

2021
Letnik 68
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2021, letnik 68, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 633, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASIX **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Peter Legiša (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Aleš Mohorič (urednik za fiziko), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Petkovšek, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl, Matjaž Zaveršnik (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.

Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1100 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 30 EUR, za tujino 35 EUR. Posamezna številka za člane stane 6,00 EUR, stare številke 3,00 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2021 DMFA Slovenije – 2144

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

GEOMETRIJA TRIKOTNIKA, OROSLAN IN RAVELLO

BOJAN HVALA

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2010): 51M04, 51M15, 51N20

V članku predstavimo Seebachov izrek iz geometrije trikotnika. Dogajanje, podobno kot pri vodenih ogledih filmov, poteka na dveh kanalih. Na enem poteka matematična predstavitev tematike, na drugem pa klepet o možnostih, dilemah in ozadjih.

TRIANGLE GEOMETRY, OROSLAN AND RAVELLO

In this article, we present Seebach's theorem, which is a topic in triangle geometry. The events, as during guided online film screenings, take place on two channels. On one, there is a mathematical presentation of the topic, and on the other, a chat about possibilities, dilemmas, and backgrounds.

Uvod

Pred kratkim sem si ogledal slovenski film Oroslan režiserja Matjaža Ivanišina. Film kot medij za prenašanje sporočil spremljam z velikim zanimanjem. Posebej rad imam evropski avtorski film. Oroslan mi je vzbudil zanimanje že ob pripravi na snemanje. Zgodbo Zdravka Duše, ki se je dogajala na Tolminskem, so avtorji prenesli v Porabje. Sledimo dolгим meditativnim posnetkom in dogajanju pripenjamo nabor lastnih asociacij. Film teče počasi, časa za osebni prispevek je dovolj. Pozneje sem na spletu zasledil možnost vodenega ogleda filma. Film teče, vzporedno pa se moderator in avtor pogovarjata o ozadjih, idejah in možnostih. Ogled se je izkazal za dragocenega. Pogosto je potrdil ustreznost lastne percepcije filma in jo razširil v številne, prej neslutene smeri.

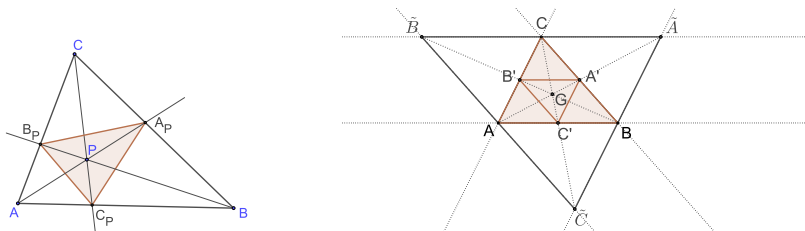
Od tod ideja o podobni eksperimentalni predstavitvi, tokrat matematične teme. Nivoja se ločita po pisavi. Matematični nivo je pisan v običajni pisavi, nivo klepeta v ozadju pa boste prepoznali po zapisu *v taki pisavi*.

Geometrija trikotnika je veja matematika, ki se ukvarja s fiksnim trikotnikom ABC in z njim povezanimi značilnimi točkami, premicami, krožnicami in drugimi objekti. Nekatere teme iz geometrije trikotnika so bile v Obzorniku že prisotne. Tako je bil v članku [7] predstavljen pojem značilne točke trikotnika, v [12] pa kubične krivulje trikotnika.

Izvrstna vstopna točka v geometrijo trikotnika je spletna stran ameriškega matematika Clarka Kimberlinga [1], ki med drugim prinaša seznam značilnih točk trikotnika z vsemi enciklopedično zbranimi podrobnostmi. V tem članku bomo uporabljali tam nastopajoče oznake, ki so v geometriji trikotnika standardne. Tako bomo notranje kote trikotnika označevali z $\angle A, \angle B, \angle C$, njihove velikosti pa kar z A, B, C . Povod za to izbiro je dejstvo, da bomo grške črke potrebovali za druge namene. Kimberling v svojih pojasnilih tudi ugotavlja, da je ta zapis praktičen in da sega nazaj vse do Eulerja. Na ta način res z isto črko označimo dve stvari, oglišče trikotnika in velikost notranjega kota, a je verjetnost, da bi pri tem prišlo do nesporazuma, zelo majhna.

