75a^2 - 12b^2} = \ldots$

60) $\left(\frac{x^3y}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\frac{m^2}{x}\right)^4 : \left(\frac{y^3}{am^2}\right)^3 \cdot \left(\frac{m^2x^3}{a^2y}\right)^5 = \ldots$

61) $\sqrt{25836889} = \ldots$ 62) $\sqrt{57198969} = \ldots$

63) $\sqrt{23614489} = \ldots$ 64) $\sqrt{1607448649} = \ldots$

65) $\sqrt[3]{340068392} = \ldots$ 66) $\sqrt[3]{6372783864} = \ldots$

67) $\sqrt[3]{28 \cdot 25} = \ldots$ 68) $\sqrt[3]{0 \cdot 008743} = \ldots$

69) $\sqrt{2565 \cdot 805321} = \ldots$ 70) $\sqrt{57 \cdot 65213041} = \ldots$

71) $\sqrt[3]{42411367981} = \ldots$ 72) $\sqrt[3]{897237012125} = \ldots$

73) $\sqrt{873456319} = \ldots$ 74) $\sqrt{579749756569} = \ldots$

75) $\sqrt{6975757441} = \ldots$ 76) $\sqrt{17596287801} = \ldots$

77) $\sqrt[3]{83125013456} = \ldots$ 78) $\sqrt[3]{6321363049} = \ldots$

79) $\frac{21a^6m^3x^9 : 12am^2x^5 : 4a^5mx^3}{121a^9m^{15}x^7 : 11a^3m^9x : 7a^3m^4x^3} = \ldots$

80) $\left(\frac{3a^4b^3}{5x^5} - \frac{4ab^7}{7x} - \frac{7b''x^3}{a^2}\right)\left(\frac{3a^2b}{4x^3} + \frac{4b^5x}{9a} - \frac{b^9x^5}{a''}\right) = \ldots$

81) $\left(\frac{16a^8}{81x^4} - \frac{8a^6}{9x^2} + \frac{3a^4}{2} - \frac{9a^2x^2}{8} + \frac{81x^4}{256}\right) : \left(\frac{4a^4}{9x^2} - a^2 + \frac{9x^2}{16}\right) = \ldots$

Vierter Abschnitt.

Die Combinationslehre.

§. 47. Die **Combinationslehre** beschäftigt sich im Allgemeinen mit der verschiedenen Anordnung und Zusammenstellung gegebener Größen. Jede solche gegebene Größe heißt ein **Element**, und jede Verbindung mehrerer Elemente eine **Gruppe** oder **Complexion**.

Bei der Combinationslehre kommen zwei **Hauptaufgaben** in Betrachtung.

Es kann verlangt werden, daß man alle verschiedenen Stellungen angibt, in die eine bestimmte Anzahl Elemente gebracht werden kann, wobei jede Complexion alle gegebenen Elemente enthalten soll. So geben die drei Buchstaben a, b, c sechs verschiedene Stellungen: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Man nennt diese Versetzung der Elemente das **Permutieren**.

Es kann ferner verlangt werden, daß man aus einer gegebenen Anzahl von Elementen alle Verbindungen zu zwei, zu drei, zu vier ... Elementen bilde, wobei übrigens auf die Stellung der Elemente keine Rücksicht genommen wird. Ein solches Verbinden von gegebenen Elementen nennt man das **Combinieren**. Die Verbindungen zu zwei Elementen heißen **Amben** oder **Combinationen der zweiten Classe**, jene zu drei Elementen **Ternen** oder **Combinationen der dritten Classe**, zu vier Elementen **Quaternen** oder **Combinationen der vierten Classe** u. s. w. Die vier Buchstaben a, b, c, d geben sechs Amben: ab, ac, ad, bc, bd, cd; vier Ternen: abc, abd, acd, bcd, und eine Quaterne: abcd.

Sowohl bei den Versetzungen als bei den Verbindungen kommt es auf zwei Sachen an: auf die **wirkliche Bildung** der verlangten Gruppen und auf die **Bestimmung ihrer Anzahl**.

Die einzelnen Elemente pflegt man entweder mit den in natürlicher Ordnung auf einander folgenden Zahlen, welche **Zeiger** heißen, oder mit Buchstaben zu bezeichnen.

Eine Gruppe von Elementen heißt **natürlich geordnet**, wenn der niedrigste Zeiger die erste Stelle einnimmt, hierauf ein immer höherer Zeiger folgt und der höchste am letzten Platze vorkommt, z. B. 123, 134; dagegen ist 132 nicht natürlich geordnet. Von zwei Complexionen, welche eine gleiche Anzahl Zeiger enthalten, heißt jene die **höhere**, worin von der Linken aus zuerst ein höheres Element vorkommt; z. B. die Gruppe 132 ist höher als 123, eben so 234 höher als 124.

Bei Buchstaben sieht man diejenigen als mit einem höheren Zeiger behaftet an, welche im Alphabete später vorkommen; es ist demnach die Complexion a b c d natürlich geordnet, a c b d dagegen nicht; ferner stellt a c b d eine höhere Complexion vor als a b c d.

I. Permutationen.

§. 48. 1. Um von mehreren gegebenen Elementen alle möglichen Permutationen zu bilden, stelle man zuerst die niederste Complexion auf, indem man die Elemente in natürlicher Ordnung anschreibt. Aus jeder schon aufgestellten Complexion erhält man die nächst höhere nach folgender Regel: Man gehe in der letzten Gruppe von rechts nach links so lange fort, bis man auf ein Element kommt, an dessen Stelle aus den rechts folgenden ein höheres Element gesetzt werden kann, schreibe dieses an jene Stelle, und lasse die ihr vorangehenden Elemente ungeändert stehen, die anderen aber ihr in natürlicher Ordnung folgen. Die höchste Complexion erkennt man daran, daß darin die Elemente im Vergleich gegen die erste Gruppe gerade in umgekehrter Ordnung vorkommen. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3.			Elemente a, b. c.		
1 2 3	2 1 3	3 1 2	a b c	b a c	c a b
1 3 2	2 3 1	3 2 1	a c b	b c a	c b a

Elemente a, b, c, d.

a b c d	b a c d	c a b d	d a b c
a b d c	b a d c	c a d b	d a c b
a c b d	b c a d	c b a d	d b a c
a c d b	b c d a	c b d a	d b c a
a d b c	b d a c	c d a b	d c a b
a d c b	b d c a	c d b a	d c b a

Das nämliche Verfahren gilt auch, wenn unter den Elementen, die man zu permutieren hat, mehrere einander gleich sind. Z. B.:

Elemente a, b, b, b, c, c.

abbbcc	babbcc	bbabcc	bcabbc	cabbbc	cbabbc	ccabbb
abbcbc	babcbc	bbacbc	bcabcb	cabbcb	cbabcb	ccbabb
abbccb	babccb	bbaccb	bcacbb	cabcbb	cbacbb	ccbbab
abcbbc	bacbbc	bbbacc	bcbabc	cacbbb	cbbabc	ccbbba
abcbcb	bacbcb	bbbcac	bcbacb		cbbacb	
abccbb	baccbb	bbbcca	bcbbac		cbbbac	
acbbbc		bbcabc	bcbbca		cbbbca	
acbbcb		bbcacb	bcbcab		cbbcab	
acbcbb		bbcbac	bcbcba		cbbcba	
accbbb		bbcbca	bccabb		cbcabb	
		bbccab	bccbab		cbcbab	
		bbccba	bccbba		cbcbba	

§. 49. 2. Aus der Art, wie die Permutationen gebildet werden, läßt sich leicht auch ihre Anzahl bestimmen.

Es soll zuerst der Fall betrachtet werden, wo die gegebenen Elemente unter einander verschieden sind.

Bei einem Elemente a ist nur eine Stellung möglich.

Zwei Elemente a und b lassen zwei Stellungen zu, nämlich ab und ba.

Von drei Elementen a, b, c kann jedes 2mal am ersten Platze stehen, während die anderen zwei permutiert nachfolgen; daher es $2 \times 3 = 6$ verschiedene Stellungen gibt.

Bei vier Elementen a, b, c, d kann jedes so oft am ersten Platze stehen, wie oft sich die anderen drei nachfolgenden Elemente versetzen lassen, somit 6mal; man hat daher 6 Permutationen, wo a die erste Stelle einnimmt, eben so viele, wo b, wo c, wo d am ersten Platze steht; also zusammen $6 \times 4 = 24$ verschiedene Stellungen.

Eben so überzeugt man sich, daß 5 Elemente $24.5 = 120$ Permutationen geben.

Drückt man die Anzahl aller Permutationen von n verschiedenen Elementen durch P_n (Permutationszahl von n) aus, so ist nach dem Vorhergehenden

$$P_1 = 1$$
$$P_2 = 2 = 1 \,.\, 2$$
$$P_3 = P_2 \,.\, 3 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3$$
$$P_4 = P_3 \,.\, 4 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4$$
$$P_5 = P_4 \,.\, 5 = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5,$$

daher allgemein

$$P_n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,\ldots\, (n-1) \,.\, n.$$

Die Permutationszahl einer gegebenen Anzahl von verschiedenen Elementen ist also gleich dem Producte aus der Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl der Elemente angibt.

Das Product $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots (n-1)\, n$ pflegt man durch das Symbol $n!$ auszudrücken; daher

$$P_2 = 2!,\ P_3 = 3!,\ P_4 = 4!,\ \ldots\ldots\ P_n = n!$$

§. 50. Kleiner fällt die Anzahl der möglichen Permutationen aus, wenn mehrere gleiche Elemente vorkommen.

Es sei z. B. die Permutationszahl der Elemente a, b, b, b, c zu bestimmen. Versieht man die drei gleichen Elemente b mit Zeigern und betrachtet a, b_1, b_2, b_3, c als ganz verschiedene Elemente, so wäre die Anzahl der Permutationen $5! = 120$. Denkt man sich diese Permutationen wirklich gebildet, so wird man sehen, daß es immer mehrere Complexionen gibt, in denen a und c dieselbe Stelle einnehmen, und die sich nur durch die verschiedene Stellung von b_1, b_2, b_3 unterscheiden, und zwar gibt es, da b_1, b_2, b_3 nach dem Vorhergehenden $3! = 6$ verschiedene Stellungen zulassen, für jede Stellung von a und c immer 6 Permutationen, welche sich durch die bloße Versetzung der mit Zeigern versehenen Elemente unterscheiden; so hat man z. B. folgende Permutationen, wo a am ersten und c am dritten Platze vorkommt.

$ab_1cb_2b_3$, $ab_1cb_3b_2$, $ab_2cb_1b_3$, $ab_2cb_3b_1$, $ab_3cb_1b_2$, $ab_3cb_2b_1$.

Läßt man hier die Zeiger weg, d. h. betrachtet man die drei b wieder als gleiche Elemente, so werden alle diese 6 Permutationen in eine einzige a b c b b übergehen. Auf dieselbe Art werden von den 120 Permutationen, sobald man die Zeiger beseitiget, je 6 gleich werden und somit auf eine einzige zurückgeführt. Man muß also die Permutationszahl aller Elemente durch die Permutationszahl der gleichen Elemente dividieren; die Anzahl aller verschiedenen Permutationen der Elemente abbbc ist demnach $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$.

Auf gleiche Weise überzeugt man sich, daß die Elemente abbbbc $\frac{6!}{4!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3.4} = 30$ verschiedene Permutationen geben.

Würden unter 10 gleichen Elementen nebst 4 gleichen auch noch andere 3 gleiche Elemente vorkommen, so müßte man aus ähnlichen Gründen die Permutationszahl $\frac{10!}{4!}$ wegen der 3 gleichen Elemente noch durch 3! dividieren; die Anzahl aller verschiedenen Permutationen wäre daher $\frac{10!}{4!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{1.2.3.4.1.2.3} = 25200$.

§. 51. Aufgaben.

1) Wie oft können 6 Gäste ihre Plätze am Tische wechseln, bis sie in allen möglichen Ordnungen gesessen sind?

$6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$mal.

2) Wie vielmal können die 24 Buchstaben des Alphabets versetzt werden?

3) Wie viel verschiedene Stellungen geben eine weiße, zwei blaue und drei rothe Kugeln?

$$\frac{6!}{2!\,3!} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.1.2.3} = 60.$$

4) Auf wie viele Arten lassen sich fünf Fächer mit drei verschiedenen Kugeln, deren eine weiß, die andere gelb, die dritte roth ist, besetzen.

Es werden immer drei Fächer mit Kugeln besetzt, während zwei Fächer leer bleiben; denkt man sich die zwei leeren Fächer mit 0 besetzt, so hat man 5 Elemente, unter denen 0 zweimal vorkommt; daher gibt es

$\frac{5!}{2!} = \frac{1.2.3.4.5}{1.2} = 60$ Arten der Besetzung.

5) Wie oft lassen sich die Factoren der Producte a b c d e f, $a^2bc = aabc$, a^3b^2cd, $x^3y^2z^4$, $a^{m-n}b^n$ permutieren?

II. Combinationen.

§. 52. Man unterscheidet Combinationen ohne und mit Wiederholungen, je nachdem dasselbe Element in einer Complexion nur einmal oder auch mehrmal vorkommen darf.

1. Bei der Bildung der Combinationen geht man wie beim Permutieren stets von niedrigeren Complexionen zu höheren über.

Um aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben ohne Wiederholungen zu bilden, verbindet man jedes Element mit allen nachfolgenden. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3, 4	Elemente a, b, c, d, e
12, 13, 14;	ab, ac, ad, ae;
23, 24;	bc, bd, be;
34;	cb, ce;
	de.

Um die Ternen ohne Wiederholungen zu erhalten, verbindet man jede Ambe mit allen nachfolgenden Elementen. Z. B.:

123, 124; 134;	abc, abd, abe; acd, ace; ade;
234.	bcd, bce; bde;
	cde.

Auf gleiche Weise geschieht die Bildung der Quaternen, Quinternen . . . ohne Wiederholungen.

Will man aus mehreren gegebenen Elementen alle Amben mit Wiederholungen bilden, so verbinde man jedes Element mit sich selbst und mit allen nachfolgenden Elementen. Z. B.:

Elemente 1, 2, 3. 4	Elemente a, b, c, d, e
11, 12, 13, 14;	aa, ab, ac, ad, ae;
22, 23, 24;	bb, bc, bd, be;
33, 34;	cc, cd, ce;
44;	dd, de;
	ee.

Die Ternen mit Wiederholungen erhält man, wenn man jede Ambe mit Wiederholungen zuerst mit dem höchsten darin vorkommenden Elemente, und dann mit allen nachfolgenden Elementen verbindet. Z. B.:

111, 112, 113, 114;	122, 123, 124;	133, 134;	144;
222, 223, 224;	233, 234;	244;	
333, 334;	344;		
444.			

Nach denselben Grundsätzen werden auch die Quaternen, Quinternen, . . . mit Wiederholungen gebildet.

§. 53. 2. Die Anzahl der verschiedenen Combinationen aus mehreren gegebenen Elementen ergibt sich aus folgenden Betrachtungen.

Sind z. B. fünf Elemente a, b, c, d, e gegeben, so erhält man sicher alle Amben ohne Wiederholungen, wenn man zuerst das Element a mit allen übrigen Elementen verbindet, dann eben so mit b und den noch folgenden Elementen verfährt. Man erhält, wenn man die aus jedem Elemente hervorgehenden Amben in eine Reihe schreibt:

a	gibt	ab,	ac,	ad,	ae;
c	„	ab,	bc,	bd,	be;
c	„	ac,	bc,	cd,	ce;
d	„	ad,	bd,	cd,	de;
e	„	ae,	be,	ce,	de;

Offenbar hat man hier so viele Reihen, als Elemente da sind, nämlich 5, und in jeder Reihe eine Ambe weniger, als man Elemente zu verbinden hat, somit 4; die Anzahl aller Amben ist also 5×4. Allein jede Ambe kommt zweimal vor; z. B. die Ambe bc, indem man b mit c, und indem man c mit b verbindet; daher gibt es nur

$\frac{5 \times 4}{2} = 10$ verschiedene Amben. Wären n Elemente gegeben, so hätte man n Reihen und in jeder Reihe $n-1$ Amben, zusammen $n(n-1)$; da aber darunter immer zwei gleiche vorkommen, so ist die Anzahl aller verschiedenen Amben.

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Es ist ferner gewiß, daß man alle Ternen ohne Wiederholungen erhalten wird, wenn man jede Ambe mit allen Elementen verbindet, nur mit den zwei Elementen nicht, welche in der Ambe vorkommen. Man hat somit:

Ambe	ab	gibt abc, abd, abe;	Ambe	bd	gibt abd, bcd, bde;
„	ac	„ abc, acd, ace;	„	be	„ abe, bce, bde;
„	ad	„ abd, acd, ade;	„	cd	„ acd, bcd, cde;
„	ae	„ abe. ace, ade;	„	ce	„ ace, bce, cde;
„	bc	„ abc, bcd, bce;	„	de	„ ade, bde, cde.

Hier sind so viele Reihen, als früher Amben da waren, also $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 4} = 10$, und in jeder Reihe zwei Ternen weniger, als Elemente zu combinieren sind, nämlich 3; zusammen also $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \cdot 2}$ Ternen. Allein jede Terne kommt dreimal vor; folglich ist die letzte Zahl noch durch 3 zu dividieren, und man hat $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ verschiedene Ternen. Für n Elemente hätte man $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Ternen.

Eben so überzeugt man sich, daß bei n Elementen

die Anzahl aller Quaternen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

„ „ „ Quinternen $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

u. s. w. ist.

Das Gesetz, welches in diesen Zahlen herrscht, ist leicht zu überblicken. Die Anzahl der Combinationen irgend einer Classe ohne Wiederholungen läßt sich nämlich durch einen Bruch darstellen, worin sowohl der Zähler als der Nenner so viele Factoren enthält, als Elemente in einer Combination vorkommen; der erste Factor im Zähler ist gleich der Anzahl aller Elemente, jeder folgende um 1 kleiner; der Nenner ist die natürliche Reihe der Factoren von 1 bis zu der Zahl, welche die Anzahl aller Elemente in einer Combination ausdrückt.

§. 54. Auf ähnlichen Betrachtungen beruht auch die Bestimmung der Zahl der Combinationen mit Wiederholungen.

Hat man wieder z. B. fünf Elemente a, b, c, d, e, so wird man gewiß alle Amben mit Wiederholungen erhalten, wenn man jedes Element mit sich selbst und dann noch mit allen Elementen, auch sich selbst nicht ausgenommen, verbindet.

Schreibt man die Amben, die aus einer solchen Verbindung eines jeden Elementes hervorgehen, in eine Reihe, so hat man:

a gibt aa, aa, ab, ac, ad, ae,
b „ bb, ab, bb, bc, bd, be,
c „ cc, ac, bc, cc, cd, ce,
d „ dd, ad, bd, cd, dd, de,
e „ ee, ae, be, ce, de, ee.

Man erhält also so viele Reihen als Elemente da sind, und in jeder Reihe um eine Ambe mehr, somit 5 Reihen, deren jede 6 Amben enthält, zusammen 5 . 6 Amben. Weil nun darunter jede Ambe 2mal vorkommt, so ist $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ die Anzahl aller verschiedenen Amben. Für n Elemente erhielte man n Reihen und in jeder Reihe $n + 1$ Amben, zusammen $n(n + 1)$; die Anzahl aller verschiedenen Amben wäre somit $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$.

Um sicher alle Ternen mit Wiederholungen zu erhalten, darf man nur jede Ambe zuerst mit den zwei Elementen, die darin vorkommen, und dann noch mit allen Elementen verbinden. Dadurch gibt

die Ambe aa . . . aaa, aaa, aaa, aab, aac, aad, aae;
„ „ ab . . . aab, abb, aab, abb, abc, abd, abe;
„ „ ac . . . aac, acc, aac, abc, acc, acd, ace;
„ „ ad . . . aad, add, aad, abd, acd, add, ade;
„ „ ae . . . aae, aee, aae, abe, ace, ade, aee;
„ „ bb . . . bbb, bbb, abb, bbb, bbc, bbd, bbe;
„ „ bc . . . bbc, bcc, abc, bbc, bcc, bcd, bce;
u. s. f.

Hier kommen so viele Reihen vor, als Amben mit Wiederholungen da waren, also $\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$, und in jeder Reihe 2 Ternen mehr, als Elemente gegeben sind, hier 7 Ternen; zusammen also $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2}$. Allein jede Terne kommt 3mal vor, folglich ist die Anzahl aller verschiedenen Ternen $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Wären n Elemente gegeben, so hätte man $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$ Reihen und in jeder $n + 2$ Ternen, also im Ganzen $\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Ternen, worunter aber je 3 gleich sind; die Anzahl der verschiedenen Ternen mit Wiederholungen wäre also

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Eben so findet man die Anzahl

der Quaternen mit Wiederholungen $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

„ Quinternen „ „ $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$

u. s. w.

Man sieht sogleich, daß sich die Zahl der Combinationen irgend einer Classe mit Wiederholungen von der Zahl der Combinationen derselben Classe ohne Wiederholungen nur dadurch unterscheidet, daß bei der ersten die Factoren des Zählers um 1 wachsen, während sie bei der letzteren um 1 abnehmen.

§. 55. Aufgaben.

1) Man zähle die möglichen Arten eines Wechsels von je drei der sechs Farben roth, orange, gelb, grün, blau und violett auf.

2) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die 90 Nummern unserer Zahlenlotterie?

Anzahl der Amben $= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005,$

" " Ternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480,$

" " Quaternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190,$

" " Quinternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43949268.$

3) Wie viele Amben, Ternen, Quaternen, Quinternen geben die in einer Ziehung erscheinenden 5 Nummern der Zahlenlotterie?

Anzahl der Amben $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10,$

" " Ternen $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10,$

" " Quaternen $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5,$

" " Quinternen $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1.$

4) Wie viel verschiedene Würfe sind mit zwei Würfeln möglich?

Die Anzahl verschiedener Würfe ist offenbar gleich der Anzahl Amben mit Wiederholungen von 6 Elementen, also

$$\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21.$$

5) Wie viele Combinationen der ersten zweiten, dritten, ... Classe mit oder ohne Wiederholungen geben 7 Elemente?

6) Wie viele ein-, zwei-, drei-, vierzifferige Zahlen können mit den Ziffern 3, 4, 5, 6 geschrieben werden? (Hier ist mit dem Combinieren auch das Permutieren zu verbinden.)

Fünfter Abschnitt.

Zusammengesetzte Verhältnisrechnungen.

I. Von den zusammengesetzten Verhältnissen.

§. 56. Wenn man in mehreren gegebenen Verhältnissen alle Vorderglieder mit einander, und eben so alle Hinterglieder mit einander multipliciert, so bilden die Producte ein neues Verhältnis, welches in Hinsicht der gegebenen einfachen Verhältnisse ein zusammengesetztes genannt wird; z. B.:

$$\text{einfache Verhältnisse}\left.\begin{array}{ccc} 1 & : & 2 \\ 3 & : & 4 \\ 5 & : & 7 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{ccc} a & : & b \\ c & : & d \\ e & : & f, \end{array}$$

$$\text{zusammengesetztes Verhältnis} \quad 15 : 56 \quad ace : bdf.$$

Der Exponent eines zusammengesetzten Verhältnisses ist gleich dem Producte aus den Exponenten der einfachen Verhältnisse.

§. 57. Zusammengesetzte Verhältnisse kommen in der Anwendung überall vor, wo Größen mit einander zu vergleichen sind, die von zwei oder mehreren Größenarten abhängen. So hängt z. B. die Fläche eines Rechteckes von der Länge und Breite desselben ab. Ist nun das Verhältnis der Flächen zweier Rechtecke zu bestimmen, deren erstes 5^{0} lang und 3^{0} breit, das zweite 7^{0} lang und 4^{0} breit ist, so hat man erstlich

Verhältnis der Längen 5 : 7,
" " Breiten 3 : 4.

Die Fläche des ersten Rechteckes wird offenbar die nämliche bleiben, wenn man dasselbe statt 3^{0} nur 1^{0} breit, dafür aber 3mal so lang, also 15^{0} lang annimmt; eben so kann man das zweite Rechteck, ohne seine Fläche zu ändern, statt 4^{0} nur 1^{0} breit, und dagegen 4mal so lang, somit 28^{0} lang annehmen. Die beiden Flächen und ihr gegenseitiges Verhältnis bleiben also ungeändert, wenn man bei beiden Rechtecken dieselbe Breite 1^{0} und die Längen 15^{0} und 28^{0} annimmt; in diesem Falle aber hängen die Flächen, weil die Breite gleich ist, nur von den Längen 15^{0} und 28^{0} ab, und es ist somit das Verhältnis der beiden Flächen gleich $15 : 28$ oder $5 \times 3 : 7 \times 4$. Das Verhältnis der Flächen der zwei Rechtecke ist also ein zusammengesetztes Verhältnis aus den einfachen Verhältnissen der Längen und der Breiten. Man pflegt sich kürzer so auszudrücken: die Fläche eines Rechteckes steht im zusammengesetzten Verhältnisse der Länge und der Breite.

Auf dieselbe Art stehen im zusammengesetzten Verhältnisse: die Länge des zurückgelegten Weges mit der darauf verwendeten Zeit und Geschwindigkeit; die Größe des Lohnes mit der Zahl der Arbeiter, Tage und Arbeitsstunden; der Fuhrlohn mit der Länge des Weges und dem Gewichte der Waare; der Zins mit dem Capitale, dem Procente und der Zeit; der Gewinn mit der Einlage und der Zeit.

II. Die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 58. Wenn eine Art von Zahlen mit zwei oder mehreren anderen Arten einzeln genommen in geradem oder verkehrtem Verhältnisse steht, und es ist eine Reihe zusammengehöriger Zahlen aller dieser Arten bekannt, von einer anderen Reihe zusammengehöriger Zahlen aber eine derselben unbekannt und zu suchen, so heißt die Rechnung, durch welche man diese unbekannte Zahl findet, die zusammengesetzte Regeldetri.

§. 59. Jede Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann in mehrere Aufgaben der einfachen Regeldetri zerlegt und auf diese Art aufgelöset werden, wie dieses aus dem folgenden Beispiele erhellet.

Aus 20 Pfund Garn bekommt man 3 Stück Zeug, jedes 40 Ellen lang; wie viel Stück bekommt man aus 175 Pfund Garn, wenn jedes Stück 35 Ellen lang sein soll?

