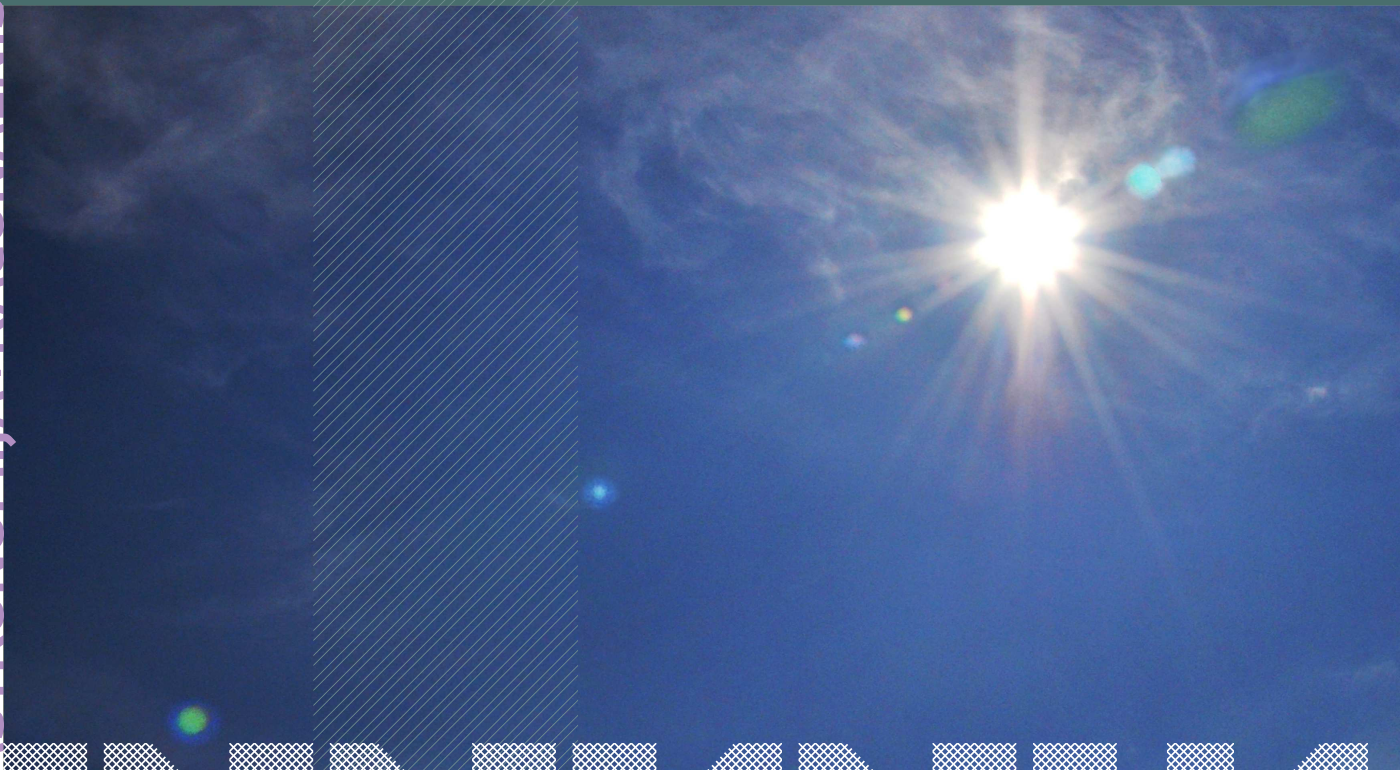
6

PRESEK LETNIK 42 (2014/2015) ŠTEVILKA **6**

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#



PRESEK

- IGRA DOMINO
- O NOGOMETU
- IZJEMEN USPEH NAŠIH MLADIH ASTRONOMOV
- O HISTOGRAMIH

ISSN 0351-6652

9 770351 665265

Preseganje meja

Otroci se ne bi ravno prerivali v vrstah čakajoč na sedež v »izmenjevalcu potencialne in kinetične energije«, čeprav je to zelo natančen opis popularnega vlakca smrti. Potencialna energija, ki je velika v najvišjih legah, se med spuščanjem vlakca pretvori v kinetično energijo. Visoka kinetična energija v najnižjih legah pa omogoči ponovne vzpone. Z osnovno matematično analizo lahko določimo višino, ki je potrebna za naslednji vzpon, največjo hitrost vlakca ter kota pri njegovem vzponu in spustu. S takšnimi izračuni zagotovimo tudi varno uporabo vlakca.

Vlakci smrti so načrtovani tako, da so videti in se zdijo bolj nevarni, kot v resnici so. Tako pri uporabnikih brez dodatnih tveganj povečajo občutek vznemirjenja. Zanka v obliki solze se zdi npr. veliko bolj nevarna od krožne zanke. Kljub temu pa je pospešek pri zanki v obliki solze manjši, a hkrati dovolj velik, da vagonček zvozi najvišji del zanke. Z nekaterimi področji matematike, npr. z numerično analizo in z diferencialnimi enačbami, si fiziki in inženirji lahko pomagajo pri reševanju problemov pri načrtovanju vlakcev, ki so povezani z doseganjem novih rekordov hitrosti, višine in strmine.

Za več informacij si preberite članek Toma Harrisa *How Roller Coasters Work* na spletni strani `http://science.howstuffworks.com/engineering/structural/roller-coaster.htm`

× × ×

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 42, šolsko leto 2014/2015, številka 6

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2014/2015 je za posamezne naročnike 19,20 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 16,80 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 1400 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, …), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Fotografija Sonca napoveduje počitnice in poletje. Na fotografiji so poleg Sonca vidne po diagonali nanizane svetle modrikaste in zelenkaste lise. To so odsevi Sonca na lečah objektiva. Pojav bomo opisali v naslednjem Preseku. Do tedaj pa uživajte v počitnicah in želimo vam lepo poletje. Foto: Aleš Mohorič

Igra domino

Nada Razpet

Domino je ena od družabnih iger, ki jo lahko igramo vsi, ne glede na starost. Nastala naj bi na Kitajskem kot posledica hkratnega metanja dveh igralnih kock, zato na njihovih ploščicah ni praznih polj (ničle) in nimajo delitve polj s črto. Kitajske ploščice domina so navadno izdelane iz črnega kartona. Na njih so praviloma narisane bele pike, razen v posebnih primerih, ko so z rdečo piko označene enice, štirice in polovica od šestih pik, kot kaže slika 1. Na sliki opazimo, da je 11 ploščic podvojenih. Kitajci poznajo dve vrsti ploščic: civilne (angleško civilian suit[1]) in vojaške (military suit). Vojaške ploščice poimenujejo po številu pik na njih, civilne pa imajo posebna imena kot, npr. mož, gos, zemlja, nebesa, tigrova glava.

Pravzaprav ne vemo, ali je evropska verzija nastala na podlagi kitajske ali je nastala samostojno. V Evropi se je igra pojavila v 18. stoletju v Italiji in se potem razširila v Francijo, kjer je postala zelo priljubljena. Francoski vojni ujetniki so jo zanesli v Anglijo, od koder se je kasneje razširila še v Severno in Južno Ameriko. Ploščice so bile izdelane iz ebenovine (spodnji črni del), zgornja plast pa je bila iz slonovine (bela plast). V zgornjo plast so naredili ustrezno število lukenj, zato so na teh ploščicah pike črne. Modernejši domino ima ploščice večinoma izdelane iz temnega lesa (ali plastike), vsaki vrednost pik pa je prirejena druga barva. Za otroke so izdelane tudi ploščice z različnimi slikovnimi oznakami, za učence pa so na njih zapisani »računi« oz. so ploščice prirejene za ponavljanje poštevanke, utrjevanje pretvarjanja merskih enot ali česa drugega.

[1] Angleški izraz suit bi lahko prevedli tudi kot *barvo*, saj pri igralnih kartah isti izraz pomeni križ, pik, srce ali karo.

Največkrat ima domino 28 ploščic (rečejo jim tudi *dvojna šestica*), včasih tudi 55 ploščic (*dvojna devetica*). Vsaka ploščica ima dve kvadratni polji, ki sta ločeni s črto. Obstaja več pravil za igranje. Pri klasičnih igrah je potrebno ploščice postavljati tako, da se stični polji ujemata v številu pik.

Oznake in število ploščic

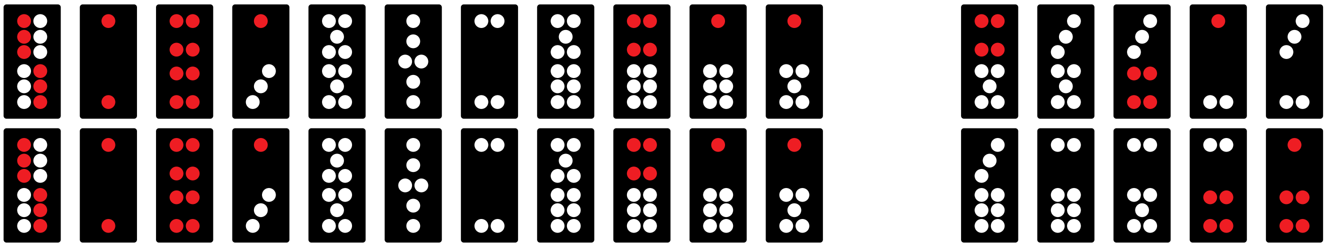
Navadno pri igranju tudi ploščicam rečemo kar *domine*. Ta izraz bomo za ploščice uporabljali tudi mi. Dogovorimo se, da bomo posamezni domino označili tako, da bomo v oklepaju pisali število pik na posameznem polju in ju ločili z vejico: $x = (2,3)$ ali splošno $x = (a,b)$, kar pomeni, da sta na enem polju dve piki (a pik), na drugem pa tri pike (b pik). Pri tem je $(a,b) = (b,a)$ saj ne vemo, katero polje je prvo in katero drugo oz. iz katere smeri gledamo ploščico.

Izračunajmo, koliko je vseh domin v *dvojni šestici*. Domin, ki imajo na poljih enako število pik ($(0,0)$, $(1,1), \ldots, (6,6)$), je sedem. Domin, ki imajo na poljih različno število pik, je 21. Kako to vemo? Za prvo polje lahko izberemo od 0 do 6 pik, torej sedem možnosti. Eno od možnosti smo že uporabili, torej za drugo polje ostane še šest možnosti; skupaj 42 možnosti. Ker izbora (a,b) in (b,a) predstavljata isto domino, je vseh domin, ki imajo na poljih različno število pik, pol manj, kot smo prej izračunali, torej jih je 21. Vseh domin je zato $7 + 21 = 28$.

Poiščimo splošni izraz za izračun števila domin N v posameznem kompletu. Označimo z n največje število pik na posameznem polju, torej je lahko na njem $0, 1, \ldots, n$ pik. Domin, ki imajo na obeh poljih enako število pik, je $(n+1)$. Domin, ki imajo različno število pik, pa $(n+1)n/2$, torej

$$N = (n+1) + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Koliko je vseh domin v *dvojni sedmici*? 36.



SLIKA 1.
Kitajski domino: na levi je civilna, na desni pa vojaška vrsta domin.

Iz kompleta domin *dvojna šestica* lahko sestavimo tudi komplete *dvojna ničla*, ki ima eno domino, *dvojna enica*, ki ima tri domine, *dvojna dvojka*, ki ima šest domin, *dvojna trojka*, ki ima deset domin, *dvojna štirica* ima 15 domin, *dvojna petica* ima 21 domin in *dvojna šestica*, ki ima 28 domin. Števila 1, 3, 6, 10, 15, 21 in 28 so trikotniška števila. Za zaporedje razlik med takimi števili velja, da tvorijo aritmetično zaporedje z razliko 1. Razlike med dvema sosednjima številoma so v našem primeru po vrsti števila: 2, 3, 4, 5, 6, 7. To pa je aritmetično zaporedje s prvim členom 2 in razliko 1.

Zapišimo domine *dvojne šestice* z dogovorjeno pisavo v tabelo 1.

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$	$(0,4)$	$(0,5)$	$(0,6)$
	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
		$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
			$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
				$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
					$(5,5)$	$(5,6)$
						$(6,6)$

TABELA 1.
Zapis domin *dvojne šestice*.

Preštejmo, kolikokrat v tabeli nastopa posamezno število pik. Enica je zapisana osemkrat, dvojka tudi osemkrat itd. Če je torej v kompletu največje možno število pik na posameznem polju n, potem ima $(n+2)$ polj enako število pik. Povedano drugače, $(n+2)$ polj je brez pike, $(n+2)$ polj ima eno piko, $(n+2)$ polj ima dve piki in tako naprej do $(n+2)$ polj ima n pik. Vsota vseh pik v kompletu (ničel nam seveda ni treba upoštevati) je potem

$$S = (n+2)(1+2+3+\ldots+n) = \frac{(n+2)(n+1)n}{2}. \quad (1)$$

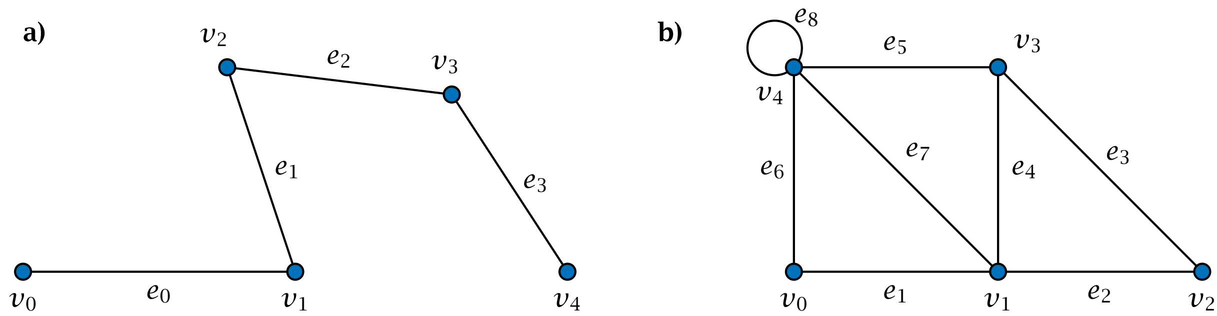
Pri tem smo vsoto aritmetičnega zaporedja $1+2+3+\ldots+n$ izračunali tako, da smo vsoto prvega in zadnjega člena pomnožili s številom členov in delili z dve.

Pri katerih kompletih od *dvojne enice* do *dvojne šestice* lahko vse domine zložimo v eno vrsto in na koliko načinov lahko to naredimo? Pri tem seveda želimo, da se stična polja ujemajo v številu pik. Pomagali si bomo s teorijo grafov.

Osnovno o grafih

Grafi so preproste matematične strukture, s katerimi lahko modeliramo relacije (odnose) med nekimi objekti. Graf G sestavljata množica *vozlišč* (običajno jih označimo z $v_0, v_1, v_2, \ldots$) in množica parov teh vozlišč, ki jim pravimo *povezave* (označimo jih z e_0, $e_1, e_2, \ldots$). Vozlišča grafa tako predstavljajo neke objekte, povezave grafa pa relacije med temi objekti. Vozliščema, ki ju neka povezava povezuje, pravimo *krajišči* te povezave. Grafe lahko ponazorimo s slikami (glej sliko 2), na katerih vozlišča grafa narišemo kot točke v ravnini, povezave grafa pa kot črte, ki povezujejo krajišča pripadajočih povezav.

V nadaljevanju bomo povezavo med vozliščema v_i in v_k zapisali kar $v_i v_k$. Stopnja vozlišča v (označimo jo z $\deg(v)$) je število povezav, ki vsebujejo to vozlišče. Povezavi, ki ima obe krajišči enaki, rečemo zanka. Zanka prispeva 2 k stopnji vozlišča.



SLIKA 2.
a) Graf brez zank. Stopnje vozlišč so: $\deg(v_0) = \deg(v_4) = 1$, $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$.
b) Graf z zanko. Stopnje vozlišč so: $\deg(v_0) = \deg(v_2) = 2$, $\deg(v_1) = 4$, $\deg(v_3) = 3$, $\deg(v_4) = 5$.