Seebachov izrek

Definicija 1. Naj bo ABC trikotnik v ravnini in P točka znotraj trikotnika. Poltraki AP, BP in CP sekajo stranice a, b, c trikotnika ABC v točkah A_P, B_P in C_P . Trikotnik $A_P B_P C_P$ imenujemo Cevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko P .



Slika 1. Levo: Cevov trikotnik glede na točko P . Desno: središčni in antikomplementarni trikotnik.

V problemski rubriki revije American Mathematical Monthly je bil leta 1995 objavljen problem, ki je spraševal, ali znotraj trikotnika obstaja točka P , glede na katero bi bil Cevov trikotnik enakostraničen. Odgovor je pozitiven, rešitev je bila objavljena leta 1997 v [3]. Pozneje se je izkazalo, da je veliko splošnejši rezultat v članku [11] že deset let prej objavil nemški matematik Karl Seebach. Rezultatu rečemo Seebachov izrek.

Izrek 2. Naj bo $A_1 B_1 C_1$ poljuben trikotnik. Potem obstaja natanko ena taka točka P znotraj trikotnika ABC , da je Cevov trikotnik $A_P B_P C_P$ trikotnika ABC glede na točko P direktno podoben trikotniku $A_1 B_1 C_1$.

Direktna podobnost (oznaka $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$) pomeni, da sta trikotnika podobna na način, da za ustrezne kote velja $A_P = A_1$, $B_P = B_1$ in $C_P = C_1$.

Iz izreka seveda takoj sledi, da je znotraj trikotnika natanko ena točka, katere Cevovov trikotnik je enakostraničen. Ta točka sodi med značilne točke trikotnika. V zgoraj omenjeni Kimberlingovi Enciklopediji značilnih točk trikotnika [1] nosi oznako X_{370} .

Na sliki 1 desno so razpolovišča stranic trikotnika ABC označena z A', B', C' , težišče pa z G . Trikotniku $A'B'C'$ rečemo *središčni trikotnik* trikotnika ABC . Znano dejstvo je, da velja $A'B'C' \approx ABC$. Seveda je $A'B'C'$ Cevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko G . Iz Seebachovega izreka torej izhaja, da je težišče G edina točka znotraj trikotnika, katere Cevov trikotnik je podoben osnovnemu trikotniku ABC .

Znani so primeri pomembnih matematikov, ki so poleg svojih glavnih področij z velikim veseljem gojili tudi geometrijo. Taka sta bila recimo Euler in Plemelj. Nekateri drugi matematiki pa geometriji niso naklonjeni. Geometrijske rezultate doživljajo nekako takole: Imamo neko družino geometrijskih objektov in potem dokažemo, da je lega neke točke glede na te objekte nekaj čisto posebnega.

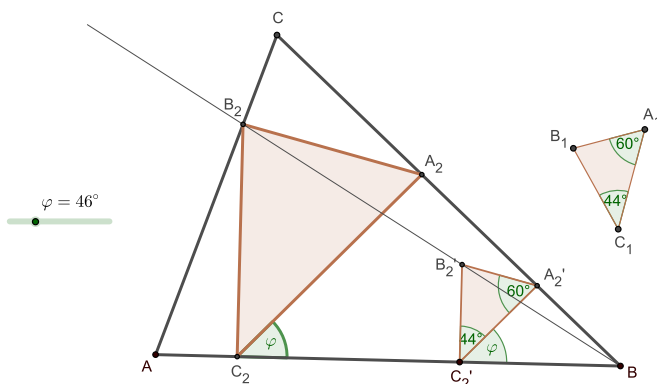
To je včasih celo res. Seebachov izrek nam recimo sporoča informacijo o izjemnosti točke X_{370} . Sporoča nam tudi dodatno informacijo o izjemnosti težišča. Vendar pa, če pogledamo na pravi način, lahko v teh ugotovitvah pogosto zaznamo zelo lepe in globoke rezultate.