Diese Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri kann, indem man jedesmal nur eine Art von Zahlen sich ändern läßt, in folgende zwei Aufgaben der einfachen Regeldetri zerlegt werden:

a) Aus 20 Pfund Garn bekommt man 3 Stück Zeug, jedes 40 Ellen lang; wie viel Stück werden aus 175 Pfund gemacht, wenn jedes Stück 40 Ellen lang ist? — Oder: aus 20 Pfund Garn bekommt man 3 Stück Zeug; wie viel Stück werden aus 175 Pfund gemacht, wenn die übrigen Bedingungen gleich sind? — Zur Auflösung hat man

20 Pfd.	3 Stück		$y : 3 = 175 : 20$
175 „	y „		daher $y = 26\frac{1}{4}$ Stück.

b) Aus 175 Pfund Garn werden $26\frac{1}{4}$ Stück Zeug von 40 Ellen Länge gemacht; wie viel Stück bekommt man aus 175 Pfund, wenn die Länge eines Stückes 35 Ellen betragen soll? — Oder: wenn ein Stück 40 Ellen lang ist, bekommt man $26\frac{1}{4}$ Stück; wie viel Stück wird man unter übrigens gleichen Umständen bekommen, wenn die Länge eines Stückes nur 35 Ellen beträgt? — Die Rechnung steht:

40 Ellen Länge	$26\frac{1}{4}$ Stück		$x : 26\frac{1}{4} = 40 : 35$
35 „ „	x „		woraus $x = 30$ Stück.

Die hier vorgenommene Methode, eine Aufgabe der zusammengesetzten Regeldetri aufzulösen, ist wegen ihrer Weitläufigkeit nicht geeignet, um allgemein angewendet zu werden; allein sie führt durch sehr einfache Schlüsse auf ein kürzeres Verfahren, die Auflösung vorzunehmen. Man stelle nämlich die erhaltenen Proportionen zusammen, behalte aber dabei statt der gefundenen Zahl $26\frac{1}{4}$ den Buchstaben y bei; man hat

$$\left.\begin{array}{l} y : 3 = 175 : 20 \\ x : y = \underline{40 : 35} \end{array}\right\}$$ Durch Multiplication der gleichnam. Glieder erhält man wieder eine Proportion.

$$yx : 3y = 175 \,.\, 40 : 20 \,.\, 35$$

Kürzt man hier das erste Verhältnis durch y ab, so bleibt

$$x : 3 = 175 \,.\, 40 : 20 \,.\, 35,$$

was man der leichteren Uebersicht wegen auch so schreiben kann

$$\begin{array}{l} x : 3 = 175 : 20 \\ 40 : 35, \end{array}$$

wo man sich denken muß, daß die unter einander stehenden Zahlen zu multiplicieren sind.

Das Verhältnis x : 3 ist demnach gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus 175 : 20 und 40 : 35.

Vergleicht man die Ordnung der Zahlen in diesen Verhältnissen mit der Stellung der Zahlen in der Aufgabe, nämlich

x Stück 175 Pfd. 35 Ellen Länge,
3 " 20 " 40 "

so findet man, daß die zu x Stück und 3 Stück gehörigen Zahlen der Pfunde, welche mit der Anzahl Stück gerade proportioniert sind, in der nämlichen, die zugehörigen Zahlen der Länge aber, welche mit der Anzahl Stück verkehrt proportioniert sind, in umgekehrter Ordnung zu einem Verhältnisse verbunden erscheinen.

Daraus ergibt sich folgender Satz:

Wenn eine Art von Zahlen von mehreren anderen Arten so abhängt, daß sie mit denselben einzeln genommen theils gerade, theils verkehrt proportioniert sind, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der ersten Art gleich dem zusammengesetzten Verhältnisse aus den einfachen Verhältnissen zwischen den zugehörigen Zahlen jeder andern Art, in der nämlichen oder in umgekehrter Ordnung genommen, je nachdem die Zahlen dieser Art mit den Zahlen der ersten Art gerade oder verkehrt proportioniert sind.

Auf diesem Satze beruhet nun ein ganz einfaches Verfahren, um die Aufgaben der zusammengesetzten Regeldetri aufzulösen:

1. Man setze die unbekannte und die damit gleichnamige Zahl in das erste Verhältnis.

2. Das zweite Verhältnis der Proportion ist ein zusammengesetztes, dessen einfache Verhältnisse man findet, wenn man die Art von x mit jeder andern Art vergleicht, um zu sehen, ob die beiden Arten gerade oder verkehrt proportioniert sind, und dann die beiden zu x und zu der mit ihr gleichnamigen Zahl gehörigen Zahlen einer jeden Art in derselben oder in umgekehrter Ordnung nimmt, je nachdem diese Art mit der Art von x gerade oder verkehrt proportioniert ist. Diese Verhältnisse werden unter einander geschrieben.

3. Die Proportion wird aufgelöset, indem man das Product aller in den innern Gliedern vorkommenden Factoren durch das

Product aller in den äußeren Gliedern befindlichen Factoren dividiert. Dabei wird die Strichmethode mit Vortheil angewendet.

§. 60. Aufgaben.

1) 12 Arbeiter bekommen für 3 Arbeitstage 45 fl.; wie viel werden 16 Arbeiter für 5 Tage bekommen?

Im Kopfe.

1	Arb. bek. für	3	Tag.	den 12. Theil von 45 fl.	$= 3\frac{3}{4}$ fl.,
1	„ „ „	1	„	den 3. Theil von $3\frac{3}{4}$ fl.	$= 1\frac{1}{4}$ fl.,
16	„ „ „	1	„	16mal $1\frac{1}{4}$ fl.	$= 20$ fl.,
16	„ „ „	5	„	5mal 20 fl.	$= 100$ fl.

Schriftlich.

12 Arb. 3 Tag. 45 fl.
16 „ 5 „ x „

$$x : 45 = \begin{matrix} 16 : 12 \\ 5 : 3 \end{matrix}$$
$$x = 100 \text{ fl.}$$

2) Von zwei in einander greifenden Zahnrädern hat A 60 Zähne, B 120 Zähne; wenn sich A in 12 Secunden 10mal umdreht, wie oft wird sich B in 36 Secunden umdrehen?

Im Kopfe. Da B statt 60, 120 Zähne hat, so wird es nur die Hälfte von 10 d. i. 5 Umdrehungen machen; da es sich ferner statt durch 12 durch 36 Secunden bewegt, so wird es sich 3mal 5 = 15mal umdrehen.

3) Wenn man für einen Mann in 4 Wochen 25 Pfd. Brot rechnet, wie viel Brot werden 120 Mann in 18 Wochen brauchen?

4) Wenn 6 Mann in 5 Tagen $28\frac{1}{2}$ fl. verdienen, in wie viel Tagen werden unter übrigens gleichen Umständen 16 Mann 532 fl. verdienen?

5) 16 Pfund Flachs geben 10 Ellen Leinwand, wenn dieselbe 1 Elle breit ist; wie viel Ellen geben 36 Pfund Flachs, wenn die Leinwand 6 Viertel breit ist?

6) Um 35 Laternen 108 Stunden lang brennen zu lassen, braucht man $4\frac{1}{2}$ Ctr. Oel; wie viel Oel ist erforderlich, wenn 50 solche Laternen 245 Stunden lang brennen sollen?

7) Ein Capital von 3600 fl. bringt in $4\frac{1}{2}$ Jahren 972 fl. Zins; wie viel Zins bekommt man von 5650 fl. Cap. in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

8) 100 fl. Capital geben in 1 Jahre $5\frac{1}{2}$ fl. Zins; wie viel fl. Capital muß man anlegen, um in $2\frac{1}{4}$ Jahren 300 fl. Interesse zu erhalten?

9) Wenn $12\frac{1}{2}$ Ctr. um $28\frac{3}{4}$ fl. 32 Meilen geführt werden, wie viel Ctr. werden um $43\frac{3}{4}$ fl. 28 Meilen verführt?

$12\frac{1}{2}$ Ctr. $28\frac{3}{4}$ fl. 32 Meilen
x „ $43\frac{3}{4}$ „ 28 „

$$x : 12\frac{1}{2} = \begin{matrix} 43\frac{3}{4} : 28\frac{3}{4} \\ 32 : 28 \end{matrix}$$

$\cancel{28\frac{3}{4}}$	$\cancel{12\frac{1}{2}}$	
$7\ \cancel{28}$	$\cancel{43\frac{3}{4}}$	
$23\ \cancel{115}$	$\cancel{32}\ \cancel{16}\ 4$	
$\cancel{2}$	$\cancel{4}$	
$\cancel{4}$	$\cancel{25}\ 5$	
	$\cancel{175}\ 25$	
23	500	$21\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ Ctr.
	40	
	17	

10) Ein Fuhrmann erhält, um $28\frac{3}{4}$ Ctr. $46\frac{1}{2}$ Meilen weit zu führen, $68\frac{1}{3}$ fl. als Bezahlung; wie viel muß man ihm zahlen, damit er $35\frac{1}{2}$ Ctr. 40 Meilen weit führe?

11) Zu einem Fußboden braucht man 28 Bretter, deren jedes 10′ 8″ lang und 9″ breit ist; wie viele Bretter werden zu demselben Fußboden erforderlich sein, wenn jedes 9′ 4″ lang und 11″ breit ist?

12) Eine Maschine hebt in 88 Secunden 51 Ctr. 92 Pfd. auf eine Höhe von 8 Fuß; auf welche Höhe kann sie 23 Ctr. 52 Pfd. in 98 Secunden heben?

13) Bei einem Baue müssen 120 Maurer täglich 8 Stunden 12 Wochen lang arbeiten; um wie viel Maurer brauchte man mehr, wenn man täglich 6 Stunden durch 10 Wochen arbeiten ließe?

14) Zu einem Stücke Zeug, welches $54\frac{1}{2}$ Ellen lang und $1\frac{3}{4}$ Ellen breit ist, braucht man 36 Pfund Garn; wie viel Garn wird zu einem Stücke von 30 Ellen Länge und $1\frac{1}{2}$ Ellen Breite erforderlich sein?

15) Ein Fuhrmann verspricht 28 Ctr. 25 Meilen weit um 46 fl. zu führen. Nachdem er 8 Meilen weit gefahren, kommt ihm der Auftrag zu, eine andere Straße einzuschlagen, 10 Ctr. mehr aufzuladen und 12 Meilen weiter zu fahren, als anfänglich bedungen war. Wie viel Frachtlohn wird ihm gebühren?

Hier muß man zuerst die Fracht für 28 Ctr., welche 8 Meilen weit, dann für 28 + 10 = 38 Ztr., welche 25 — 8 + 12 = 29 Meilen weit geführt werden, berechnen, und beide Beträge addieren.

25 Meilen 46 fl.	28 Ctr. 25 Meilen 46 fl.
8 „ x „	38 „ 29 „ y „
x : 46 = 8 : 25	y : 46 = 38 : 28
also x = 14 fl. 72 kr.	29 : 25
72 „ 42 „	also y = 72 fl. 42 kr.
ganze Fracht 87 fl. 14 kr.	

16) Wenn 20 Arbeiter, welche täglich 12 Stunden arbeiten, in 5 Wochen einen Canal von 375′ Länge zu Stande bringen; in wie viel Wochen werden 12 Arbeiter, welche täglich 10 Stunden arbeiten, einen eben solchen Canal von 600 Fuß Länge vollenden?

20 Arbeiter	12 St. täglich	5 Wochen	375′ Fuß Länge
12 „	10 „ „	x „	600′ „ „

$$\left.\begin{array}{r} x : 5 = 20 : 12 \\ 12 : 10 \\ 600 : 375 \end{array}\right\} \text{woraus } x = 16 \text{ Wochen.}$$

17) 20 Arbeiter vollenden einen 30° langen Graben in 15 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viel Stunden müssen 18 Arbeiter täglich arbeiten, um einen 24° langen Graben in 16 Tagen zu Stande bringen?

18) Eine Mühle mahlt auf 3 Gängen bei 126 Umdrehungen per Minute in 22 Stunden $115\frac{1}{2}$ Metzen Getreide; auf wie viel Gängen können bei 96 Umdrehungen per Minute in 27 Stunden 73 Metzen geliefert werden?

19) Von einer Wiese, welche 256 Klafter lang und 36 Klafter breit ist, werden 10 Wagen Heu gewonnen, von welchen jeder $27\frac{1}{2}$ Ctr. Ladung hat; wie viel Wagen Heu, jeder zu 30 Ctr., wird

man verhältnißmäßig von einer Wiese gewinnen, die 192 Klafter lang und 96 breit ist?

20) 44 Arbeiter verdienen in 30 Tagen bei 11stündiger Arbeitszeit $907\frac{1}{2}$ fl.; in wie viel Tagen verdienen 26 Arbeiter bei 10stündiger Arbeitszeit $214\frac{1}{2}$ fl.?

21) 100 fl. Capital geben in 1 Jahr 5 fl. Interesse; a) wie viel Interesse geben 3748 fl. in $2\frac{3}{4}$ Jahren; b) in welcher Zeit geben $7835\frac{1}{2}$ fl. Capital $633\frac{1}{4}$ fl. Zins; c) welches Capital gibt in $2\frac{5}{6}$ Jahren 720 fl. 22 kr. Zins?

22) Wenn aus 72 Pfund Garn 4 Stück Leinwand von 42 Ellen Länge und 5 Viertel Ellen Breite gewebt werden, so ist die Frage: a) wie viel Stück von 48 Ellen Länge und 6 Viertel Ellen Breite wird man aus $123\frac{1}{2}$ Pfund Garn weben; b) wie viel Ellen wird das Stück halten, wenn man aus 155 Pfund Garn 7 Stück 1 Elle breite Leinwand webt; c) wie breit wird die Leinwand sein, wenn man aus $8\frac{1}{2}$ Pfund Garn 4 Stück zu 45 Ellen weben will; d) wie viel Pfund Garn sind erforderlich, um 10 Stück zu weben, deren jedes 48 Ellen lang und 9 Achtel Ellen breit ist?

23) An einem Graben, welcher 250′ lang, 16′ breit und 6′ tief wird, arbeiten 20 Arbeiter 18 Tage; wie viele Arbeiter werden einen 450′ langen, 24′ breiten und 8′ tiefen Graben in 36 Tagen vollenden?

Im Kopfe. Wäre der Graben statt 250′ nur 50′ lang, so brauchte man nur $\frac{1}{5}$ von 20, d. i. 4 Arbeiter; wird der Graben 450′, also 9mal so lang, so braucht man 9mal 4 = 36 Arbeiter; u. s. w.

24) Wenn 12 Weber in 3 Monaten 28 Stück Leinwand, jedes 30 Ellen lang und 5 Viertel breit, verfertigen, da sie monatlich 25 Tage und täglich 12 Stunden arbeiten; in wie viel Monaten verfertigen 22 Weber, welche monatlich 24 Tage und täglich 10 Stunden arbeiten, 66 Stück Leinwand, das Stück 35 Ellen lang und 6 Viertel breit.

25) Eine Dampfmaschine von 30 Pferdekraft bewegt in 3 Wochen à 6 Tage à 12 Stunden eine Erdmasse von 4^0 Länge, $2\frac{1}{2}{}^0$ Breite und $2\frac{1}{2}{}^0$ Höhe; in wie viel Wochen ununterbrochener Arbeit wird eine Erdmasse von 10^0 Länge, $3\frac{1}{2}{}^0$ Breite und 2^0 Höhe durch eine Dampfmaschine von 24 Pferdekraft bewegt werden?

Einfache Zinsrechnung.

§. 61. Eine Geldsumme, welche man Jemanden unter der Bedingung leiht, daß er für die Benützung einen bestimmten Geldbetrag entrichtet, endlich aber doch die ganze Geldsumme zurückzuzahlen verpflichtet ist, wird Capital genannt. Das Geld, welches für die Benützung des Capitals entrichtet wird, heißt Zins oder Interesse; es wird nach Procenten bestimmt, welche sich, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, auf ein Jahr beziehen; z. B. ein Capital ist zu 5%

angelegt, heißt: von je 100 fl. Capital erhält man in einem Jahre 5 fl. Interessen.

Die Zinsrechnung ist demnach auch eine Procentrechnung, nur muß dabei auch auf die Zeit, während welcher ein Capital angelegt bleibt, Rücksicht genommen werden. Es wird dabei gewöhnlich jeder Monat zu 30 Tagen, und daher das Jahr zu 360 Tagen angenommen.

Bei der Interessenrechnung kommen vier Bestimmungen vor: das Capital, die Zeit, das Procent und die Zinsen.

Alle Aufgaben der Zinsrechnung können durch die zusammengesetzte Regeldetri aufgelöst werden, nur muß man die Bestimmung der Procente gehörig zerlegen. Z. B. anstatt: zu 5 %, stellt man den Satz auf:

100 fl. Capital geben in 1 Jahre 5 fl. Zinsen.

Eben so wird die Frage: zu x %? so ausgedrückt:

x fl. Zinsen geben 100 fl. Capital in 1 Jahre?

1. Berechnung der Zinsen.

§. 62. Allgemeine Aufgabe: Wie viel Zinsen entfallen für ein Capital zu gegebenem Procent in einer bestimmten Zeit?

Drückt man das Capital durch C, das Procent durch P, die Zeit in Jahren durch J, und die Zinsen durch Z aus, so hat man

100 fl. Cap. 1 Jahr P fl. Zins, daher $Z : P = C : 100$
C „ „ J „ Z „ „ $\qquad J : 1$

mithin $Z = \frac{CPJ}{100}$, d. h.

Die Zinsen sind gleich dem Producte aus dem Capitale, den Procenten und Jahren dividiert durch 100.

Bei der Ausrechnung bedient man sich meistens mit Vortheil der Strichmethode.

Aufgaben. (Aufzulösen im Kopfe oder schriftlich nach der obigen Formel, oder nach der zusammengesetzten Regeldetri, oder nach der Zweisatzrechnung.)

1) Wie viel Zinsen geben 350 fl. zu 4 % in 3 Jahren?

a) Im Kopfe. 300 fl. geben zu 4% in 1 Jahre 12 fl., in 3 Jahren 36 fl. Zinsen; 50 fl. geben in 1 Jahre 2 fl., in 3 Jahren 6 fl. Zinsen; zusammen 42 fl.

b) Nach der Formel.

$$x = \frac{350 \times 4 \times 3}{100} = 42 \text{ fl. Zinsen.}$$

c) Nach der Regeldetrie.

100 fl. Cap. 1 J. 4 fl. Zins $\quad x : 4 = 350 : 100$
350 „ „ 3 „ x „ „ $\qquad 3 : 1$

$x = 42$ fl. Zinsen.

d) Nach der Zweisatzrechnung.

100 fl. Cap. in 1 Jahr 4 fl. Zinsen
50 „ „ „ 1 „ $\frac{4}{2}$ „ = 2 fl. Zinsen
350 „ „ „ 1 „ 2 „ × 7 = 14 fl. Zinsen
350 „ „ „ **3** „ 14 „ × 3 = 42 „ „

2) Wie viel Interessen geben 785 fl. 75 kr. zu $4\frac{1}{2}$ % in $3\frac{1}{4}$ Jahren?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 785\frac{3}{4} \\ & 4\frac{1}{2} \\ & 3\frac{1}{4} \end{array}$$

Antwort: 114 fl. 91 kr.

3) Wie viel Zins bekommt man von 3215 fl. 30 kr. zu $5\frac{3}{4}$ % in 2 Jahren 7 Monaten?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3215\frac{3}{10} \\ & 5\frac{3}{4} \\ & 2\frac{7}{12} \end{array}$$

Antwort: 477 fl. 60·6 kr.

4) Ein Capital von 5844 fl. ist durch $3\frac{1}{2}$ Jahre zu $4\frac{1}{2}$ % angelegt; wie viel trägt es in dieser Zeit an Zinsen?

5) Wie viel Interessen geben 3105 fl. 90 kr. zu 5% in 2 Jahren und 1 Monate?

6) Man berechne die Interessen von 2777 fl. zu $4\frac{3}{4}$ % in $1\frac{5}{6}$ Jahren.

7) A hat zwei Capitalien angelegt: 3580 fl. zu $5\frac{1}{4}$ % durch 1 Jahr 9 Monate, und $2895\frac{1}{2}$ fl. zu 6% durch 2 Jahre 4 Monate; welches Capital bringt mehr Zinsen und um wie viel mehr als das andere?

§. 63. Einfacher geschieht die Bestimmung der Zinsen nach folgenden Regeln, deren Richtigkeit von selbst erhellt:

1. Die Zinsen für ein Jahr findet man nach der Procentrechnung, wenn man das Capital mit dem Procent multipliciert und das Product durch 100 dividiert.

2. Die Zinsen für mehrere Jahre werden gefunden, wenn man die Zinsen für ein Jahr mit der Anzahl der Jahre multipliciert.

3. Kommen auch Monate und Tage vor, so bedient man sich der wälschen Praktik; man zerlegt nämlich die Monate in aliquote Theile eines Jahres und nimmt aus den jährlichen Zinsen eben solche Theile; die Tage aber zerlegt man in aliquote Theile eines Monats und nimmt eben solche Theile aus den monatlichen Zinsen. Alle diese Beträge werden dann zu den Zinsen auf Jahre addiert.

Aufgaben.

1) Man berechne die einjährigen Interessen

a) von 3124 fl. zu 5%
156·20 = 156 fl. 20 kr.

b) von 3800 fl. zu 4%
152 fl.

c) von 3578 fl. 25 kr. zu 6%
3578·25
214·6950 = 214 fl. 70 kr.

d) von 957 fl. zu $4\frac{1}{3}$ %
3828
319
41·47 = 41 fl. 47 kr.

2) Wie viel betragen die jährlichen Zinsen

a) von 1834 fl. à 5%? b) von $3307\frac{1}{2}$ fl. à 6%?

c) von 2095 fl. 50 kr. à $4\frac{1}{2}$ %?

d) von $912\frac{3}{5}$ fl. à $4\frac{3}{4}$ %?

3) Wie viel Interessen geben

a) 2183 fl. zu 4% in 3 Jahren
87·32 fl. für 1 Jahr
261·96 fl. für 3 Jahre

Antwort: 261 fl. 96 kr.

b) 147 88 fl. zu $5\frac{1}{4}\%$ in 4 Jahren
    739 40
      36 97
    776·37 fl. in 1 Jahre
  3105·48 fl. in 4 Jahren
  Antwort: 3105 fl. 48 kr.

4) Wie viel Interessen geben 2848 fl. zu 5% in 3 Jahren und 4 Monaten?
  28 48 fl. zu 5% in 3 Jahren 4 Mon.
  142·40 für 1 Jahr
  427·2 „ 3 Jahre
  47 467 „ 4 Monate = $\frac{1}{3}$ Jahr.
  474·667 „ = 474 fl. 67 kr.

5) Ein Capital von 8425 fl. 18 kr. liegt durch 4 Jahre 11 Monate zu $4\frac{1}{2}\%$ an; wie viel Interessen bringt es?
6) Wie groß sind die Zinsen von 5244 fl. 55 kr. zu $5\frac{1}{4}\%$ in 3 Jahren 5 Monaten 20 Tagen?
7) Wie viel Zinsen geben 2514 fl. 57 kr. zu 5% in 5 Jahren 8 Monaten 26 Tagen?
8) Wie groß sind die Zinsen von 3457 fl. zu $4\frac{1}{2}\%$ in 2 Jahren 7 Monaten 18 Tagen?
9) Wie viel Zins geben 724 fl. zu $4\frac{3}{4}\%$ in 4 Jahren 11 Monaten 27 Tagen?

Man berechne noch die Interessen
10) von 9007 fl. 40 kr. zu 5% in 10 Monaten.
11) von 1133 fl. 20 kr. zu $4\frac{5}{8}\%$ in 3 Jahren 1 Monat.
12) von 950·235 fl. zu $4\frac{1}{2}\%$ in 2 Jahren 11 Monaten 17 Tagen.
13) von 7185 fl. 69 kr. zu $4\frac{3}{4}\%$ in 3 Jahren 7 Monaten 12 Tagen.
14) von 1019·38 fl. zu $5\frac{1}{8}\%$ in 9 Monaten 21 Tagen.
15) von 3407 fl. 5 kr. zu 6% in 1 Jahr 2 Monaten 7 Tagen.

§. 64. Wenn die Interessen, wie dies besonders im kaufmännischen Verkehre häufig der Fall ist, blos für eine bestimmte Anzahl Tage berechnet werden sollen, so pflegt man zuerst die Interessen zu 6% zu bestimmen, und daraus die Interessen für jedes andere Procent mittelst der wälschen Praktik abzuleiten. Das Jahr nimmt man dabei zu 360 Tagen an.

Es seien allgemein die Zinsen von C fl. Capital zu 6% für T Tage zu bestimmen, so hat man

100 fl. Cap. in 360 Tag. 6 fl. Zins $x : 6 = C : 100$
C „ „ „ T „ x „ „ $T : 360$

$$x = \frac{CT}{6000}.$$

Die Interessen zu 6% auf Tage werden also gefunden, wenn man das Capital mit der Anzahl Tage multipliciert, und das Product durch 6000, d. i. erst durch 1000 und dann durch 6 dividiert.

Die Kreuzer des Capitals pflegt man während der Rechnung meistens unberücksichtigt zu lassen, vergrößert jedoch, wenn 50 oder mehr als 50 Kreuzer vorhanden sind, die Anzahl der Gulden um 1; sonst werden die Kreuzer als Hunderttheile der Gulden dargestellt.

Aufgaben.

1) Wie viel Interessen geben 2790 fl. zu 6% in 85 Tagen?

27 90 × 85
223 20
237·150
13·950
: 6
39·525 = 39 fl. $52\frac{1}{2}$ kr.

2) Wie groß sind die Zinsen von 2349 fl. 25 kr. zu 6% in 182 Tagen?

mit Weglassung der Kreuzer	genau
234 9 × 182	234 9·25 × 182
187 92	187 9 400
46 98	469 8 50
427·518	427 5 6350
71·253 = 71 fl. 25 kr.	71·2 606 = 71 fl. 26 kr.

3) Wie viel Interessen geben 758 fl. zu 6% vom 13. April bis letzten December?

Vom 13. Apr. bis 13. Dec. sind 8 Mon. = 240 Tage
„ 13. Dec. „ 30. „ „ 17 „
zusammen 257 Tage

4) Wie groß sind die Zinsen von 3572 fl. Capital zu 6% in 217 Tagen?

5) Wie viel Interessen geben 2350 fl. 47 kr. zu 6% in 17 Tagen?

6) Wie groß ist das 6% Interesse
a) von 925 fl. in 153 Tagen? b) von 2019 fl. in 96 Tagen?
c) von 1512 fl. 90 kr. in 264 Tagen?

7) Man berechne die Interessen von 1265 fl. zu 4% in 231 Tagen?

1 265 × 231
37 95
25 30
292 215
48·702 zu 6%
da 16·234 zu 2% = $\frac{1}{3}$ von 6%.
32·468 zu 4% Antwort: 32 fl. 47 kr.

8) Wie groß sind die Zinsen von 3402 fl. 9 kr. zu $7\frac{1}{4}$% in 125 Tagen?

3402 × 125
425·250
70·875 zu 6%
11·812 „ 1%
3·953 „ $\frac{1}{4}$%
85·640 = 85 fl. 64 kr.

19) Wie viel Interessen geben 9110 fl. zu 5 % vom 2. Mai bis 5. October?

vom 2. Mai bis 2. Oct. 150 Tage $\quad$ 911 0 × 163
" 2. Oct. " 15. " 13 " $\quad$ 546 60
163 Tage $\quad$ 273 30
1484·930
247·488 zu 6%
— 41·248 " 1%
206·240 = 206 fl. 24 kr.

10) Wie viel Zinsen bekommt man von 9217 fl. zu 3% in 174 Tagen?

11) Wie viel Zinsen geben 8635 fl. 25 kr. zu $4\frac{1}{2}$% in 223 Tagen?

12) Wie viel Zinsen geben zu 5%
a) 5603 fl. in 37 Tagen?
b) 1983 fl. in 210 Tagen?
c) 705 fl. in 108 Tagen?

13) Wie viel betragen die Interessen von 3765 fl.
a) für 49 Tage à 5% ?
b) für 85 Tage à $4\frac{1}{2}$% ?
c) für 103 Tage à 4% ?

14) Wie viel Interessen geben 12425 fl. 68 kr. zu 4% vom 1. August bis 5. April?

15) Wie groß sind die Interessen von 4286 fl. 42 kr. zu 5% vom 18. December bis 15. April?

16) Jemand hat zu beziehen:
die Interessen von 3045 fl. zu 6% für 233 Tage,
" " " 2813 " " 5% vom 17. April bis 22. Sept.,
" " " 4008 " " $4\frac{3}{4}$% " 24. Mai " 7. August;
wie viel betragen die ganzen Interessen?