Sprehod v grafu je tako zaporedje vozlišč $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$, da v grafu obstaja povezava $v_i v_{i+1}$ za $0 \leq i < k$. Povedano drugače, drugo krajišče povezave je vedno prvo krajišče naslednje povezave. Sprehod, pri katerem se zadnje vozlišče v sprehodu ujema s prvim, je *obhod*. Sprehod (obhod), v katerem se sicer vozlišča smejo ponavljati, povezave pa ne, se imenuje enostavni sprehod (obhod). Sprehod, na katerem so vsa vozlišča različna, je *pot*.

Koliko sprehodov ima graf? Naj ima graf G le eno povezavo. Krajišči te povezave označimo z v_1 in v_2. Zapišimo nekaj sprehodov v_1v_2, $v_1v_2v_1$, $v_1v_2v_1v_2$, ... V zapisanih sprehodih smo povezavo prehodili enkrat, dvakrat, trikrat, ... Graf ima nešteto sprehodov. Ugotovitev še zapišimo: *Grafi z vsaj eno povezavo imajo neskončno sprehodov.*

V grafu na sliki 2a velja, da za poljubno izbrani vozlišči v_i in v_j obstaja natanko ena pot od v_i do v_j. Kaj pa graf na sliki 2b? Zapišimo enega od sprehodov $v_0v_1v_2v_3v_1v_4v_4v_3v_1v_4v_0$, zapisano s povezavami: e_1, e_2, e_3, e_4, e_7, e_8, e_5, e_4, e_7, e_6. Ta sprehod ni pot (nekatera vozlišča se ponavljajo) in ni enostaven sprehod, ker gremo dvakrat po povezavah e_4 in e_7. Je obhod.

Že v preteklosti so grafe uporabljali za reševanje različnih problemov. Eden izmed njih je bil problem prehoda preko sedmih königsberških mostov. Meščane je zanimalo, ali je mogoče priti iz začetne točke nazaj v začetni točko tako, da se vsak most prečka natanko enkrat. Več o tem lahko preberete v [2]. Euler je ta problem rešil s pomočjo grafov. Da bo nadaljnje izvajanje lažje, zapišimo nekaj definicij in trditev.

Eulerjev obhod grafa G je enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave grafa G. *Eulerjev sprehod* grafa G je enostaven sprehod, ki vsebuje vse povezave grafa G (več o tem najdete v [4]). Če ima graf Eulerjev sprehod (ali Eulerjev obhod), potem lahko graf G narišemo z eno potezo, kar pomeni, da svinčnika ne dvigamo s papirja in gremo po vseh povezavah le enkrat.

Trditev. Graf G ima Eulerjev sprehod natanko takrat, ko ima kvečjemu dve vozlišči lihe stopnje.

Z eno potezo torej lahko narišemo vse grafe, katerih vozlišča so, ali vsa sode stopnje ali pa sta le dve vozlišči lihe stopnje.

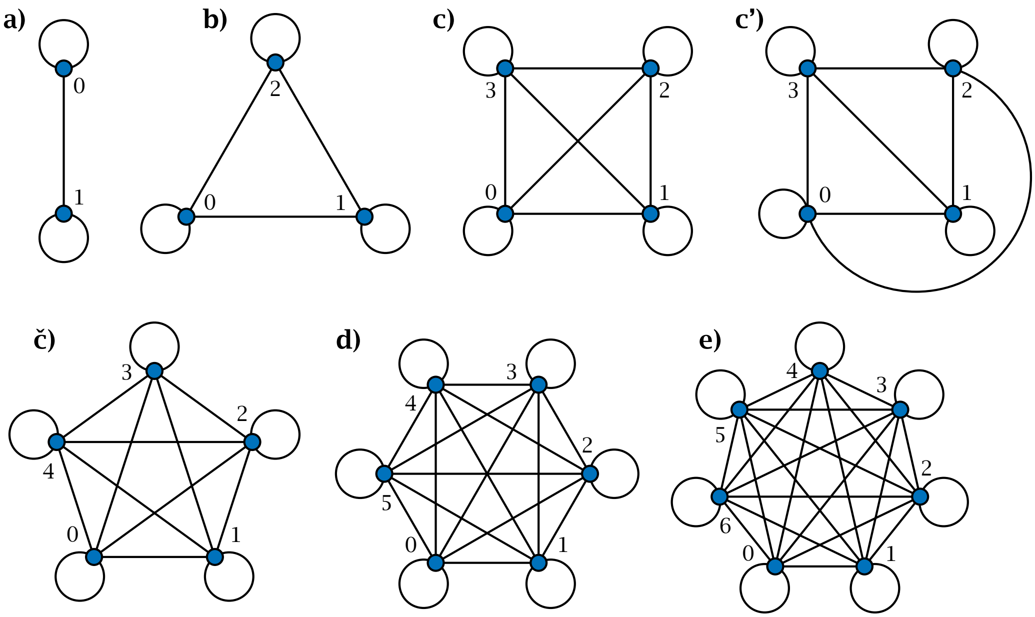
Trditev. Graf G ima Eulerjev obhod, če so vsa vozlišča sode stopnje.

Ker je imel graf, s katerim je Euler ponazoril sedem königsberških mostov štiri vozlišča lihe stopnje, je ugotovil, da mostov ni mogoče prehoditi tako, da bi šli preko vsakega le enkrat.

Domine in grafi

Komplet domin lahko predstavimo z grafom, ki ima za vsako možno število pik na polju domine po eno vozlišče, ki ga označimo kar s številom pik. V tem grafu vsaki domini ustreza po ena povezava in sicer domini (a, b) pripada povezava, ki povezuje vozlišči a in b (glej sliko 3).

Da bi ugotovili, ali lahko domine postavimo v eno samo vrsto tako, da se stična polja ujemajo, moramo za vsak komplet domin narisati ustrezni graf in ugotoviti, ali so vozlišča lihe ali sode stopnje. Pri neka-



SLIKA 3.
Grafi kompleta domin od dvojne enice (a) do dvojne šestice (e). Zanka predstavlja domino, ki ima na obeh poljih enako število pik (to so domine z dvema ničlama, dvema enicama, . . .). Graf *dvojne trojke* je narisan na dva načina (c in c').

terih grafih povezav med vozlišči ne moremo risati z daljicami tako, da se med seboj ne sekajo. Ta presečišča ne predstavljajo novih vozlišč grafa. Imenujemo jih *navidezna vozlišča*. Nekaterim navideznim vozliščem se lahko izognemo, če vozlišča grafa po ravnini razporedimo drugače ali pa če povezave rišemo tudi s krivimi črtami, kot je to prikazano na sliki 3c'.

Ugotovitev. Domine bomo lahko zložili v eno vrsto, če ima ustrezni graf Eulerjev sprehod. Če pa želimo ugotoviti, na koliko načinov jih lahko zložimo v vrsto, moramo ugotoviti, koliko različnih Eulerjevih sprehodov ima graf. Domine lahko postavimo v obroč le takrat, ko ima ustrezni graf Eulerjev obhod.

Zlaganje domin v vrstice

Najenostavnejši komplet je seveda ena sama domina $(0,0)$, ampak o njej ne moremo povedati nič zanimivega.

Dvojna enica ima tri domine. Graf je na sliki 3a. Imamo domine: $(0,0)$, $(0,1)$ in $(1,1)$. Vozlišči sta lihe stopnje, torej lahko te domine postavimo v eno vrsto. Na koliko načinov? Sprehod lahko začnemo v vozlišču 0 ali pa v 1, torej **dva** načina. Vrsta se glasi: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ ali v obratnem vrstnem redu.

Dvojna dvojka ima šest domin (slika 3b). Vsa vozlišča so sode stopnje. Graf ima Eulerjev obhod. Skrajni dve domini lahko povežemo in dobimo obroč: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,0)$. Obroč lahko pretrgamo na šestih mestih (imamo šest domin), torej lahko v vrsto zložimo domine na 12 načinov (vsakega od šestih načinov tudi v obratnem vrstnem redu). To pa pomeni, da ima graf 12 Eulerjevih sprehodov.

Dvojna trojka ima deset domin (slika 3c). Graf ima štiri vozlišča lihe stopnje. Graf nima Eulerjevega sprehoda in zato vseh domin ne moremo zložiti v eno vrsto. Lahko pa sestavimo dve vrsti. Poskusite!

Dvojna štirica ima 15 domin. Vsa vozlišča grafa 3č so sode stopnje, torej lahko zložimo domine v eno vrsto. Ugotovili so [1], da je število načinov, kako te domine postavimo v vrsto enako 126.720 (vključen je tudi obratni vrstni red). Izračun načinov ni preprost. Graf ima Eulerjev obhod in iz domin lahko sestavimo obroč.

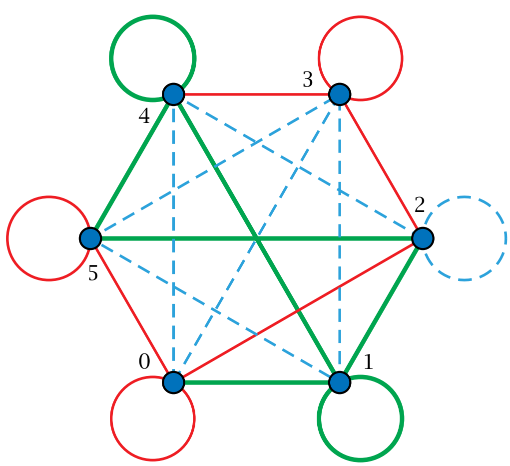
Dvojna petica (slika 3d) ima 21 domin. Vsa vozlišča grafa so lihe stopnje, graf nima Eulerjevega sprehoda, teh domin ne moremo zložiti v eno vrsto. Lahko pa jih razvrstimo v tri vrste.

Dvojna šestica (slika 3e) ima 28 domin. Vsa vozlišča grafa so sode stopnje. Graf ima Eulerjev sprehod. Te domine lahko zložimo v eno vrsto. Obstaja 7.959.229.931.520 načinov, kako to naredimo [1]. Torej je možnosti za klasično igro zares ogromno.

Na najmanj koliko vrst pa lahko zložimo domine v primeru, ko ustrezen graf nima Eulerjevega sprehoda? Grafa G, ki ima k parov vozlišč lihe stopnje, ne moremo pokriti z manj kot k takimi enostavnimi sprehodi, ki nimajo skupnih povezav. Če pa je G povezan, lahko najdemo k enostavnih sprehodov brez skupnih povezav, ki pokrijejo G.

Dvojna petica ima tri pare vozlišč lihe stopnje, torej lahko graf pokrijemo z najmanj tremi sprehodi, oz. domine razporedimo v najmanj tri vrstice. Ena od možnosti takega pokritja je na sliki 4. Sprehode smo označili z rdečo, zeleno in modro barvo. Iz označenih sprehodov preberemo zaporedje domin v posamezni vrstici:

- zelen:
  $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,5)$, $(5,4)$, $(4,4)$, $(4,1)$;
- rdeč:
  $(5,5)$, $(5,0)$, $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$;
- moder:
  $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,0)$, $(0,3)$, $(3,5)$, $(5,1)$, $(1,3)$.



SLIKA 4.
Graf *dvojne petice* je pokrit s tremi sprehodi.

Reševanje problemov

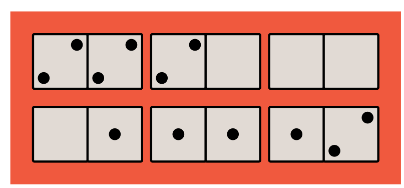
Posvetimo se še problemskim igram in jih povežimo z matematiko. Že v 18. stoletju sta se v Franciji pojavili dve vrsti problemskih iger (glej [3]). Po prvi je bilo potrebno domine sestavljati v predpisano obliko (vzorec) in se pri tem seveda držati pravila, da se stična polja ujemajo v številu pik, pri drugi vrsti problemov pa je bilo potrebno zlagati domine v vrste tako, da so imeli vse vrste enake vsote (produkte, razlike itd.) pik, pri čemer ni nujno ujemanje stičnih polj.

Iz kompleta *dvojna dvojka* sestavimo dve vrstici, tako da bo ustrezala pravilu stičnih polj in bo vsota pik v obeh vrstah enaka. Vseh domin *dvojne dvojke* je šest. Zapišimo jih: $x_1 = (0,0)$, $x_2 = (0,1)$, $x_3 = (0,2)$, $x_4 = (1,1)$, $x_5 = (1,2)$ in $x_6 = (2,2)$.

Najprej iz izraza (1) izračunamo vsoto pik v kompletu:

- $S = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12.$

Vsota pik v vsaki vrstici mora torej biti 6. Če za prvo domino izberemo $(2,2)$ in morajo biti v vrsti tri domine, imamo za izbor naslednjih dveh domin vedno le po eno možnost, da zadovoljimo pravilu stičnih polj in da je vsota pik v vrstici 6, to sta domini $(2,0)$ ter $(0,0)$. Potem za drugo vrsto pravilno postavimo še ostale tri domine (slika 5).



SLIKA 5.
Vsota pik v vrsticah je 6.

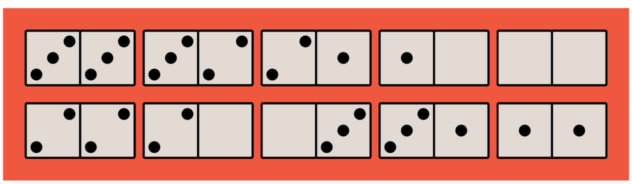
Domine iz kompleta *dvojna trojka* ima vsoto vseh pik 30. Vseh domin je 10. Naredimo dve vrstici po pet domin z vsoto pik 15.

Najprej izberimo domino $(3,3)$. Za izbor naslednje imamo tri možnosti $(3,2)$, $(3,1)$ in $(3,0)$. Če izberemo domino $(3,2)$, je vsota pik na obeh dominah 11 in potrebujemo še štiri pike na ostalih treh dominah. Naslednja domina mora imeti eno polje z dvema pikama. Zapišimo možnosti v tabelo 2.

					Vsota
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	14
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,0)$	$(0,0)$	$(0,3)$	16
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	16
$(3,3)$	$(3,2)$	$(2,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$	15

TABELA 2.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Začetni domini sta $(3,3)$ in $(3,2)$.

Rešitev je potem: $(3,3)$, $(3,2)$, $(2,1)$, $(1,0)$, $(0,0)$ in druga vrsta $(2,2)$, $(2,0)$, $(0,3)$, $(3,1)$, $(1,1)$ (slika 6). Seveda lahko pet domin v vsaki vrstici razporedimo tudi drugače. Poskusite!



SLIKA 6.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Prva vrsta se začne z dominama $(3,3)$ in $(3,2)$; vsota pik v vsaki vrsti je 15.

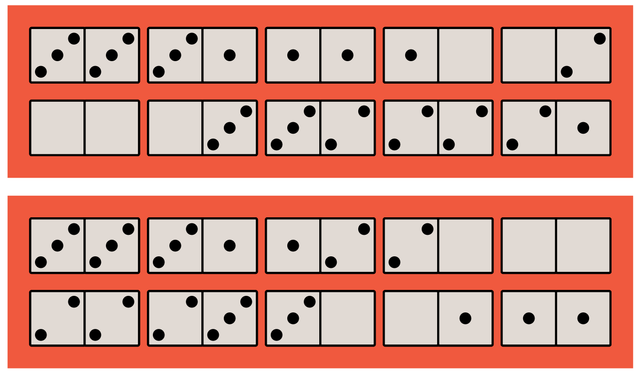
Kaj pa, če se vrsta začne z dominama $(3,3)$ in $(3,1)$? Pomagamo si s tabelo 3:

					Vsota
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,3)$	14
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,0)$	$(0,2)$	$(2,1)$	16
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,1)$	$(1,0)$	$(0,2)$	15
$(3,3)$	$(3,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(0,0)$	15

TABELA 3.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Začetni domini sta $(3,3)$ in $(3,1)$.