Narišimo sliko v GeoGebri in premikajmo točko P . (Bralca prijazno vabim, da to dejansko naredi!) Rijejo se nam različni Cevovi trikotniki. Iz Seebachovega izreka sledi, da na ta način dobimo galerijo prav vseh možnih oblik trikotnikov. Vsaki obliki pripada točno določena točka P . Znotraj poljubnega trikotnika je torej na preprost način zakodirana informacija o prav vseh oblikah trikotnikov.

Geometrija je nazorna in vizualno predstavljiva. To pomeni, da za razliko od nekaterih drugih vej matematike problem lahko hitro razumemo in ga sorazmerno zlahka predstavimo tudi nespecialistu. Izziv je zdaj, kako ta problem rešiti. Včasih se izkaže, da kljub preprosti formulaciji dokaz niti približno ni lahek. To se zgodi tudi v primeru Seebachovega izreka. Originalni dokaz je dolg, nepregleden in kar kliče po izboljšavah.

Včasih se v matematičnih raziskavah podajamo v zelo abstraktne daljne svetove, vendar pa potem tam niti ne počnemo kaj zares ekstremnega. Kot bi poslali vozilo na Mars in se potem veselili vsakega drobnega premika po njem. Seveda je, na primer, prvi marsovski polet z dronom velik dosežek. Sploh ob misli na možnost opazovanja in snemanja površja. A tako veliki preboji so redki. Po drugi strani pa ima tudi gibanje po stari dobri Zemlji svoje prednosti. V začetku morda ekspedicija ni videti tako spektakularna, zato pa nam omogoča, da opravimo res izdaten sprehod do neznanih čudes bližnjih grebenov, sotesk in jam, z izjemnimi razgledi in z inovativno izbranimi prehodi.

Kot rečeno je originalni dokaz Seebachovega izreka računski, dolgotrajen in nepregleden. Velik napredek v smeri preglednosti je leta 2006 napravil jordanski matematik M. Hajja, ki je v članku [4] predstavil nov dokaz. Osnovna ideja je naslednja.



Slika 2. Dokaz M. Hajje, konstrukcija vrtanega trikotnika.

Imamo trikotnik $A_1B_1C_1$ in se sprašujemo po točki P , da bo veljalo $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$. Izberimo neki kot φ in trikotniku ABC vrtajmo trikotnik $A_2B_2C_2$ tako, da bo $A_2B_2C_2 \approx A_1B_1C_1$ in bo kot $\angle BC_2A_2 = \varphi$ (slika 2). To naredimo tako, da najprej izberemo neko točko $C'_2 \in c$, odmerimo kot φ , dobimo točko $A'_2 \in a$, nato pa od daljice $C'_2A'_2$ odmerimo kota A_1 in C_1 ter dobimo točko B'_2 . Tako je $A'_2B'_2C'_2 \approx A_1B_1C_1$. Zdaj pa naredimo razteg s središčem v točki B , ki trikotnik $A'_2B'_2C'_2$ preslika v podoben trikotnik $A_2B_2C_2$ tako, da točka B_2 leži na stranici b . Namesto uporabe raztega si lahko mislimo tudi, da izbrano točko C'_2 premikamo po stranici c toliko časa, da ustrezna točka B'_2 pade na stranico b .

Na ta način, s spreminjanjem kota φ , dobimo družino vseh v trikotnik ABC včrtanih trikotnikov, ki so podobni trikotniku $A_1B_1C_1$. Zdaj pa moramo dokazati le še, da se samo pri enem trikotniku iz te družine daljice AA_2, BB_2 in CC_2 sekajo v neki skupni točki P , kar pomeni, da je to Cevov trikotnik glede na neko točko P (slika 3). Pri tem se opremo na Cevov izrek [14], ki pravi, da se daljice AA_2, BB_2 in CC_2 sekajo v skupni točki natanko tedaj, ko velja

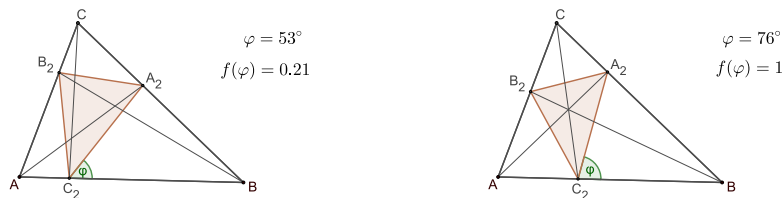
$$\frac{|BA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AC_2|}{|C_2B|} = 1.$$