17) A hatte an B zu zahlen:
am 13. April 387 fl. 87 kr.
" 25. Mai 1245 " 38 "
" 2. Juni 2008 " 48 "
Dagegen hatte B an A zu bezahlen:
am 20. April 1533 fl. 63 kr.
" 15. Mai 2112 " 8 "
" 20. " 972 " 15 "
Am 30. Juni wird die Abrechnung gemacht; wie viel bleibt da B an A schuldig, wenn die Interessen zu 5% gerechnet werden?

18) Jemand kauft am 26. April 4 Stück 5% Staatsschuldverschreibungen à 500 fl. im Curse zu $74\frac{1}{4}$ (d. i. 100 fl. C. M. Nennwerth zu $74\frac{1}{4}$ fl. ö. W. Bezahlung); wie viel muß er dafür bezahlen, wenn die Interessen seit 1. Jänner zu vergüten sind?

19) Am 25. Jänner werden 5 Stück 1854er Lose im Curse zu 91 gekauft; wie viel muß dafür bezahlt werden, wenn die Interessen seit 1. April des vorhergehenden Jahres rückständig sind? (Diese Anlehensloose lauten auf 250 fl. C. M. und werden zu 4% verzinset.)

2. Berechnung des Capitals.

§. 65. Es sei das Capital C zu finden, welches zu P % in J Jahren Z fl. Zinsen bringt. Man hat

100 fl. Cap. 1 Jahr P fl. Zins $C : 100 = 1 : J$
C „ „ J „ Z „ „ $Z : P$

$$C = \frac{100\,Z}{P\,J}.$$

Das Capital wird also gefunden, wenn man die 100fachen Zinsen durch das Product aus den Procenten und Jahren dividiert.

Aufgaben.

1) Welches Capital gibt zu 4% in 4 Jahren 48 fl. Interessen?
Im Kopfe. Um 4 fl. Zins in 1 Jahr zu erhalten, sind 100 fl. Cap. nöthig; um 48 fl. Zins zu bekommen, braucht man 12mal so viel, also 1200 fl. Cap.; um 48 fl. Zins in 4 Jahren zu bekommen, braucht man nur $\frac{1}{4}$ von 1200 fl. = 300 fl. Cap.
Schriftlich $\frac{48 \times 100}{4 \times 4}$ = 300 fl. Cap.

2) Jemand bezieht in $5\frac{1}{4}$ Jahren 948 fl. Interessen; wie groß ist das Capital bei 6% Verzinsung?

$$\begin{array}{l|l} 6 & 948 \\ 5\frac{1}{4} & 100 \end{array}$$

Antwort: 3009 fl. 52 kr.

3) Wie groß ist das Capital, welches zu $5\frac{1}{2}$% jährlich 202 fl. 40 kr. Zins abwirft?

$$\begin{array}{l|l} 5\frac{1}{2} & 202\frac{2}{3} \\ & 100 \end{array}$$

Antwort 3680 fl.

4) Ein Haus gibt im Durchschnitte jährlich 586 fl. reinen Ertrag; welchen Kaufpreis wird man dafür ansetzen, wenn man es zu 5% verkaufen, d. i. für jede 5 fl. Reinertrag 100 fl. Kaufschilling oder Capital haben will?

5) Welches Capital gibt zu $4\frac{1}{2}$% in 1 Jahre 4 Monaten 234 fl. Interessen?

6) Wie groß muß das Capital sein, damit es zu $5\frac{1}{2}$% in $2\frac{2}{3}$ Jahren $738\frac{3}{4}$ fl. Interessen bringt?

7) Welches Capital gibt zu $5\frac{1}{2}$% in 1 Jahr 9 Monaten 248 fl. 58 kr. Interessen?

8) Welches Capital gibt zu 4% in 108 Tagen 108 fl. Zinsen?

3. Berechnung der Zeit.

§. 66. Es soll die Zeit J in Jahren bestimmt werden, durch welche ein Capital C zu P% anliegen muß, um Z fl. Zinsen zu geben. Man hat

100 fl. Cap. 1 Jahr P fl. Zins $J : 1 = 100 : C$
C „ „ J „ Z „ „ $Z : P$

$$J = \frac{100\,Z}{C\,P}.$$

Die Anzahl Jahre wird also gefunden, wenn man die 100fachen Zinsen durch das Product aus dem Capital und Procent dividiert.

Aufgaben.

1) Wie lange muß ein Capital von 2480 fl. zu 6% angelegt bleiben, damit es 744 fl. Interessen einbringt?

$$\frac{744 \times 100}{2480 \times 6} = 5 \text{ Jahre.}$$

2) In wie viel Zeit geben 5737 fl. 55 kr. Capital zu $5^1/_2$% 1814 fl. 50 kr. Zinsen?

$$\begin{array}{r|l} 5737\frac{11}{20} & 1814\frac{1}{2} \\ 5\frac{1}{2} & 100 \end{array} \quad \text{Antwort: In } 5 \cdot 75 = 5\tfrac{3}{4} \text{ Jahren.}$$

3) Wie lange muß ein Capital von $9824\frac{1}{3}$ fl. zu $5\frac{1}{8}$% ausstehen, damit es 1132 fl. 82 kr. Interessen einträgt?

$$\begin{array}{r|l} 9824\frac{1}{3} & 1132 \cdot 82 \\ 5\frac{1}{8} & 100 \end{array} \quad 2 \cdot 2499 \text{ Jahre} = 2 \text{ Jahre } 2 \text{ Mon. } 29 \text{ Tage.}$$

4) Wie lange muß ein Capital von 5212 fl. 67 kr. anliegen, um zu $5\frac{1}{2}$% 712 fl. 80 kr. Interessen einzutragen?

5) In welcher Zeit erhält man von 9421 fl. 28 kr. zu $4\frac{1}{2}$% 269 fl. 75 kr. Zins?

6) In wie viel Zeit geben 3855 fl. 67 kr. zu $5\frac{1}{2}$% 721 fl. Interessen?

7) In wie viel Zeit geben 1237 fl. 50 kr. Capital bei 6% 84 fl. 15 kr. Zinsen?

8) 900 fl. Capital gaben zu 5% 112 fl. 50 kr. Zinsen; wie lange sind dieselben ausgeliehen worden?

4. Berechnung der Procente.

§. 67. Ist zu finden, zu wie viel (P) % ein Capital von C fl. angelegt werden muß, damit es in J Jahren Z fl. Interessen einbringt, so hat man folgende zusammengesetzte Regeldetri:

$$\begin{array}{llll} P \text{ fl. Int.} & 100 \text{ fl. Cap.} & 1 \text{ Jahr} & \\ Z \;\text{"}\;\text{"} & C \;\text{"}\;\text{"} & J \;\text{"} & \end{array} \qquad \begin{array}{r} P : Z = 100 : C \\ 1 : J \\ \hline P = \frac{100\,Z}{C\,J}. \end{array}$$

Das Procent wird demnach gefunden, wenn man die 100fachen Zinsen durch das Product aus dem Capitale und den Jahren dividiert.

Aufgaben.

1) Zu wie viel % muß ein Capital von 3445 fl. angelegt werden, um in 4 Jahren 689 fl. Interessen zu geben?

$$\text{Zu } \frac{689 \times 100}{3445 \times 4} = 5\%.$$

2) Ein Capital von 5500 fl. gibt jährlich 330 fl. Interessen; zu wie viel % verzinset es sich?

$$\text{Zu } \frac{330 \times 100}{5500} = 6\%.$$

3) Zu wie viel % verzinset sich ein Capital von 4755 fl. 25 kr., welches in 3 Jahren 3 Monaten 850 fl. Interessen gibt?

$$\begin{array}{r|l} 4755\frac{1}{4} & 850 \\ 3\frac{1}{4} & 100 \end{array}$$ Antwort: zu $5\frac{1}{2}\%$.

4) Zu wie viel % ist ein Capital von 4585 fl. 52 kr. angelegt, wenn es in $3\frac{1}{4}$ Jahr $844\frac{1}{2}$ fl. Interessen gibt?
5) Zu wie viel % tragen 328 fl. 80 kr. in $3\frac{2}{3}$ Jahren 46 fl. 75 kr. Zinsen?
6) Wie hoch sind 1080 fl. Capital verzinset worden, da sie in 3 Jahren 4 Monaten 144 fl. Zinsen getragen haben?
7) Zu wie viel % verinteressirt sich ein Capital von 6800 fl., welches in zwei Jahren 4 Monaten 12 Tagen 844 fl. 90 kr. Interessen gibt?
8) Ein Capital von 3150 fl. trägt in 8 Monaten $73\frac{1}{2}$ fl. Interessen; zu wie viel % verzinset es sich?
9) Ein Kaufmann hat in seinem Geschäfte ein Capital von 18356 fl.; am Schlusse des Jahres stellt sich ein reiner Gewinn von 1376 fl. 70 kr. heraus; wie viel % hat ihm das Capital eingebracht?
10) Jemand lieh 460 fl. auf ein Jahr zu 5%, mußte sich aber die Zinsen gleich bei Empfang des Capitals abziehen lassen; um wie viel wurde er dabei übervortheilt und wie viel % wurden eigentlich gerechnet?
11) Ein Haus wurde um 28500 fl. gekauft; der jährliche Miethzinsertrag ist 1980 fl.; zu wie viel % verzinset sich das Capital, wenn für Reparaturen 125 fl. in Anschlag gebracht werden, und wenn die Hauszinssteuer 25% beträgt?

5. Berechnung des Werthes einer Geldsumme nach einer bestimmten Zeit.

§. 68. Da hier der gegebene Betrag das reine Capital vorstellt und daher mit der Grundzahl 100 gleichartig ist, so wird, wie in den vorhergehenden Aufgaben, auch hier die Rechnung vom Hundert angewendet (Arithmetik I. Abth., §§. 97 und 98).

Man berechnet nämlich entweder die Interessen des Capitals für die bestimmte Zeit und addiert sie zu dem gegebenen Capitale; oder man sucht unmittelbar den ganzen Belauf, indem man zuerst ausmittelt, wie viel 100 fl. sammt den Zinsen nach jener Zeit betragen werden, und dann die Regeldetri anwendet.

Aufgaben.

1) Jemand nimmt 3420 fl. zu 5% auf 3 Jahre auf; wie viel wird er nach dieser Zeit an Capital und Interessen zu zahlen haben?

34 20 à 5%		Capital	3420 fl.
171·00 für 1 Jahr		Zinsen für 3 Jahre	513 „
513 fl. für 3 Jahre		Belauf nach 3 Jah.	3933 fl.;

oder:

100 fl. geben zu 5% in 3 Jahren 15 fl. Zins, folglich betragen 100 fl. sammt Zinsen nach 3 Jahren 115 fl.; man hat daher

100 fl. Cap. 115 fl. Belauf $\quad x : 115 = 3420 : 100,$

3420 „ „ x „ „ $\quad x = 3933$ fl.

2) Jemand hat 4500 fl. nach 6 Monaten sammt den Interessen zu 6% zu berichtigen; wie viel muß er zahlen?

Cap. 4500 fl. oder: x : 103 = 4500 : 100
Zins für 6 Mon. 135 „ x = 4635 fl.
Belauf nach 6 Mon. 4635 fl.:

3) Ein Kaufmann hatte eine Summe von 4108 fl. am 20. October zu zahlen, leistete aber die Zahlung erst am 31. December; wie viel hatte er da bei 6% Zinsen zu bezahlen?

Schuld am 20 Oct. 4108 fl.
Int. für 71 Tage 48 „ 61 kr.
Belauf am 31. Dec. 4156 fl. 61 kr.

Nach der Regeldetri würde sich diese Aufgabe minder bequem ausführen lassen.

4) Jemand nimmt 2345 fl. auf 42 Tage zu 7% auf Zins; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zu zahlen haben?

5) Wenn 3050 fl durch 2 Jahre 4 Monate zu $5\frac{1}{2}$% ausstanden, wie viel muß nach dieser Zeit an Capital und Zins zurückgezahlt werden?

6. Berechnung des Werthes einer Geldsumme vor einer bestimmten Zeit.

§. 69. Da die gegebene Geldsumme nicht ein reines, sondern ein um die Zinsen vermehrtes Capital vorstellt, das durch Abrechnung der darin enthaltenen Zinsen vermindert werden soll, das also nicht mit 100 selbst, sondern mit 100 vermehrt um die Procente für die entsprechende Zeit gleichartig ist, so muß hier die Rechnung auf Hundert angewendet werden (Arithmetik I. Abth., §. 97 und §. 99).

Aufgaben.

1) Für ein Capital, welches durch 3 Jahre zu $5\frac{1}{2}$% ausstand, erhält man an Capital und Interessen 5359 fl.; wie groß sind die Interessen und wie groß ist das Capital?

Die Procente für 3 Jahre betragen $16\frac{1}{2}$; man hat also
$116\frac{1}{2}$ fl. Cap. mit Int. $16\frac{1}{2}$ fl. Int. $x : 16\frac{1}{2} = 5359 : 116\frac{1}{2}$
5359 „ „ „ x „ „ x = 759 fl. Interessen.
Capital mit Int. 5359 fl.
Interessen 759 „
Capital 4600 fl.

oder:
100 fl. betragen sammt den $5\frac{1}{2}$% Zinsen nach 3 Jahren $116\frac{1}{2}$ fl.; man hat daher
100 fl. Cap. $116\frac{1}{2}$ fl. Cap. mit Int. $x : 100 = 5359 : 116\frac{1}{2}$,
x „ 5359 „ also x = 4600 fl.

2) Jemand hat nach 4 Monaten 2620 fl. zu bezahlen; er wünscht aber seine Schuld contant, d. i. sogleich zu berichtigen; wie viel wird die contante Zahlung betragen, wenn man die Interessen zu 6% rechnet?

100 fl. geben in 4 Mon. 2 fl. Zins; 100 fl. contant sind somit nach 4 Monaten 102 fl. werth, und man hat:
100 fl. cont. 102 fl. nach 4 M. x : 100 = 2620 : 102,
x „ 2620 „ x = 2568·63 fl.

3) Wie viel sind 850 fl., welche nach 2 Jahren bezahlt werden sollen, bei 5% Zins jetzt werth?

4) A soll an B nach 5 Jahren 1245 fl. bezahlen; wie viel hätte er bei $5\frac{1}{4}$% Zins nach 2 Jahren zu zahlen?

5) Ein Wechsel von 4003 fl., welcher nach 42 Tagen fällig ist, wird heute mit 6% Discont pro anno verkauft; wie viel beträgt a) der Discont, b) der discontierte Werth des Wechsels? (Arithmetik I. Abth., §. 99, Aufgaben 26, 29 und 30.)

Der Discont sollte richtig auf Hundert gerechnet werden; Kaufleute rechnen jedoch den Discont bei Wechseln, wie auch den Sconto bei Waarenbeträgen immer vom Hundert.

6) Bei einem nach 3 Monaten zahlbaren Waarenbetrage von 895 fl. 38 kr. wird bei contanter Bezahlung ein Sconto von $1\frac{1}{2}$% (für 3 Monate) bewilligt; wie groß ist a) der Sconto, b) die contante Zahlung?

Die Terminrechnung.

§. 70. Häufig tritt der Fall ein, daß die Bezahlung einer Summe theilweise in bestimmten Zeitfristen oder Terminen bedungen wird. Es kann nun dem Schuldner oder dem Gläubiger oder beiden zugleich erwünscht sein, wenn die ganze Summe auf einmal berichtigt wird, wobei jedoch weder dem Schuldner noch dem Gläubiger ein Vortheil zum Nachtheile des andern erwachsen darf. Der Zeitpunct, wann die Gesammtzahlung geleistet werden muß, damit weder der Schuldner noch der Gläubiger einen Nachtheil habe, wird der mittlere Termin, und die Rechnung, nach welcher derselbe bestimmt wird, die Terminrechnung genannt.

Um das bei der Terminrechnung zu beobachtende Verfahren abzuleiten, soll folgendes Beispiel durchgeführt werden:

Jemand ist 6000 fl. schuldig, und verpflichtet sich, 2000 fl. nach 2 Monaten, 2500 fl. nach 4 Monaten und 1500 fl. nach 10 Monaten zu bezahlen; wann wird die Zahlung erfolgen müssen, wenn er die ganze Summe auf einmal abtragen will?

Bei der bedungenen Zahlungsweise hat der Schuldner den Vortheil, von den einzelnen Theilcapitalien die Zinsen bis zu ihrem Verfallstermine, somit die Zinsen von 2000 fl. durch 2 Monate, von 2500 fl. durch 4 Monate, und von 1500 fl. durch 10 Monate zu genießen.

Es geben aber bei demselben Procent

2000 fl. Cap. in 2 Mon.	eben so viel	2000 fl. × 2 Cap. in 1 Mon.
2500 „ „ „ 4 „	Zinsen als	2500 „ × 4 „ „ 1 „
1500 „ „ „ 10 „		1500 „ × 10 „ „ 1 „

Eben so viel Zinsen, als

2000 fl. × 2 + 2500 fl. × 4 + 1500 fl. × 10, oder als

4000 fl. + 10000 fl. + 15000 fl. = 29000 fl.

in 1 Monate geben, muß der Schuldner, damit er keinen Nachtheil habe, auch genießen, wenn er die ganze Schuld auf einmal entrichten soll. Um daher den mittleren Zahlungstermin zu bestimmen, muß man fragen: In wie viel Monaten geben 6000 fl. eben so viel Zinsen als 29000 fl. in 1 Monate? Diese Frage führt auf die Proportion

$$x \text{ Mon.} : 1 \text{ Mon.} = 29000 : 6000,$$

woraus

$$x = \frac{29000}{6000} = \frac{29}{6} = 4\tfrac{5}{6} \text{ Mon.}$$

folgt.

Daraus ergibt sich für die **Terminrechnung** folgendes **Verfahren:**

1. Man multipliciert jede Terminzahlung mit der Zeit, nach welcher sie geleistet werden soll.

2. Man addiert sowohl die erhaltenen Terminzahlungen, als die erhaltenen Producte, und dividiert die zweite Summe durch die erste; der Quotient zeigt den mittleren Termin an.

Aufgaben.

1) Eine Summe von 10000 fl. ist in 4 Raten zu bezahlen, und zwar: 3000 fl. nach 4 Monaten, 2500 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 8 Monaten und der Rest nach 1 Jahre; wenn nun die ganze Summe auf einmal erlegt wird, wann soll dieses geschehen?

	3000 fl.	nach	4 Mon.	=	1 2000
	2500 „	„	6 „	=	1 5000
	2000 „	„	8 „	=	1 6000
Rest	2500 „	„	12 „	=	3 0000
	10000				7·3000 = 7 Monate 9 Tage.

Die Gesammtzahlung wird demnach nach 7 Monaten 9 Tagen zu erfolgen haben.

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, untersuche man, ob der Schuldner wirklich bei der Gesammtzahlung denselben Vortheil hat, als bei den ratenweisen Zahlungen, wenn man irgend ein Procent, z. B. 5% annimmt.

Bei den ratenweisen Zahlungen genießt der Schuldner

die Interessen von	3000 fl.	durch	4 Monate	=	50 fl.	— kr.,
„ „ „	2500 „	„	6 „	=	62 „	50 „
„ „ „	2000 „	„	8 „	=	66 „	67 „
„ „ „	2500 „	„	12 „	=	125 „	— „
				zusammen	304 fl.	17 kr.

Berichtiget der Schuldner die ganze Summe von 10000 fl. nach 7 Monaten 9 Tagen, so genießt er dabei an Interessen auch 304 fl. 17 kr. Der Schuldner hat also bei dieser Zahlungsweise weder einen Vortheil noch einen Nachtheil, woraus von selbst folgt, daß auch der Gläubiger dabei weder gewinnt noch verliert.

2) Jemand ist vertragsmäßig verpflichtet, 12000 fl. alsogleich, 9000 fl. nach 4 Monaten, 9000 fl. nach 8 Monaten, 9000 fl. nach 12 Monaten, und 9000 fl. nach 16 Monaten zu zahlen. Wann wird die Zahlung geschehen müssen, wenn sie auf einmal geleistet werden soll?

12000×0	$4 \times 0 = 0$	
9000×4	$3 \times 4 = 12$	
9000×8	$3 \times 8 = 24$	
9000×12	$3 \times 12 = 36$	
9000×16	$3 \times 16 = 48$	
	16	120

$120 : 16 = 7\frac{1}{2}$ Monat. — Antwort: nach $7\frac{1}{2}$ Monaten.

3) Jemand hat 20000 fl. so zu entrichten, daß er 4000 fl. sogleich, 4000 fl. nach 3 Monaten, 5000 fl, nach 6 Monaten und den Rest nach 10 Monaten bezahlt. Er wünscht nun die ganze Schuld auf einmal zu tilgen; nach wie viel Monaten wird dieses geschehen müssen?

$4000 \times 0 = 0$	
$4000 \times 3 = 12$	
$5000 \times 6 = 30$	
Rest $7000 \times 10 = 70$	
20	$112 : 20 = 5{\cdot}6.$

Nach 5 Monaten 18 Tagen.

4) Jemand kauft einen Acker um 6000 fl., wovon er 1500 fl. nach 4 Monaten, 1000 fl. nach 6 Monaten, 2000 fl. nach 9 Monaten, und den Rest nach 1 Jahre bezahlen soll. Wann kann er die ganze Summe auf einmal erlegen, wenn weder der Käufer noch der Verkäufer einen Vortheil oder Nachtheil haben soll?

5) Von einer Schuld soll die Hälfte sogleich, $\frac{1}{3}$ nach $1\frac{1}{2}$ Jahren, der Rest aber nach 3 Jahren bezahlt werden. Es steht jedoch dem Schuldner frei, die ganze Schuld auf einmal zu zahlen; wann müßte dies geschehen?

6) Ein Capital von 2800 fl. soll zu vier gleichen Theilen, nach je 3 Monaten zahlbar, abgetragen werden; nach wie viel Monaten fällt der mittlere Zahlungstermin des ganzen Capitals?

7) Wann müssen 1800 fl. auf einmal bezahlt werden, wenn man 300 fl. nach 1 Jahr, 400 fl. nach $1\frac{1}{4}$ Jahr, 500 fl. nach $2\frac{1}{2}$ Jahren und den Rest nach $3\frac{1}{3}$ Jahren ohne Zins zu zahlen schuldig ist?

8) Jemand hat 1000 fl. sogleich, 1050 fl. nach 2 Monaten, 1100 fl. nach 4 Monaten, 1150 fl. nach 6 Monaten, 1200 fl. nach 8 Monaten, 1250 fl. nach 19 Monaten zu zahlen; wann muß die Zahlung geschehen, wenn die Summe aller jener Terminzahlungen auf einmal erlegt werden soll?

9) Jemand ist 300 fl. nach 4, und 500 fl. nach 5 Jahren zu zahlen schuldig. Er zahlt 300 fl. schon nach 2 Jahren; wann werden dann die 500 fl. fällig sein?

III. Die Gesellschaftsrechnung.

§. 71. Die Gesellschaftsrechnung wird angewendet, wenn eine Zahl in mehrere Theile so getheilt werden soll, daß diese Theile in einem bestimmten Verhältnisse stehen. Die Zahlen, durch welche dieses Verhältnis ausgedrückt wird, heißen Verhältniszahlen.

z. B. Zu einem Handelsgeschäfte verbinden sich drei Personen; A legt 8500 fl., B 9800 fl., C 10000 fl. in den Handelsfond; wenn nun der ganze Gewinn 3400 fl. beträgt, wie viel davon gebührt einem jeden? — Hier muß der Gewinn verhältnismäßig nach den Einlagen getheilt werden; diese Aufgabe gehört also zur Gesellschaftsrechnung, und zwar bilden die Einlagen 8500, 9800, 1000 die Verhältniszahlen.

Kommt in einer Aufgabe nur eine Reihe von Verhältniszahlen vor, so nennt man die Gesellschaftsrechnung eine einfache; werden aber mehrere Reihen von Verhältnissen gegeben, so heißt das Rechnungsverfahren die zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung.

Die Gesellschaftsrechnung kommt bei Handelsgesellschaften zur Theilung des Gewinnes, ferner bei Bankerotten, Erbschaften, Schiffsantheilen, Steuervertheilungen, Vermischungen und verschiedenen anderen Geschäften in Anwendung.

§. 72. Es sei folgende Aufgabe zu lösen:

640 fl. sind unter drei Personen A, B, C nach dem Verhältnisse der Zahlen 9, 7 und 4 zu theilen; wie viel entfällt auf jede Person?

Im Kopfe. Auf A kommen 9, auf B 7 und auf C 4, also auf alle zusammen 20 gleiche Theile; der 20ste Theil von 640 fl. sind 32 fl.; somit bekommt

A 9mal 32 fl. = 288 fl.,
B 7mal 32 fl. = 224 fl.,
C 4mal 32 fl. = 128 fl.

Auf denselben Schlüssen beruht auch die schriftliche Rechnung:

9	$32 \times 9 = 288$ fl.	bekommt A
7	$32 \times 7 = 224$ „	„ B
4	$32 \times 4 = 128$ „	„ C
640 : 20 = 32	640 fl.	

Bei der einfachen Gesellschaftsrechnung hat man daher auf folgende Art zu verfahren:

1. Man schreibe die Verhältniszahlen unter einander. Sind sie Brüche, so multipliciere man sie alle mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Nenner; haben alle Verhältniszahlen ein gemeinschaftliches Maß, so kürze man sie dadurch ab.

2. Die auf die einfachste Form gebrachten Verhältniszahlen werden addiert.

3. Man dividiere die zu vertheilende Zahl durch die Summe der Verhältniszahlen, und multipliciere den erhaltenen Quotienten nach und nach mit jeder Verhältniszahl; die Producte sind die gesuchten Theile.

Die vorige Aufgabe kann auch durch wiederholte Anwendung der Regeldetri gelöst werden; man hat nämlich

$x : 640 = 9 : 20$, $x = 288$ fl.;
$y : 640 = 7 : 20$, $y = 224$ fl.;
$z : 640 = 4 : 20$, $z = 128$ fl.;

Aufgaben.

1) Die Bestandtheile des Schießpulvers sind: 75 Theile Salpeter, 13 Theile Kohlen und 12 Theile Schwefel; wie viel von jedem dieser Bestandtheile wird zu 800 Pfund Schießpulver erfordert?

Salpeter	75;	$8 \times 75 = 600$	Pfd.
Kohlen	13;	$8 \times 13 = 104$	"
Schwefel	12;	$8 \times 12 = 96$	"
	$800 : 100 = 8$	800	Pfd.

2) Drei Personen treten zu einem Handelsgeschäfte zusammen, und zwar gibt A 2800 fl., B 3600 fl. und C 4000 fl.; sie gewinnen damit 1300 fl.; wie viel von diesem Gewinne entfällt auf jede der drei Personen?

2800	7	$50 \times 7 = 350$ fl. gewinnt	A
3600	9	$50 \times 9 = 450$ " "	B
4000	10	$50 \times 10 = 500$ " "	C
$1300 : 26 = 50$		1300 fl. ganzer Gewinn.	

3) Es sollen 5610 fl. nach dem Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ unter A, B, C, D vertheilt werden.

A	$\frac{1}{2}$	6;	$170 \times 6 = 1020$ fl. bekommt	A
B	$\frac{2}{3}$	8;	$170 \times 8 = 1360$ " "	B
C	$\frac{3}{4}$	9;	$170 \times 9 = 1530$ " "	C
D	$\frac{5}{6}$	10;	$170 \times 10 = 1700$ " "	D
$5610 : 33 = 170$			5610 fl. zusammen.	