Imamo torej dve možnosti (slika 7):

- prva vrsta: $(3,3)$, $(3,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,2)$;
  druga vrsta: $(0,0)$, $(0,3)$, $(3,2)$, $(2,2)$, $(2,1)$;
- prva vrsta: $(3,3)$, $(3,1)$, $(1,2)$, $(2,0)$, $(0,0)$;
  druga vrsta: $(2,2)$, $(2,3)$, $(3,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

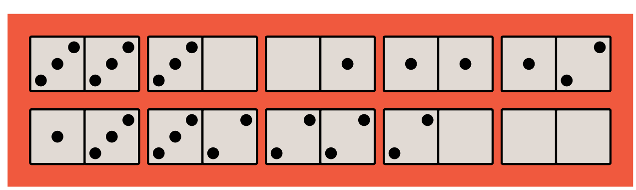


SLIKA 7.
Razporejanje domin *dvojne trojke* v dve vrstici. Prva vrsta se začne z dominama $(3,3)$ in $(3,1)$; vsota pik v vsaki vrsti je 15.

Kaj pa, če se vrsta začne z dominama $(3,3)$ in $(3,0)$? Možnosti so zapisane v tabeli 4.

					Vsota
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	$(1,2)$	15
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	15
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,1)$	12
$(3,3)$	$(3,0)$	$(0,0)$	$(0,2)$	$(2,2)$	15

TABELA 4.
Dvojna trojka: začetni domini sta $(3,3)$ in $(3,0)$.



SLIKA 8.
Dvojna trojka: ena od možnosti za pričetek prve vrste z dominama $(3,3)$ in $(3,0)$.

Komplet *dvojna štirica* ima 15 domin in vsoto pik 60. Lahko naredimo tri vrstice z vsotami pik 20.

- $(4,4),(4,0),(0,1),(1,1),(1,4)$
  $(2,2),(2,4),(4,3),(3,0),(0,0)$
  $(0,2),(2,3),(3,3),(3,1),(1,2)$

Ali lahko naredite pet vrstic z vsotami pik 12? Seveda:

- $(4,4),(4,0),(0,0)$
  $(4,3),(3,0),(0,2)$
  $(3,3),(3,1),(1,1)$
  $(3,2),(2,2),(2,1)$
  $(2,4),(4,1),(1,0)$

Komplet *dvojna petica* ima 21 domin in vsoto pik 105. Lahko naredimo zopet tri vrstice z vsoto pik 35: $(5,5)$, $(5,0)$, $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,3)$, $(3,3)$, $(3,4)$, druga $(1,4)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(5,2)$, $(2,1)$, $(1,1)$, $(1,0)$, tretja $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,0)$, $(0,3)$, $(3,1)$, $(1,5)$, $(5,3)$. Ali lahko naredite sedem vrstic po tri domine z vsotami pik 15? Poskusite.

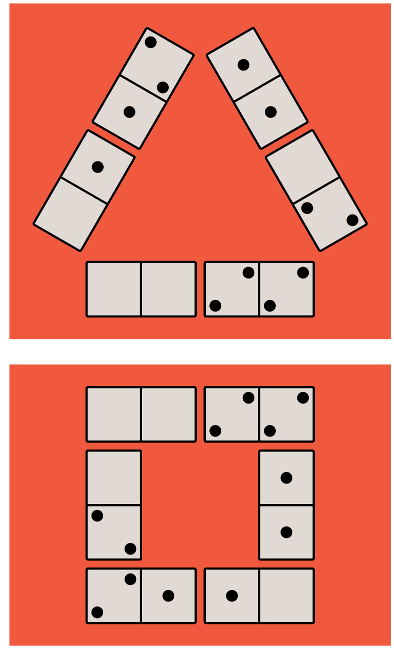
Naredite še dve vrstici iz kompleta *dvojna šestica*, ki ima 28 domin in vsoto pik 168. Poskusite še z več kot dvema vrsticama.

Trikotniki in štirikotniki

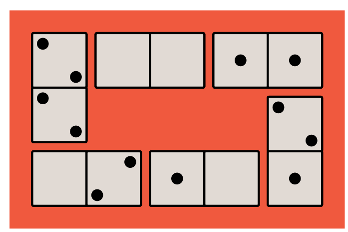
Dvojna dvojka

Iz kompleta *dvojna dvojka* sestavimo enakostranični trikotnik in kvadrat tako, da bo vsota pik po stranicah enaka. Pri tem se ni potrebno držati pravila, da se stični polji ujemata v številu pik.

- Trikotnik: vsota pik po stranicah je štiri (slika 9 zgoraj).
- Kvadrat: vsota pik po stranicah je štiri (slika 9 spodaj).
- Pravokotnik velikosti 5×3: vsota pik po stranicah je štiri (pike na poljih se ne ujemajo, slika 10).



SLIKA 9.
Enakostranični trikotnik in kvadrat iz domin *dvojne dvojke*. Vsota pik po stranicah je 4.

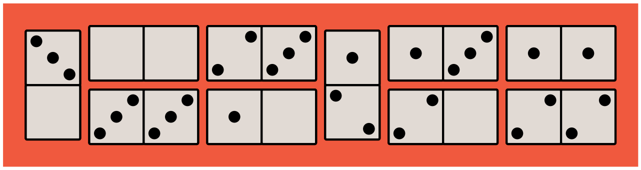


SLIKA 10.
Pravokotnik velikosti 5×3 iz domin *dvojne dvojke*. Vsota pik po stranicah je 4.

Dodatne naloge

Iz kompleta *dvojna trojka* ne moremo narediti enakostraničnega trikotnika, ker ima deset domin. Lahko pa jih postavimo v **vrsto** z dolžino deset polj. Pri tem naj bodo, ali vse domine postavljene navpično ali pa izmenično po dve navpično in po dve vodoravno. Vsota pik na zgornjih poljih mora biti enaka vsoti pik na spodnjih poljih. Tudi vsote pik po stolpcih naj bodo med seboj enake. Ena od možnih rešitev je na sliki 11.

Iz kompleta sestavite **pravokotnik** 5×4 tako, da bo vsota pik po stolpcih (z višino 4 polj) enaka, ni potrebno ujemanje polj.



SLIKA 11.
Vsota pik v zgornji vrstici je enaka vsoti pik v spodnji vrstici.

Iz desetih domin sestavite **dva pravokotnika** (v sredini je odprtina) tako, da bo vsota pik po stranicah enaka.

Dvojna štirica

Iz 15-ih domin sestavite **enakostranični trikotnik** tako, da se bodo stična polja po stranicah ujemala v številu pik.

Iz 15-ih domin sestavite **tri pravokotnike** (v sredini je odprtina) tako, da se bodo stična polja ujemala v številu pik in bo vsota pik po stranicah enaka.

Dvojna petica

Iz 21-ih domin sestavite **tri pravokotnike** tako, da bo vsota pik po stranicah vedno enaka (ni potrebno ujemanje).

Dvojna šestica

Iz 28-ih domin sestavite **sedem kvadratov** tako, da bo vsota pik po stranicah prvega kvadrata enaka 3, drugega 6, tretjega 8, četrtega in petega 9, šestega 10 in sedmega 16.

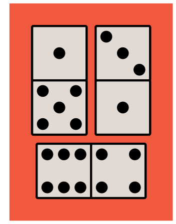
Sestavite **tri pravokotnike** tako, da bo vsota pik po posameznih stranicah pravokotnika vedno 12.

Računske operacije z dominami

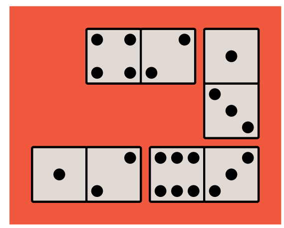
S sestavljanjem domin (kot kaže spodnji primer na sliki 12) zapišite račune seštevanja in odštevanja. Pri tem naj bodo vse domine postavljene vodoravno ali pa dve navpično in ena vodoravno.

Kaj pa množenje? Primer je na sliki 13.

Zapisali smo nekaj možnosti igranja z dominami, ki jih lahko povežemo z matematiko. Poiščite še sami nekaj zanimivih primerov in igrajte igro s spremenjenimi pravili.



SLIKA 12.
Seštevanje: $13 + 51 = 64$



SLIKA 13.
Množenje: $421 \cdot 3 = 1263$

Literatura

[1] M. Gardner, *Mathematical Circus*, Dominoes, Penguin books, 1979, Harmondsworth, 137–145.

[2] M. Vencelj, *Mala šola topologije, 4. del*, Presek **25** (1997/984), 4, str. 222, DMFA, Ljubljana.

[3] J. Botermans, P. van Delft in E. Oker, *Miselne igre vsega sveta*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana, 1992, 57–64.

[4] M. Juvan in P. Potočnik, *Teorija grafov in kombinatorika*, DMFA – založništvo, 2007, Ljubljana, 1–3, 27.

× × ×

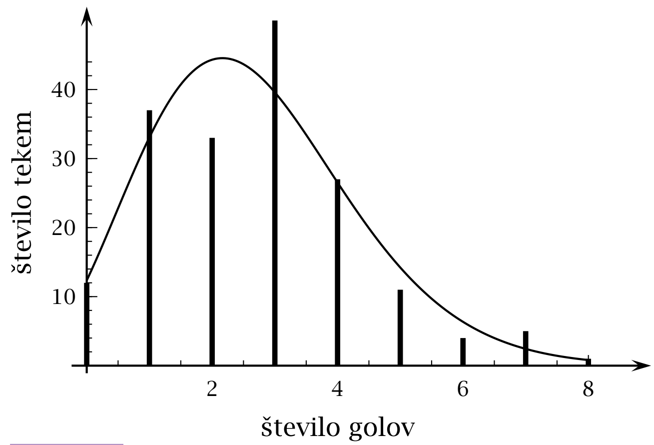
O nogometu

Janez Strnad

Po svetovnem prvenstvu se poveča zanimanje za nogomet.

Pogosto na nogomet pogledajo statistično. Pri tem ne morejo mimo *Poissonove porazdelitve.* Porazdelitev uporabimo v primerih, ko so naključni dogodki neodvisni drug od drugega in niso preveč pogosti; to je »porazdelitev redkih dogodkov«. Siméon Denis Poisson jo je obdelal leta 1837 v knjigi *Raziskovanje verjetnosti sodb v kazenskih in civilnih zadevah*, v kateri ga je zanimala pogostost napačnih obsodb v kaki državi. Porazdelitev pa je že leta 1711 Abraham de Moivre navedel v povezavi z igrami na srečo. Razvpita primera sta smrt vojakov zaradi konjskih brc v pruski vojski (v 20-ih letih jih je bilo 280) ali četverčkov v Prusiji (v 69-ih letih jih je bilo 109). Na Poissonovo porazdelitev naletimo še v številnih drugih primerih, npr. če štejemo avtomobile, ki se peljejo po odseku ceste v eni uri; telefonske klice ali sporočila SMS kakega naslovnika v eni uri; radioaktivne razpade ob šibkem radioaktivnem izviru v minuti; goste, ki pridejo v restavracijo ali na recepcijo hotela v dani uri dneva; prometne nesreče na določenem odseku ceste v enem tednu; bolnike, ki jih na dan sprejme bolnišnica; dežne kaplje na območjih 10 cm krat 10 cm na minuto in veliko drugega. Porazdelitev večkrat upoštevajo pri načrtovanju, npr. pri načrtovanju velikosti telefonskih central.

Opišimo značilen poskus. Merilnik zaznava delce α, ki jih oddaja radioaktivni izvir v dani oddaljenosti. Beležimo trenutke, v katerih se merilnik odzove. Zbrane podatke obdelamo, kolikor vsega tega ne opravi računalnik, na katerega je merilnik priključen. Preštejemo časovne razmike, v katerih merilnik ni zaznal nobenega delca, je zaznal en delec, dva delca, tri delce in tako dalje. Delcev v časovnem razmiku ne sme biti preveč, tako da lahko drugega razločimo od drugega. Potem izračunamo povprečno število delcev, tako da število vseh preštetih delcev delimo s številom vseh zajetih časovnih razmikov. Nazadnje narišemo porazdelitev časovnih razmikov po številu zaznanih delcev. Čim več delcev smo zajeli, tem bolj se »izmerjena« porazdelitev prilega »izračunani« Poissonovi porazdelitvi.



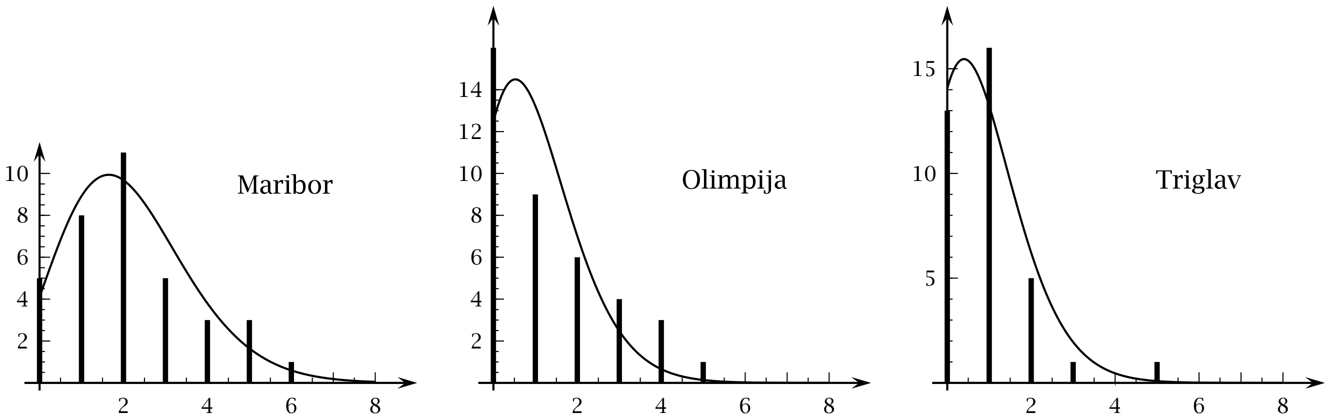
SLIKA 1.
Porazdelitev tekem slovenske prve lige v tekmovalnem obdobju 2013/2014 po številu doseženih golov. Krivulja kaže Poissonovo porazdelitev, kot da bi se število tekem n spreminjalo zvezno.

Poissonovo porazdelitev podaja enačba

$$N p_n = N \frac{\overline{n}^n}{n! e^{\overline{n}}} .$$

N je število preštetih delcev, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ je število delcev v posameznih časovnih razmikih, $\overline{n}$ je povprečna vrednost n, e $= 2{,}718\ldots$ osnova naravnih logaritmov in $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. Pri tem je p_n *verjetnost*, da je merilnik v časovnem razmiku zaznal n delcev. Za verjetnost je značilno, da je vsota $\sum p_n$ enaka 1.

Podobno ravnamo tudi v drugih primerih. Pri nogometu je N število tekem v kakem tekmovanju, npr. v državni ligi. Delež tekem, na katerih pade n golov, primerjamo s Poissonovo verjetnostjo p_n, da na tekmi pade n golov. Čim več je tekem, tem boljši je približek. Omejimo se na prvo slovensko ligo v minulem tekmovalnem obdobju 2013/2014. Liga je imela deset moštev, ki so igrala doma in na tujem po



SLIKA 2.
Porazdelitev tekem Maribora, Olimpije in Triglava v tekmovalnem obdobju 2013/14 po številu danih golov. Zaradi razmeroma majhnega števila tekem so odstopanja precejšnja. Porazdelitev tekem prve lige bi dobili, ko bi sešteli porazdelitve za vseh deset moštev in upoštevali, da smo vsak gol šteli dvakrat.

dvakrat. Vsako moštvo je imelo devet nasprotnikov in je z vsakim od njih igralo po štirikrat, tako da je vsako moštvo odigralo $4 \cdot 9 = 36$ tekem v prav toliko krogih. Vseh parov je bilo $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10-1) = 45$ in vseh tekem je bilo $4 \cdot 45 = 180$. Najprej nas zanima porazdelitev tekem po številu zadetkov na $N = 180$ tekmah in potem še porazdelitev $N = 36$ tekem po številu danih golov za tri značilna moštva: Maribor je bil prvi, ljubljanska Olimpija sedma in kranjski Triglav deseti. Zaradi razmeroma majhnih števil N pričakujemo odstopanja od Poissonove porazdelitve.