Avtor je nato izračunal levo stran zgornjega izraza kot funkcijo f spremenljivke φ , premislil, na katerem intervalu se giblje kot φ , in dokazal, da je f na tem intervalu monotonno naraščajoča funkcija, ki zavzame vse pozitivne vrednosti. Zato vrednost 1 zavzame natanko enkrat. Med vsemi v trikotnik ABC včrtanimi trikotniki $A_2B_2C_2 \approx A_1B_1C_1$ je torej natanko en Cevov trikotnik glede na neko točko P .

Ena od prednosti geometrije je, da nam nudi možnost vizualizacije. Vsebinsko lahko približamo s sliko. Še posebej učinkovito to lahko storimo z računalniškimi programi za dinamično geometrijo, ki so se pojavili pred kakimi 30 leti in so geometriji dali močan dodatni zagon. Zelo pomemben pri tem je pridevnik dinamični, kar pomeni, da lahko že narisane objekte interaktivno premikamo, ob tem pa dinamično spremljamo spreminjajočo se sliko. Med prvimi takimi programi sta bila Geometer's Sketchpad in Cabri Geometry, v naših razmišljanjih pa smo že nekajkrat omenili GeoGebro. V nadaljevanju jo bomo še večkrat.

Obravnavani Hajjov dokaz lahko s pomočjo GeoGebre učinkovito ilustriramo, ob tem pa premislimo tudi nekatere detajle.

Najprej na podlagi slike 2 premislimo, kako iz trikotnika $A'_2B'_2C'_2$ dobimo trikotnik $A_2B_2C_2$. Zagrabimo točko C'_2 in jo pomikamo na levo (oz. na desno), dokler točka B'_2 ne zadene stranice b . Ker si to premikanje lahko predstavljamo kot delovanje raztegov s središčem v točki B in z različnimi koeficienti, je jasno, da pri tem postopku točka B'_2 teče po poltraku z izhodiščem v točki B . Zato je končna točka B_2 kar presečišče tega poltraka s stranico b . Argument z raztegi nam da tudi, da so stranice nastopajočih trikotnikov pri premikanju vzporedne. Zato je stranica B_2A_2 vzporedna stranici $B'_2A'_2$. Pri narisanim trikotniku $A'_2B'_2C'_2$ torej v prvem koraku dobimo točko B_2 , z nadaljnjima dvema vzporednicama pa še točki A_2 in C_2 .



Slika 3. Dokaz M. Hajje, funkcija f je naraščajoča.

V GeoGebri lahko tudi označimo daljice iz izraza $\frac{|BA_2|}{|A_2C|} \cdot \frac{|CB_2|}{|B_2A|} \cdot \frac{|AC_2|}{|C_2B|}$ in pri danem kotu φ izpišemo vrednost tega izraza, torej $f(\varphi)$ (slika 3). Potem na drsniku spreminjamo kot φ in eksperimentalno doživimo dejstvo, da je funkcija f monotonno naraščajoča. Pri kotu φ , kjer funkcija f zavzame vrednost 1, tudi nazorno vidimo, da se ustrezne tri daljice sekajo v skupni točki. To je tista edina točka, ki jo trikotniku $A_1B_1C_1$ zagotavlja Seebachov izrek.

Slika v GeoGebri nam tudi omogoči premisliti in testirati drobne detajle v dokazu, kot je recimo interval, na katerem lahko pri danih podatkih izbiramo kot φ . Upoštevajoč trikotnik $C'_2BA'_2$ mora veljati $\varphi < 180^\circ - B$. Če to velja, lahko narišemo daljico $C'_2A'_2$. V nadaljevanju od nje odmerimo kota C_1 in A_1 . Če naj bo točka B'_2 znotraj kota $\angle B$, mora na spodnji strani veljati $\varphi + C_1 < 180^\circ$. Podoben razmislek na zgornji strani nam da $\varphi > A_1 - B$. Potegnemo poltrak in dobimo točko $B_2 \in b$. Zdaj nam manjkata le še dve vzporednici. Če želimo, da bo točka C_2 ležala na stranici c in ne na njenem podaljšku, mora biti $\varphi + C_1$ zunanji kot trikotnika AC_2B_2 in zato večji od A . Od tod sledi $\varphi > A - C_1$. Podobno pri obravnavi točke A_2 dobimo $\varphi < A + A_1$. Veljati mora torej: $\varphi \in (m, M)$, kjer je