4) Vier Personen treten zum Betriebe eines Geschäftes zusammen, und zwar A mit einer Einlage von 4500 fl., B mit 5400 fl., C mit 6000 fl., D mit 9600 fl. Wenn nun das Geschäft einen Gewinn von 4248 fl. abwirft, wie viel kommt auf jeden Theilnehmer?

5) Zu einem Brückenbaue, der 5241 fl. 35 kr. kostet, sollen drei Gemeinden beitragen. Die Gemeinde A ist von der Brücke 1 Meile B 2 und C 3 Meilen weit entfernt. Wie viel wird jede Gemeinde beisteuern, wenn die Zahlungen im umgekehrten Verhältnisse der Entfernungen, also nach den Verhältniszahlen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ zu geschehen haben?

6) Wie viel Silber und Kupfer enthält ein Silberbarren, welcher 7 Pfd. wiegt und 750 Tausendtheile fein ist?

7) Sechs Personen kaufen ein Grundstück von 2600 Quadratklaftern. A gibt dazu 180 fl., B 243 fl., C 288 fl., D 189 fl., E 300 fl. und F 360 fl. Wie viel Quadratklafter erhält jeder auf seinen Antheil?

8) Ein Bezirk hat 4 Gemeinden, von denen A 2845 fl. 47 kr., B 1748 fl. 62 kr., C 2106 fl. 48 kr., D 3019 fl. 88 kr. Steuer zahlt. Wenn nun dieser Bezirk eine besondere Zahlung von 548 fl. zu leisten hat, wie viel wird jede Gemeinde im Verhältnisse der Steuerquote zu entrichten haben?

9) Ein Vermögen von 1440 fl. soll unter 4 Gläubiger nach Verhältnis ihrer Forderungen vertheilt werden. Wenn nun A 300 fl., B 400 fl., C 430 fl. und D 470 fl. zu fordern hat, wie viel bekommt jeder?

10) Ein Schnittwaarenhändler hat 6 Stück Tuch von derselben Güte gekauft und für sämmtliche Stücke 852 fl. bezahlt. Das erste hält 48 Ellen, das zweite $52\frac{1}{2}$, das dritte $51\frac{1}{4}$, das vierte $58\frac{3}{4}$, das fünfte 60 und das sechste $54\frac{1}{2}$ Ellen. Wie viel kostet jedes Stück?

11) Ein Kaufmann welcher an A 7845 fl. an B 10824 fl., an C 8305 fl., an D 15234 fl., an E 4211 fl. schuldig ist, falliert. Wenn nun sein Vermögen 21428 fl. 37 kr. beträgt, wie viel wird jeder Gläubiger bekommen?

12) Jemand hinterläßt ein Vermögen von 15845 fl., welches unter seine drei Erben so vertheilt werden soll, daß A 2mal so viel als B und B 3mal so viel als C bekommt. Wie viel bekommt jeder Erbe? — So oft C 1 fl. erhält, bekommt B 3 fl. und A 6 fl.; die Erbtheile von A, B und C stehen also im Verhältnisse 6 : 3 : 1.

13) Für die Versendung von 2133 Pfd. Caffee, 1735 Pfd. Zucker und 923 Pfd. Pfeffer werden 65 fl. 30 kr. Fracht gezahlt: wie viel kommt auf jeden dieser Artikel?

14) Bei guter rother Tinte rechnet man auf 1 Maß Weinessig 2 Loth Alaun, $\frac{1}{2}$ Pfd. Fernambuk, $2\frac{1}{2}$ Loth arabischen Gummi. Wollte man nun aus 3 Pfd. 27 Loth dieser trockenen Mischung rothe Tinte bereiten, wie viel von jedem der drei letzteren Bestandtheile müßte genommen, und wie viel Weinessig dazu gesetzt werden?

15) Bei einem Geschäfte, zu welchem A 3240 fl., B 1827 fl., C 2380 fl., D 3185 fl. hergibt, werden $581\frac{1}{2}$ fl. gewonnen; wie viel kommt auf jeden?

16) Man theile die Zahl 3555 im Verhältnisse der Zahlen $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, 1.

17) Zu Porzellan nimmt man 25 Theile Thon, 2 Theile Kies, 1 Theil Gyps; wie viel von jedem dieser Bestandtheile braucht man zu einer Masse von 105 Pfund?

18) Zu einem Geschäfte gibt A 1250 fl., B 2000 fl., C 2750 fl., D 3000 fl. Wenn 1260 fl. gewonnen werden, und A außer seinem verhältnißmäßigen Antheile wegen seiner besonderen Dienstleistung noch 5% des Gewinnes erhält; wie viel kommt auf jeden?

19) Ein Kaufmann ist schuldig: an A 2000 fl., an B 3200 fl., an C 1200 fl., an D 2800 fl., an E 4600 fl.; sein Vermögen besteht aber nur in 8625 fl. Wie viel wird jeder Gläubiger bei der Theilung erhalten und wie viel % verliert jeder?

20) Drei Personen sollen 2050 fl. so unter sich theilen, daß A so oft 3 fl. als B 4 fl., C aber so oft 5 fl. als B 3 fl. erhält; wie viel bekommt jede Person?

21) Fünf Personen sollen eine Erbschaft von 20045 fl. so unter einander theilen, daß sich der Antheil einer jeden Person zu dem der nächstfolgenden wie 2 : 3 verhält; wie viel kommt auf jede Person?

22) Drei Kaufleute legen zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte Geld zusammen, und zwar A 450 fl., B 560 fl. und C 640 fl. Sie gewinnen damit 25 fl. weniger als 20% von der Einlage; wie viel gewinnt jeder?

23) Drei Personen sollen eine Summe Gulden so theilen, daß A $\frac{1}{2}$ weniger 35 fl., B $\frac{1}{8}$ weniger 40 fl., C $\frac{1}{4}$ weniger 24 fl. erhält; wie viel bekommt jeder?

24) A bekam von einer Erbschaft $\frac{2}{5}$, B $\frac{3}{10}$, C $\frac{1}{6}$ und D den Rest mit 960 fl. Wie groß war die ganze Erbschaft und wie viel erhielten A, B und C?

25) Drei Personen haben 1170 fl. unter einander zu theilen. Wie viel erhält jede Person, wenn B doppelt so viel als A und C 3mal so viel als B bekommt?

26) Eine Erbschaft von 9000 fl. soll unter 4 Personen so vertheilt werden, daß A $\frac{1}{3}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest erhält. Vor der Theilung stirbt jedoch B und die übrigen drei theilen nun noch den Antheil des B im Verhältnisse ihrer Antheile. Wie viel bekommt jeder?

§. 73. Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung, in welcher mehrere Reihen von Verhältniszahlen angegeben werden, hängen die einzelnen Theile von den Producten der darauf bezüglichen Verhältniszahlen ab, wodurch jede zusammengesetzte Gesellschaftsrechnung auf eine einfache zurückgeführt werden kann.

Wenn z. B. zu einem Handelsfonde A 13000 fl. durch 4 Monate, B aber 10000 fl. durch 6 Monate hergibt, und dabei ein Gewinn von 5000 fl. erzielt wird, so ist dieser Gewinn nach Verhältnis der Einlagen und zugleich nach Verhältnis der Zeit zu theilen. Allein da es gleich viel ist, ob

A 13000 fl. durch 4 Monate,
B 10000 „ „ 6 „

oder ob

A $13000 \times 4 = 52000$ fl. durch 1 Monat,
B $10000 \times 6 = 60000$ „ „ 1 „

zur Benützung überläßt, so müssen auch in beiden Fällen auf A und B dieselben Antheile am Gewinne entfallen. Weil nun im zweiten Falle die Zeit der Benützung dieselbe ist, so wird der Gewinn nur nach Verhältnis der Einlagen, d. i. der Producte 52000 und 60000 unter A und B zu vertheilen sein; diese Zahlen bilden sonach die Verhältniszahlen zu einer einfachen Gesellschaftsrechnung.

Bei der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung ist daher folgendes Verfahren anzuwenden:

1. Man schreibe die Verhältniszahlen, welche auf denselben Theil Bezug haben, neben einander.

2. Man multipliciere die neben einander stehenden Verhältniszahlen mit einander.

3. Die erhaltenen Producte betrachte man als Verhältniszahlen der einfachen Gesellschaftsrechnung, nach welcher dann die weitere Auflösung erfolgt.

Aufgaben.

1) Ein Fuhrmann verpflichtet sich, um einen Lohn von 112 fl. drei Ladungen, und zwar 24 Ctr. 15 Meilen weit, 30 Ctr. 20 Meilen weit und 26 Ctr. 25 Meilen weit zu führen. Was gebührt ihm für jede einzelne Ladung?

$$
\begin{array}{r|l}
24 \times 15 & 36\cancel{0};\quad 0{\cdot}69565 \times 36 = 25{\cdot}043 = 25 \text{ fl. } 4 \text{ kr.} \\
30 \times 20 & 60\cancel{0};\quad 0{\cdot}69565 \times 60 = 41{\cdot}739 = 41 \text{ „ } 74 \text{ „} \\
26 \times 25 & 65\cancel{0};\quad 0{\cdot}69565 \times 65 = 45{\cdot}217 = 45 \text{ „ } 22 \text{ „} \\
\hline
\multicolumn{2}{l}{112 : 161 = 0{\cdot}69565 \qquad\qquad\qquad\qquad 112 \text{ fl. — kr.}}
\end{array}
$$

2) Zu einem Geschäfte vereinigen sich drei Personen; A gibt 8200 fl. auf 5 Monate, B 10500 fl. auf 4 Monate, C 12000 fl. auf 3 Monate her. Das Geschäft bringt einen Gewinn von 4520 fl.; wie viel davon wird jede der drei Personen erhalten?

3) Drei Bauern verpflichten sich, einen schlechten Weg auszubessern, und zwar soll A 4 Mann 6 Tage lang, B 3 Mann 9 Tage lang, C 4 Mann 8 Tage lang zur Arbeit schicken. Wenn sie nun für diese Arbeit eine Vergütung von 103 fl. 75 kr. erhalten, wie viel gebührt davon einem jeden?

4) Eine Arbeit war durch 94 Arbeiter in drei Abtheilungen zu 24, 40 und 30 Mann für die Accordsumme von 844 fl. übernommen worden. Wenn nun die erste Abtheilung 14, die zweite 12, die dritte 15 Tage gearbeitet hatte, wie viel erhielt jede von obiger Summe?

5) Zu einem Geschäfte, welches einen Fond von 9000 fl. forderte, gab A $\frac{1}{3}$ auf 10 Monate, B $\frac{4}{9}$ auf 8 Monate, C den Rest auf 6 Monate. Der Rechnungsabschluß zeigte einen Gewinn von 629 fl.; wie mußte dieser vertheilt werden?

6) Bei einem Brückenbaue waren 3 Gemeinden beschäftigt. Aus der Gemeinde A arbeiteten 22 Mann durch 10 Tage zu 9 Stunden, aus der Gemeinde B 18 Mann durch 9 Tage zu 10 Stunden, aus der Gemeinde C 15 Mann durch 5 Tage zu 12 Stunden täglich. Wenn nun dafür ein Lohn von 400 fl. verabfolgt wird, wie viel wird jede einzelne Gemeinde bekommen?

7) A beginnt am 1. Jänner ein Geschäft mit 8000 fl. Capital, am 1. Mai tritt B mit 5000 fl, und am 1. Juli C mit 6000 fl. bei; wenn sich nun am Ende December ein Gewinn von 1180 fl. 33 kr. ergibt, wie viel gebührt davon jedem der Theilnehmer?

8) Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gibt A 2300 fl. und nach 5 Monaten noch 900 fl., B 2400 fl. und nach 7 Monaten noch 1100 fl., C 1900 fl. und nach 8 Monaten noch 1300 fl. Wie ist am Ende des Jahres der Gewinn von 679 fl. 60 kr. zu vertheilen?

9) Drei Personen beschließen auf zwei Jahre ein Geschäft in Gemeinschaft zu führen; A legt dazu 4800 fl., B ebenfalls 4800 fl. und C 6000 fl. ein. Nach 4 Monaten nimmt A 800 fl., nach

8 Monaten B 300 fl. und nach 10 Monaten C 1000 fl. zurück. Am Schlusse theilen sie einen Gewinn von 1415 fl.; wie viel gebührt jedem?

IV. Die Allegationsrechnung.

§. 74. Die Allegations- oder Vermischungsrechnung wird angewendet, wenn man das Verhältnis finden will, in welchem zwei oder mehrere gleichartige Dinge von verschiedenem Gehalte mit einander verbunden werden müssen, um eine Mittelgattung von bestimmtem Gehalte zu bekommen.

Die Gattung, welche man beim Mischen erhalten will, muß immer besser als die geringste und geringer als die beste der Gattungen sein, die man zur Mischung verwendet. Wasser und Kupfer werden, wenn man sie zur Herabsetzung des Gehaltes des Weines und der edlen Metalle damit verbindet, ihrem Werthe nach gleich Null gesetzt und nur der Menge nach berücksichtigt.

Bei den meisten Aufgaben muß, nachdem man durch die Allegationsrechnung das Verhältnis der Mischung gefunden hat, die weitere Auflösung nach der Gesellschaftsrechnung vorgenommen werden.

§. 75. Wenn man aus zwei gegebenen Gattungen eine Mittelgattung erhalten will, so muß bei der Mischung das, was der geringeren Gattung bis zur Mittelgattung abgeht, die bessere durch ihren Ueberschuß ersetzen; je mehr sich also die geringere Gattung von der Mittelgattung unterscheidet, desto mehr von der besseren Gattung muß zur Mischung genommen werden; die Menge der besseren Gattung oder die Verhältniszahl der Mischung für die bessere Gattung wird also durch den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der geringeren angezeigt. Eben so muß das, was die bessere Gattung mehr werth ist als die Mittelgattung, durch Hinzusetzen der schlechteren ausgeglichen werden; man wird also um so mehr von der geringeren Gattung in die Mischung aufnehmen, je mehr sich die bessere Gattung von der Mittelgattung unterscheidet; dieser Unterschied ist also die Verhältniszahl der Mischung für die geringere Gattung.

Wenn daher nur zwei Gattungen unter einander gemischt werden sollen, um daraus eine bestimmte Mittelgattung zu erhalten, so beobachte man folgendes Verfahren:

1. Man schreibe die beiden zu vermischenden Gattungen unter einander und setze links dazwischen die Mittelgattung.

2. Man ziehe die geringere Gattung von der Mittelgattung ab und setze den Unterschied rechts neben die bessere Gattung; dann ziehe man die Mittelgattung von der besseren ab und schreibe den Unterschied rechts neben die geringere Gattung. Diese Unterschiede sind die Verhältniszahlen der Mischung für die nebenstehenden Gattungen.

Aufgaben.

1) Ein Wirth will zweierlei Weine, den einen zu 30 kr., den anderen zu 72 kr. so mischen, daß eine Maß der Mischung 60 kr.

werth ist; in welchem Verhältnisse wird die Mischung geschehen müssen?

$$60\begin{array}{c|c|c}30 & 12 & 2\\ \hline 72 & 30 & 5\end{array}$$

Der Unterschied zwischen 72 und 60 wird neben 30, der Unterschied zwischen 60 und 30 neben 72 hingeschrieben. Die Verhältniszahlen der Mischung sind also 12 und 30, oder abgekürzt 2 und 5; d. h. der Wirth muß von dem schlechteren Weine 2 Theile, von dem besseren aber 5 eben solche Theile zur Mischung verwenden; wollte er z. B. 10 Maß Wein zu 20 kr. nehmen, so müßten 25 Maß zu 48 kr. dazu gemischt werden, weil aus $x : 10 = 5 : 2$ sich $x = 25$ ergibt. Daß eine Maß dieser Mischung wirklich 40 kr. werth ist, findet man durch die Durchschnittsrechnung; es ist

10 Maß zu 20 kr. = 200 kr.
25 " " 48 " = 1200 "
35 Maß der Mischung 1400 kr.
daher 1 " " " 40 kr.

2) Wie viel Kupfer muß zu Golde, welches 900 Tausendtheile fein ist, zugesetzt werden, wenn ein Feingehalt von 750 Tausendtheilen erreicht werden soll?

3) Ein Kaufmann will aus Caffee im Preise zu 40 fl. und zu 30 fl. 28 Ctr. à 32 fl. mischen; wie viel Ctr. muß er von jeder Sorte nehmen?

$$32\begin{array}{c|c|c}40 & 2 & 1\\ \hline 30 & 8 & 4\end{array}$$

Die Menge von 28 Ctr. muß also im Verhältnisse 1 : 4 getheilt werden; man hat nun nach der Gesellschaftsrechnung:

$1;\ 1 \times 5\frac{3}{5} = 5\frac{3}{5}$ Ctr. von der Sorte zu 40 fl.
$4;\ 4 \times 5\frac{3}{5} = 22\frac{2}{5}$ " " " " " 30 "
$28 : 5 = 5\frac{3}{5}$.

Um sich von der Richtigkeit zu überzeugen, wendet man die Durchschnittsrechnung an; man erhält

$5\frac{3}{5}$ Ctr. zu 40 fl. = 224 fl.
$22\frac{2}{5}$ " " 30 fl. = 672 "
28 Ctr. . . . . 896 fl.
daher 1 Ctr. 32 fl.

4) Ein Wirth hat zweierlei Weine, den Eimer zu 15 fl. und zu 24 fl.; er will durch Mischung dieser beiden Gattungen 10 Eimer zu 21 fl. erhalten; wie viel muß er von jeder Gattung dazu verwenden?

$$21\begin{array}{c|c|l}24 & 6 & 2 \times 3\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3} \text{ Eimer zu 24 fl.}\\ \hline 15 & 3 & 1 \times 3\frac{1}{3} = 3\frac{1}{3} \text{ " " 15 "}\end{array}$$

$10 : 3 = 3\frac{1}{3}$.

Probe. $6\frac{2}{3}$ Eimer zu 24 fl. = 160 fl.
$3\frac{1}{3}$ " " 15 " = 50 "
10 Eimer der Mischung 210 fl.
also 1 Eimer 21 fl.

5) Jemand will aus feinem und 10löthigem Silber 16 Mark $13\frac{2}{3}$löthiges Silber legieren; wie viel von jeder Gattung muß er dazu nehmen?

$$13\tfrac{2}{3}\;\begin{array}{c|c|c} 16 & 3\frac{2}{3} & 11 \times \frac{8}{9} = 9\frac{7}{9} \text{ Mark feines Silber} \\ 10 & 2\frac{1}{3} & 7 \times \frac{8}{9} = 6\frac{2}{9} \text{ „ 10löth. „} \end{array}$$

$$3 \qquad 16 : 18 = \tfrac{16}{18} = \tfrac{8}{9}.$$

Probe. $9\frac{7}{9}$ Mark feines Silber enthalten $156\frac{4}{9}$ Loth fein Silber
$6\frac{2}{9}$ „ 10löth. „ „ $62\frac{2}{9}$ „ „ „
16 Mark der Legierung . . . $218\frac{2}{3}$ Loth fein Silber,
daher kommt auf 1 Mark $13\frac{2}{3}$ Loth fein Silber.

6) Ein Silberarbeiter hat 6 Mark feines Silber; wie viel Kupfer muß er damit legieren, um 13löthiges Silber zu bekommen?

$$13\;\begin{array}{c|c} 16 & 13 \\ 0 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{daher } x : 6 = 3 : 13, \\ \text{woraus } x = 1\frac{5}{13} \text{ Mark Kupfer.} \end{array}$$

Probe. 6 Mark 16löth. = 96 Lth. fein Silber
$1\frac{5}{13}$ „ 0löth. = 0 „ „ „
$7\frac{5}{13}$ Mark . . . 96 Lth. fein Silber
1 Mark . . . 13 Lth. fein Silber.

7) Wie viel Kupfer muß zu 3 Pfd. Silber à 750 Tausendtheile fein genommen werden, damit Silber à 520 Tausendtheile fein daraus entstehe?

8) Ein Goldarbeiter will aus 17- und 23karatigem Golde $2\frac{1}{2}$ Mark 21karatiges Gold legieren, wie viel muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

9) Zwei Gattungen Caffee, zu 45 kr. und zu 70 kr. das Pfund, sollen so gemischt werden, daß man einen Centner, zu 60 kr. das Pfund erhält; wie viel von jeder Gattung muß dazu genommen werden?

10) Ein Goldarbeiter hat 2 Mark 16karatigen Goldes; zur Verfertigung von goldenen Ketten braucht er $18\frac{5}{12}$ karatiges Gold. Wenn er nun dieses durch Zusatz von reinem Golde erhalten will, wie viel feines Gold muß er zusetzen?

11) Ein Gastwirth will einen Eimer Wein, von dem er die Maß zu 48 kr. verkauft, so mit Wasser verdünnen, daß er die Maß zu 40 kr. weggeben kann; wie viel Wasser muß er zusetzen?

12) Ein Essighändler will seinen zu starken Essig mit Wasser verdünnen; unverdünnt würde er die Maß um 28 kr. verkaufen; wenn er $12\frac{1}{2}$ Eimer verdünnten Essig erhalten und die Maß davon um 21 kr. verkaufen will, wie viel Essig und wie viel Wasser muß er zu der Mischung nehmen?

13) Aus 16- und 22karatigem Golde will man 4 Mark 18karatiges schmelzen; wie viel muß von jeder Sorte genommen werden?

14) Wie viel feines Silber und wie viel Kupfer muß man nehmen, um $7\frac{3}{4}$ Mark $11\frac{5}{8}$ löthiges Silber zu bekommen?

15) Ein Silberarbeiter hat 30 Loth 12löthiges und 24 Loth 10löthiges Silber; wie viel feines Silber muß er dazu legieren, um 13löthiges Silber zu erhalten?

§. 76. Häufig soll man auch mehr als zwei Gattungen zur Mischung verwenden und zu diesem Ende das Mischungsverhältnis ausmitteln. Die Auflösung dieser Aufgabe ist unbestimmt; es lassen sich nämlich verschiedene Zusammensetzungen vornehmen, welche alle auf die bestimmte Mittelgattung führen.

Sollen mehr als zwei Gattungen mit einander gemischt werden, um eine Mittelgattung zu erhalten, so geht man dabei von dem Grundsatze aus: wenn man immer eine bessere und eine schlechtere Gattung so zusammensetzt, daß man die verlangte Mittelgattung erhält, so wird gewiß auch durch alle diese Mischungen zusammen genommen dieselbe Mittelgattung zum Vorschein kommen. Daraus ergibt sich zur Auffindung des Mischungsverhältnisses folgendes Verfahren:

1. Man schreibe die zu vermischenden Gattungen in der Ordnung von der besten zur geringsten oder umgekehrt unter einander; links wird die Mittelgattung gesetzt.

2. Man nehme nach und nach immer eine bessere und eine geringere Gattung und vergleiche sie mit der Mittelgattung; den Unterschied zwischen der Mittelgattung und der geringeren setze man rechts neben der besseren Gattung, den Unterschied zwischen der mittleren und besseren Gattung schreibe man rechts neben der geringeren an. So fahre man fort, bis jede Gattung mit einer anderen verbunden erscheint. Oefters wird eine Gattung auch mit mehreren anderen zusammengesetzt, und zwar dann, wenn die Anzahl der besseren Gattungen jener der geringeren nicht gleich ist, oder wenn man von einer Gattung eine größere Menge zur Mischung verwenden will; in solchen Fällen kommen dann neben jener Gattung mehrere Unterschiede zu stehen. Der Unterschied, welcher neben jeder Gattung steht, oder wenn mehrere Unterschiede da sind, ihre Summe, ist die Verhältniszahl der Mischung für die betreffende Gattung.

Aufgaben.

1) Ein Silberarbeiter braucht 13löthiges Silber: er besitzt aber nur feines und 15löthiges Silber und muß daher auch Kupfer dazu mischen; in welchem Verhältnisse muß nun die Legierung vorgenommen werden?

	16	13	13
	15	13	13
13 —			
	0	3 + 2	5

Hier verbindet man zuerst 16löthiges Silber und Kupfer (0löthiges Silber), dann 15- und 0löthiges, und erhält so die Verhältniszahlen 13, 13 und 5.

Wenn man z. B. 13 Mark feines Silber und 13 Mark 15löthiges Silber nimmt, so muß man 5 Mark Kupfer dazu setzen, um 13löthiges Silber zu bekommen; es ist wirklich

13 Mark à 16 Lth. = 208 Lth. Silber
13 „ à 15 „ = 195 „ „
5 „ á 0 „ = 0 „ „

31 Mark der Legierung 403 Lth. fein Silber,
also kommen auf 1 Mark 13 Lth. fein Silber.

2) Aus drei Sorten einer Waare à 48, 36 und 24 kr. das Pfund soll eine andere Sorte, wovon das Pfund 40 kr. kostet, gemischt werden. Wie viel Theile wird man von jeder Sorte nehmen?

3) Aus 8löthigem, 10löthigem und feinem Silber sollen 15 Mark 13löthiges Silber legiert werden; wie viel Mark sind von jeder Sorte zu nehmen?

4) Ein Wirth will viererlei Weine zu 15 fl., zu 18 fl., zu 24 fl. und zu 28 fl. so mischen, daß er 38 Eimer zu 20 fl. erhalte; wie viel Eimer kann er von jeder Sorte dazu nehmen?

a) Man verbinde die beste und schlechteste, und dann die beiden Mittelgattungen.

	A 15	$8 \times 2 = 16$	Eimer à 15 fl.	=	240 fl.
	B 18	$4 \times 2 = 8$	„ à 18 „	=	144 „
20	C 24	$2 \times 2 = 4$	„ à 24 „	=	96 „
	D 28	$5 \times 2 = 10$	„ à 28 „	=	280 „
	$38 : 19 = 2$	38	Eimer . . .		760 fl.
			1 Eimer kostet wirklich		20 fl.

b) Man verbinde A mit C, B mit D.

	A 15	$4 \times 2 = 8$	Eimer à 15 fl.	=	120 fl.
	B 18	$8 \times 2 = 16$	„ à 18 „	=	288 „
20	C 24	$5 \times 2 = 10$	„ à 24 „	=	240 „
	D 28	$2 \times 2 = 4$	„ à 28 „	=	112 „
	$38 : 19 = 2$	38	Eimer . . .		760 fl.
			also kostet 1 Eimer 20 fl.		

c) Man verbinde A mit C, A mit D, B mit C.

	A 15	$4 + 8$	$12 \times 1\frac{5}{14} = 16\frac{4}{14}$	Eimer zu 15 fl.	=	$244\frac{4}{14}$ fl.
	B 18	4	$4 \times 1\frac{5}{14} = 5\frac{6}{14}$	„ „ 18 „	=	$97\frac{10}{14}$ „
20	C 24	$5 + 2$	$7 \times 1\frac{5}{14} = 9\frac{7}{14}$	„ „ 24 „	=	228 „
	D 28	5	$5 \times 1\frac{5}{14} = 6\frac{11}{14}$	„ „ 28 „	=	190 „
	$38 : 28 = 1\frac{5}{14}$		38	Eimer . . .		760 fl.

Welche Verbindungen lassen sich hier noch vornehmen und in welchem Falle wäre die eine oder die andere vorzuziehen?

5) Neusilber wird aus 55 Theilen Kupfer, 30 Theilen Zink und 18 Theilen Nickel zusammengesetzt. Wie viel von jedem Bestandtheile braucht man zu 46·35 Pfd. Neusilber?