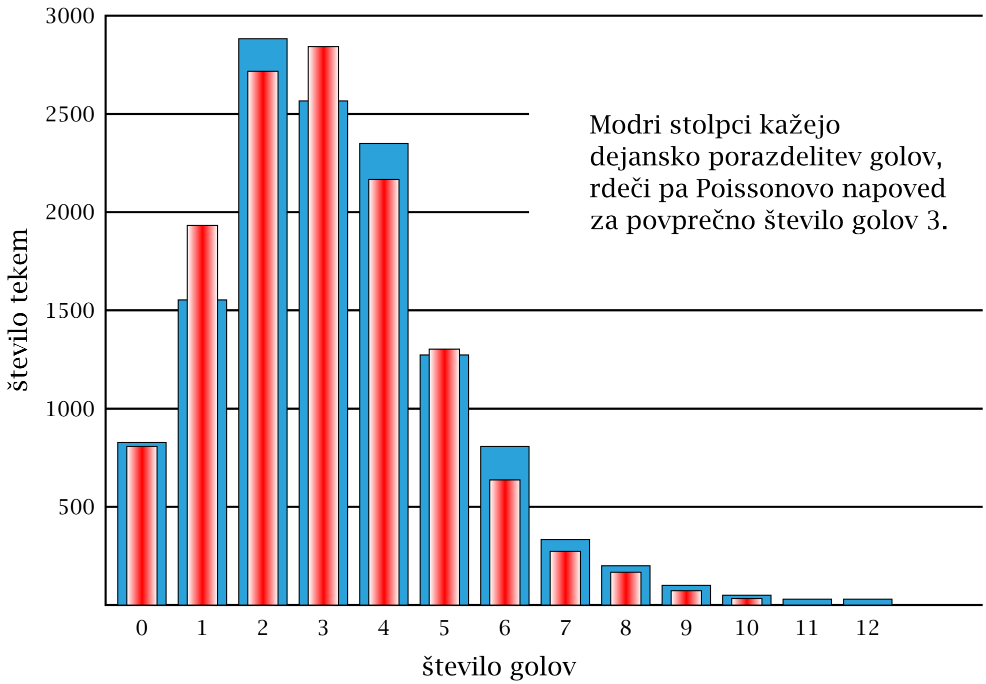
Na risbah primerjamo »izmerjene« podatke po spletnih straneh Nogometne zveze Slovenije z »izračunanimi« Poissonovimi podatki. Povprečno število golov na tekmo, ki jih je zabilo kako moštvo, vzamemo za *učinkovitost* moštva. Ni nujno, da se razvrstitev na tekmovanju ravna po učinkovitosti.

Podoben pregled je opravil Presek pred leti (*Ali je nogomet igra na srečo?*, **13** (1985/86), 9–15). Pregled je zajel prvo nogometno ligo v tedanji skupni državi z osemnajstimi moštvi in skupno 306 tekmami v sezoni 1976/77 (povprečje 2,53) ter prvo Crveno zvezdo (povprečje 1,97), dvanajsto ljubljansko Olimpijo (povprečje 1,06) in osemnajstega sarajevskega Željezničarja (povprečje 0,97). Zanimivo je nove podatke primerjati s starimi. Tedaj smo ugotovili, da je nogomet v precejšnji meri igra na srečo. Delež naključja smo ocenili z $1/\sqrt{\frac{1}{2}n}$. Sedanji podatki dajo 86 %, medtem ko smo s starimi dobili 89 %.

Na spletu več naslovov ponuja pomoč s Poissonovo porazdelitvijo pri športni stavi. Pri tem računajo bolj podrobno, kot smo mi. Pri ligaškem tekmovanju posebej upoštevajo povprečje golov pri igrah doma in na tujem ter izračunajo učinkovitost kot produkt obeh povprečij. S Poissonovo enačbo izračunajo verjetnost, da bo moštvo na prihodnji tekmi doseglo določeno število golov. To naredijo tudi za nasprotno moštvo in upoštevajo oba podatka. Temu načinu napovedovanja je mogoče očitati, da pozornost posveča le danim golom. Prejete gole upošteva le kot dane gole nasprotnika, ne ozira se na obrambo. Napovedovanje poskušajo na razne načine izboljšati.

Napoved svetovnega prvaka

V reviji Forschung (Raziskovanje), ki jo izdaja nemška raziskovalna skupnost in ustreza našemu Raziskovalcu, je nekaj tednov pred svetovnim prvenstvom izšel članek *Bo Nemčija svetovni prvak.* V njem je profesor Metin Tolan opisal program, ki ga je sestavil Robert Fendt z univerze v Dortmundu. Začel je z razvrstitivijo 32-ih moštev, ki so se kvalificirala za svetovno prvenstvo, v osem predtekmovalnih skupin. Za njihovo učinkovitost je vzel povprečno število golov v kvalifikacijah. Braziliji, ki ji ni bilo treba igrati kvalifikacij, je pripisal povprečno število golov v pokalu konfederacij. Podatke smo zbrali v preglednici, le da smo upoštevali doseženo razvrstitev, ki →



SLIKA 3.
Porazdelitev tekem nemške prve lige od začetka do tekmovalnega obdobja 2005/06 po številu doseženih golov. Zaradi velikega števila tekem so odstopanja manjša, a dovolj opazna. Tekem z enim golom in s tremi goli je bilo precej manj, kot napove Poissonova porazdelitev (po članku iz Forschung).

je pisec še ni poznal. Ob moštvu je navedena učinkovitost iz članka in v oklepaju dosežena učinkovitost v predtekmovanju na svetovnem prvenstvu. Ker je vsako moštvo odigralo samo šest tekem, je podatek v oklepaju nezanesljiv, vseeno pa nekoliko omaja zaupanje v učinkovitost po kvalifikacijah.

A Brazilija 2,8 (2,3), Mehika 0,7 (1,3), Hrvaška 1,2 (1,7), Kamerun 1,1 (0,3)

B Nizozemska 3,4 (3,3), Čile 1,8 (1,7), Španija 1,8 (1,3), Avstralija 1,5 (1,0)

C Kolumbija 1,7 (3), Grčija 1,2 (0,7), Slonokoščena obala 2,4 (1,3), Japonska 2,0 (0,7)

D Kostarika 1,3 (1,3), Urugvaj 1,6 (1,3), Italija 1,9 (0,7), Anglija 3,1 (0,7)

E Francija 1,9 (2,7), Švica 1,7 (2,3), Ekvador 1,3 (1,0), Hondduras 1,3 (0,3)

F Argentina 2,1 (2,3), Nigerija 1,4 (2,0), Bosna in Hercegovina 3,0 (1,3), Iran 1,0 (0,3)

G Nemčija 3,6 (2,3), Portugalska 2,0 (1,3), ZDA 1,5 (1,3), Gana 3,1 (1,3)

H Belgija 1,8 (1,3), Alžirija 2,1 (2), Rusija 2,0 (0,7), Južna Koreja 1,6 (1,0)

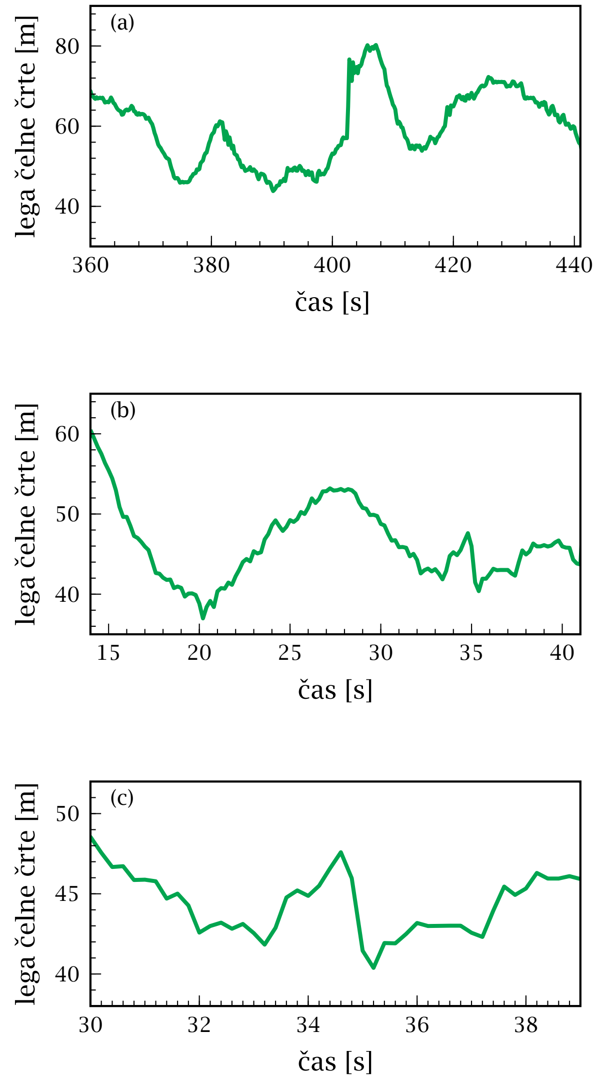
Generator naključnih števil postreže s številom, ki mu Poissonova porazdelitev priredi verjetnost. Podobno naredimo tudi pri nasprotniku in na ta način »preigravamo« tekme. To naredimo za vsa moštva v predtekmovalni skupini v vseh predtekmovalnih skupinah. To ponovimo za moštva, ki so se uvrstila v osmino finala, četrtfinale, polfinale in finale. Upoštevamo tudi morebitne podaljške in streljanja enajstmetrovk. Tako pridemo do napovedi svetovnega prvaka. Napoved ima zelo majhno težo, ker je popolnoma odvisna od naključja. Če pa računalnik račun stotisočkrat ponovi, dobimo napoved, ki ob vseh pomislekih nekaj pove. Tako so dobili napoved 20,33 % verjetnosti, da Nemčija postane svetovni prvak in 79,67 % verjetnosti, da to ne postane. Če bi bila vsa moštva enakovredna, bi za vsako od njih verjetnost, da postane svetovni prvak, bila $1/32 = 3{,}13\,\%$. Le sedem moštev je imelo boljšo napoved. Posebej poudarimo, da je to napoved verjetnosti, da postane moštvo svetovni prvak in ne pove ničesar o razvrstitivi na naslednja mesta. Preglednica kaže rezultate računa. Kot vidimo, je napoved zadela. O teži te in podobnih napovedi ne recimo nobene. Znano je, da napovedi utegnejo vplivati na izid dogajanja. Ni pa znano, ali so nemški nogometaši vedeli za napoved.

Nemčija	20,33 %	Švica	0,64 %
Nizozemska	18,61 %	Belgija	0,64 %
Anglija	11,67 %	Kolumbija	0,52 %
Bosna in Hercegovina	11,34 %	Južna Koreja	0,34 %
Gana	10,96 %	Urugvaj	0,30 %
Brazilija	9,04 %	Avstralija	0,26 %
Slonokoščena obala	3,42 %	Nigerija	0,19 %
Argentina	2,28 %	ZDA	0,15 %
Alžirija	1,54 %	Honduras	0,12 %
Japonska	1,39 %	Kostarika	0,11 %
Italija	1,14 %	Ekvador	0,11 %
Rusija	1,13 %	Hrvaška	0,09 %
Francija	1,10 %	Kamerun	0,07 %
Portugalska	0,99 %	Grčija	0,06 %
Čile	0,81 %	Iran	0,02 %
Španija	0,65 %	Mehika	0,00 %

Dinamika nogometa

Nogometa se ne lotevamo samo statistično. V športnih in fizikalnih raziskovalnih revijah ga obravnavajo tudi z drugih strani. Letos so štirje japonski raziskovalci v European Physical Journal B objavili članek *Pojav samopodobnosti v dinamiki nogometa*. Z digitalno televizijsko kamero so dve nogometni tekmi posneli od začetka do konca. Za to so izbrali polfinale svetovnega nogometnega pokala med zmagovalcema azijskega in oceanijskega območja leta 2008 in tekmo japonske lige leta 2011.

Zasledovali so lege vseh igralcev in žoge med vso tekmo. Iz dobljenih podatkov so izluščili gibanje *čelne črte* in žoge. Čelna črta je pokazala, kako je eno in drugo moštvo osvajalo igrišče. S koordinatama igralca so izračunali zapleten izraz in sešteli prispevke vseh igralcev moštva. Z zahtevo o zvezi med vsotama za obe moštvi so dobili od časa odvisni podatek, to je čelno črto. Izračunali so hitrost čelne črte in hitrost žoge. Obsežnega računanja ne bi zmogli brez računalnika. Pozornost je zbudila ugotovitev, da je časovna odvisnost lege čelne črte *samopodobna*. V odvisnosti v časovnem razmiku osmih sekund so se pokazali podobni vrhovi in doline kot v odvisnosti v časovnem razmiku 80-ih sekund. Vsak igralec se po svoji odločitvi nenehno prilagaja položaju igralcev svojega moštva, nasprotnikov in žoge na igrišču. Pokazalo se je, da je bilo gibanje igralcev v danem trenutku na določen način odvisno od

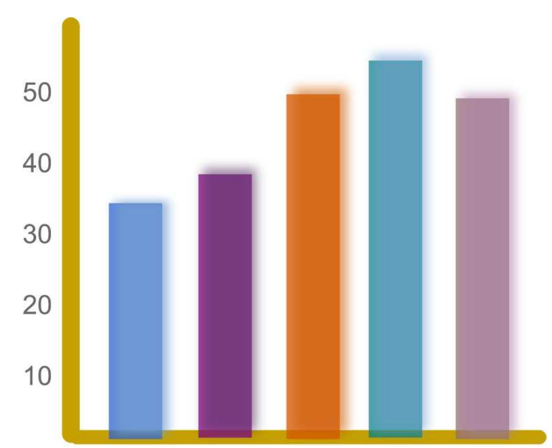


SLIKA 4.
Lega čelne črte v odvisnosti od časa pri treh različnih merilih kaže podobne oblike. Taka samopodobnost je značilna za fraktale (po članku iz The European Physical Journal B).

prejšnjega gibanja, kot da bi igra imela spomin. Ta lastnost je značilna za fraktale. Po tem je bilo mogoče sklepati, da so za nogomet značilne enačbe, ki jih fiziki poznajo pri *ulomljenem Brownovem gibanju*. Pisci članka so sklepali, da se prav zaradi tega razmere na igrišču nenehno tako spreminjajo, da nogomet ne more postati dolgočasen.