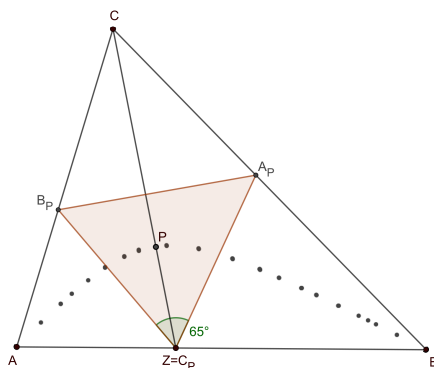
$$m = \max\{0, A_1 - B, A - C_1\} \quad \text{in} \quad M = \min\{180^\circ - B, 180^\circ - C_1, A + A_1\}.$$

Množica (m, M) ni prazna, saj je vsak od elementov iz množice na levi manjši od vsakega elementa množice na desni.

Posplošeni Seebachov izrek

Kljub velikemu napredku pri dokazu M. Hajje je še vedno ostal vtis, da bi bilo k dokazu mogoče pristopiti še bolj neposredno. Okvirna ideja je naslednja. Imamo trikotnik $A_1B_1C_1$ in iščemo točko P , za katero bo $A_P B_P C_P \approx A_1B_1C_1$. Kaj če bi šli postopoma in bi najprej poiskali točke P , pri katerih je v trikotniku $A_P B_P C_P$ ustrezen en kot, na primer $C_P = C_1$. Izberimo

točko $Z \in c$ in si oglejmo Cevove trikotnike točk P z daljice ZC (slika 4). Ko točko P premikamo od Z proti C , koti $\angle A_P C_P B_P$ tečejo od 180° proti 0° . Zato na tej daljici obstaja natanko ena točka, imenujmo jo P_Z , za katero bo ta kot meril C_1 . Če izrišemo vse točke P_Z , ko Z preteče stranico c , dobimo neko krivuljo, recimo ji Γ_C (slika 4). Na njej so točke P , ki imajo Cevove trikotnike z ustreznim kotom pri oglišču C_P . Podobno obstajata analogni krivulji Γ_B in Γ_A s točkami, katerih Cevovi trikotniki imajo ustrezeni kot pri ogliščih B_P oz. A_P . Iskane točke z vsemi tremi ustreznimi koti so presečišča teh treh krivulj.



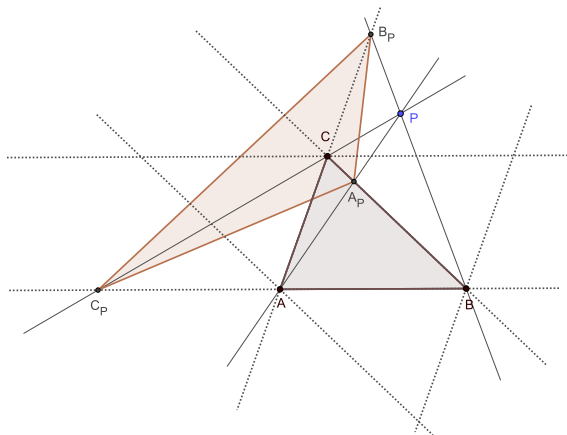
Slika 4. Krivulja točk z enim ustreznim kotom.

Presečišče dveh od teh krivulj je točka, katere Cevov trikotnik ima ustrezen kot pri dveh ogliščih. Torej ga ima tudi pri tretjem. Skozi presečišče dveh krivulj tako zagotovo poteka tudi tretja.