6) Aus 10löthigem, 11löthigem, 15löthigem Silber und aus Kupfer sollen 10 Mark 13löthiges Silber legiert werden; wie viel Mark wird man von jeder Sorte dazu nehmen können?

7) Ein Kaufmann hat fünf verschiedene Sorten Caffee, den Centner zu 30 fl., zu 38 fl., zu 42 fl., zu 45 fl., zu 50 fl.; welche Verbindungsarten lassen sich vornehmen, um eine Sorte Caffee zu erhalten, wovon der Centner 40 fl. kostet?

8) Aus 10löthigem, $11\frac{1}{2}$löthigem und $14\frac{1}{2}$löthigem Silber sollen 2 Mark 4 Loth $12\frac{1}{2}$löthiges Silber zusammengesetzt werden; wie viel von jeder Sorte hat man zu nehmen?

V. Die Kettenrechnung.

§. 77. Es gibt Aufgaben, zu deren Auflösung solche Mittelbestimmungen erforderlich sind, daß jede derselben zwei ungleichartige am Werthe gleiche Größen enthält, die einzeln entweder mit einer Größe einer anderen Mittelbestimmung oder der Aufgabe selbst gleichnamig sind. Die Rechnungsart, durch welche solche Aufgaben gelöset werden, heißt wegen der innigen Verkettung der dabei vorkommenden Größen die **Kettenrechnung**.

Z. B. Auf wie viel Gulden ö. W. kommen 128 Wiener Pfund einer Ware, wovon 65 Hamburger Pfund 524 Mark Banko betragen? — Zur Lösung dieser Aufgabe sind folgende Bestimmungen nöthig.

100 Hamburger Pfd. machen $89\frac{3}{4}$ Wiener Pfd.,
100 Mark Banko betragen 80 Gulden ö. W.

Die Aufgabe läßt sich nun in folgende drei Aufgaben zerlegen:

a) Wie viel Wiener Pfd. machen 65 Hamb. Pfd., wenn 100 Hamb. Pfd. $89\frac{3}{4}$ Wien. Pfd. betragen?

y Wien. Pfd. 65 Hamb. Pfd. $y : 89\frac{3}{4} = 65 : 100$
$89\frac{3}{4}$ „ „ 100 „ „ also $y = 58{\cdot}337$ W. Pfd.

b) Wie viel fl. ö. W. betragen 524 M. B., wenn 100 M. B. 80 fl. ö. W. machen?

z fl. ö. W. 524 Mark B. $z : 80 = 524 : 100$
80 „ „ 100 „ also $z = 423{\cdot}2$ fl. ö. W.

c) Wie viel fl. ö. W. kosten 128 Wien. Pfd., wenn 58·337 Wien. Pfd. 423·2 fl. ö. W. kosten?

x fl. ö. W. 128 Wien. Pfd. $x : 423{\cdot}2 = 128 : 58{\cdot}337$
423·2 „ „ 58·337 „ folglich $x = 928{\cdot}56$ fl. ö. W.
$= 928$ fl. 56 kr.

Eine solche wiederholte Anwendung der einfachen Regeldetri führt zwar zum gewünschten Resultate, ist aber zu weitläufig; daher soll ein Verfahren abgeleitet werden, nach welchen die Aufgaben der Kettenrechnung mittelst eines einzigen Ansatzes aufgelöset werden.

Stellt man die drei erhaltenen Proportionen zusammen, indem man jedoch in der ersten die beidem Verhältnisse verwechselt, und in der dritten statt der gefundenen Zahlen 58·337 und 423·2 die Buchstaben y und z beibehält, so hat man

$$\left.\begin{array}{r} 65 : 100 = y : 89\frac{3}{4} \\ z : 80 = 524 : 100 \\ x : z = 128 : y \end{array}\right\}$$

Durch Multiplication der gleichnamigen Glieder erhält man wieder eine Proportion.

$$x \times z \times 65 : z \times 100 \times 80 = y \times 524 \times 128 : y \times 89\tfrac{3}{4} \times 100.$$

Kürzt man das erste Verhältnis mit z und das zweite mit y ab, so ist

$$x \times 65 : 100 \times 80 = 524 \times 128 : 89\tfrac{3}{4} \times 100.$$

Das Product der äußeren Glieder ist gleich dem Producte der inneren Glieder, daher

$$x \times 89\tfrac{3}{4} \times 65 \times 100 = 128 \times 100 \times 524 \times 80,$$

und

$$x = \frac{128 \times 100 \times 524 \times 80}{89\frac{3}{4} \times 65 \times 100}.$$

Um den Zusammenhang dieses Ausdruckes mit den Zahlen der Aufgabe zu ersehen, bringe man diese auf folgende Form:

fl. ö. W. x kosten 128 Wien. Pfund,
wenn Wr. Pfd. $89\frac{3}{4}$ 100 Hamb. Pfd. betragen,
wenn Hamb. Pfd. 65 524 Mark B. kosten,
und wenn Mark B. 100 80 fl. ö. W. machen?

Vergleicht man nun diesen Ansatz mit dem oben für x gefundenen Ausdrucke, so sieht man sogleich, daß x gleich ist dem Producte aller im Ansatze rechts stehenden Zahlen dividiert durch das Product aller links vorkommenden bekannten Zahlen. Würde man zwischen beiden Reihen von Zahlen einen aufrechten Strich ziehen, so könnte der Werth von x nach der Strichmethode gefunden werden.

Hiernach ergibt sich für die **Kettenrechnung** folgendes Verfahren:

1. Man ziehe einen aufrechten Strich und schreibe x mit seiner Benennung links, die bekannte Größe aber, deren Betrag gesucht wird und die daher mit x gleichen Werth hat, rechts des Striches.
2. Darunter setze man alle Mittelbestimmungen, und zwar fange man jedesmal links mit einer Größe an, welche mit der nächstvorhergehenden Größe auf der rechten Seite völlig gleichen Namen und gleiche Bedeutung hat, und rechts neben jede Größe kommt diejenige Größe, welche mit ihr gleichen Werth hat. Kommt eine mehrnamige Zahl vor, so muß sie in eine einnamige verwandelt werden. — Wenn alle Mittelbestimmungen in die Kette aufgenommen wurden, was man daran erkennt, daß die letzte Größe rechts mit x gleichen Namens und gleicher Bedeutung ist, so ist der Ansatz vollendet.
3. Die Auflösung erfolgt nach der Strichmethode.

§. 78. Aufgaben.

1) Wie viel kosten 3 Ctr. einer Ware, wenn man 5 Loth um 18 kr. bekommt?

fl. x	3 Ctr.
1	100 Pfd.
1	32 Loth.
5	18 kr.
100	1 fl.; woraus x = 345 fl. 60 kr.

Man setzt x mit dem Namen, hier Gulden, links, und rechts die Größe 3 Ctr., deren Werth man sucht. Da man mit Ctr. aufhört, so muß die folgende Mittelbestimmung mit Ctr. anfangen; dieses geschieht, indem man folgert: wenn 1 Ctr.... 100 Pfund enthält. Hier hört man rechts mit Pfd. auf, so muß man wieder links mit Pfd. anfangen; dieß geschieht, indem man ansetzt: wenn 1 Pfd.... 32 Loth enthält. Nun bildet man den Uebergang von der Waare zum Preise dadurch, daß man sagt: wenn 5 Loth.... 18 kr. kosten. Hier hört man mit Kreuzern auf; x bedeutet aber Gulden, darum zieht man noch die Mittelbestimmung zu Hilfe: wenn 100 kr.... 1 fl. geben. Da nun die letzte Größe rechts mit x gleichen Namen hat, so ist der Ansatz fertig. Zur Auflösung desselben bedient man sich der Strichmethode.

2) 45 neue österr. Guldenstücke wiegen $1\frac{1}{9}$ Zollpfund; wie viel Wien. Pfund wiegt 1 solches Guldenstück, wenn 28 Zollpfund = 25 W. Pfd. sind?

3) Ein Landmann gibt einem Wirthe $13\frac{1}{2}$ Metzen Weizen à $4\frac{2}{3}$ fl.; wie viel Wein muß ihm dafür der Wirth geben, den Eimer zu $8\frac{2}{5}$ fl. gerechnet?

4) In Odessa kostet 1 Tschetwert Weizen 22 Bankrubel; wie hoch kommt 1 Wiener Metzen zu stehen, wenn 2 Tschetwert 5 Star, wenn 10 Star 12 Wien. Metzen machen und wenn 100 Bankrubel $48\frac{1}{2}$ fl. ö. W. betragen?

5) Wie viel Londoner Ctr. machen 253 Wien. Ctr., wenn 100 Lond. Pfd. = 81 Wr. Pfd. und wenn 1 Lond. Ctr. 112 Lond. Pfund enthält?

6) In Hamburg kostet 1 Hamb. Pfd. Caffee $6\frac{1}{2}$ Schilling, wie hoch in österr. Währung kommen $5\frac{1}{3}$ Wien. Ctr., wenn 100 Hamb. Pfd. = $89\frac{3}{4}$ Wien. Pfd. und 100 Mark = $80\frac{1}{2}$ fl. österr. Währ. angenommen werden, wenn endlich 1 Mark 16 Schilling enthält?

7) Ein Silberbarren ist $14\frac{1}{2}$ Mark schwer, und zwar enthält jede Mark 13 Loth fein Silber; wie viel ist der Silberbarren werth, wenn 16 Lth. fein Silber zu $21\frac{1}{5}$ fl. gerechnet werden?

8) In Londen kostet ein 4 Pfd. schweres Laib Brot von der besten Gattung 16 Pences; wie viel Wiener Loth müßte nach demselben Verhältnisse eine Zweikreuzersemmel wiegen? 1 Pfd. Sterling hat 20 Schilling zu 12 Pences, $2\frac{1}{8}$ Pfd. St. machen 21 fl. öst. Währ.; ferner sind 100 Pfd. avoir = 81 Wiener Pfd.

9) Jemand kauft 3 Ctr. 54 Pfd. um 118 fl. ein. Wie theuer wird er 1 Pfd. verkaufen, wenn er dabei 20% gewinnen will, d. i. wenn er die um 100 fl. eingekaufte Waare um 120 fl. verkaufen will?

kr. Verkauf x	1 Pfd.
354	118 fl. Eink.
100	120 fl. Verk.
1	100 kr. Verk.

x = . . .

10) Wenn man 923 Pfd. einer Ware um $295\frac{1}{3}$ fl. einkauft und den Centner um 29 fl. verkauft; hat man dabei Gewinn oder Verlust und zwar wie viel %?

Um den Gewinn oder Verlust in Procenten zu bestimmen, fängt man die Kette mit der Frage an: x fl. Einnahme beim Verkaufe geben 100 fl. Ausgabe beim Einkaufe? Ist das Resultat der Kettenrechnung größer als 100, so hat man Gewinn, und zwar zeigt die Zahl, um welche die gefundene Einnahme größer als 100 ist, die Gewinn-% an; kommt weniger als 100 heraus, so hat man Verlust, und zwar zeigt die Zahl, um welche die gefundene Einnahme kleiner als 100 ist, die Verlust-% an; kommt gerade 100 heraus, so hat man weder Gewinn noch Verlust.

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe	
$295\frac{1}{3}$	923 Pfd.	100
100	29 fl. Einnahme.	90·63

x = 90·63 fl. Einnahme, also 9·37% Verlust.

11) Jemand kauft 80 Eimer Wein à 14 fl. und verkauft dann die Maß à 40 kr.; wie viel % gewinnt oder verliert er?

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe
14	40 Maß
1	40 kr. Einnahme
100	1 fl. Einnahme

$x = 114\frac{2}{7}$ fl. Einnahme; daher $14\frac{2}{7}$ % Gewinn.

12) Jemand kauft den Ctr. Oel um 30 fl. und muß dann das Pfd. um 30 kr. verkaufen; wie viel % Gewinn oder Verlust hat er dabei?

x fl. Einnahme	100 fl. Ausgabe
30	100 Pfund
1	30 kr. Einnahme
100	1 fl. Einnahme.

$x = 100$ fl. Einnahme.

Es ist also bei dem Verkaufe weder gewonnen noch verloren worden.

13) Wie hoch kommt dem Landwirth 1 Pfd. Weizenbrot zu stehen, wenn 1 Metzen Weizen 85 Pfd. schwer ist, 100 Pfd. Weizen 77 Pfd. Mehl geben, aus 1 Pfd. Mehl $1\frac{1}{3}$ Pfund Brot gebacken wird, und wenn der Preis des Weizens $4\frac{3}{10}$ fl. per Metzen ist?

14) Welchen Werth in österr. Währung hat der nordamerikanische Dollar, welcher $\frac{9}{10}$ feines Silber enthält und 26·729 Gramm wiegt, während 45 fl. österr. Währ. 500 Gramm feines Silber enthalten?

15) Eine englische Krone à 5 Schilling wiegt $\frac{10}{11}$ Troy-Unzen und hat $\frac{37}{40}$ Feingehalt; wie viel ist sie in ö. W. werth, wenn 1 Troy-Pfund à 12 Unzen = $373\frac{1}{4}$ Gramm ist?

16) Eine Lira austriaca hat 3·897828 Denari feines Silber; wie viel Lire gehen auf eine kölnische Mark fein Silber, wenn 29 metrische Pfund = 124 köln. Mark und 1000 Denari = 1 metr. Pfund sind?

17) Ein Wiener Joch enthält 57·557, ein preußischer Morgen 25·532 französische Ares; wie viel Wiener Joch hält ein Grundstück, welches nach preußischem Maße $137\frac{3}{4}$ Morgen groß ist?

18) Wie viele französische Meter gehen auf die österreichische Meile von 4000 Wiener Klafter, wenn 1 Wien. Fuß 0·31611 Meter enthält?

19) Der Hamburger Centner hat 100 Hamburger Pfund, wovon jedes 0·5 Kilogramm enthält, und das Wiener Pfund wiegt 0·56 Kilogramm; wie viel fl. österr. Währung kostet der Wiener Centner einer Ware, wovon 3 Hamburger Centner $208\frac{1}{2}$ Mark B. kosten, wenn man 100 Mark Banko zu $79\frac{3}{4}$ fl. österr. Währ. rechnet?

20) Jemand kauft 4 Stück Tuch zu 32 Ellen um 430 fl.; wie theuer muß er die Elle verkaufen, wenn er 10% gewinnen will?

21) Man verwandle 100 preußische Friedrichsd'or nach ihrem inneren Geldwerthe in kais. Ducaten. — Aus einer kölnischen Mark Gold, 260 Grän fein, werden 35 Friedrichsd'or geprägt; dagegen gehen von k. Ducaten auf eine kölnische Mark Gold, 23 Karat fein, 67 Stück.

22) Die jährliche Weinausfuhr aus Oporto in Portugal beträgt im Durchschnitte 34280 Pipas; wie viel sind das österr. Eimer? — 1 Pipa = 26 Almudas zu 12 Canadas; 1 Canada = 1·395 Liter; 1 Wiener Maß = 1·4151 Liter.

23) Wenn $37\frac{1}{2}$ badische Pfund $22\frac{3}{4}$ süddeutscher Währung kosten, wie hoch in österr. Währung kommen in demselben Verhältnis 42 Wiener Pfd. zu stehen? — 56 bad. Pfd. = 50 Wien. Pfd.; $52\frac{1}{2}$ fl. südd. W. = 45 fl. öst. W.

24) Wenn in Wien eine Eisenbahnschiene von 15 Fuß Länge $221\frac{1}{2}$ Pfd. wiegt und für 100 Kilogramm Schienen in Belgien $27\frac{6}{10}$ Francs bezahlt werden; wie viel kosten die für eine österr. Meile erforderlichen Schienen? — 1 Wien. Pfd. = 0·56 Kilogramm; 100 Frcs. = $40\frac{1}{2}$ fl. ö. W.

25) Wenn ein Ballen Schreibpapier um 72 fl. gekauft und das Buch um 42 kr. verkauft wird, wie viel % gewinnt man?

26) Großbritannien, mit einem Flächenraume von 59979 englischen □Meilen, hatte im Anfange des Jahres 1858 9171 englische Meilen Eisenbahnen; auf wie viele österr. □Meilen entfällt hiernach 1 österr. Meile Bahnlänge? — 1000 engl. Meilen = 212 österr. Meilen.

27) In Spanien gilt die Fanega Weizen 42 Realen; wie viel in ö. W. kostet in demselben Verhältnis 1 n. ö. Metzen; — 1000 Fanegas = 891 n. ö. Metzen; 20 Realen = 1 Duro; 45 fl. ö. W. = 21·127 Duros.

28) Ein Quintal einer Ware kostet in Marseille 84 Francs; wie theuer in ö. W. kommen demnach 2318 Wiener Pfd. in Triest bei 12% Transportkosten und 10% Gewinn. — Ein Quintal = 178·568 Wien. Pfd.; $111\frac{1}{9}$ Francs = 45 fl. ö. W.

29) Jemand kauft 24 Säcke Reis, von denen jeder 165 Pfd. wiegt, und bezahlt den Ctr. mit $25\frac{1}{2}$ fl. holländ. Wie viel fl. ö. W. hat er dafür zu bezahlen, wenn 100 holländ. = $85\frac{1}{2}$ fl. ö. W. gerechnet werden?

30) Jemand verwechselt in Wien 312 Napoleonsd'or gegen römische Scudi. Wie viel Scudi wird er erhalten, wenn 1 Napoleonsd'or = 20 Francs, 100 Francs = $40\frac{1}{2}$ fl. ö. W. und 100 Scudi = 218 fl. ö. W. gerechnet werden?

31) A erhält 2158 Pfd. Brutto von einer Waare, die Tara beträgt 7%, 1 Pfd. Netto kommt auf 85 kr. zu stehen; wie viel hat A für diese Ware zu bezahlen?

32) Welchen Werth hat ein Silberbarren, welcher $17\frac{3}{4}$ Mark 12löthiges Silber enthält, die Mark fein zu 21 fl. gerechnet?

33) Wie viel in ö. W. ist eine Mark feinen Goldes werth, wenn 1 Krone, die $\frac{9}{10}$ fein ist und $222\frac{1}{2}$ Aß des neuen Münzgewichtes wiegt, mit 13 fl. 85 kr. bezahlt wird? — 1 Wiener Mark = 5613 Aß.

34) Wie viel Mark Hamburger Courant gehen auf ein neues Münzpfund, wenn 1 Mark 9·164 Gramm 12löthiges Silber enthält? 1 neues Münzpfund = 500 Gramm.

Zinseszinsrechnung.

§. 79. Bei Verzinsung von Capitalien geschieht es häufig, daß die Interessen am Ende eines jeden ganzen oder halben Jahres zum Capitale geschlagen und mit diesem zugleich wieder verzinst werden; man sagt in diesem Falle: das Capital ist auf Zins von Zins oder auf Zinseszinsen angelegt. Die Zinseszinsen werden auch zusammengesetzte Interessen genannt, während die gewöhnlichen Interessen einfache heißen.

Um den Werth eines Geldbetrages nach einer bestimmten Zeit, während welcher die Zinsen nach einer bestimmten Periode wieder zum Capitale geschlagen und mit diesem verzinst werden, zu erhalten, könnte man das Interesse für jede einzelne Periode berechnen und jedesmal zu dem Anfangscapital jener Periode addieren.

Z. B. Wie hoch werden 2000 fl. Capital nach 4 Jahren anwachsen, wenn man die 5% Interessen am Ende eines jeden Jahres zum Capital schlägt und von Neuem verzinset?

Anfangscapital	fl. 2000
Zins des 1. Jahres	„ 100
Capital zu Ende des 1. Jahres	fl. 2100
Zins des 2. Jahres	„ 105
Capital zu Ende des 2. Jahres	fl. 2205
Zins des 3. Jahres	„ 110·25
Capital zu Ende des 3. Jahres	fl. 2315·25
Zins des 4. Jahres	„ 115·7625
Capital zu Ende des 4. Jahres	fl. 2431·0125 = 2431 fl. 1 kr.

Nach den einfachen Interessen wäre der Zins in 1 Jahre 100 fl. also in 4 Jahren 400 fl., während das Erträgniß nach Zinseszinsen 431 fl. 1 kr. ist; der Unterschied von 31 fl. 1 kr. geht also aus den Zinseszinsen hervor.

Da die vorhergehende Rechnung sehr weitläufig ist, so soll hier ein anderes kürzeres Verfahren entwickelt werden, nach welchem man das Anwachsen mittelst Zinseszinsen berechnen kann.

100 fl. am Anfange eines Jahres sind zu 5% verzinset am Ende desselben Jahres 105 fl., also 1 fl. den 100sten Theil von 105, nämlich 1·05 fl. werth. Man hat daher für das frühere Beispiel folgende Kettenrechnung:

x fl. Werth am Ende des 4. Jahres	2000 fl. Anfangscapital
1	1·05 „ am Ende des 1. Jahres
1	1·05 „ „ „ „ 2. „
1	1·05 „ „ „ „ 3. „
1	1·05 „ „ „ „ 4. „

$$x = 2000 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05 \times 1{\cdot}05$$

oder $x = 2000 \times (1{\cdot}05)^4$.

Man muß also 1·05, d. i. die Zahl, welche gefunden wird, wenn man zu 100 das Procent 5 addiert und diese Summe 105 durch 100 dividiert, 4mal, d. i. so oftmal als Jahre da sind, als Factor setzen und dann das Anfangscapital damit multiplicieren.

$(1{\cdot}05)^4$ gibt 1·215506 und

$2000 \times 1{\cdot}215506 = 2431{\cdot}012 = 2431$ fl. 1 kr. wie oben.

Würde man die Interessen nicht ganzjährig, sondern am Ende eines jeden halben Jahres zum Capitale schlagen, so hätte man, da 100 fl. nach einem Halbjahre 102·5 fl. werth sind, 1 fl. also den Werth von 1·025 fl. bekommt, folgende Kette:

x Werth am Ende des 8. Halbjahres	2000 fl. Anfangscapital
1	1·025 „ am Ende des 1. Halbj.
1	1·025 „ „ „ „ 2. „
1	1·025 „ „ „ „ 3. „
1	1·025 „ „ „ „ 4. „
1	1·025 „ „ „ „ 5. „
1	1·025 „ „ „ „ 6. „
1	1·025 „ „ „ „ 7. „
1	1·025 „ „ „ „ 8. „

$$x = 2000 \times (1{\cdot}025)^8.$$

Hier ist also 1·025, d. i. die Zahl, welche erhalten wird, wenn man zu 100 das Procent 2·5 für ein halbes Jahr addiert und die Summe 102·5 durch 100 dividiert, zur 8ten, d. i. zur sovielten Potenz zu erheben, als Halbjahre da sind, und mit der so erhaltenen Zahl das Anfangscapital zu multiplicieren.

Die Zahlen $(1{\cdot}05)^4$ und $(1{\cdot}025)^8$ kann man **Aufzinsungsfactoren** nennen.

Um daher den **Werth eines Capitals nach einer bestimmten Zeit, während welcher Zins von Zins gerechnet wird, zu finden, multipliciert man das gegebene Capital mit dem entsprechenden Aufzinsungsfactor.** Es wird aber der entsprechende Aufzinsungsfactor berechnet, wenn man zu 100 das Procent für eine Zeitperiode addiert, diese Summe durch 100 dividiert und den Quotienten zur sovielten Potenz erhebt, als Zeitperioden da sind.

Zur Berechnung des Aufzinsungsfactors für 6 Perioden, wenn der Zinsfuß z. B. 4% ist, hat man

1·04 × 1·04	1·124864 × 1·124864
416	4,6,8,4,2,1,1
(2) 1·0816 × 1·04	1124864
43264	112486
(3) 1·124864	22497
	4499
	900
	68
	5

$$(1{\cdot}04)^6 = 1{\cdot}265319.$$

Die folgende Tabelle enthält die bereits ausgerechneten Aufzinsungsfactoren für 2, 3, 4, 5 Procent und 1, 2, 3, ... 29, 30 Zeitperioden.

Zeitperioden	2%	3%	4%	5%
1	1·02	1·03	1·04	1·05
2	1·0404	1·0609	1·0816	1·1025
3	1·061208	1·092727	1·124864	1·157625
4	1·082432	1·125509	1·169859	1·215506
5	1·104081	1·159274	1·216653	1·276282
6	1·126162	1·194052	1·265319	1·340096
7	1·148686	1·229874	1·315932	1·407100
8	1·171659	1·266770	1·368569	1·477455
9	1·195093	1·304773	1·423312	1·551328
10	1 218994	1·343916	1·480244	1·628895
11	1·243374	1·384234	1·539454	1·710339
12	1·268242	1·425761	1·601032	1·795856
13	1·293607	1·468534	1·665074	1·885649
14	1·319479	1·512560	1·731676	1·979932
15	1·345869	1·557967	1·800944	2·078928
16	1·372786	1·604706	1·872981	2·182875
17	1·400241	1·652848	1·947900	2·292018
18	1·428246	1·702433	2·025817	2·406619
19	1·456811	1·753506	2·106849	2·526950
20	1·485947	1·806111	2·191123	2·653298
21	1·515666	1·860295	2·278768	2·785963
22	1·545980	1·916103	2·369919	2·925261
23	1·576899	1·973587	2·464716	3·071524
24	1·608437	2·032794	2·563304	3·225100
25	1·640606	2·093778	2.665836	3·386355
26	1·673418	2·156591	2·772470	3·555673
27	1·706886	2·221289	2·883396	3·733456
28	1·741024	2·287928	2·998703	3·920129
29	1·775845	2·356566	3·118651	4·116136
30	1·811362	2·427262	3·243398	4·321942

§. 80. Aufgaben.

1. Ein Capital von 5000 fl. ist zu 5% Zinseszins angelegt; wie hoch wird es bei ganzjähriger Capitalisirung in 6 Jahren anwachsen?

Der Aufzinsungsfactor für 6 Zeitperioden und 5% ist 1·340096; man hat daher

$$5000 \times 1\cdot340\,096 = 6\,700\cdot480 = 6700 \text{ fl. } 48 \text{ kr.}$$

2) Wie hoch wird ein zu 4% Zins von Zins angelegtes Capital von 1234 fl. in 7 Jahren bei halbjähriger Capitalisation anwachsen?

Hier sind 14 Halbjahre und das halbjährige Procent, nämlich 2% in Rechnung zu bringen; der entsprechende Aufzinsungsfactor ist 1·319479, und man hat:

$$
\begin{array}{r}
1234 \times 1\cdot319\,479 \\
4\,321 \\
\hline
1\,319\,479 \\
263\,583 \\
39\,896 \\
5\,278 \\
\hline
1\,628\cdot237
\end{array}
= 1628 \text{ fl. } 24 \text{ kr.}
$$

3) Wie viel werden 5800 fl. zu 3% Zinseszins bei ganzjähriger Capitalisirung nach 20 Jahren werth sein?

5800 × 1·806111 = 10475·444 = 10475 fl. 44 kr.

4) Ein Vater legt zu Gunsten seines jetzt 13jährigen Sohnes 2300 fl. in die Sparcassa ein, welche mit 4% jährlich verzinst und wovon die Interessen halbjährig zum Capital geschlagen werden. Welchen Betrag wird der Sohn, wenn er das 24. Jahr erreicht hat, aus der Sparcasse beziehen?

Man hat hier 22 Halbjahre und 2% halbjährig, daher

2300 × 1·545980 = 3555·754 = 3555 fl. 75 kr.