× × ×

Nagradna križanka



AVTOR MARKO BOKALI

DOMIŠ-LJAV ČLOVEK GIZDALI SNOB

NAJKRAJ POVEZAV DVEH TO NA POVR JU KROGI

SUŠNA TRAVNAT POKRAJI

LESNI KATRAI

ELEKTR TEHNIK TESLA

OBČINSKO SREDIŠČE JUŽNO OD LJUBLJANE | VEČJI PTIČ PEVEC | SKUPINA ČLOVEŠTVA | PRITOK DONAVE IZ ROMUNIJE | DELO KAMER-MANOV | FILOZOF HRIBAR | NAŠ PESNIK (ANTON) | ENAKA SOGLA-SNIKA | LEŽEČA PISAVA, KURZIVA | IGRALKA KRAJNC

GRAFIČNO OBLIKO-VANJE, MATEVŽ BOKALIČ | NAŠ PRVI KLASIČNI KITARIST (STANKO) | OBRTNA DEJAV-NOST | NADALJNJE BIVANJE | NAJHIT-REJŠA DIVJA MAČKA | ŠVEDSKI SMUČARSKI CENTER | NAUK O MIRU-JOČIH KAPLJE-VINAH

ZA TEKMO-VANJE DOLOČENA IN URE-JENA POT | GOSPODAR. PODROČJE IGER NA SREČO | TRŽIŠČE

AMERIŠKA IGRALKA (JULIA) | KRAJ PRI TRBOVLJAH | TEMPERA-TURNI OBRAT | GOROVJE V JUŽNI SIBIRIJI | SLIKAR JAKOPIČ

IZVE-DENSKO MNENJE | NIZ. FIZIK (SIMON VAN DER) | AM. IGRA-LEC (SEAN) | MITIČNI ANG. KRALJ | OPREMLJA-NJE KONJA ZA JEŽO

TOČKA Z IZMER-JENO NAD-MORSKO VIŠINO | TOLKALO V OBLIKI VISEČE KOVINSKE PLOŠČE | PASCAL | GERMANIJ | REDKA ZVER | ANTIČNO MESTO NA SICILIJI | PARADI

NADARJENOST, TALENT | NEMŠKI TISKARSKI PIONIR (FRIEDRICH) | ZELEN-JADNICA JEDILNI OSLEZ | GIUSEPPE VERDI | NEMŠKI POLITIK | SL. ANTRO-POLOG (BOŽO)

JAPONSKA BORILNA VEŠČINA Z BAMBUS. MEČI | IZHOD IZ ZAGATE | NAJVEČJA BOLGARSKA LUKA | MESTO V JUŽNI TURČIJI | ODJEM PRIDELKOV

NORVEŠKI BIATLONEC BJÖRN-DALEN | EGIP-ČANSKI KRALJ | LASTNOST KAMENE VOLNE | HITRO POVEČNAJE

IME VEČ ŠKOTSKIH REK | EGIPČAN. KRALJ | STARA DOLŽINSKA MERA | REKA V SZ. BOSNI, PRITOK SAVE | ZBIRKA STARO-NORDIJ. PESNITEV | TESLA | SANJAV NOČNA SKLADB | HOKEJIS MURŠAI

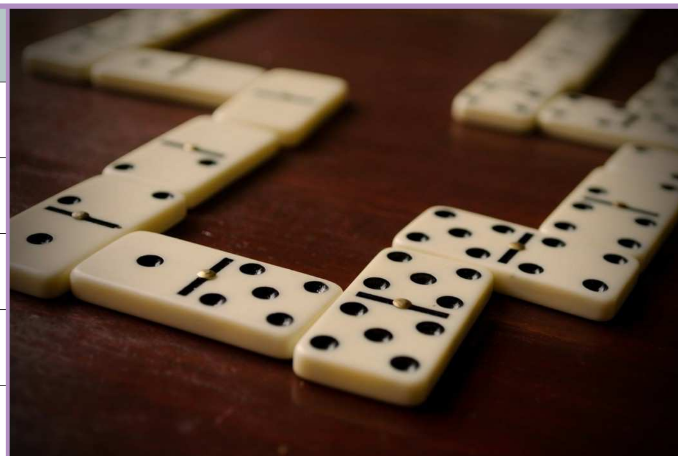
NOVI TESTA-MENT | DVOJICA | JUGO-ZAHOD | MESTO V JUŽNI SIBIRIJI | ANDREJ HIENG | OBDELAN KOS POLJA | NARAVNI LOGA-RITEM

NAREDI SE POZIMI V MRAZU IN MEGLI | MOČNO UMETNO VLAKNO | CEVASTI ELEMENTI ZA GRADNJO DIMNIKA

STRNJEN DREVESNI SESTOJ | STARA GRKINJA | SVETLO SIVA KAMNINA NAŠIH ALP

1 3 4 7 10

ZIKALNA OLIČINA, NAČENA GRŠKO RKO RO | NIKARAGOVSKI DRŽAVNIK (DANIEL) | CIKLIČNA ORGANSKA SPOJINA V CELICAH ŽIVIH BITIJ | ZABAVNA GLASBA | SLAVILNA PESEM | ŠPELA ROGELJ | MAJHNO VODNO PLOVILO | SIR Z VELIKIMI LUKNJAMI | PRIPRAVA Z UKRIVLJENIM KONCEM



2

8

BOLGARSKA DENARNA ENOTA

ASTAT

PREMIER CERAR

IGRALKA HATHAWAY

MOŠTVO

TONE LAPAJNE

NEKD. ČEŠ. DRŽAVNIK (EDVARD)

PREDSEDNIK SAZU (TADEJ)

ANG. NARAVOSLOVEC

SEŠTEVANEC | PRITOK DRAVE PRI LIENZU V AVSTRIJI | OBMEJNA VAS OB SOTLI PRI PODČETRTKU | JUNAK IZ OPERE JAKOVA GOTOVCA | KOREJSKA ZNAMKA ELEKTRONSKIH APARATOV | BRUS ZA KOSO | LAHKA KOVINA SVETLO SIVE BARVE | PRIPRAVA S KONICO ZA MERJ. ELEKTRIČ. NAPETOSTI

KRADLJIVEC

NAJSVETL. ZVEZDA V ORIONU

KOS POSTELJNINE

OBARVANOST LAS NA STAROST

STANKI OD ISKANJA PLODOV

URČIJA

RUSKI SKLADATELJ (MODEST)

IGRALEC GUINNESS

JUTRANJA ZGODNOST

KRAJ OB SOTLI

GLAVNO MESTO JAPONSKE

6

NAŠA OBLIKOVALKA (JANJA)

LJ. POKOPALIŠČE

BLAŽ ŠVAB

SKUPINA AFRIŠKIH LJUDSTEV

KLADA ZA SEKANJE

AVSTRIJ. PISATELJ (JOSEF)

NAŠA PEVKA

33. ČRKA GLAGOLSKE AZBUKE

NAŠ SKLADATELJ, GLASBENI PEDAGOG N DIRIGENT (TOMAŽ)

OSPODARSKO POMEMBEN TROPSKI GRM

TOČKA (V ŠPORTU)

PLESOTVORNI ZLOG

KOROZIJA NA ŽELEZU

PRILAGODILNI VMESNIK

DECILITER

NIZOZEMSKA

SOBNI PTIČEK

STARO SIRSKO MESTO

11

3. SKLON, DATIV

VRTLJAJ, ZASUK

PROVINCA V KANADI

ORIENTAL. UTEŽNA MERA

TRAVNIŠKA KRMNA RASTLINA

MIŠI PODOBNA ŽIVAL

REKA V NEMČIJI, PRITOK RENA PRI DUISBURGU

NEVARNA STRUPENJAČA

PEVKA MILČINSKI

5

NASILNA PRILASTITEV TUJE STVARI

KITAJSKA DENARNA ENOTA

SAMARIJ

POLJE ZUNAJ IGRIŠČA

TELUR

RUSKO-NEMŠKI SKLADATELJ (ALFRED)

9

FRANCOSKO LOVSKO LETALO

100 m^2

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **5. avgusta 2015**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

Izjemen uspeh naših mladih astronomov na 22. sanktpeterburški astronomski olimpijadi

Andrej Guštin

Pod okriljem DMFA Slovenije so se naši osnovnošolci in srednješolci na povabilo ruskih kolegov prvič udeležili mednarodnega tekmovanja iz znanja astronomije, ki ga organizira Sanktpeterburška šola astronomije oz. tamkajšnja univerza. Tekmovanje je namenjeno učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem, udeležuje se ga več tisoč tekmovalcev iz približno desetih držav, v Rusiji pa velja kot državno tekmovanje. Letos smo pri nas tekmovanje organizirali pilotsko, kar pomeni, da so se ga udeležili tekmovalci le iz nekaterih najbolj zainteresiranih šol – OŠ Turnišče in OŠ Orehek, Gimnazije Bežigrad, 1. gimnazije v Celju, ERSŠG Ljubljana in Gimnazije Murska Sobota. V Rusiji je tekmovanje tristopenjsko: področno, izbirno in finalni krog. Slovenski tekmovalci so se tekmovanju pridružili v izbirnem krogu. V finalni krog, ki smo ga organizirali na Univerzi Nova Gorica in na OŠ Turnišče, se je uvrstila večina naših tekmovalcev in se odlično odrezala.

Slovenski tekmovalci so v različnih kategorijah prejeli tri prve nagrade, dve drugi in sedem tretjih nagrad. Rezultate si je mogoče ogledati na spletnem naslovu `http://school.astro.spbu.ru/?q=node/482`.

Med osnovnošolci je Jurij Šumak prejel prvo nagrado, Alen Gazdag drugo, Leon Jerebic pa tretjo (vsi OŠ Turnišče).

Med srednješolci sta prvo nagrado prejela David Opalič (1. gimnazija v Celju) in Aleksej Jurca (Gimnazija Bežigrad). Drugo nagrado je prejel Mitja Hofer (Gimnazija Bežigrad). Tretjo nagrado so prejeli Zala Potočnik, David Popović, Jakob Robnik (vsi Gimnazija Bežigrad), Timen Stepišnik, Urška Andrenšek (oba 1. gimnazija v Celju) in Aljaž Eržen (ERSŠG Ljubljana).

Nagrajencem in njihovim mentorjem čestitamo za izjemen uspeh! Čestitamo tudi vsem ostalim udeležencem tekmovanja in se jim zahvaljujemo za sodelovanje. Za uspešno organizacijo tekmovanja se zahvaljujemo DMFA Slovenije, še posebej članom Komisije za astronomijo. Zahvaljujemo se Univerzi Nova Gorica in dekanu prof. dr. Samu Staniču, ki je omogočil finalni del tekmovanja.

Vodja tekmovanja za Slovenijo in prevajalec nalog je Andrej Guštin.

Primeri nalog izbirnega dela tekmovanja

7. / 8. razred osnovne šole

Indijanec Modra Sova je od doma odpotoval ob mlaju, da bi v bližnjem mestu prodajal kože. Svoji ženi, Prijazni Lisici, je obljubil, da se bo vrnil ob naslednji polni Luni. Koliko časa je Modra Sova nameraval biti odsoten od doma?

Med planeti v Osončju se najhitreje giblje Merkur, najpočasneje pa Neptun. Razporedi vse planete v Osončju od najpočasnejšega do najhitrejšega.

9. razred osnovne šole / 1. letnik srednje šole

Zamisli si, da si pozno zvečer teleskop usmeril proti neki zvezdi in ga nato v tej legi zaustavil. Zaradi vrtenja Zemlje bo zvezda kmalu zapustila vidno polje teleskopa. Naslednji večer je nebo spet jasno, gledaš skozi teleskop, ki ga nisi prav nič premaknil, in čakaš, da se bo v vidnem polju pojavila ista zvezda. Bo ta zvezda res prišla v vidno polje teleskopa? Ali bi bil odgovor lahko drugačen, če bi namesto zvezde opazoval Lune?

Znano je, da lahko planete na nebu prepoznamo, ker se njihova lega glede na zvezde spreminja. V katero smer, glede na zvezde, se giblje Jupiter v času opozicije?

2. letnik srednje šole

Jupiter in Saturn sta sočasno v kvadraturi. Izračunaj razdaljo med planetoma.

Vesoljska ladja potuje od Zemlje do Marsa po energijsko najugodnejšem tiru. Kolikšen je kot med smerjo proti Zemlji in smerjo proti Marsu, gledano s Sonca, v trenutku, ko je vesoljska ladja poletela od Zemlje? Izračunaj ta kot še v trenutku prihoda vesoljske ladje do Marsa. Predpostavi, da sta orbiti Zemlje in Marsa krožni in da se planeta gibljeta v isti ravnini. Polmer Marsove orbite je 1,5 astronomske enote.

3. letnik srednje šole

Amaterski astronom je neke noči videl, kako je geostacionarni satelit potoval natanko čez središče Lunine ploskvice na nebu. Koliko časa je trajal prehod satelita čez Lunino ploskvico?

Izsev neke zvezde je šestkrat večji od Sončevega izseva, svetlobni tok s te zvezde na Zemlji pa je $6 \cdot 10^{-14}$ W/m^2. Izračunaj oddaljenost te zvezde.

4. letnik srednje šole

Letalo se giblje enakomerno s hitrostjo 2000 km/h. Poletelo iz nekega kraja na ekvatorju in se giblje po loksodormi (krivulja, ki vse poldnevnike seka pod istim kotom) pod kotom 60 stopinj glede na poldnevnike. Kje bo letalo pristalo in koliko bo trajal let?

Z vesoljske postaje je slučajno odpadel kovinski predmet kvadratnega preseka debeline $a = 10$ cm in dolžine L. Kolikšna je njegova dolžina L, če vemo, da se predmet vtri in se mu med vrtenjem sij spreminja za 1 magnitudo?

Primeri teoretičnih nalog finalnega dela tekmovanja

7. / 8. razred osnovne šole

Ker je Jupiter plinasti planet, se njegova vrtilna doba na različnih širinah (oddaljenost od Jupitrovega ekvatorja) razlikuje. Ekvatorialni pas Jupitra se enkrat okoli osi zavrti v 9 urah in 50 minutah, od ekvatorja najbolj oddaljeni pas pa v 9 urah in 55 minutah. Izračunaj razliko v trajanju Jupitrovega leta na različnih širinah, izraženo v Jupitrovih dnevih, če veš, da en obhod Jupitra okoli Sonca traja 12 zemeljskih let.

9. razred osnovne šole / 1. letnik srednje šole

4. februarja 2015 je šla na nebu Luna 5° južno od Jupitra. Izračunaj oddaljenost med Zemljo in Jupitrom v tem trenutku, če veš, da je bilo v noči iz 25. na 26. februar 2015 is Sankt Peterburga mogoče opazovati okultacijo (zakritje) Aldebarana z Luno. Polmer Jupitrove orbite okoli Sonca je 5 astronomskih enot.

2. letnik srednje šole

Astronom, ki je nebo opazoval na severu Avstralije, je v noči pred Sončevim mrkom 14. novembra 2012 ugotovil, da lahko Magellanova oblaka uporabi za določanje časa. V nekem trenutku je astronom opazil, da je namišljena zveznica med Malim in Velikim Magellanovim oblakom na nebu vzporedna z obzorjem. Koliko časa je astronom od takrat še moral počakati do začetka Sončevega mrka, če se je ta v njegovem opazovališču začel ob vzidu Sonca?

Ekvatorialne koordinate Velikega Magellanovega oblaka: rektascenzija $\alpha_1 = 5\text{h}\,30\text{min}$, deklinacija $\delta_1 = -70°$.

Ekvatorialne koordinate Malega Magellanovega oblaka: rektascenzija α_2 = 1h 00min, deklinacija $\delta_1 = -70°$.

3. letnik srednje šole

Zgodbica iz Gospodarja prstanov gre nekako takole. V središču mesta Valinor je drevo Laurelij, ki s svojo svetlečo krošnjo osvetljuje mesto. Znano je, da je navidezni sij njegove krošnje pri koreninah drevesa (pod krošnjo pri tleh) enak Sončevemu, meja Valinora pa je tam, kjer je sij njegove krošnje enak siju polne Lune na nebu. Drevo je začelo rasti iz majhne sadike na začetku časa, pri čemer je vsako leto zraslo za 1 meter. Izrazi polmer Valinora v odvisnosti od časa. Predpostavi, da se Valinor nahaja na planetu, katerega polmer je enak polmeru Zemlje.

4. letnik srednje šole

Kot je znano, črne luknje sčasoma »izhlapevajo«, pri čemer sevajo kot črna telesa. Valovna dolžina pri največjem izsevu v spektru črne luknje je enaka gravitacijskemu polmeru črne luknje. Oceni čas od trenutka, ko je izsev črne luknje enak izsevu Sonca, in trenutkom, ko črna luknja popolnoma »izhlapi«. V katerem delu elektromagnetnega spektra črna luknja najbolj seva (pri kateri valovni dolžini je maksimum v spektru), ko je njen izsev enak Sončevemu?

Finalne naloge praktičnega dela tekmovanja

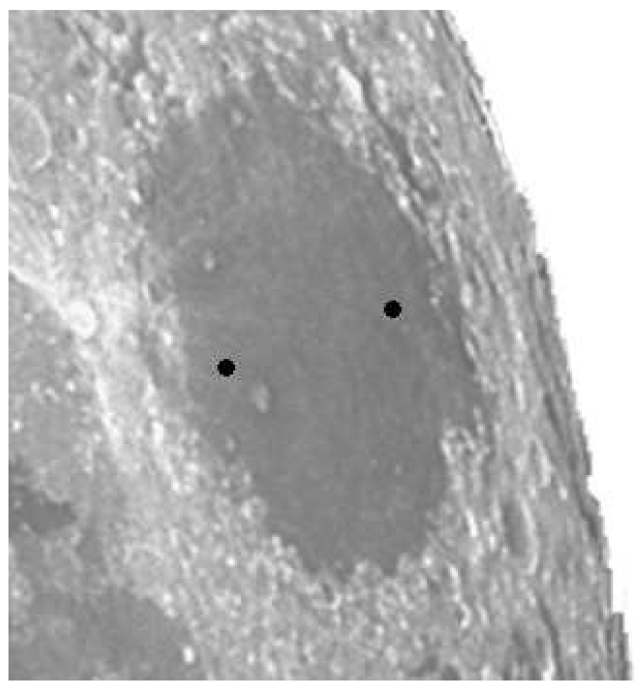
7. / 8. razred osnovne šole

Na sliki 3 je fotografija ploskvice Sonca, čez katero gre planet. Kateri planet je to? Svojo trditev utemelji. Denimo, da gre planet natanko čez sredino ploskvice Sonca (prečka ploskvico po premeru). Oceni čas, v katerem planet prečka ploskvico Sonca.

9. razred osnovne šole / 1. letnik srednje šole

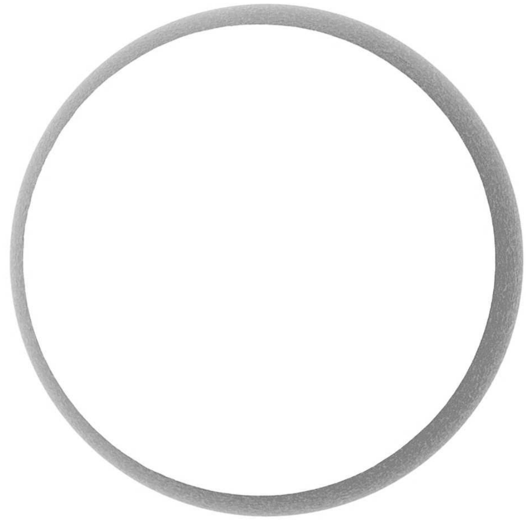
Na površju Lune na območju Morja kriz je robotsko raziskovalno vozilo, ki se je po najkrajši poti premaknilo iz ene v drugo točko. Točki sta označeni na sliki 4. Določi dolžino poti, ki jo je prevozilo vozilo, in rezultat opremi z oceno merske napake. Polmer Lune je 1737 ± 1 km. Na sliki 5 je vsa vidna ploskvica Lune. Posnetka Lune sta bila narejena z Zemlje.

SLIKA 3.



SLIKA 4.

SLIKA 5.



SLIKA 7.

2. letnik srednje šole

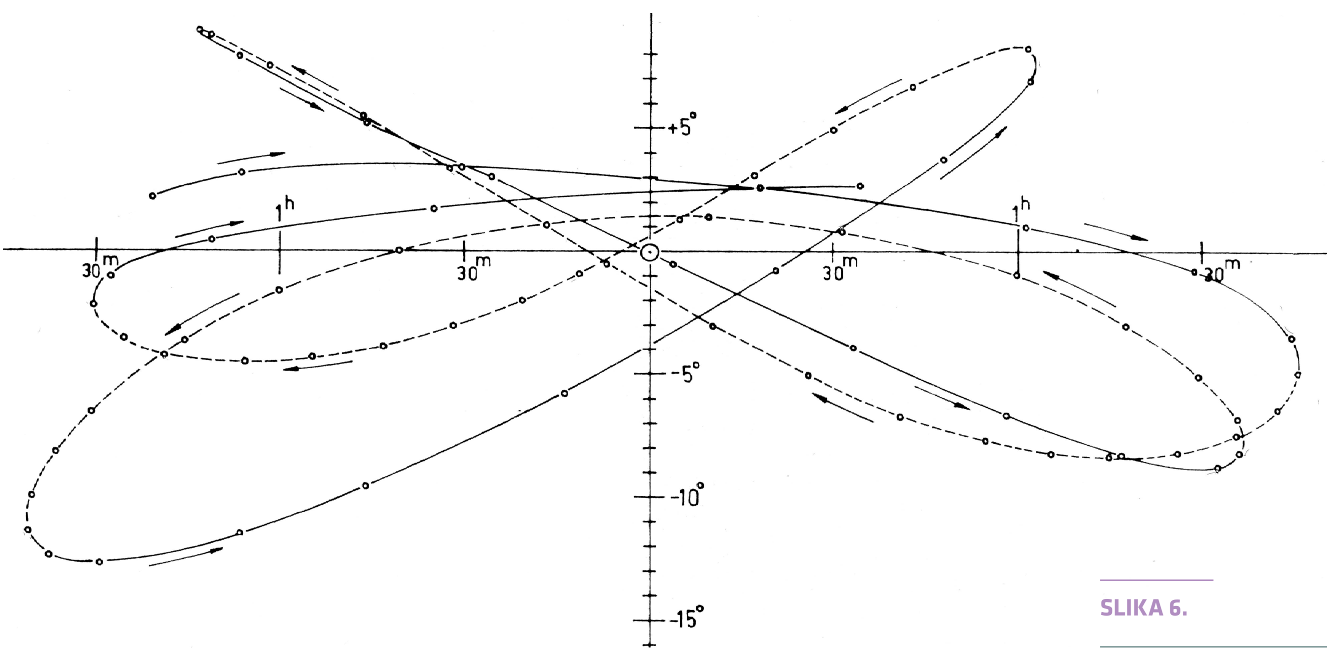
Na sliki 6 je prikazano navidezno gibanje nekega planeta na našem nebu glede na Sonce. S točkami so označene lege planeta v enakih časovnih intervalih. Začetna točka označuje lego planeta 1. januarja nekega leta. Na abscisi je razlika med rektascenzijo planeta in Sonca, na ordinati je razlika med deklinacijo planeta in Sonca.

Ugotovi, kateri planet je to.

Določi datume, ko je planet na nebu najbolj oddaljen od Sonca (največja elongacija).

Določi datum, ko je planet šel čez ploskvico Sonca.

Rezultate opremi z mersko napako.



SLIKA 6.

3. letnik srednje šole

Na sliki 7 je negativ fotografije kolobarjastega Sončevega mrka.

Oceni magnitudo vidnega kolobarja Sonca, ki ga Luna ni zakrila, če veš, da je je v fotosferi Sonca temperatura funkcija optične globine τ:

$$T = T_{\mathrm{eff}} \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\tau}\,, \quad \text{kjer je } T_{\mathrm{eff}} = 5778\ \mathrm{K}.$$

Upoštevaj tudi to, da iz točke na Sončevi ploskvici, ki je za kot θ oddaljena od središča ploskvice, do nas prihaja svetloba iz optične globine $\tau = \cos\theta$ (glej sliko 8).

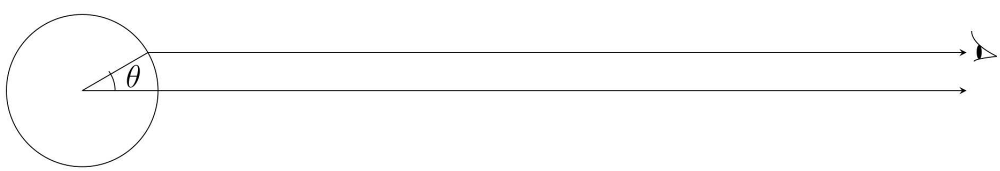
4. letnik srednje šole

Na sliki 9 je zapis signala na različnih kanalih, ki je nastal z radioteleskopom BSA pri delovni frekvenci 110,25 MHz. Znano je, da vsi kanali zajemajo signal v smeri nebesnega meridiana, da je širina (kotna ločljivost) vseh kanalov enaka, enaka je tudi razlika frekvenc med sosednjimi kanali (med srednjo vrednostjo frekvence, ki jo zajema kanal). Zgoraj je zapisan zvezdni čas v urah in minutah, spodaj pa moskovski čas v urah in minutah.

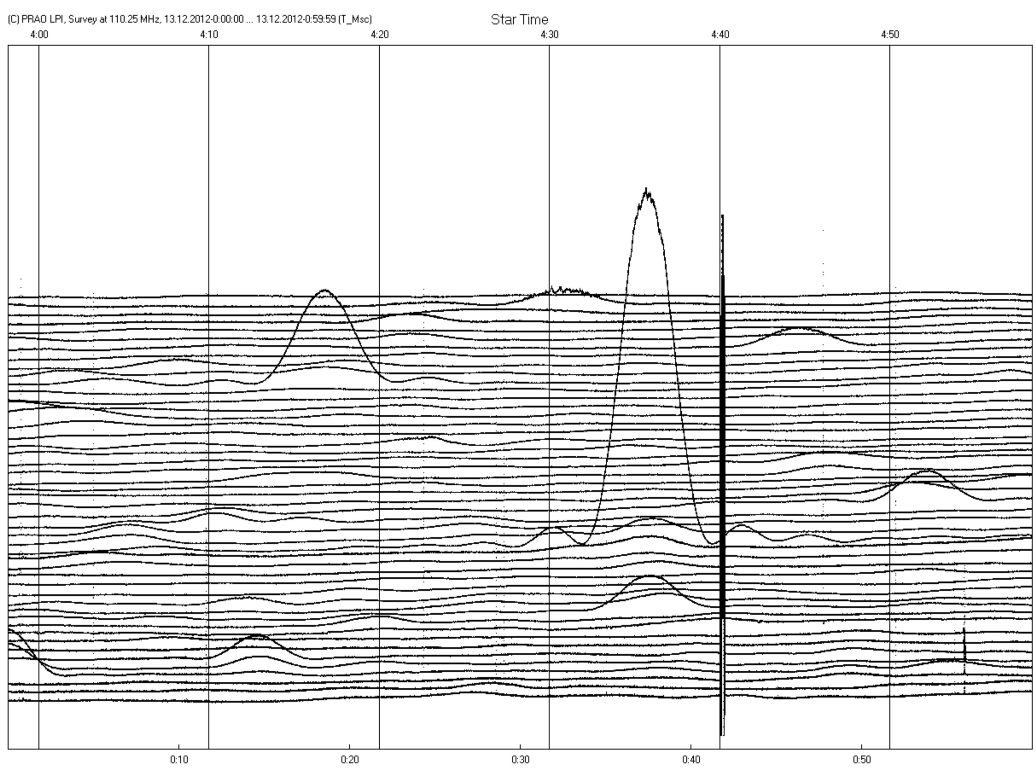
Oceni kotno ločljivost radioteleskopa.

Oceni interval merjenih frekvenc, ki so zajete s kanali.

Oceni napako svojih rezultatov.



SLIKA 8.



SLIKA 9.

× × ×

O histogramih

Primož Peterlin

Histogram je grafični pripomoček za prikaz množice meritev zvezne številske spremenljivke. Prispevek predstavi konstrukcijo histograma, kumulativni histogram, razliko med histogramom in stolpičnim diagramom, težave s histogrami, za konec pa se pomudi še ob ocenjevanju porazdelitve z jedri.

Od podatkov do histograma

Pri fizikalnih meritvah pogosto merimo vrednost ene količine v odvisnosti od druge, npr. napetost na kondenzatorju v odvisnosti od časa. Še preprostejše pa so meritve, pri kateri merimo vrednosti ene same količine, npr. telesno višino učencev v razredu ali število jedrskih razpadov, zaznanih z Geiger-Müllerjevo cevjo. V statistiki takšnim primerom, pri katerih imamo opravka z eno samo spremenljivko (telesna višina, število razpadov v časovni enoti), pravimo univariatni, za razliko od bivariatnih, kadar sta spremenljivki dve, ali v splošnem multivariatnih.

Vsi učenci niso enako visoki in v izbranem časovnem intervalu ne razpade vedno enako število jeder, zato tako zbrani podatki navadno niso vsi enaki. Za zgled smo zbrali rezultate 49-ih učencev dveh paralelk 6. razreda pri skoku v daljavo z mesta; rezultati so podani v centimetrih.

135	168	160	166	130	171	148	152
156	120	176	139	189	115	130	135
140	134	180	180	125	106	141	169
193	129	139	130	165	149	120	148
140	95	150	176	184	159	152	169
185	147	150	190	175	120	149	155
174							

Množica podatkov je nepregledna, zato želimo informacijo strniti in na preprost način predstaviti njene glavne značilnosti. Dva uporabna parametra za opis množice podatkov sta povprečje in standardni odklon. Prvi pove »težišče« podatkov, drugi pa, koliko se podatki med seboj razlikujejo. Standardni odklon je uporabno merilo za opis raznolikosti podatkov, včasih pa želimo vedeti še kaj več o tem, kako so podatki porazdeljeni. Ali obstaja ena takšna vrednost, okrog katere so izmerjene vrednosti posejane pogosteje kot sicer, ali pa morda dve ali celo več takih vrednosti? So vrednosti okoli povprečja posejane simetrično ali niso? Pripomoček, s katerim lahko dobimo približno grafično sliko o porazdelitvi meritev univariatne številske spremenljivke, je *histogram*.

Kako se lotimo priprave histograma? Podatke razvrstimo v *razrede* ali predalčke. V zgornjem zgledu, denimo, zberemo skupaj rezultate med 91 in 100 cm, potem med 101 in 110 cm itd. Zgornjo in spodnjo mejo postavimo tako, da zajamemo vse podatke, širino predalčka pa izberemo tako, da se kar najbolj pokaže oblika porazdelitve. Prevelika širina predalčka bo morda zgladila in skrila kakšno sicer morda zanimivo lastnost porazdelitve, ob premajhni pa bo v posameznem predalčku premalo podatkov in prevladale bodo naključne razlike. Ko bomo končali, bo število v posameznem predalčku govorilo o tem, kako pogosto se določene vrednosti pojavljajo v vzorcu; pogostosti se s tujko pravi tudi *frekvenca* (ki pa s frekvenco pri nihanju in valovanju nima neposredne zveze).

Razvrščanje podatkov v predalčke je na srečo posel, ki ga dobro obvladajo programi za obdelavo podatkov. Za zglede v prispevku bomo uporabili prosti programski paket GNU R (`http://www.r-project.org/`), o katerem smo v Preseku že pisali [2].

```
# datoteka z dolžinami skokov
x <- scan("skoki.txt")

hist(x, main=NULL,
     xlab = "dol\u017Eina (cm)",
     ylab = "frekvenca")
```

Programček je tako kratek, da o njem skoraj ni kaj povedati. Z ukazom `scan()` v vektor `x` preberemo podatke iz datoteke `skoki.txt`, kjer je v zapisana po ena vrednost v vrstici. Klic funkcije `hist()`, ki ji vektor `x` podamo kot argument, opravi vse ostalo: vrednosti razvrsti v razrede in izriše histogram. Ker imamo podpis pod sliko, se odrečemo naslovu histograma (`main=NULL`), z izbirama `xlab` in `ylab` pa nastavimo oznaki na abscisi in ordinati. V oznakah lahko uporabimo tudi znake izven nabora ASCII; prikličemo jih s kodami ISO10646/Unicode. Rezultat vidimo na sliki 1a. Vidimo, da je `hist()` samodejno izbral povsem razumne meje intervalov. Če z njegovo izbiro ne bi bili zadovoljni, bi lahko z izbiro `breaks=` sami določili meje razredov.