5) Jemand ist verpflichtet, 3000 fl. nach 1 Jahre, 2000 fl. nach 2 Jahren, 1000 fl. nach 3 Jahren und 4000 fl. nach 4 Jahren zu bezahlen; wie viel werden alle diese Beträge nach 4 Jahren werth sein, wenn man 5% Zinseszins rechnet und wenn die Capitalisirung ganzjährig geschieht?

3000 fl. nach 1 Jahre zahlbar,	sind nach 4 Jahren	3472·875	fl. werth,
2000 „ „ 2 Jahren „	„ „ „ „	2205·000	„ „
1000 „ „ 3 „ „	„ „ „ „	1050·000	„ „
4000 „ „ 4 „ „	„ „ „ „	4000 000	„ „
	ganzer Betrag nach 4 Jahren	10727·875	fl.
		= 10727	fl. 88 kr.

6) Jemand legt durch 6 Jahre zu Anfange eines jeden derselben 325 fl. auf Zins von Zins; wie hoch wird das Capital bei ganzjähriger Capitalisation zu 4% in jener Zeit anwachsen?

Da die erste Summe durch 6, die zweite durch 5, . . die sechste durch 1 Jahre anliegt, so hat man

1. Summe nach 6 Jahren	325 × 1·265319
2. „ „ „ „	325 × 1·216653
3. „ „ „ „	325 × 1·169859
4. „ „ „ „	325 × 1·124864
5. „ „ „ „	325 × 1·081600
6. „ „ „ „	325 × 1·040000
Gesammtbetrag nach 6 Jahren	325 × 6 898295 = 2241·959
	= 2241 fl. 96 kr.

7) Eine Kirche legt für einen Neubau in eine Sparcasse 8480 fl. zu 4% Zinseszinsen nieder. Zu welchem Betrage ist die Summe nach 15 Jahren angewachsen?

8) Welchen Werth hat ein Capital von 3758 fl. 40 kr. bei 5% Zinseszinsen nach 18 Jahren?

9) Ein Vater will seinem Sohne bei der Geburt ein Capital sichern, welches dem letzteren im 24. Lebensjahre ausgezahlt werden soll. Zu dem Ende legt er gleich jetzt den Betrag von 1250 fl. in eine Versicherungsanstalt, welche 4% Zinsen rechnet. Welche Summe wird diese Anstalt, wenn die Zinsen jährlich zum Capitale geschlagen worden sind, dem Sohne auszuzahlen haben?

10) Die Seelenzahl einer Stadt betrug vor 20 Jahren 25360; wie groß wird sie jetzt sein, wenn die Zunahme der Bevölkerung jährlich im Durchschnitte 1% betrug?

11) Jemand legt zu Anfange jeden halben Jahres durch 12 Jahre hinter einander 40 fl. in eine Sparcasse, bei welcher halbjährige Capitalisirung mit 2% Statt findet. Wie groß ist sein Ersparnis nach dieser Zeit?

12. Bei einem Hausverkaufe wird dem Käufer freigestellt, jetzt gleich 6000 fl. und das zweite und dritte Jahr zu derselben Zeit eine gleiche Summe zu erlegen, oder zur Zeit des letzten Termins eine Summe von 19000 fl. zu entrichten. Da der Käufer seine Gelder in seinem Geschäfte mit 5% Nutzen verwenden kann, so möchte er wissen, auf welche der Bedingungen er, um seinen Vortheil zu wahren, eingehen müsse.

§. 81. Um die umgekehrte Aufgabe zu lösen, wie nämlich der Werth eines Geldbetrages vor einer gewissen Zeit mit Rücksicht auf Zinseszinsen bestimmt wird, wird man wieder die Kettenrechnung zu Hilfe ziehen.

Man suche z. B. den Werth, den ein Betrag von 2000 fl. vor 3 Jahren hat, den Zins von Zins zu 4% gerechnet, und zwar bei ganzjähriger Capitalisation. — 100 fl. sind nach einem Jahre 104 fl., daher 1 fl. den 100sten Theil von 104, d. i. 1·04 fl. werth; umgekehrt muß also der Werth von 1·04 fl. um 1 Jahr früher nur 1 fl. werth sein. Man hat daher die Kette:

x fl. Werth vor 3 Jahren	2000 fl. gegenwärtiger Werth
1·04	1 fl. Werth vor 1 Jahre
1·04	1 „ „ „ 2 Jahren
1·04	1 „ „ „ 3 „

$$\text{woraus } x = \frac{2000}{(1{\cdot}04)^3} = 2000 \cdot \frac{1}{(1{\cdot}04)^3}.$$

Es ist also 1 durch den Aufzinsungsfactor $(1{\cdot}04)^3$ zu dividieren und mit der dadurch erhaltenen Zahl der gegebene Geldbetrag 2000 zu multiplicieren.

Da $(1{\cdot}04)^3 = 1{\cdot}124864$ und somit $\frac{1}{(1{\cdot}04)^3} = 0{\cdot}888996$ ist so hat man $x = 2000 \times 0{\cdot}888996 = 1777{\cdot}992 = 1777$ fl. 99 kr.

Wäre hier die Capitalisation halbjährig vorausgesetzt worden, so hätte man nur das halbe Procent, also 2% nehmen, dagegen 1 durch $(1{\cdot}02)^6$, weil 6 halbe Jahre vorkommen, dividieren, und folglich 2000 mit $\frac{1}{(1{\cdot}02)^6}$ multiplicieren müssen.

Die Zahlen $\frac{1}{(1{\cdot}04)^3}$ und $\frac{1}{(1{\cdot}02)^6}$ sollen **Abzinsungsfactoren** heißen.

Um daher den Werth eines Geldbetrages vor einer bestimmten Zeit mit Rücksicht auf Zinseszinsen zu finden, multipliciert man jenen Betrag mit dem entsprechenden Abzinsungsfactor. Es wird aber dieser Abzinsungsfactor berechnet, wenn man 1 durch den entsprechenden Aufzinsungsfactor dividiert.

In der folgenden Tabelle erscheinen die Abzinsungsfactoren für 2, 3, 4, 5 Procent und 1, 2, 3, ... 29, 30 Zeitperioden bereits ausgerechnet.

Zeitperioden	2 %	3 %	4 %	5 %
1	0 980392	0·970874	0·961539	0·952381
2	0·961169	0·942596	0·924556	0·907030
3	0·942322	0·915142	0·888996	0·863838
4	0·923845	0·888487	0·854804	0·822703
5	0·905731	0·862609	0·821927	0·783526
6	0·887971	0·837484	0·790315	0·746215
7	0·870560	0·813092	0·759918	0·710681
8	0·853491	0·789409	0·730690	0·676839
9	0·836755	0·766417	0·702587	0·644609
10	0·820349	0·744094	0·675564	0·613913
11	0·804263	0·722421	0·649581	0·584679
12	0·788493	0·701380	0·624597	0·556837
13	0·773033	0·680951	0·600574	0·530321
14	0·757875	0·661118	0·577475	0·505068
15	0·743015	0·641862	0·555265	0·481017
16	0·728446	0·623167	0·533908	0·458112
17	0·714162	0·605016	0·513373	0·436297
18	0·700159	0·587395	0·493628	0·415521
19	0·686431	0·570286	0·474642	0·395734
20	0·672971	0·553676	0·456387	0·376890
21	0·659776	0·537549	0·438834	0·358942
22	0·646839	0·521893	0·421955	0·341850
23	0·634156	0·506692	0·405726	0·325571
24	0·621722	0·491934	0·390122	0·310068
25	0·609531	0·477606	0·375117	0·295303
26	0·597579	0·463695	0·360689	0·281241
27	0·585862	0·450189	0·346817	0·267848
28	0·574375	0·437077	0·333478	0·255094
29	0·563112	0·424346	0·320651	0·242946
30	0·552071	0·411987	0·308319	0·231377

§. 82. Aufgaben.

1. **Wie viel sind 4000 fl. nach 5 Jahren zahlbar bei ganzjähriger Capitalisation zu 4 % Zinseszins gegenwärtig, d. i. um 5 Jahre früher, werth?**

Für 5 Perioden und 4 % hat man den Abzinsungsfactor 0·821927, daher:

$4000 \times 0·821927 = 3287·708 = 3287$ fl. 71 kr.

2) **Welchen Werth haben fl. 7310 „ 75 vor 15 Jahren, 5% Zinseszins und ganzjährige Capitalisirung vorausgesetzt?**

$7310·75 \times 0·481047 = 3516·595 = 3516$ fl. 60 kr.

3) Wie viel Capital muß man zu 4% Zins von Zins anlegen, damit es bei halbjähriger Verzinsung in 12 Jahren auf 5200 fl. anwachse?

Der Abzinsungsfactor für 24 Perioden und 2 Procent ist 0·621722, man hat daher

$5200 \times 0{\cdot}621722 = 3232{\cdot}954 = 3232$ fl. 95 kr.

4) Ein 60jähriger Mann will bei seinem Absterben seinem treuen Diener einen Betrag von 800 fl. versichern. Welche Einlage muß er in die Versorgungsanstalt machen, wenn diese ganzjährig zu 4% capitalisirt?

Da die mittlere Lebensdauer eines 60jährigen Menschen 12 Jahre ist, so ist diese Aufgabe mit der folgenden gleichbedeutend: wie viel Capital muß man anlegen, damit es in 12 Jahren zu 4% Zinseszins auf 800 fl. anwachse: oder welchen Werth haben 800 fl. vor 12 Jahren bei 4% Zins von Zins? Man hat also?

$800 \times 0{\cdot}624597 = 499{\cdot}678 = 499$ fl. 68 kr. Einlage.

5) Zu einem Gute finden sich drei Käufer. A will 18000 fl. sogleich baar bezahlen; B bietet 20000 fl. an, aber so, daß er nur 10000 fl. sogleich, und die andere Hälfte erst nach 5 Jahren erlegen will; C bietet auch 20000 fl. und zwar 5000 fl. sogleich, 8000 fl. nach 3 Jahren und den Rest nach 4 Jahren zahlbar. Welcher von den drei Kauflustigen hat wohl am meisten angeboten, wenn man die Capitalisirung ganzjährig zu 5% Zinseszins annimmt?

Hier muß man alle Zahlungen auf dieselbe Zeit reducieren; man sucht z. B. den gegenwärtigen Werth aller Anbote.

A bietet baar	sogleich	18000 fl.	
B bietet	sogleich	10000 fl.	
und 10000 fl. nach 5 Jahren, oder	„	7835 „	26 kr.
	zusammen sogleich	17835 fl.	26 kr.
C bietet	sogleich	5000 fl.	
8000 fl. nach 3 Jahren, oder	„	6910 „	70 kr.
7000 „ „ 4 „ „	„	5758 „	92 „
	zusammen sogleich	17669 fl.	62 kr.

A hat also das vortheilhafteste Anbot gemacht.

6) A will dem B eine Geldsumme geben, damit ihm dieser durch 5 Jahre am Ende eines jeden Jahres 586 fl. auszahle; wie groß wird jene Summe bei 4% Zinseszins und ganzjähriger Capitalisirung sein müssen?

Hier muß man berechnen, wie viel der erste Jahresbetrag von 586 fl. um 1 Jahr früher, der zweite um 2 Jahre früher, ... der fünfte um 5 Jahre früher werth ist.

586 fl. um 1 Jahr früher $= 586 \times 0{\cdot}961539$
„ „ „ 2 „ „ $= 586 \times 0{\cdot}924556$
„ „ „ 3 „ „ $= 586 \times 0{\cdot}888996$
„ „ „ 4 „ „ $= 586 \times 0{\cdot}854804$
„ „ „ 5 „ „ $= 586 \times 0{\cdot}821927$

Gegenwärtiger Gesammtwerth $= 586 \times 4{\cdot}451822 = 2608{\cdot}768$
$= 2608$ fl. 77 kr.

7) Welches Capital wächst bei 4% Zinseszins nach 14 Jahren auf 3580 fl. an?
8) Ein Capital hat sich bei 4% Zinseszins in 16 Jahren auf 36400 fl. vergrößert; wie viel betrug das ursprüngliche Capital?
9) Man bietet für ein Gut 85000 fl. unter der Bedingung, daß dieser Kaufschilling erst nach 8 Jahren zu bezahlen sei. Wie hoch ist, den Zinseszins zu 5% gerechnet, dieses Anbot für den Augenblick anzuschlagen?
10) Wenn ein Vater seinem Kinde im 20sten Jahre eine Aussteuer von 3000 fl. dadurch sichern will, daß er gleich bei der Geburt in eine Versicherungsanstalt eine bestimmte Summe einlegt; wie hoch wird diese Summe sein müssen, wenn die Anstalt 4% Zinseszinsen berechnet?
11) Jemand will durch 12 Jahre nach Ablauf jedes Jahres 850 fl. beziehen; welchen Betrag muß er dafür sogleich erlegen, wenn jeder Capitalsrest mit 5% verzinset wird?
12) Jemand übernimmt ein Haus mit der Verpflichtung, dem bisherigen Besitzer 15 Jahre hintereinander eine nachschußweise Rente von 600 fl. auszuzahlen. Wie hoch wurde das Haus veranschlagt, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

VI. Vermischte Aufgaben

über die zusammengesetzten Verhältnisrechnungen.

§. 83. 1) Aus 10 Pfd. Garn erhält man 60 Ellen Leinwand, welche $1\frac{1}{2}$ Ellen breit ist; wie viel Ellen Leinwand wird man von 5 Pfd. Garn bekommen, wenn dieselbe $1\frac{1}{4}$ Ellen breit sein soll?
2) Ein Capital von 2800 fl. ist zu 4% Zinseszins angelegt; wie hoch wird es a) bei ganzjähriger, b) bei halbjähriger Capitalisirung in 10 Jahren anwachsen?
3) Drei Gesellschafter unternahmen ein Geschäft auf gemeinschaftlichen, nach den eingelegten Capitalien zu vertheilenden Gewinn; A gab 5400 fl., B 6300 fl., C 4500 fl. Der Gewinn betrug 4977 fl.; wie viel erhält jeder von dem Gewinne?
4) Wie viel wiegen 13 Kubikfuß Eisen, wenn 1 Kubikfuß Eisen so viel wiegt als $7\frac{1}{2}$ Kubikfuß Wasser, und wenn 1 Kubikfuß Wasser $56\frac{1}{2}$ Pfund wiegt?
5) Welches Capital gibt
   a) zu 5% in 3 Jahren 109 fl. 35 kr. Zins?
   b) zu $4\frac{1}{2}$% in 2 Jahren 180 fl. 80 kr. Zins?
   c) zu 4% in 6 Monaten 137 fl. Zins?
6) 15 Arbeiter verrichten eine Arbeit in 10 Tagen, wenn sie täglich 12 Stunden arbeiten; wie viele Arbeiter wird man aufnehmen müssen, damit sie die nämliche Arbeit in 6 Tagen à 10 Stunden vollenden?
7) Wie viel feines Gold und wie viel Kupfer enthalten 2·6 Pfd. Gold welches 900 Tausendtheile fein ist?

8) Ein Goldschmied hat 20karatiges und 12karatiges Gold; wie viel von jeder Sorte muß er nehmen, um $2\frac{1}{2}$ Mark Gold, welches 18 Karat 5 Grän fein ist, zu erhalten?

9) Wie viel Zinsen geben 3456 fl.
   a) zu 4% in 3 Jahren?
   b) zu $4\frac{3}{4}$% in 2 Jahren 6 Monaten?
   c) zu 5% in 49 Tagen?

10) Welches ist die gemeinschaftliche Verfallszeit für sechs gleiche Capitalien à 800 fl., welche beziehungsweise in 4, 5, 7, 9, 10, 14 Monaten zahlbar sind?

11) Die Abschrift eines Werkes kann von 6 Schreibern, welche täglich $12\frac{1}{2}$ Stunden schreiben, in 8 Tagen vollendet werden; wie viele Schreiber wird man dazu aufnehmen müssen, damit sie mit der Abschrift desselben Werkes in 5 Tagen fertig werden, wo sie täglich nur 12 Stunden schreiben?

12) Wie viel beträgt das Interesse à $4\frac{1}{2}$%
   a) von 6250 fl. in $2\frac{3}{4}$ Jahren?
   b) von 1306 fl. 58 kr. in 1 Jahr 5 Mon.?
   c) von 978 fl. vom 1. April bis 16. Juni?

13) Wie viel in öst. W. kostet 1 Wiener Pfd., wenn 100 Hamb. Pfd. mit $72\frac{1}{2}$ Mark Banko bezahlt werden? (28 Hamb. Pfd. = 25 Wien. Pfd. und $27\frac{3}{4}$ Mark Banko = 21 fl. ö. W.)

14) Eine Partie neuer Viertelgulden wiegt $4\frac{2}{9}$ Zollpfund; wie viel feines Silber und wie viel Zusatz enthalten dieselben, da sie 520 Tausendtheile fein sind?

15) Ein Getreidehändler hat zweierlei Weizen; von der besseren Sorte kostet der Metzen 4 fl. 50 kr., von der schlechteren 4 fl.; er will nun 42 Metzen so mischen, daß er jeden Metzen um 4 fl. 20 kr. verkaufen kann; wie viel muß er von jeder Sorte dazu nehmen?

16) Wie viel Interessen geben in 68 Tagen
   a) 2085 fl. à 5%?
   b) 1593 fl. 80 kr. à $4\frac{1}{2}$%?
   c) 3103 fl. 12 kr. à 4%?

17) Eine Goldstange wiegt 6 Mark 5 Loth und hat an Feingehalt $20\frac{1}{4}$ Karat; wie groß ist ihr Werth in ö. W. zu 390 fl. pr. Mark fein?

18) A kauft einen Garten für 1200 fl., wovon er sich nach je 3 Monaten 240 fl. zu zahlen verpflichtet; wann müßte er die ganze Summe auf einmal entrichten?

19) Ein Buch, dessen jede Seite 32 Zeilen à 45 Buchstaben enthält, hat 240 Seiten; wie viele Buchstaben muß man im Durchschnitte in einer Zeile anbringen, um den Inhalt jenes Buches auf 200 Seiten, deren jede 36 Zeilen enthält, zu bringen?

20) In wie viel Zeit geben
   a) 908 fl. Capital zu $4\frac{3}{4}$% 86 fl. 26 kr. Zins?
   b) 5160 fl. Capital zu 5% 330 fl. Zins?
   c) 2180 fl. Capital zu 6% 327 fl. Zins?

21) Eine Mutter mit 2 Söhnen und 1 Tochter haben 6300 fl. so zu theilen, daß die Mutter 15, der älteste Sohn 12, der jüngste Sohn

10 und die Tochter 8 Theile erhält; wie viel bekommt jede dieser Personen?

22) Vier Personen haben 2852 fl. so unter einander zu theilen, daß A so oft 3 fl. als B 4, C 7 und D 9 fl. bekommt; wie viel entfällt auf jeden?

23) Jemand erhält 730 Meter Seidenband und hat für 9 Meter $22\frac{1}{2}$ Franken zu bezahlen; wie groß ist der Betrag in ö. W., da 5 Franken $2\frac{1}{20}$ fl. sind?

24) Zu wie viel % tragen
   a) 3075 fl. Capital in 9 Monaten 92 fl. 25 kr. Zins?
   b) 5400 fl. Capital in $2\frac{1}{2}$ Jahren 607 fl. 50 kr. Zins?
   c) 650 fl. Capital in $3\frac{2}{3}$ Jahren 143 fl. Zins?

25) Auf einem Acker von 75° Läge und 15° Breite können $2\frac{1}{2}$ Metzen Weizen gesäet werden; wie lang muß ein 18° breiter Acker sein, um darauf $3\frac{3}{4}$ Metzen säen zu können?

---

26) Drei Personen kaufen ein Schiff um 24000 fl.; davon zahlt A 12000 fl., B 8000 fl., C den Rest. Welchen Theil oder Part wird jeder am Schiffe haben? (Das Schiff wird als Einheit angenommen.)

27) Jemand zahlt für ein durch 6 Jahre benütztes Capital sammt den einfachen $5\frac{1}{2}$% Zinsen 452 fl. 20 kr. zurück; wie groß war das geliehene Capital?

28) Jemand kauft auf der Leipziger Messe 432 Leipz. Ellen Kattun für 56 Thlr. Wie viel Kreuzer ö. W. kostet 1 Wiener Elle, da 1 Leipz. Elle = 0·727 Wien. Ellen und 30 Thaler = 45 fl. ö. W. sind?

29) Bei einem Geschäfte, zu welchem A 3500 fl., B 2850 fl., C 4180 fl. hergegeben hat, werden 11% gewonnen; wie viel von diesem Gewinne entfällt auf jeden Gesellschafter?

30) Welchen Werth haben 5360 fl. vor 12 Jahren, 5% Zinseszins und a) ganzjährige, b) halbjährige Capitalisation vorausgesetzt?

31) Eine Lira nuova in Sardinien wiegt 5 Gramm und ist $\frac{9}{10}$ fein; wie viele Stücke gehen auf 1 Zollpfund = 500 Gramm?

32) Löst man 7 Theile Zinn in 3 Theilen Quecksilber auf, so erhält man das Amalgam, welches zum Belegen des Glases bei Anfertigung der Spiegel benützt wird. Wie viel von jedem Metalle muß man zu 18 Pfd. dieses Amalgams nehmen?

33) Von zwei Rädern, welche in einander greifen, hat das eine 56, das andere 21 Zähne; wenn nun das erste in $2\frac{5}{10}$ Minuten 58 Umläufe macht, wie vielmal dreht sich das zweite Rad in $3\frac{3}{4}$ Minuten um?

34) Drei Personen legen in ein Geschäft 9600 fl. und gewinnen damit $\frac{1}{8}$ der Einlage; sie ziehen darauf ihr Geld zurück. Wie viel erhält A, der 2400 fl., B, der 3600 fl., und C, der den Rest eingelegt hat?

35) Ein Vater will seinem Sohne gleich bei der Geburt ein Capital sichern, welches dem letzteren nach zurückgelegtem 24sten Lebensjahre ausgezahlt wird. Zu dem Ende legt er gleich jetzt ein Ca-

pital von 2450 fl. in eine Sparcasse, welche dasselbe mit 4% verzinset. Welche Summe wird die Sparcasse, wenn die Zinsen jährlich zum Capital geschlagen worden sind, dem Sohne auszuzahlen haben?

36) Es hat Jemand nach und nach folgende Zahlungen zu leisten: den 17. März 250 fl., den 13. Juli 300 fl., den 21. August 400 fl., den 7. October 250 fl. und den 18. December 500 fl. An welchem Tage kann er diese sämmtlichen Posten auf einmal abtragen? (Man berechne hier die einzelnen Zeiten vom 1. Jänner an, von welchem Zeitpuncte aus dann auch das Resultat zu nehmen ist.)

37) Ein Kaufmann hatte einen Betrag von 4108 fl. am 20. October zu zahlen, leistete aber die Zahlung erst am 31. December; wie viel hatte er da bei 6% Interesse zu bezahlen?

38) Ein Wiener Kubikfuß Wasser wiegt $56\frac{1}{2}$ Wiener Pfd.; wie viel preuß. Pfd. wiegt ein preuß. Kubikfuß Wasser? (1000 preuß. Kubikfuß = 979 Wien Kubikfuß; 1000 preuß. Pfund = 893 Wien. Pfd.)

39) Ein Kaufmann besitzt von einer Gattung Ware drei Sorten, das Pfd. zu 40 kr., 33 kr., 30 kr.; wie viel wird er von jeder Sorte nehmen, um eine Mischung von 120 Pfd. à 36 kr. zu erhalten?

40) Jemand mischt 50 Pfd. einer Ware, wovon das Pfund 60 kr. kostet, mit 40 Pfd. einer geringeren Sorte, und nun kommt das Pfund der Mischung auf 54 kr.; wie viel kostet ein Pfund der zweiten Sorte?

41) Ein Wiener kauft in Hamburg 80 Säcke Domingo-Caffee, wovon ein jeder 160 Hamb. Pfd. enthält; wie groß ist der Betrag in öst. W., wenn ein Hamb. Pfd. $6\frac{1}{2}$ Schilling Banko kostet, 1 Mark Banko = 16 Schilling und $27\frac{3}{4}$ Mark Banko = 21 fl. ö. W. sind?

42) Jemand legt in die Sparcasse ein Capital von 3580 fl. Wenn nun die Sparcasse mit 4% jährlich verzinset und die Interessen halbjährig zum Capitale schlägt, welchen Werth wird jenes Capital nach 8 Jahren haben?

43) Wie viel Kronen können aus $22\frac{1}{2}$ köln. Mark Gold, welches $21\frac{1}{3}$ karatig ist, geprägt werden, da 50 Kronen 500 Gramm feines Gold enthalten und 1 köln. Mark = 233·87 Gramm ist?

44) 120 fl. wurden unter 20 Männer und Frauen so vertheilt, daß jeder Mann 8 fl., jede Frau 3 fl. erhielt. Wie viel Männer und wie viel Frauen waren es?

45) 1050 fl. sollen so getheilt werden, daß A so oft $1\frac{1}{2}$ fl. bekommt, als B $1\frac{2}{3}$ fl., C $1\frac{5}{6}$ fl., D 2 fl. Wie viel erhält jeder?

46) Ein Kaufmann eröffnete sein Geschäft mit einem Fonde von 22500 fl.; wenn er nun durch 10 Jahre jährlich 5% gewann und diesen Gewinn im Geschäfte ließ, wie groß war der Handelsfond am Ende des 10ten Jahres?

47) 2640 fl. werden unter drei Personen getheilt; B erhält 2mal so

viel als A weniger 240 fl., C aber dreimal so viel als B; wie viel kommt auf jeden?

48) Jemand hat 30 Pfd. einer Ware à 48 kr. und 40 Pfd. à 44 kr.; er setzt noch 50 Pfd. einer dritten Sorte dazu, und nun kostet das Pfd. der Mischung 40 kr. Wie viel kostet 1 Pfd. von der letzten Sorte?

49) Welches Capital wird zu 4% Zinseszins bei halbjähriger Capitalisirung nach 9 Jahren auf 5000 fl. anwachsen?

50) A hat 2400 fl. nach 4 Jahren zu bezahlen; er entrichtet 800 fl. sogleich; wann wird nun die Zahlung des Restes zu erfolgen haben?

---

51) Bei einer gewöhnlichen Mühle geben 100 Pfd. Roggenkörner 75 Pfd. Mehl, 22 Pfd. Kleie und 3 Pfd. Abgang. Wie viel Mehl und wie viel Kleie wird man von 6 Metzen Roggen erhalten, wenn 1 Metzen Roggen 81 Pfd. wiegt?

52) Feines und 920 Tausendtheile haltendes Silber sollen mit Kupfer so legiert werden, daß man 32 Pfd. zu 750 Tausendtheile fein erhält. Wie viel wird man von jedem nehmen?

53) Vier Fuhrleute übernehmen einen Gütertransport und erhalten dafür 184 fl. A stellt 4 Pferde auf 3 Tage, B 6 Pferde auf $2\frac{1}{2}$ Tage, C 5 Pferde auf 4 Tage und D 8 Pferde auf $2\frac{3}{4}$ Tage. Wie viel erhält jeder der Fuhrleute?

54) A bietet für ein Haus entweder 8410 fl. bar, oder 8785 fl. nach 9 Monaten zahlbar. Wenn nun der Verkäufer das Geld zu 5% darleihen kann, welches Anbot ist für ihn das vortheilhaftere?

55) Eine Silbermasse wiegt 8·765 Zollpfund und ist 12löthig; welchen Betrag erhält man dafür in fl. ö. W. bei 1% Abzug für die Prägekosten? (Ein neuer Gulden ist $\frac{9}{10}$ fein und es enthalten 45 Guldenstücke ein Zollpfund feines Silber.)