Prikaz frekvence (števila v posameznem podatkovnem razredu) ni edina mogoča predstavitev histograma. Če število v vsakem razredu delimo s številom vseh meritev v vzorcu, dobimo relativne frekvence, npr. 1/49 = 0,02 ipd. Če pa relativno frekvenco delimo še s širino razreda, tak histogram prikazuje *gostoto verjetnosti*. Programček v tem primeru popravimo tako, da funkciji `hist()` dodamo izbiro `probability=TRUE`:

```
# datoteka z dolžinami skokov
x <- scan("skoki.txt")

hist(x, probability=TRUE, main=NULL,
     xlab = "dol\u017Eina (cm)",
     ylab = "gostota verjetnosti")
```

Rezultat je prikazan na sliki 1b. Gostota verjetnosti je definirana tako, da je skupna ploščina vseh stolpcev natanko 1.

Histogram in stolpični diagram

Histogram pogosto zamenjujejo s stolpičnim diagramom. Kljub temu, da so pri obeh podatki predstavljeni s stolpci, pa je razlika med njima precejšnja:

- Stoplpični diagram prikazuje frekvence na diskretni osi *kategorialne* spremenljivke, bodisi nominalne (npr. moški/ženske) bodisi ordinalne (npr. stopnja izobrazbe).
- Histogram je približek porazdelitve po *zvezni* spremenljivki.

Starost	Frekvenca
0–4	28
5–9	46
10–15	58
16	20
17	31
18–19	64
20–24	149
25–59	316
60+	103

TABELA 1.
Udeleženci prometnih nesreč v londonskem okrožju Harrow v letu 1985.

Razlika med obema je morda najbolj očitna v primeru, ko razredi niso enako široki (zgled je izposojen iz učbenika statistike, [2, str. 25]).

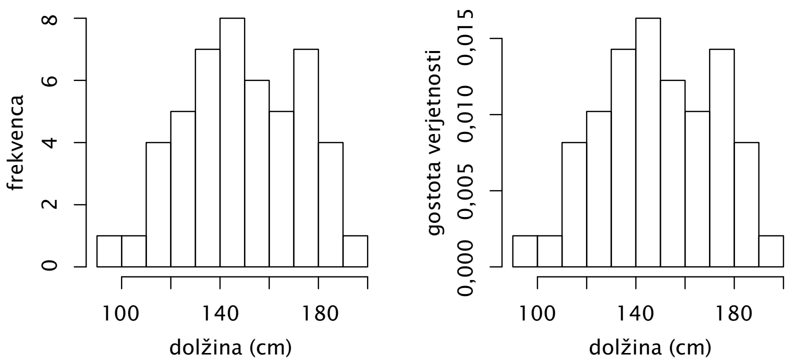
V londonskem okrožju Harrow so za leto 1985 zbrali statistiko udeležencev prometnih nesreč po starosti (tabela 1).

Podatke najprej prikažemo s stolpičnim diagramom.

```
vrednosti <- c(28, 46, 58, 20, 31,
     64, 149, 316, 103)
barplot(vrednosti,
     names.arg = c("0-4", "5-9",
          "10-15", "16", "17",
          "18-19", "20-24", "25-59",
          "60+"),
     xlab = "Starost (leta)",
     ylab = "\u0160tevilo")
```

Programček je spet zelo preprost. Vektor `vrednosti` vsebuje frekvence (desni stolpec v tabeli 2), stolpični diagram pa izrišemo s funkcijo `barplot()`, ki ji podamo ta vektor. Argument `names.arg` je vektor z oznakami za posamezne stolpce, `xlab` in `ylab` pa oznaki osi.

Rezultat programa je stolpični diagram, prikazan na sliki 2. Diagram pravzaprav ne pove več od tabele 1 in ne odraža porazdelitve udeležencev prometnih nesreč po starosti. Vidimo lahko, denimo, da je število odraslih udeležencev prometnih nesreč (torej tistih v starostni skupini 25–59 let) desetkrat



(a) (b)

SLIKA 1.
Histogram porazdelitve skokov v dolžino.

tolikšno kot število udeležencev, starih 17 let. Vendar prva skupina zajema dosti večji delež populacije kot druga, zato nam ta podatek sam po sebi ne pove veliko.

Predstavimo zdaj podatke iz tabele 2 kot histogram. Za razliko od primera na sliki 1 so predalčki tu različno široki.

```
meje <- c(0, 5, 10, 16, 17, 18, 20,
     25, 60, 80)
vrednosti <- c(28, 46, 58, 20, 31,
     64, 149, 316, 103)

mojhist <- list(breaks=meje,
     counts=vrednosti,
     density=vrednosti/diff(meje),
     xname=NULL)
class(mojhist) <- "histogram"

plot(mojhist, xlab="Starost (leta)",
ylab="\u0160tevilo na leto starosti",
main=NULL)
```

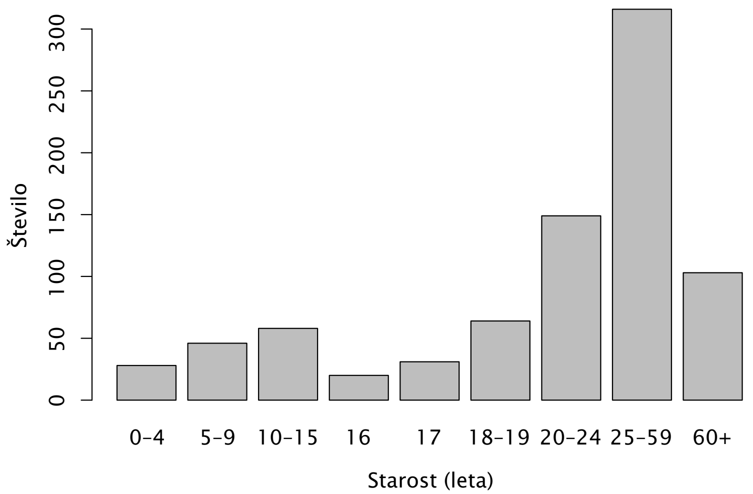
V tem primeru ne potrebujemo klica funkcije `hist()`, ki razvrsti podatke po predalčkih, saj je nekdo to že opravil namesto nas. V vektorju `meje` so shranjene meje razredov (najvišji interval smo omejili na 80 let), v vektorju `vrednosti` pa frekvence posameznih razredov. Zatem sestavimo seznam `mojhist` z elementi `breaks`, kateremu podamo meje; `counts`, kateremu podamo frekvence; `density`, kateremu podamo vrednosti, deljene s širino razreda; (`diff(meje)` vrne vektor razlik med zaporednimi elementi vektorja `meje`, kar so ravno širine razredov); naslova (`xname`) pa ne nastavimo. Potem uporabimo predmetno naravo jezika R in seznamu `mojhist`, ki smo ga ravnokar ustvarili takega, da že ima pravilno strukturo histograma, priredimo razred `histogram`. Končno histogram `mojhist` izrišemo s funkcijo `plot()`. Izbire `main`, `xlab` in `ylab` imajo enak pomen kot prej.

Rezultat je na sliki 3. Diagram se precej razlikuje od tistega na sliki 2. Vidimo lahko, da so mladostniki približno trikrat pogosteje udeleženci prometnih nesreč kot odrasli (ali tudi kot otroci). Slika 3 tudi nazorno pokaže, da je na histogramu frekvenci sorazmerna *ploščina* posameznega stolpca, ne pa njegova višina. Pri razredih enake širine sta ploščina in višina stolpca resda premo sorazmerni, kar lahko zavede.

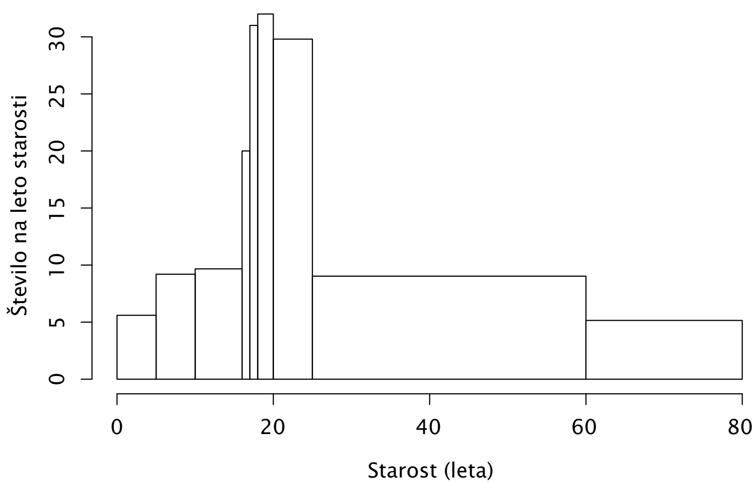
Kumulativni histogram

Iz histograma na sliki 1 lahko neposredno preberemo podatek o frekvenci posameznega razreda, denimo, koliko učencev je skočilo med 140 in 149 cm. Včasih pa nas zanima drugačno vprašanje: denimo, koliko učencev je skočilo manj kot 150 cm. Odgovor lahko seveda izračunamo, tako da seštejemo frekvence v razredih 90–99 cm, 100–109 cm in tako dalje do 140–149 cm. *Kumulativni histogram* (slika 4b) pa omogoča, da tak podatek preberemo neposredno iz diagrama. Poseben primer obrnjenega kumulativnega histograma so tudi krivulje preživetja, ki se uporabljajo v biomedicinskih vedah [4].

```
x <- scan("skoki.txt")
h <- hist(x, plot=FALSE)
h$counts <- cumsum(h$counts)
plot(h, main=NULL,
     xlab = "dol\u017Eina (cm)",
     ylab = "frekvenca")
```

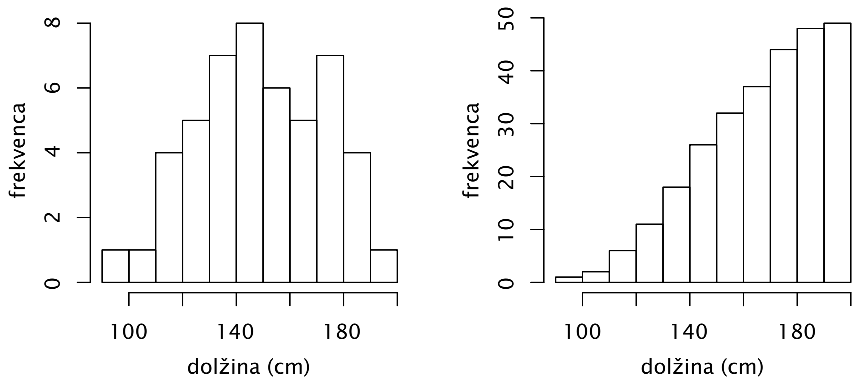


SLIKA 2.
Stolpični diagram števila udeležencev prometnih nesreč po starosti.



SLIKA 3.
Histogram števila udeležencev prometnih nesreč po starosti.

Oglejmo si še, kako v R pripravimo kumulativni histogram. Enako kot prej v vektor `x` preberemo podatke iz datoteke. Dve razliki pa sta pri funkciji `hist()`. Prva je ta, da smo ji podali izbiro `plot=FALSE`, s katero smo zahtevali, da histogram sicer izračuna (določi podatkovne razrede in vanje razvrsti podatke), a ga ne izriše. Druga pa je ta, da smo rezultat izračuna histograma shranili v spremenljivko `h`. Iz zgleda z razredi neenake širine že vemo, da je ta spremenljivka seznam; skladnja `h$counts` nam vrne element seznama `counts`, ki je vektor s frekvencami. V tretji vrstici histogram pretvorimo v kumulativni histogram s klicem funkcije `cumsum()`. Če ji podamo vektor dolžine n, bo vrnila vektor iste dolžine s kumulativnimi vsotami: na prvem mestu bo kar prvi element podanega vektorja na drugem mestu vsota prvih dveh elementov podanega vektorja, in tako dalje do zadnjega elementa, kjer bo vsota vseh elementov podanega vektorja. Vektor s kumulativnimi vsotami shranimo kot element `h$counts` histograma. Tako spremenjen histogram zdaj narišemo z ukazom `plot()`, ki mu podamo izračunani histogram `h`, izbire `main`, `xlab` in `ylab` pa imajo že znani pomen.



(a) (b)

SLIKA 4.
Histogram (a) in kumulativni histogram (b) porazdelitve skokov v dolžino.

Težave s histogrami

V prvem zgledu smo nekoliko zlahka odpravili izbiro intervala in določitev števila razredov. Čas je, da priznamo, da sta prav ti dve izbiri srž težav s histogrami. Posebej v primeru, če podatkov ni veliko, je histogram odvisen od izbire teh dveh parametrov.

Oglejmo si najprej zgled, kako na histogram vpliva izhodišče razredov. Levi diagram na sliki 5 že poznamo, pri desnem (slika 5b) pa smo izbrali razrede tako, da zaobjamejo vrednosti 95–104, 105–114 itd. V programčku smo to izvedli z izbiro `breaks=`, pri kateri smo uporabili funkcijo `seq()`. Tej smo podali tri parametre: prvi element, zadnji element in korak; funkcija vrne vektor z zaporedjem, ki sledi podanemu pravilu.

```
x <- scan("skoki.txt")
hist(x, main=NULL,
     breaks = seq(95, 205, 10),
     xlab = "dol\u017Eina (cm)",
     ylab = "frekvenca")
```

Vnaprej lahko uganemo, da večja širina razreda zgladi histogram, kar lahko vidimo tudi na sliki 6. Levi histogram uporablja privzete meje razredov (`breaks = seq(90, 200, 10)`), desni pa dvakrat tolikšno širino razredov (`breaks = seq(90, 210, 20)`). Problem izbire optimalnega števila razredov so precej preučevali in različni raziskovalci so prišli do različnih formul za optimalno število razredov. Altman kot praktični nasvet navaja [1], da je navadno dovolj 8–15 razredov, razen če je podatkov zelo veliko. Med bolj znanimi so še Sturgesova formula, $k = \lceil \log_2 n + 1 \rceil$, kjer je n število podatkov, k število razredov, $\lceil x \rceil$ pa označuje zaokroževanje navzgor, in Scottova formula $h = 3{,}5\hat{\sigma}/n^{1/3}$, kjer je $\hat{\sigma}$ standardni odklon vzorca, h pa širina razreda.

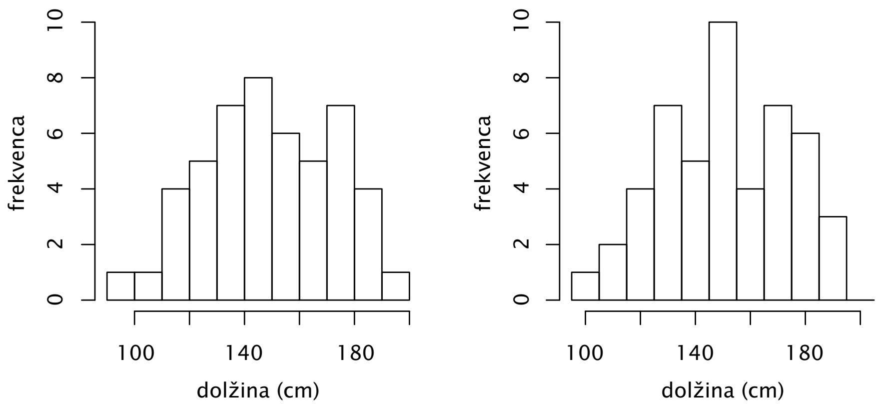
Kateri od histogramov je pravi? Pravega ali najboljšega histograma ni. Ne poznamo postopka, s katerim bi za poljubno porazdelitev vhodnih podatkov izračunali najboljši histogram. Na nas je, da s poskušanjem in spreminjanjem izhodišča in širine razredov izračunamo histogram, ki je sprejemljiv. Na srečo si lahko pomagamo z računalnikom, kar vsakokratno razvrščanje podatkov v razrede napravi skoraj hipno. Zato je histogram kljub naštetim pomanjkljivostim še vedno uporabno orodje za kvalitativno oceno eksperimentalnih porazdelitev.

Ocenjevanje gostote verjetnosti z jedri

Histogram ima zaradi svoje enostavne konstrukcije in interpretacije zagotovo svoje prednosti, vseeno pa se moramo glede na vse prej omenjene težave s histogrami vprašati, ali ne obstaja kakšen boljši način za oceno porazdelitve v vzorcu, pridobljenem s poskusom. Obstaja. Metoda je poznana kot ocenjevanje gostote z jedri (angl. kernel density estimation). Matematično je znatno bolj zapletena in preobsežna za ta članek. Osnovna zamisel pa je preprosta in jo bomo nakazali.

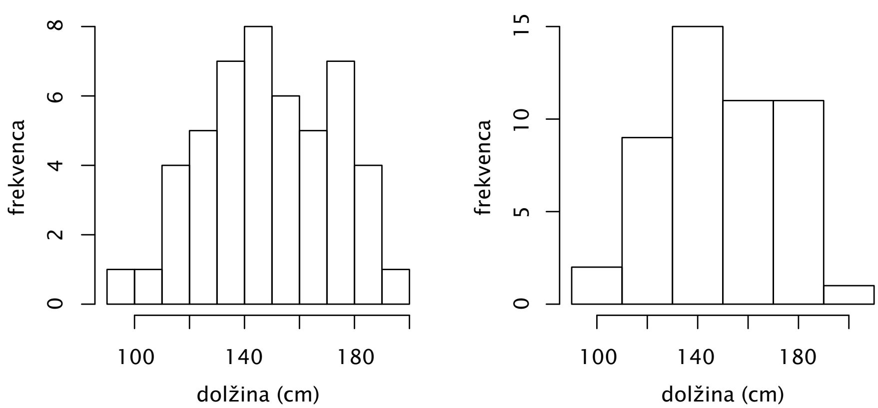
Za zgled si oglejmo vzorec 12-ih meritev (vrednosti nalašč ni preveč, da je primer preglednejši):

2,064	2,212	2,351	2,409	2,459	2,639
2,656	2,673	3,350	3,373	3,599	3,861



(a) (b)

SLIKA 5.
Histogram istih podatkov z enako širokimi razredi in različnim izhodiščem.



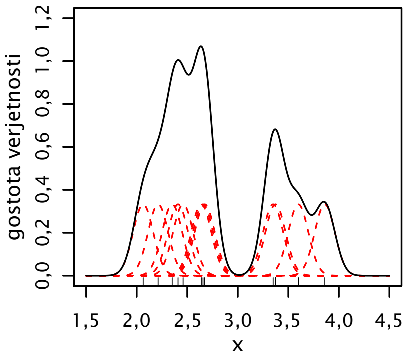
(a) (b)

SLIKA 6.
Histogram istih podatkov z različno širokimi razredi.

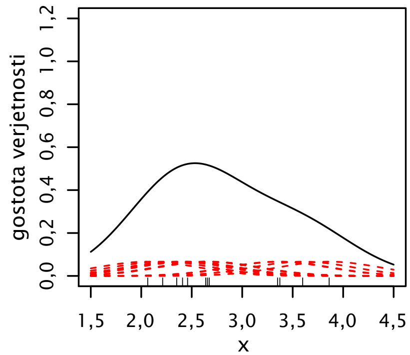
Ko smo konstruirali histogram, smo najprej izbrali izhodišče in širino razreda – v zgornjem zgledu bi lahko za izhodišče izbrali vrednost 2, za širino razreda pa 0,5. Če rišemo gostoto verjetnosti, vsaki od 12-ih meritev ustreza pravokotnik širine 0,5, kolikor je širina razreda, in višine 1/6, tako da je skupna ploščina vseh pravokotnikov ravno 1. Histogram dobimo tako, da pravokotnike zlagamo v odgovarjajočih razredih drugega vrh drugega kot kocke Lego.

Kot smo videli, je ena od težav s histogrami naša svoboda, da si prosto izbiramo izhodišče histograma. Namesto tega se zdaj lotimo zadeve drugače: pravokotnik, ki pripada posamični meritvi, narišemo tako, da sega za pol širine razreda levo in desno od izmerjene vrednosti. Pri prvi meritvi iz vzorca sta meji pravokotnika tako 1,814 in 2,314. Če se pravokotnika, ki pripadata dvema meritvama, delno prekrivata, oba prispevka seštejemo tako, da narišemo v delu, kjer se prekrivata, pravokotnik dvojne višine. Tako ostaja ploščina dobljenega lika enaka ploščini dveh pravokotnikov.

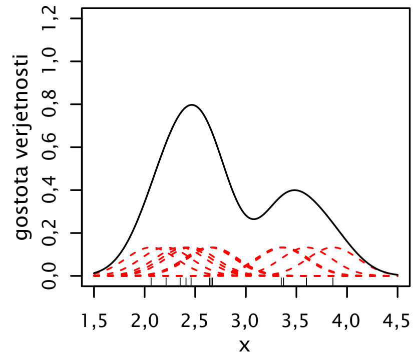
Ko bi z delom končali, bi dobili histogramu podoben diagram, ki pa bi že lepše prikazal porazdelitev podatkov v vzorcu. Ne bomo ga narisali, ker smo spotoma dobili še boljšo zamisel: namesto s pravokotnikom prispevek vsake meritve v vzorcu opišemo z »gladko« krivuljo, takšno, ki ima vrh pri vrednosti meritve, levo in desno od meritve pa simetrično pada, in to tako, da je ploščina pod krivuljo enaka 1/12. S tem odpravimo še eno težavo histograma, namreč to, da praviloma zvezne porazdelitve prikaže nezvezno stolpičasto. Res pa je, da je seštevanje gladkih krivulj prezamudno, da bi to lahko počeli ročno na milimetrskem papirju. A na srečo si lahko pomagamo z računalnikom.



(a)



(b)



(c)

SLIKA 7.
Ocenjevanje gostote verjetnosti z Gaussovimi jedri; (a) premajhno glajenje, (b) preveliko glajenje, (c) optimalno glajenje. Rdeče črtkane krivulje podajajo prispevke posameznih jeder, črna neprekinjena črta pa na osnovi jeder dobljeno gostoto verjetnosti. Črtice na notranji strani abscisne osi označujejo vrednosti meritev.

V zgledu prispevek vsake posamične meritve opišimo z Gaussovo porazdelitvijo, ki ima vrh pri vrednosti te meritve. Matematični funkciji, s katero opišemo prispevek posamične vrednosti, pravimo *jedro*. Skupno porazdelitev potem dobimo kot seštevek posamičnih prispevkov. Porazdelitev je odvisna tudi od širine Gaussovega jedra, ki jo podaja standardni odklon σ. Na sliki 7 so predstavljene porazdelitve gostote verjetnosti, dobljene z Gaussovimi jedri z različnimi vrednostmi σ: $\sigma = 0{,}1$ (a), $\sigma = 0{,}5$ (b) in $\sigma = 0{,}25$ (c). V R oceno gostote z jedri izračuna fukcija `density()`.

Na sliki 7 vidimo, da širina jedra močno vpliva na oceno gostote verjetnosti. To še ni vse: brez obrazložitve smo za jedro vzeli Gaussovo funkcijo, lahko pa bi tudi kakšno drugo. Smo torej sploh kaj na boljšem kot pri histogramih, ki smo jim očitali preveliko subjektivnost? Malo bolje je vseeno. Načeloma je naloga preprosta: optimalna, z jedri ocenjena porazdelitev je tista, ki se čimbolj ujema s pravo; težava pa je v tem, da prave porazdelitve ne poznamo, ampak bi jo radi šele ugotovili. Kljub vsemu obstajajo postopki, ki v asimptotičnem približku vodijo k optimalni jedrni funkciji in optimalni širini. Ne najnovejši, pa še vedno precej bran učbenik s tega področja je [3], področje pa se še vedno razvija.

Za konec povzamimo dobre in slabe lastnosti obeh pristopov. Histogram je preprosto konstruirati s svinčnikom in milimetrskim papirjem, preprosto ga je interpretirati in kljub težavam z arbitrarnostjo izbire izhodišča in širine razredov večinoma nudi grobo oceno za porazdelitev izmerjenih vrednosti. Ocena gostote z jedri je matematično bolj kompleksna, računsko zahtevnejša, nudi pa nekoliko boljšo oceno porazdelitve. Dostopnost zmogljivih računalnikov ter izvedbe v večini programskih jezikov in paketov pomenita, da je ta metoda, nekoč omejena na raziskovalne laboratorije, dostopna vsakomur. Zato je dobro, da tudi razumemo, kako deluje.

Literatura

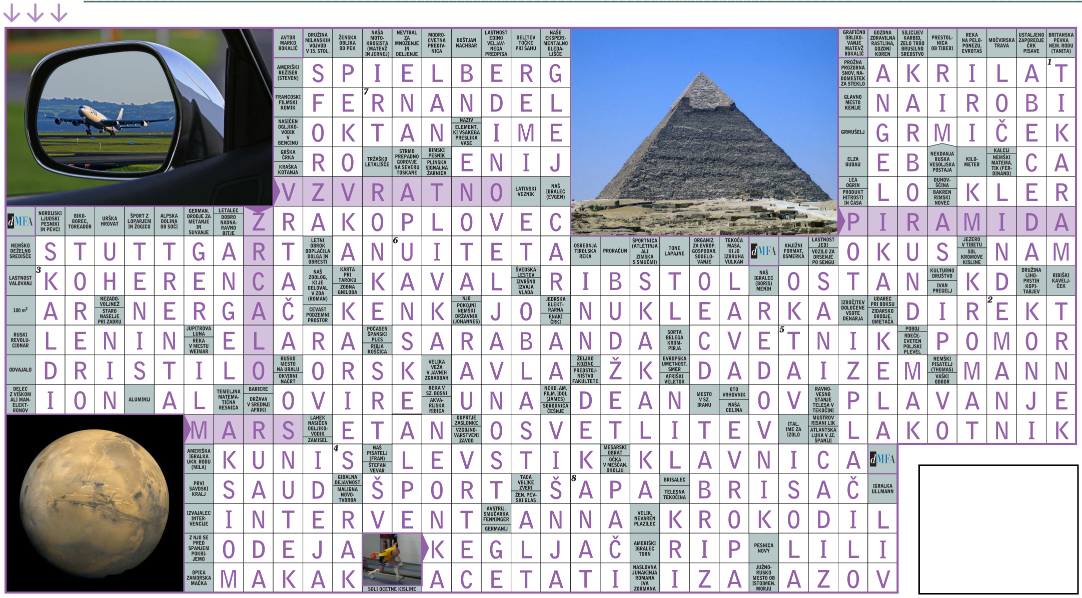
[1] D. G. Altman, *Practical statistics for medical research*, London: Chapman & Hall, 1991.

[2] P. Peterlin, *Obdelava meritev in risanje grafov z R*, Presek **37**, 24–30, 2010.

[3] B. W. Silverman, *Density estimation for statistics and data analysis*, London: Chapman & Hall, 1986.

[4] J. Stare, *Krivulje preživetja*, Medicinski razgledi **40**, 173–181, 2001.

× × ×



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 42/5

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz pete številke 42. letnika Preseka je **Tekstura.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Eva Čeč iz Postojne, Jože Pavlišič iz Črnomlja in Žiga Gosar iz Ljubljane, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Bistroumi 2015

Boštjan Kuzman

→ Letošnja slavnostna podelitev nagrad najuspešnejšim tekmovalcem iz državnih tekmovanj je potekala 24. maja v Hotelu Union v Ljubljani. Ob Mednarodnem letu svetlobe je nekaj ključnih mejnikov iz zgodovine fizike prisotnim predstavil častni gost, profesor dr. Janez Strnad, avtor številnih strokovnih in poljudnih del o fiziki. V vlogo barona Jurija Vege in podeljevanje Vegovih priznanj se je duhovito vživel študent dramske igre Nik Škrlec, sicer tudi zmagovalec slovenskega prvenstva v pomnenju in slovenski rekorder v recitiranju decimalk števila π z 1697 pravilnimi števkami.

Prireditev so popestrile še druge zanimive točke: glasbeni nastop odličnega mladega pianista Urbana Staniča, podelitev nagrad natečaja za astronomske videoposnetke, fizikalni eksperiment učencev OŠ Dravlje, pri podelitvi priznanj pa so kot običajno sodelovali tudi predstavniki različnih fakultet in drugih ustanov. Nagrajenci so si lahko brezplačno ogledali tudi razstavo »1001 izum – odkritja zlate dobe islamske civilizacije« na Gospodarskem razstavišču.

Ob koncu prireditve so se na odru zbrali še člani letošnjih ekip za mednarodne olimpijade iz matematike, fizike in astronomije. Skupaj z občinstvom so prisluhnili spominom astrofizika dr. Uroša Seljaka, danes izjemno uspešnega znanstvenika in direktorja Kozmološkega centra v Berkeleyu, sicer pa nekdanjega tekmovalca in udeleženca MMO leta 1984 v Pragi.

Fotografije s prireditve bodo predvidoma na voljo na spletnih straneh DMFA Slovenije. Olimpijcem želimo veliko uspeha na tekmovanju, vsem nagrajencem pa prijetne počitnice!

triglav

Prireditev Bistroumi 2015 sta podprla Zavarovalnica Triglav in razstava »1001 izum – odkritja zlate dobe islamske civilizacije«.

59. mednarodna matematična olimpijada, Chiang Mai, Tajska, julij 2015

- Amadej Kristjan Kocbek, II. gimnazija Maribor;
- Luka Lodrant, ŠC Ravne na Koroškem, Gimnazija;
- David Popović, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Jakob Jurij Snoj, Gimnazija Novo mesto;
- Lenart Treven, Škofijska klasična gimnazija, Ljubljana;
- Domen Vreš, ŠC Ravne na Koroškem, Gimnazija.

Evropska dekliška matematična olimpijada, Minsk, Belorusija, april 2015

- Klara Drofenik, I. gimnazija v Celju;
- Martina Lokar, Škofijska gimnazija Vipava;
- Klara Nosan, I. gimnazija v Celju;
- Timeja Strašek, I. gimnazija v Celju.

Srednjeevropska matematična olimpijada, Koper, Slovenija, avgust 2015

- Aleksej Jurca, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- David Opalič, I. gimnazija v Celju;
- David Popović, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Jakob Jurij Snoj, Gimnazija Novo mesto;
- Timen Stepišnik Perdih, I. gimnazija v Celju;
- Domen Vreš, ŠC Ravne na Koroškem, Gimnazija.

Mednarodna fizikalna olimpijada, Mumbai, Indija, julij 2015

- Tomaž Cvetko, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Jakob Jazbec, ŠC Srečka Kosovela Sežana, Gimnazija in ekonomska šola;
- Aleksej Jurca, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Blaž Karner, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor.

Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike, Java, Indonezija, julij/avgust 2015

- Jakob Jazbec, ŠC Srečka Kosovela Sežana, Gimnazija in ekonomska šola;
- Aleksej Jurca, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Darko Kolar, Gimnazija Murska Sobota;
- Jakob Robnik, Gimnazija Bežigrad, Gimnazija;
- Krištof Skok, I. gimnazija v Celju.

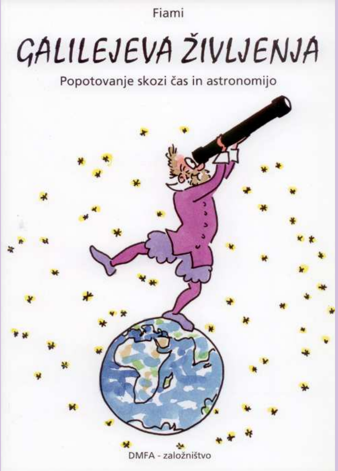
× × ×

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.