56) Drei Personen haben 285 fl. so zu theilen, daß A so oft 5 fl. als B 8 fl. und C so oft 3 fl. als B 4 fl. erhalte; wie viel bekommt jeder?

57) Unter 4 Erben sollen 5800 fl. so vertheilt werden, daß B 600 fl. mehr, C 800 fl. mehr und D 400 fl. weniger erhalten als A; wie viel kommt auf jeden?

58) 2000 fl. sollen unter 5 Personen so vertheilt werden, daß jede immer 40 fl. mehr erhalte als die ihr vorgehende; wie viel erhält jede Person?

59) Wie theuer muß das Pfund einer Ware sein, welche mit 50 Pfund à 24 kr., 30 Pfd. à 18 kr. und 40 Pfd. à $20\frac{1}{2}$ kr. vermischt, das Ganze auf 200 Pfund à 22 kr. bringt?

60) Wie viel Wiener Pfd. wiegen 165 neue Guldenstücke, wenn jedes Stück $\frac{1}{45}$ Zollpfund feines Silber enthält und einen Feingehalt von $\frac{9}{10}$ hat und wenn 28 Zollpfund = 25 Wien. Pfd. sind?

61) Vier Kaufleute haben 1236 fl. im Handel gewonnen; wie viel bekommt jeder vom Gewinne, wenn sich der Antheil des A zu

dem des B wie 2 : 3, des B zu jenem des C wie 4 : 5 und des C zu dem des D wie 10 : 11 verhält?

62) Die Münzordnung des Kaisers Ferdinand I. vom Jahre 1559 bestimmte, daß aus einer kölnischen Mark (= 233·855 Gramm) Gold, $18\frac{1}{2}$ Karat fein, 72 Goldgulden geprägt werden sollten. Wie viel Kronzehntel ist ein solcher Goldgulden werth, da eine Krone $\frac{9}{10}$ fein ist und 10 Gramm feines Gold enthält?

63) Jemand legt zu Ende jedes Jahres, 14 Jahre nacheinander, 85 fl. in eine Sparcasse, welche mit 4% jährlich verzinset und die Interessen halbjährig zum Capital schlägt; wie groß ist sein Ersparnis nach dieser Zeit?

64) Drei Maurermeister erhalten für einen gemeinschaftlichen Bau 2700 fl., welche sie nach Verhältnis der Anzahl Arbeiter und der Zeit unter sich theilen. Nun hat A 16 Arbeiter 40 Tage, B 20 Arbeiter 36 Tage und C 25 Arbeiter 32 Tage gestellt; wie viel erhält jeder Meister?

65) A hat an B, so lange dieser lebt, eine jährliche Rente von 420 fl. zu bezahlen; B wünscht aber sogleich den Betrag aller Renten bar zu empfangen. Wie viel wird ihm A zu geben haben, wenn man annimmt, daß B noch 18 Jahre leben wird, und wenn man ganzjährig 4% Zinseszins rechnet?

66) A, B und C gewannen bei einem Geschäfte 960 fl. B hatte 3000 fl., C 5000 fl. eingelegt. Wie viel betrug die Einlage des A, da er vom Gewinne 320 fl. erhielt?

67) Im Kristallpalast zu Sydenham bei London war im Mai 1858 ein in Australien gefundener Klumpen reines Gold ausgestellt, der 1743 engl. Troy-Unzen wiegt. a) Wie viel Vereinskronen, jede 10 Gramm feines Gold enthaltend, könnten aus demselben geprägt werden? b) Wie groß ist dessen Werth in Gulden ö. W., die Krone zu $13\frac{4}{5}$ fl. gerechnet? (12 Troy-Unzen = $373\frac{1}{4}$ Gramm.)

68) Jemand kauft ein Landgut für 60000 fl. mit der Bedingung, die Kaufsumme in 5 gleichen Raten nach 1 Jahre, nach 2, 3, 4 und 5 Jahren zu bezahlen. Er zahlt jedoch 10000 fl. sogleich, 20000 fl. nach $1\frac{1}{2}$ Jahren, dann 10000 fl. nach 3 Jahren. Wann muß er den Rest entrichten?

69) In einem Dorfe haben vier Hausbesitzer an ihrem Eigenthume, das bei A auf 2000 fl., bei B auf 1800 fl., bei C 2400 fl. und bei D auf 1200 fl. geschätzt ist, Schaden gelitten und es beträgt derselbe bei A 640 fl., bei B 520 fl., bei C 800 fl., während D alles verloren hat. Wenn nun für diese vier Personen 980 fl. milde Beiträge eingegangen sind, wie sind dieselben zu vertheilen?

70) A nimmt ein Capital von 6000 fl. auf und zahlt für Rechnung der 5% Zinsen und der Capitaltilgung am Schlusse eines jeden Jahres 850 fl.; wie groß wird noch der Schuldrest nach 8 Jahren sein, und welchen gegenwärtigen Werth hat dieser Schuldrest?

71) A hatte an B zu zahlen:

am 5. Juli 2325 fl. 82 kr.,
am 27. Sept. 978 „ 39 „,
am 19. Nov. 1815 „ 40 „;

dagegen hatte B an A zu bezahlen:

am 13. August 1546 fl. 6 kr.,
am 1. Dec. 2410 „ — „

Am 31. December werden die gegenseitigen Forderungen mit 6% Zins ausgeglichen; wie viel hat da A an B zu bezahlen?

Sechster Abschnitt.

Gleichungen des ersten Grades.

§. 84. Die Gleichstellung zweier Ausdrücke, welche einerlei Werth haben, wird eine Gleichung genannt; z. B.
$a = a$; $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; $3x - 5 = 2x + 3$.

Die Ausdrücke zu beiden Seiten des Gleichheitszeichens heißen Theile der Gleichung, und können einzeln wieder aus mehreren Gliedern bestehen. In der Gleichung $3x - 5 = 2x + 3$ ist $3x - 5$ der erste, $2x + 3$ der zweite Theil; jeder dieser beiden Theile besteht aus zwei Gliedern.

Man unterscheidet zweierlei Gleichungen, identische und Bestimmungsgleichungen. Eine identische Gleichung gilt für jeden Werth der darin vorkommenden noch unbestimmten Größen; diese Eigenschaft haben die obigen Gleichungen $a = a$ und $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, welche richtig bleiben, man mag für a und b was immer für Werthe setzen. Bestimmungsgleichungen dagegen sind solche, welche nicht für alle, sondern nur für bestimmte Werthe der darin vorkommenden Unbekannten giltig sind. So ist $3x - 5 = 2x + 3$ eine Bestimmungsgleichung, weil ihr nur der Werth $x = 8$ Genüge leistet.

Die Werthe einer Bestimmungsgleichung auffinden, welche ihr Genüge leisten, heißt die Gleichung auflösen.

Nach der Anzahl der Unbekannten, welche in einer Gleichung vorkommen, unterscheidet man Gleichungen mit einer, mit zwei oder mit mehreren Unbekannten. Z. B. $7x - 3 = 4x$ ist eine Gleichung mit einer, $5x - 3y = 8$ eine Gleichung mit zwei, $7x = 3y - 5z + 4$ eine Gleichung mit drei Unbekannten.

Nach dem höchsten Potenzexponenten der Unbekannten werden die Gleichungen in jene des ersten, zweiten, dritten ... Grades eingetheilt. So sind

$$\left.\begin{array}{r} 3x = 20 \\ 2x - 3y = 7 \end{array}\right\} \text{Gleichungen des ersten Grades,}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x = 9 \\ x^2 + y^2 = 2xy \end{array}\right\} \text{Gleichungen des zweiten Grades.}$$

In dieser Anleitung soll nur von den Bestimmungsgleichungen des ersten Grades die Rede sein.

I. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

§. 85. Eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten ist als aufgelöst zu betrachten, wenn die Unbekannte für sich allein vor dem Gleichheitszeichen steht und hinter demselben nur bekannte Zahlen vorkommen. Wenn man z. B. aus der Gleichung $6x + 4x = 780 - 3x$ das Resultat $x = 60$ findet, so ist jene Gleichung aufgelöst.

Das Auflösen der Gleichungen des ersten Grades beruhet auf dem Grundsatze:

Wenn man mit gleichen Ausdrücken gleiche Veränderungen vornimmt, so müssen wieder gleiche Ausdrücke zum Vorschein kommen.

Aus diesem allgemeinen Grundsatze ergeben sich folgende besondere Sätze:

1. Gleiches zu Gleichem addiert, gibt gleiche Summen.
   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a + c = b + d$ sein.
2. Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt gleiche Unterschiede.
   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a - c = b - d$ sein.

Zu Folge dieser beiden Sätze kann jedes Glied auf einer Seite der Gleichung weggelassen und auf die andere Seite mit dem entgegengesetzten Zeichen übertragen werden. Hat man z. B. $x + a = b$, so ist $x = b - a$; durch diese Versetzung ist nichts anderes geschehen, als daß von beiden Theilen der Gleichung $+ a$ subtrahiert wurde. Aus $5x = 16 - 3x$ folgt $5x + 3x = 16$; hier wurde auf beiden Seiten $3x$ addiert, oder, was gleichviel ist, $- 3x$ subtrahiert.

3. Gleiches mit Gleichem multipliciert, gibt gleiche Producte.
   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $ac = bd$ sein.

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Brüche in einer Gleichung wegschaffen; man darf nur beide Theile der Gleichung mit einem gemeinschaftlichen Vielfachen der Nenner multiplicieren. Z. B. aus $\frac{x}{a} - b = c$ folgt, wenn man mit a multipliciert, $x - ab = ac$.

Eben so gibt $\frac{x}{2} - 2 = \frac{x}{3}$, wenn beide Theile mit $2 \times 3 = 6$ multipliciert werden, $3x - 12 = 2x$.

4. Gleiches durch Gleiches dividiert, gibt gleiche Quotienten.
   Ist $a = b$ und $c = d$, so muß auch $a : c = b : d$ sein.

Es ist daher erlaubt, beide Theile einer Gleichung durch dieselbe Zahl zu dividieren, wodurch die Gleichung häufig auf eine einfachere Gestalt gebracht wird. So gibt $6x = 24$ die einfachere Gleichung $x = 4$.

Um durch Anwendung der vorhergehenden Sätze eine Gleichung des ersten Grades mit einer Unbekannten aufzulösen, verfährt man auf folgende Art:

1. Wenn die Gleichung Brüche enthält, so werden diese weggeschafft, indem man beide Theile der Gleichung mit dem kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen aller Nenner multipliciert.

2. Kommen in der Gleichung zusammengesetzte, durch Klammern verbundene Ausdrücke vor, so werden die durch Klammern angezeigten Operationen wirklich ausgeführt.

3. Es werden alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf die erste Seite der Gleichung gebracht und zusammengezogen; die bekannten Glieder dagegen werden auf die zweite Seite übertragen und ebenfalls zusammengezogen.

4. Man befreit die Unbekannte von ihrem Coefficienten, indem man beide Theile der Gleichung durch denselben dividiert.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, darf man nur den gefundenen Werth für die Unbekannte in die gegebene Gleichung substituieren, und die Ausdrücke auf beiden Seiten auf die einfachste Gestalt bringen. Erhält man beiderseits einerlei Resultat, so ist die Auflösung richtig; im entgegengesetzten Falle wäre sie unrichtig.

§. 86. Aufgaben.

1) $3x - 8 = 13$.

Auflösung. $3x = 13 + 8$ Probe. $3 \times 7 - 8 = 13$

$3x = 21$ $21 - 8 = 13$

$x = 7$ $13 = 13$

2) $7x - 23 = 40$. 3) $2x - 11 = 23$.

4) $9 - x = 7$. 5) $5y + 14 = 49$.

6) $2x + 15 = 31$. 7) $14 = 5z - 16$.

8) $17 - 3x + 1 = 0$. 9) $3x + 4 = 44 - x$.

10) $9y + 7y + 5y = 0$. 11) $5z - 7 = 2z + 8$.

12) $9x + 100 = 14x + 95$. 13) $37 - 5x = 3x - 12$.

14) $2y - 3 + 5y = 2y + 2$.

15) $2x - 11 + 2x^2 - 5x + 4 = 7x - 7$.

16) $138 - 13x + 35 - 17x = 155 - 3x - 27$.

17) $12(x - 1) = 3x + 24$.

Aufl. $12x - 12 = 3x + 24$ Probe. $12(4 - 1) = 3 \times 4 + 24$

$12x - 3x = 24 + 12$ $12 \times 3 = 12 + 24$

$9x = 36$ $36 = 36$

$x = 4$

18) $20 - (x - 4) = 2x$. 19) $8 - (2 - y) = 1 - 2y$.

20) $14x = 1950 - 9(150 - x)$.

21) $18(x + 35) = 10(2x + 45)$.

22) $4(z - 2) + 3z = 5(z - 3) + 19$.

23) $6(x - 2) - 2(3x + 1) = 1 - 4(2x + 3)$.

24) $3(x + 1) - 4(x - 1) = 8(2x - 15)$.

25) $55(60 - 2y) - 3(y + 2) = 22y + 9(3y + 6)$.

26) $\frac{x}{2} = x - 5$.

Aufl. $x = 2x - 10$ Probe. $\frac{10}{2} = 10 - 5$

$x - 2x = -10$ $5 = 5$

$-x = -10$

$x = 10$

27) $\frac{x}{16} = \frac{3}{4}$. 28) $\frac{3}{5}y - 36 = 0$.

29) $\frac{3x}{5} + 7 = 16.$ 30) $\frac{24}{x+1} = 6.$

31) $\frac{5}{3x+2} = 1.$ 32) $\frac{6+y}{6-y} = 2.$

33) $\frac{2x+4}{x+15} = 1.$ 34) $z - \frac{5z}{6} = 2.$

35) $5y - 28 = \frac{8y}{3}.$ 36) $\frac{x}{2} - \frac{2x}{3} + 2 = 0.$

37) $2x - \frac{3x}{5} = 3(x-2).$

38) $\frac{34-7x}{5} = 22 - 9x.$

39) $7x - \frac{4x}{7} + 2(x-1) = 8x + 1.$

40) $\frac{x+3}{5} - \frac{x-3}{9} = 2.$

Aufl. $9(x+3) - 5(x-3) = 90$
$9x + 27 - 5x + 15 = 90$
$9x - 5x = 90 - 27 - 15$
$4x = 48$
$x = 12$

Probe.
$\frac{12+3}{5} - \frac{12+3}{9} = 2$
$\frac{15}{5} - \frac{9}{9} = 2$
$3 - 1 = 2$
$2 = 2$

41) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + 35 = 2x.$ 42) $4 . \frac{11-3x}{2} + 5x = 19.$

43) $\frac{4x-15}{13} + \frac{5x+2}{12} = x.$ 44) $\frac{45-x}{3} = x + \frac{21-x}{4}.$

45) $\frac{9-x}{14} - 1 = \frac{x+7}{5} - 2.$ 46) $\frac{7(25-2x)}{15} = \frac{4(39-3x)}{11}.$

47) $10\left(\frac{9x}{4} + 13\right) = 60 + \frac{85x}{3}.$ 48) $\frac{19-y}{2} + y = \frac{4-y}{3}.$

49) $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-3}{5} = \frac{3x+7}{10}.$

50) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 13.$ 51) $\frac{z}{2} - \frac{z+4}{3} - \frac{z-6}{4} = z - 3.$

52) $\frac{6x+3}{3x-4} = \frac{10x+1}{5x-8}.$ 53) $\frac{5x+3}{4} + \frac{3-5x}{4} = 1 - \frac{x}{6}.$

54) $\frac{8x-1}{3} - 12 = \frac{7-6x}{2} + 10x.$

55) $\frac{7+x}{5} - \frac{10+x}{13} = \frac{4+x}{7}.$ 56) $\frac{z-1}{2} - \frac{3z}{5} = \frac{6z-8}{9}.$

57) $\frac{7x-13}{6} + \frac{7-3x}{8} = \frac{5x+11}{12} - 2.$

58) $\frac{4x-2}{3} - \frac{2+3x}{5} = 7 - \frac{3-4x}{2}.$

59) $\frac{x+2}{3} - \frac{4x+5}{6} + \frac{7x-8}{9} = x + 2.$

60) $\frac{8+x}{9} - \frac{x-6}{6} - 3 = 10 - \frac{8+4x}{5}.$

61) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = x + 17.$

62) $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} = 2x - 4.$

63) $x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} = \frac{7x}{8} + 49.$

64) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} + \frac{3x}{4} + \frac{4x}{5} = \frac{5x}{6} + 678.$

65) $\frac{x}{2} + \frac{x+1}{3} + \frac{x-2}{4} = \frac{2x}{11} - \frac{2-3x}{4} - 3.$

66) $(x-1)(x+1) = x^2 + x + 1.$

67) $3x + \frac{7x-9}{2} = 28 - \frac{2x-7}{3} + \frac{2x-3}{7}.$

68) $\frac{5x-11}{8} + \frac{7x-5}{6} - \frac{7-5x}{12} = \frac{7x-14}{3} + 2.$

69) $8x - 2x(1-3x) = (3x-2)(2x-3) + 19.$

70) $(y+2)(3-y) = (4-y)(5+y) - 22.$

71) $20 + 5[5 - (8-2x)] = 7x + 2(3x-5).$

72) $7(x+5) - 3[x - 4(3-x)] - 1 = 5[3 + (2x-7)] + 60.$

II. Auflösung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

§. 87. Zur Bestimmung von zwei oder mehreren Unbekannten sind eben so viele von einander völlig unabhängige Gleichungen erforderlich.

Um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, muß aus denselben eine Unbekannte eliminiert, d. i. eine neue Gleichung gebildet werden, welche diese Unbekannte nicht enthält. Diese Gleichung hat dann nur eine einzige Unbekannte, welche daraus bestimmt, und durch deren Substitution in eine der gegebenen Gleichungen auch der Werth der andern Unbekannten gefunden wird.

Für das Eliminieren einer unbekannten Größe hat man vorzugsweise drei Methoden.

1. Man bestimmt den Werth derselben Unbekannten aus beiden Gleichungen, und setzt die erhaltenen Ausdrücke gleich. (Comparationsmethode). Z. B.

$$2x + 5y = 26 \ldots 1) \text{ und } 3x - 2y = 1 \ldots 2)$$

Aus 1) folgt $x = \frac{26-5y}{2}$,

aus 2) folgt $x = \frac{1+2y}{3}$;

daher $\frac{26-5y}{2} = \frac{1+2y}{3}$,

woraus man $y = 4$ erhält. Wird dieser Werth in 1) substituiert, so hat man

$$2x + 5 \cdot 4 = 26,$$

woraus $x = 3$ folgt.

2. Man sucht den Werth einer Unbekannten aus einer Gleichung und substituiert denselben in der andern Gleichung. (Substitutionsmethode.) Z. B.

$$2.\ x + 2y = 8 \ldots 1) \text{ und } 6x - 5y = 14 \ldots 2)$$

Aus 1) folgt $x = 8 - 2y$.

Wird dieser Werth in 2) substituiert, so erhält man
$$6(8-2y)-5y=14,$$
woraus $y=2$ hervorgeht. Durch Substitution dieses Werthes in 1) bekommt man sodann $x=4$.

3. Man macht in beiden Gleichungen die Coefficienten der zu eliminierenden Unbekannten dadurch einander gleich, daß man diese Gleichungen mit entsprechenden Factoren multipliciert, und addiert oder subtrahiert, sodann die neuen Gleichungen, je nachdem diese Coefficienten ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. (Methode der gleichen Coefficienten.) Z. B.

3) $4x-3y=9\ \ldots\ 1)$ und $6x+5y=61\ \ldots\ 2)$

Multipliciert man die erste Gleichung mit 3, und die zweite mit 2, so erhält man
$$12x-\ \ 9y=27,$$
$$12x+10y=122.$$

Wird nun die erste Gleichung von der zweiten subtrahiert, so hat man
$$19y=95,$$
woraus $y=5$ folgt. Wenn man diesen Werth in der Gleichung 1) substituiert, so findet man daraus $x=6$.

Nach denselben Methoden können auch Gleichungen mit drei oder mehreren Unbekannten aufgelöset werden.

Es seien z. B. die Gleichungen gegeben
$$4)\ \left\{\begin{array}{l} 2x-3y+4z=4\ \ldots\ 1) \\ 3x+\ y-5z=6\ \ldots\ 2) \\ 4x-2y+3z=11\ \ldots\ 3) \end{array}\right.$$

Nach der Comparationsmethode erhält man
$$x=\frac{4+3y-4z}{2}\ \ldots\ 4)$$
$$x=\frac{6-y+5z}{3}\ \ldots\ 5)$$
$$x=\frac{11+2y-3z}{4}\ \ldots\ 6)$$

Aus 4) und 5) folgt $\frac{4+3y-4z}{2}=\frac{6-y+5z}{3}\ \ldots\ 7)$

aus 4) und 6) folgt $\frac{4+3y-4z}{2}=\frac{11+2y-3z}{4}\ \ldots\ 8)$

Ferner erhält man aus 7) $y=\frac{22z}{11}\ \ldots\ 9)$

und aus 8) $y=\frac{6+10z}{8}\ \ldots\ 10)$

daher $\frac{22z}{11}=\frac{6+10z}{8}$, woraus $z=1$ folgt.

Wird dieser Werth in 9) substituiert, so ergibt sich $y=2$; und wenn man endlich die beiden Werthe von z und y in 4) substituiert, so erhält man $x=3$.

Man nehme hier die Elimination auch nach der Substitutionsmethode und nach der Methode der gleichen Coefficienten vor.

Es sollen noch folgende Gleichungen aufgelöset werden:

5) $7x - 2y = 12$ und $3x + 2y = 8$.
6) $4x + 5y = 22$ und $5x - 4y = 7$.
7) $5x + y = 44$ und $x + 3y = 34$.
8) $7x + 3y = 56$ und $12x - 7y = 11$.
9) $7x + 5y = 41$ und $12x + 7y = 64$.
10) $5x - 3y = 33$ und $2x + 3y = 51$.
11) $15x - 8y = 2$ und $5x + 2y = 23$.
12) $13x - 4y = 19$ und $9x - 5y = 2$.
13) $3x - 4y = 10$ und $2x + 5y = 22$.
14) $x + y = 20$ und $\frac{x}{3} = y$.
15) $8x + 5y = 67$ und $5x + 8y = 76$.
16) $51x - 7y = 44$ und $93x - 13y = 48$.
17) $51x = 45 + 19y$ und $15x = 2(21 - 2x)$.
18) $27x + 16y = 452$ und $18x = 88 + 16y$.
19) $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 8$ und $3x - 33 = y$.
20) $x - y = 12$ und $\frac{x}{9} - \frac{y}{8} = 1$.
21) $\frac{x+y}{2} - \frac{x+y}{3} = 4$ und $\frac{x-y}{2} - \frac{x-y}{3} = 1$.

22) $\begin{cases} x + y = 30, \\ 3y - 2z = 25, \\ x - 2z = 3. \end{cases}$ 23) $\begin{cases} 4x + 3y - 5z = 13, \\ 3x - 4y + z = 2, \\ -2x + 7y + 3z = 11. \end{cases}$

24) $\begin{cases} 7x - 2y + 7z = 60, \\ 3x + 4y - 2z = 20, \\ 5x - 8y + 3z + 2 = 0. \end{cases}$

25) $\begin{cases} 4x - 2y + 3z = 8, \\ 7x + 8y - z = 59, \\ 10x + 3y + 2z = 49. \end{cases}$ 26) $\begin{cases} x - 3y + z = 2, \\ 20x - y - 2z = 7, \\ 7x + 9y - 4z = 3. \end{cases}$

27) $\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{y+z}{3} = 5, \\ \frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{3} = 6, \\ 2x + 2y - 5z = 6. \end{cases}$

28) $\begin{cases} x + y + z - u = 8, \\ x - y + z + u = 12, \\ 2x + 3y + 4z + 5u = 82, \\ 12x - 5y - 2z + 2u = 15. \end{cases}$

III. Anwendung der Gleichungen auf die Auflösung von Aufgaben.

§. 88. In jeder Aufgabe werden gewisse Bedingungen angegeben, denen die zu suchenden Zahlen Genüge leisten sollen. Das erste Geschäft bei der algebraischen Auflösung einer Aufgabe besteht darin, daß man die gegebenen Bedingungen in die algebraische Zeichensprache überträgt, was man das Ansetzen der Gleichungen nennt. Dafür gibt es keine allgemeinen Regeln; Scharfsinn und eine durch Lösung vieler Aufgaben erworbene Uebung werden in jedem einzelnen Falle angeben, wie die zu bestimmenden Unbekannten nach den Bedingungen der Aufgabe zu behandeln und in Gleichungen zu bringen sind.

Sind die Gleichungen angesetzt, so gibt die Auflösung derselben die gesuchten Werthe für die Unbekannten.

Es ist Anfängern sehr anzurathen, daß sie die verschiedenen Aufgaben, auch ohne Ansatz einer Gleichung, durch bloße Verstandesschlüsse im Kopfe aufzulösen versuchen. Bei den ersteren Aufgaben erscheint in dieser Anleitung nebst der algebraischen Lösung auch jene im Kopfe angegeben, bei den weiteren Aufgaben wird diese dem eigenen Nachdenken der Schüler überlassen.

Um sich von der Richtigkeit der Auflösung einer Aufgabe zu überzeugen, untersuche man, ob durch den gefundenen Werth der Unbekannten auch wirklich die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden.

§. 89. Aufgaben.

1) Man suche eine Zahl, deren 5faches und 7faches zusammen 96 beträgt.

Im Kopfe. Das 5fache und 7fache macht das 12fache; 96 ist also das 12fache von der gesuchten Zahl, oder diese Zahl ist der 12te Theil von 96, mithin 8.

Algebraisch. Es sei x die gesuchte Zahl; ihr 5faches ist 5x, das 7fache 7x. Nach der Bedingung der Aufgabe muß also

$$5x + 7x = 96$$

sein; löst man diese Gleichung auf, so ergibt sich $x = 8$.

Probe. $5 . 8 + 7 . 8 = 40 + 56 = 96$.

2) Welches ist die Zahl, deren 5faches um 42 vermehrt ihr 8faches gibt?

Im Kopfe. Um aus dem 5fachen das 8fache zu erhalten, muß man das 3fache dazu setzen. Wenn man nun aus dem 5fachen auch durch Hinzusetzung von 42 das 8fache bekommt, so muß 42 gleich dem 3fachen der Zahl, und daher die gesuchte Zahl der dritte Theil von 42, d. i. 14 sein.

Algebraisch. Ist x die gesuchte Zahl, so ist 5x ihr 5faches, 8x ihr 8faches. Nun muß ersteres um 42 vermehrt werden, um das letztere zu geben, somit hat man $5x + 42 = 8x$, und daraus $x = 14$.

Probe. $5 \times 14 + 42 = 70 + 42 = 112$.
$8 \times 14 = 112$.

3) Welche Zahl ist es, deren 9faches um 72 vermindert ihr 5faches gibt?

Im Kopfe. Um aus dem 9fachen das 5fache zu erhalten, muß man das 4fache abziehen. Soll also das 9fache durch die Verminderung um 72 in das 5fache übergehen, so muß 72 das 4fache der gesuchten Zahl vorstellen, die Zahl selbst also der 4te Theil von 72, somit 18 sein.

Algebraisch. Nennt man x die verlangte Zahl, so ist 9x ihr 9faches, 5x ihr 5faches, und es muß nach der Bedingung der Aufgabe

$$9x - 72 = 5x$$

sein, woraus $x = 18$ folgt.

Probe. $9 \times 18 - 72 = 162 - 72 = 90,$
$5 \times 18 = 90.$

4) Die Hälfte und der dritte Theil einer Zahl betragen 25; wie groß ist die Zahl?

Im Kopfe. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ sind $\frac{5}{6}$; wenn nun $\frac{5}{6}$ von der gesuchten Zahl 25 beträgt; so beträgt $\frac{1}{6}$ nur den fünften Theil von 25, also 5; die Zahl selbst ist daher 6mal 5, d. i. 30.

Algebraisch. Heißt x die gesuchte Zahl, so ist ihre Hälfte $\frac{x}{2}$, und der dritte Theil $\frac{x}{3}$, daher nach der Bedingung der Aufgabe

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 25,$$

folglich $x = 30$.

Probe. $\frac{30}{2} + \frac{30}{3} = 15 + 10 = 25.$

5) Das 5fache einer Zahl ist um 86 größer als ihre Hälfte und ihr Fünftel zusammengenommen; welche Zahl ist es?

Im Kopfe. $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ sind $\frac{7}{10}$; das 5fache der gesuchten Zahl soll also um 86 größer sein als 7mal der 10te Theil, somit das 50fache um 860 größer als das 7fache; das 50fache ist aber um das 43fache größer als das 7fache, es muß also 860 das 43fache der gesuchten Zahl, also diese der 43ste Theil von 860, mithin 20 sein.

Algebraisch. Wenn x die gesuchte Zahl vorstellt, so ist 5x ihr 5faches, $\frac{x}{2}$ ihre Hälfte und $\frac{x}{5}$ ihr Fünftel, und man hat

$$5x - 86 = \frac{x}{2} + \frac{x}{5},$$

woraus $x = 20$ folgt.

Probe. $5 \times 20 = 100, \quad 100 - 14 = 86;$

$$\frac{20}{2} \times \frac{20}{5} = 10 + 4 = 14.$$

6) Jemand wird gefragt, wie viel Geld er bei sich hat. Er antwortet: wenn ich noch halb so viel hätte, als ich jetzt habe, weniger 2 fl., so hätte ich 16 fl. Wie viel Gulden hat er bei sich?

Im Kopfe. Eine Zahl um ihre Hälfte vermehrt, gibt 3mal die Hälfte, und dieses um 2 vermindert muß 16, also 3mal die Hälfte 18 geben; daher ist die Hälfte der Zahl der dritte Theil von 18, d. i. 6, und somit die Zahl selbst 12.

Algebraisch. Es sei x die Anzahl der Gulden, die der Gefragte bei sich hat, so ist $\frac{x}{2}$ die Hälfte davon, und es muß nach der Bedingung der Aufgabe

$$x + \frac{x}{2} - 2 = 16$$

sein, woraus $x = 12$ hervorgeht.

Probe. $12 + \frac{12}{2} - 2 = 12 + 6 - 2 = 16.$

7) Ein Reisender wird gefragt, wie viel Meilen er zurückgelegt hat. Er gibt zur Antwort: wenn ich 48 Meilen mehr zurückgelegt

hätte, so würde ich 3mal so weit gekommen sein als jetzt. Wie viel Meilen hat er zurückgelegt?

Es sei x die Anzahl der zurückgelegten Meilen. Hätte der Reisende 48 Meilen mehr zurückgelegt, so würde er $x + 48$ Meilen gemacht haben, und da er in diesem Falle 3mal so weit, also $3x$ Meilen weit gekommen wäre, so ist $x + 48 = 3x$, daher $x = 24$.

Probe. $24 + 48 = 72$; $3 \times 24 = 72$.

8) Ein Kaufmann kaufte ein Stück Tuch, die Elle zu $3\frac{3}{4}$ fl.; hierauf verkaufte er dasselbe zu $4\frac{1}{3}$ fl. die Elle. Wenn er nun dabei 21 fl. gewonnen hat, wie viel Ellen enthielt das Stück?

Bei dieser Aufgabe wird als stillschweigende Bedingung vorausgesetzt, daß der Gewinn gleich ist der Verkaufssumme weniger der Einkaufssumme.

Es sei x die Anzahl der Ellen, so ist

die Verkaufssumme für x Ellen $= 4\frac{1}{3} \cdot x = \frac{13x}{3}$,

die Einkaufssumme für x Ellen $= 3\frac{3}{4} \cdot x = \frac{15x}{4}$; daher

$$\frac{13x}{3} - \frac{15x}{4} = 21,$$

woraus $x = 36$ folgt.

Probe. 36 Ellen zu $4\frac{1}{3}$ fl. geben 156 fl. beim Verkaufe,
36 „ zu $3\frac{3}{4}$ fl. „ 135 fl. „ Einkaufe,
21 fl. Gewinn.

9) Jemand wurde um sein Alter gefragt und sagte: Mein Alter nach 10 Jahren wird doppelt so groß sein, als mein Alter vor 4 Jahren war. Wie alt war er?

Setzt man die Anzahl seiner Jahre $= x$, so ist

sein Alter nach 10 Jahren $= x + 10$,

sein Alter vor 4 Jahren $= x - 4$.

Da nun nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl doppelt so groß sein soll als die zweite, so wird, damit man eine Gleichung bekomme, die zweite Zahl mit 2 multipliciert; daher ist

$$x + 10 = 2(x - 4),$$

woraus $x = 18$ folgt.

Probe. Alter nach 10 Jahren = 28 Jahre,
Alter vor 4 Jahren = 14 Jahre,
und wirklich ist $28 = 2 \times 14$.

10) Ein Vater ist 32, sein Sohn 2 Jahre alt; nach wie viel Jahren wird der Vater gerade 3mal so alt sein als sein Sohn?

Nach x Jahren. Nach dieser Zeit wird der Vater $32 + x$, der Sohn $2 + x$ Jahre alt, und da nach der Bedingung der Aufgabe die erste Zahl 3mal so groß ist als die zweite, so muß man, damit die Gleichheit hergestellt werde, die zweite Zahl mit 3 multiplicieren; man hat also die Gleichung

$$32 + x = 3(2 + x),$$

welcher der Werth $x = 13$ Genüge leistet.

Probe. Nach 13 Jahren wird der Vater 45, der Sohn 15 Jahre alt, daher der Vater wirklich 3mal so alt als der Sohn.

11) Ein Menschenfreund wollte eine Summe, die er eben bei sich hatte, unter 10 Arme vertheilen. Gibt er jedem 20 kr., so hat er eben so viel zu wenig, als er zu viel hat, wenn er jedem nur 18 kr. geben will. Wie viel Kreuzer hatte er bei sich?

Es sei x die Anzahl der Kreuzer. Will er jedem Armen 20 kr. geben, so hat er $200 - x$ Kreuzer zu wenig; will er jedem 18 kr geben, so hat er $x - 180$ Kreuzer zu viel. Da nun diese beiden Zahlen gleich sein müssen, so ist

$$200 - x = x - 180,$$

woraus $x = 190$ folgt.

12) Ein Herr versprach seinem Bedienten jährlich ein Kleid und 60 Gulden. Nach 2 Monaten wird der Bediente entlassen und erhält das Kleid. Wie hoch wurde ihm dieses angerechnet?

Es sei der Werth des Kleides $= x$ fl. Der ganzjährige Lohn beträgt also $x + 60$ Gulden, folglich der Lohn für 2 Monate $\frac{x + 60}{6}$ fl.; da nun der Bediente für diese Zeit das Kleid, also x fl., im Werth bekommen hat, so muß

$$x = \frac{x + 60}{6},$$

daher $x = 12$ sein.

13) Ein Courier geht nach A und macht täglich 12 Meilen; einen Tag später wird ihm ein zweiter Courier nachgeschickt; wie viel Meilen muß dieser täglich zurücklegen, damit er den ersten Courier in 4 Tagen einhole?

Bedeutet x die Anzahl der Meilen, welche der zweite Courier täglich zurücklegen muß, so werden von ihm in 4 Tagen $4x$ Meilen gemacht; der erste Courier, welcher einen Tag länger auf dem Wege ist, wird in diesen Tagen $12 \times 5 = 60$ Meilen machen. Da nun die von beiden Courieren zurückgelegten Wege, wenn sie zusammengekommen, gleich sein müssen, so hat man $4x = 60$, somit $x = 15$.

§. 90 Aufgaben, in denen nach mehreren Unbekannten gefragt wird, kann man entweder mit Hilfe so vieler Gleichungen, als Unbekannte gesucht werden, oder auch durch Zurückführung auf eine Gleichung mit einer einzigen Unbekannten auflösen, wie dies aus den folgenden Beispielen ersichtlich ist.

14) Ich denke mir zwei Zahlen, von denen die erste um 3 kleiner ist als die zweite; multipliciere ich die erste mit 4 und ziehe vom Producte 18 ab, so erhalte ich die zweite. Welches sind die zwei Zahlen?

a) Mittelst zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es seien x und y die beiden Zahlen. Da die erste um 3 kleiner ist als die zweite, so hat man die Gleichung

$$x = y - 3.$$

Nach der zweiten Bedingung der Aufgabe muß das 4fache der ersten Zahl um 18 vermindert die zweite Zahl geben, also di- Gleichung

$$4x - 18 = y$$

Statt finden. Durch die Auflösung dieser zwei Gleichungen erhält man nun $x = 7$ und $y = 10$.

b) Mittelst einer einzigen Gleichung mit einer Unbekannten Nennt man x die erste Zahl, so ist x + 3 die zweite. Man hat daher nach den Bedingungen der Aufgabe

$$4x - 18 = x + 3,$$

woraus $x = 7$, und daher $x + 3 = 10$ hervorgeht.

Probe. Die zweite Zahl 10 ist wirklich um 3 größer als die erste 7; ferner gibt das 4fache von 7 weniger 18 zur Differenz 10, d. i. die zweite Zahl.

15) Man theile 50 in zwei Theile, so daß der eine Theil um 6 kleiner ist als der andere.

a) Wenn x und y die zwei gesuchten Theile vorstellen, so ist erstlich

$$x + y = 50.$$

Da ferner der erste Theil um 6 vermehrt werden muß, um den zweiten zu erhalten, so hat man auch die Gleichung

$$x + 6 = y.$$

Aus diesen Gleichungen folgt nun $x = 22$ und $y = 28$.

b) Heißt der kleinere Theil x, so ist 50 — x der größere, und man muß nach den Bedingungen der Aufgabe zu dem kleineren Theile x noch 6 dazu addieren, um den größeren 50 — x zu erhalten; es ist daher $x + 6 = 50 - x$, woraus $x = 22$ und $50 - x = 28$ hervorgeht.

16) Ein Vater ist gegenwärtig 2mal so alt als sein Sohn; vor 15 Jahren war er 5mal so alt als der Sohn. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Der Sohn sei x Jahre alt, so ist das Alter des Vaters 2x Jahre; vor 15 Jahren war also der Vater 2x — 15, der Sohn x — 15 Jahre alt. Man hat daher die Gleichung

$$2x - 15 = 5(x - 15),$$

woraus man $x = 20$ und $2x = 40$ erhält. Der Vater ist also 40, der Sohn 20 Jahre alt.

Man löse diese Aufgabe auch mit Hilfe zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten auf.

17) Ein Knabe sagte: ich und mein Vater haben zusammen 60 Altersjahre; ich habe aber nur den 4ten Theil von dem Alter meines Vaters. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

Das Alter des Vaters sei x, also jenes des Sohnes $\frac{x}{4}$ Jahre, so hat man

$$x + \frac{x}{4} = 60,$$

woraus $x = 48$ und $\frac{x}{4} = 12$ hervorgeht. Der Vater ist also 48, der Sohn 12 Jahre alt.

Wie wird diese Aufgabe mittelst zweier Gleichungen aufgelöst?

18) Unter drei Knaben werden 100 Zehner so vertheilt, daß der zweite doppelt so viel als der erste, und der dritte um 10 Zehner mehr als die Hälfte dessen bekommt, was der erste und zweite zusammen erhalten. Wie viel Zehner bekommt jeder der drei Knaben?

a) Mittelst dreier Gleichungen. Es seien x, y, z die Zahlen der Zehner, welche folgeweise A, B und C bekommen, so ist erstlich

$$x + y + z = 100.$$

Da B doppelt so viel als A bekommt, so ist ferner

$$y = 2x.$$

Da endlich C um 10 Zehner mehr als die Hälfte dessen bekommt, was A und B zusammen erhalten, so hat man auch

$$z = \frac{x + y}{2} + 10.$$

Durch Auflösung dieser drei Gleichungen erhält man nun $x = 20$, $y = 40$ und $z = 40$.

b) Mittelst einer einzigen Gleichung.

Es sei x die Anzahl Zehner, welche A bekommt,
so ist $2x$ " " " B "
$\frac{x + 2x}{2} + 10$ " " " C "

daher

$$x + 2x + \frac{3x}{2} + 10 = 100,$$

welche Gleichung $x = 20$ gibt.

A bekommt also $x = 20$ Zehner,
B " $2x = 40$ "
C " $\frac{3x}{2} + 10 = 40$ "

19) Ein Knabe gibt seinem ältesten Bruder die Hälfte seiner Nüsse weniger 8, dem zweiten die Hälfte des Restes weniger 8, dem dritten wieder 8 weniger als die Hälfte des jetzigen Restes, und so auch dem vierten 8 weniger als die Hälfte des neuen Restes; die noch übrigen 20 Stücke behält er selbst. Wie viel Nüsse hatte er anfänglich und wie viele gab er jedem Bruder?

Heißt x die anfängliche Zahl der Nüsse, so gab er dem ersten Bruder $\frac{x}{2} - 8$ und es blieben noch $x - \frac{x}{2} + 8 = \frac{x}{2} + 8$; der zweite Bruder bekam $\frac{x}{4} + 4 - 8 = \frac{x}{4} - 4$ und es blieben noch $\frac{x}{2} + 8 - \left(\frac{x}{4} - 4\right) = \frac{x}{4} + 12$; der dritte Bruder bekam $\frac{x}{8} + 6 - 8 = \frac{x}{8} - 2$, und es blieben noch $\frac{x}{4} + 12 - \left(\frac{x}{8} - 2\right) = \frac{x}{8} + 14$; davon erhielt der vierte Bruder $\frac{x}{16} + 7 - 8 = \frac{x}{16} - 1$, so daß noch

$$\frac{8}{x} + 14 - \left(\frac{x}{16} - 1\right) = \frac{x}{16} + 15$$

übrig bleiben. Der Rest soll aber 20 betragen; mithin ist

$$\frac{x}{16} + 15 = 20,$$

woraus $x = 80$ folgt.

Der Knabe hatte also anfänglich 80 Nüsse, und gab

dem ersten Bruder $\frac{x}{2} - 8 = 32$,

„ zweiten „ $\frac{x}{4} - 4 = 16$,

„ dritten „ $\frac{x}{8} - 2 = 8$,

„ vierten „ $\frac{x}{16} - 1 = 4$.

§. 91. Man löse noch folgende Aufgaben:

20) Wenn ich eine gewisse Zahl mit 3 multipliciere, so erhalte ich dasselbe, als wenn ich 24 zu ihr addiere; welches ist die Zahl?

21) Man suche eine Zahl von der Beschaffenheit, daß, wenn man sie durch 4 dividiert, eben so viel herauskommt, als wenn man von ihr 32 abzieht.

22) Welche Zahl ist um 23 größer als die Summe aus ihrem vierten, fünften und sechsten Theile?

23) Welche Zahl gibt mit 8 multipliciert dasselbe, als wenn man zum 3fachen derselben 25 addiert?

24) Von welcher Zahl ist das 4fache eben so groß als das 6fache der um 8 verminderten Zahl?

25) Wenn ich zu einer gewissen Zahl 8 addiere und diese Summe durch 5 dividiere, so erhalte ich denselben Quotienten, als wenn ich von der Zahl 4 subtrahiere und die Differenz durch 3 dividiere; welches ist die Zahl?

26) Ich denke mir eine Zahl. Wenn ich dieselbe mit 3 multipliciere, 8 dazu addiere, die Summe durch 8 dividiere und von dem Quotienten 4 abziehe, so erhalte ich 0. Welche Zahl habe ich mir gedacht?

27) Wenn man eine gewisse Zahl mit 7 multipliciert, vom Producte 5 subtrahiert, den Rest durch 13 dividiert und zum Quotienten 6 addiert, so erhält man diese Zahl selbst. Welche Zahl ist es?

28) Welche Zahl muß zum Zähler und Nenner des Bruches $\frac{17}{20}$ addiert werden, damit man den Bruch $\frac{3}{4}$ erhalte?

29) Welche Zahl muß man zu 32 addieren und von 32 subtrahieren, damit sich die Summe zum Unterschiede wie 11 : 5 verhalte?

30) Welches ist die Zahl, deren 5faches eben so viel über 20, als ihr 8faches über 44 ist?

31) Vermehrt man den Zähler des Bruches $\frac{1}{25}$ um eine gewisse Zahl und vermindert den Nenner um das Dreifache derselben Zahl, so erhält man den Bruch $\frac{3}{4}$. Welches ist jene Zahl?

32) Welches ist die Zahl, von der $\frac{3}{4}$ um 2 kleiner sind, als $\frac{2}{5}$ der doppelten Zahl?

33) Man theile die Zahl 100 so in zwei Theile, daß der eine den andern um 35 übersteigt.

34) Die Zahl 85 ist in zwei Theile zu theilen, die sich wie 8 : 9 verhalten.

35) Der gemeinschaftliche Gewinn zweier Geschäftsfreunde beträgt 505 fl.; derselbe soll so getheilt werden, daß A um 25 fl. weniger bekomme als B; wie viel erhält jeder?

36) Ein Lehrer gab auf die Frage, wie viel Schüler er habe, folgende Antwort: die Hälfte meiner Schüler beträgt 16 mehr als der sechste und neunte Theil derselben. Wie viele Schüler hatte er?

37) Jemand war vor 8 Jahren 4mal so alt als der 5te Theil seines gegenwärtigen Alters beträgt; wie alt ist er jetzt?

38) Jemand wurde nach seinem Alter gefragt. Er antwortete: nach 12 Jahren werde ich 4mal so alt sein, als ich vor 12 Jahren war. Wie alt ist er?

39) Ein Vater sagt: ich bin jetzt 40 Jahre alt, mein älterer Sohn 16, mein jüngerer 3; nach wie vielen Jahren werden meine Söhne zusammen so viele Lebensjahre zählen als ich?

40) Jemand ist 60 Jahre und sein Sohn 24 Jahre alt; a) vor wie viel Jahren war der Vater 4mal so alt als der Sohn? b) nach wie viel Jahren wird er nur noch doppelt so alt als der Sohn sein?

41) Um eine Uhr zu kaufen hat A nur $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{7}$ des geforderten Preises bei sich; beide zusammen haben $16\frac{1}{2}$ Gulden. Wie groß ist der Preis der Uhr?

42) Ein Bauernmädchen wurde nach der Anzahl Eier gefragt, die sie im Korbe trug. Drei Viertel davon, erwiederte sie, betragen 5 mehr als fünf Achtel davon machen. Wie viel Eier waren im Korbe?

43) Eine Staatsschuld, wovon $\frac{1}{3}$ mit 5% und $\frac{2}{3}$ mit $4\frac{1}{2}$% verzinslich sind, erfordert jährlich $1\frac{2}{5}$ Millionen Gulden; wie viel beträgt die ganze Staatsschuld?

44) Zwei Couriere gehen von A nach B ab; der erste legt täglich 10 Meilen, der zweite 15 Meilen zurück. Wenn nun der zweite um 4 Tage später von A abgegangen ist als der erste, in wie viel Tagen wird er den ersten einholen?

45) Von B gegen C marschiert ein feindliches Heer und macht täglich 4 Meilen; von A aus will man demselben nachsetzen, um es in 5 Tagen einzuholen; wie viel Meilen müssen täglich zurückgelegt werden, wenn die Entfernung zwischen A und B 10 Meilen beträgt?

46) Einem Boten, der von A aus vor 6 Tagen abging und täglich 6 Meilen macht, wird von B aus, welchen Ort er berührte, ein zweiter Bote nachgesendet, welcher täglich 10 Meilen macht; in wie viel Tagen wird er den ersten einholen, wenn die Entfernung zwischen A und B 11 Meilen beträgt?

47) Hätte A 120 fl. mehr, so würde er gerade so viel über 100 fl. besitzen, als ihm jetzt noch daran fehlen. Wie viel fl. hat er?

48) Wenn man von einer Summe die Hälfte wegnimmt, von dem Reste wieder die Hälfte und von dem neuen Reste nochmals die Hälfte, so bleiben 37 fl. übrig. Wie groß war die anfängliche Summe?

49) Von 62 Ellen Tuch wird ein Theil verkauft und dabei an jeder Elle $\frac{2}{5}$ fl. gewonnen; beim Verkaufe des Restes werden an jeder Elle $\frac{3}{10}$ fl. verloren. Wenn nun der reine Gewinn 15 fl. be-

trägt, wie viele Ellen wurden mit Gewinn und wie viele mit Verlust verkauft?

50) Welche zwei Zahlen geben 81 zur Summe und 35 zur Differenz?

51) Die halbe Summe zweier Zahlen heißt 90 und die doppelte Differenz 100; welches sind die beiden Zahlen?

52) Zwei Zahlen, deren Differenz 12 ist, sind so beschaffen, daß das 3fache der ersten gleich ist dem 5fachen der zweiten; welches sind diese Zahlen?

53) Die Zahl 104 soll so in zwei Theile getheilt werden, daß der Unterschied der beiden Theile $\frac{2}{3}$ von dem Unterschiede zwischen der ganzen Zahl und dem größeren Theile betrage.

54) Mitten im Mai ist der Tag an einem Orte um 6 Stunden 15 Minuten länger als die Nacht; wie lang ist dann der Tag und wie lang die Nacht?

55) A hat in zwei Rollen zusammen 206 fl., in der ersten 44 fl. mehr als in der zweiten; wie viel in jeder?

56) Die Zahl 32 soll in drei Theile so getheilt werden, daß der erste um 5, der zweite um 3 größer sei als der dritte; welches sind diese Theile?

57) Die Zahl 48 in drei Theile zu theilen, welche sich wie 4 : 5 : 7 verhalten.

58) Drei Personen sollen 360 fl. so unter sich theilen, daß A doppelt so viel als B, und C dreimal so viel als A erhält. Wie viel bekommt jede Person?

59) Drei Personen theilen eine Summe von 350 fl. in der Art, daß B 18 fl. mehr als C und A 14 fl. mehr als B erhält; wie viel bekommt jeder?

60) Zwei Brüder zählen gegenwärtig zusammen 47 Jahre. Vor 10 Jahren war der ältere Bruder gerade doppelt so alt als der jüngere. Wie alt ist jeder?

61) Ein Vater ist jetzt dreimal so alt als sein Sohn, nach 12 Jahren wird er nur doppelt so alt als sein Sohn sein. Wie alt ist der Vater, wie alt der Sohn?

62) Man soll die Zahl 76 in zwei Theile so theilen, daß, wenn der größere durch 11 und der kleinere durch 7 dividiert wird, die Quotienten zusammen 8 ausmachen. Welche Theile sind es?

63) Zwei Personen besitzen zusammen 3500 fl.; gäbe B dem A 150 fl. von seinem Vermögen, so hätten beide gleichviel. Wie viel besitzt jeder?

64) Man soll drei Zahlen finden, die so beschaffen sind, daß die erste und zweite 38, die erste und dritte 43, die zweite und dritte 51 zur Summe geben.

65) Es sollen 140 fl. unter 5 Personen so vertheilt werden, daß jede folgende 4 fl. weniger bekommt. Wie viel erhält jede Person?

66) Auf einem Tische lag eine bestimmte Summe Geldes. A sagt: ich habe 2mal so viel Geld; B, ich habe 3mal so viel Geld; C, ich habe die Hälfte von dem, was A und B zusammen haben. Wenn nun alle zusammen 240 fl. hatten, wie viel Geld lag auf dem Tische und wie viel besaß jeder?

67) 1200 fl. sollen unter drei Personen vertheilt werden, so daß die zweite dreimal so viel als die erste weniger 20 fl., die dritte 4mal so viel als die zweite und noch 20 fl. erhält. Wie viel bekommt jede?

68) Von 3700 fl. bekommt A 2mal so viel als B, B 3mal so viel als C, und C 400 fl. weniger als D; wie viel erhält jede Person?

69) Von zwei Spielern hatte A 4mal so viel Geld als B. Nachdem aber A an B 5 fl. verloren hat, hatte A nur noch 3mal so viel als B. Wie viel Geld hatte jeder am Anfange des Spieles?

70) In einer Gesellschaft befinden sich 88 Personen, Männer und Frauen, und es verhält sich die Anzahl der Männer zu jener der Frauen wie 5 : 6. Wie viel Männer und wie viel Frauen zählt die Gesellschaft?

71) In einer Gesellschaft waren 3mal so viel Herren als Damen; nachdem aber später 3 Herren mit 4 Damen dazu kamen, waren nur 2mal so viel Herren als Damen. Wie viel Herren und Damen waren Anfangs da?

72) Jemand hat 2 goldene Dosen, die eine ist $\frac{5}{8}$ von der anderen werth und kostet deßhalb um 14 fl. weniger. Wie theuer ist jede Dose?

73) Ich habe mir 2 Zahlen gedacht, welche um 1 verschieden sind. Dividiere ich die größere durch 4 und die kleinere durch 5, so sind die Quotienten ebenfalls um 1 verschieden. Welches sind die zwei Zahlen?

74) Ich habe 2 Zahlen, deren Differenz 10 ist; ziehe ich die kleinere von 105, die größere von 135 ab, so verhalten sich die Reste wie 7 : 9. Welches sind die Zahlen?

75) Zähler und Nenner eines Bruches geben zusammen 8; vermehrt man den ersteren um 1, und vermindert den letzteren um 1, so erhält man den umgekehrten Bruch; wie heißt der gegebene Bruch?

76) Ein Spieler verliert im ersten Spiele 6 fl. weniger als $\frac{1}{4}$ seines Geldes, im zweiten Spiele 2 fl. mehr als $\frac{1}{6}$ des Restes, im dritten Spiele 8 fl. mehr als $\frac{1}{7}$ dessen, was ihm nach dem zweiten übrig geblieben war, und hat nun 28 fl.; wie viel hatte er Anfangs?

77) Von zwei Personen besitzt jede eine Summe Geldes. Gibt A an B 4 fl. ab, so haben beide gleich viel; gibt aber B an A 5 fl. ab, so hat A doppelt so viel als B. Wie viel Geld hat A, wie viel B?

78) Hier dies Grabmal deckt Diophantus sterbliche Hülle,
Und in des Trefflichen Kunst zeigt es sein Alter Dir an.
Knabe zu sein gewährt ihm der Schöpfer ein Sechstel des Lebens,
Und ein Zwölftel der Zeit ward er ein Jüngling genannt.
Noch ein Siebentel schwand, da fand er des Lebens Gefährtin,
Und fünf Jahre darauf ward ihm ein liebliches Kind.
Halb nur hatte der Sohn des Vaters Alter vollendet,
Als ihn plötzlich der Tod seinem Erzeuger entriß.
Noch vier Jahre betrauert er ihn im schmerzlichen Kummer,
Und nun sage das Ziel, welches er selber erreicht.

6 m. 2 m. 86 Fr° 7' d. 12 St.
9 " x 62 Fr° 5' " 10 "

x : 2 = 6 : 9

86 : 86

5 : 8

12 : 10

$x = \frac{8 \times 31}{7 \times}$ 31·43 = 0·