Načrt je torej naslednji: poiskati je treba enačbe krivulj Γ_A, Γ_B in Γ_C in rešiti dobljeni sistem enačb. Videli bomo, da je ta pristop mogoč in da prinaša še dodatne prednosti. Doslej smo namreč točke P izbirali samo znotraj trikotnika. Koncept zlahka splošimo tudi na (skoraj vse) točke zunaj njega.

Definicija 3. Naj bo ABC trikotnik v ravnini. Nosilke stranic trikotnika označimo z n_a, n_b, n_c . Vzporednico premici n_a skozi oglišče A označimo s q_a , analogno definiramo premici q_b in q_c . Množico vseh točk v ravnini, ki ne ležijo na nobeni od premic $n_a, n_b, n_c, q_a, q_b, q_c$, označimo z E .

Izberimo točko $P \in E$. Premice AP, BP in CP sekajo nosilke stranic n_a, n_b, n_c v točkah A_P, B_P, C_P . Tudi v tem primeru trikotnik $A_P B_P C_P$ imenujemo Cevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko P .



Slika 5. Cevov trikotnik glede na točko P zunaj trikotnika ABC .

Množica E je predstavljena na sliki 1 desno. To je ravnina brez šestih premic. Premice q_a, q_b, q_c se paroma sekajo v točkah $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$, ki so oglišča tako imenovanega *antikomplementarnega trikotnika* $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Ime izhaja iz dejstva, da sliko neke točke T z raztegom $\delta_{G,-1/2}$ imenujemo *komplement* točke T , sliko z inverzno transformacijo, torej raztegom $\delta_{G,-2}$, pa *antikomplement* točke T . Razteg $\delta_{G,-2}$ premice n_a, n_b, n_c zaporedoma preslika v njim vzporedne premice skozi točke A, B in C , torej v premice q_a, q_b, q_c . Ker točka A leži na n_b in n_c , bo njena slika ležala na q_b in q_c . Zato je $\tilde{A}$ antikomplement točke A . Analogno velja za $\tilde{B}$ in $\tilde{C}$.

V definiciji 3 smo se bili prisiljeni odreči točkam z omenjenih šestih premic. V primeru $P \in n_a$ premici AP in n_a sovpadata, kar pomeni, da presečišče A_P v tem primeru ni definirano. V primeru $P \in q_a$ je zadeva podobna, a manj kritična. Premici AP in n_a sta zdaj vzporedni, zato presečišče A_P v klasičnem smislu ne obstaja. Obstaja pa, če nekoliko spremenimo perspektivo in se preselimo v projektivno ravnino.

Prišli smo do točke, ko se bomo morali za nadaljevanje zgodbe nekoliko tehnično podkovati. Brez ustreznih orodij od tu naprej ne gre več.

Ob misli na ustvarjanje novih orodij se mi v spomin vrača prizor iz mesteca Ravello na italijanski Amalfijski obali. Nad obalo se dvigajo strme vzpetine, pejsaži so presunljivo lepi, a prostora za bivališča in obdelovanje zemlje je malo. Toda ljudje so se znašli. V strme hribe so vrezali terase in tam posadili oljke in limonovce. Ob bregove so stisnili bivališča in ob njih uredili vrtove. Poti so posuli z belim peskom ter dodali slikovite ograje in kipe. Naravo so

začnili z osupljivo lepo arhitekturo. Ob neki vili so izdelali teraso in nanjo postavili oder za simfonični orkester. Ob poletnih večerih tam potekajo koncerti.

Skratka, moč človeške domišljije je navdušujoča. Včasih smo ob pogledu na našo civilizacijo pesimistični in upravičeno kritični. Marsikaj je v zgodovini res šlo narobe in še vedno gre. Vendar ob tem vseeno ne smemo pozabiti, koliko čudovitega smo kot človeška vrsta ustvarili. Ravello je sinonim za ta ponos. V ta kontekst kot pomemben dejavnik sodi tudi matematika. Če se kot člani človeške vrste čutimo ponosne ob pogledu na čudesa Ravella, smo lahko upravičeno ponosni tudi na to, kako smo v teku stoletij iz nič ustvarili najrazličnejše matematične objekte in teorije ter kako smo jih na presenetljive načine uspeli povezati in preplesti.

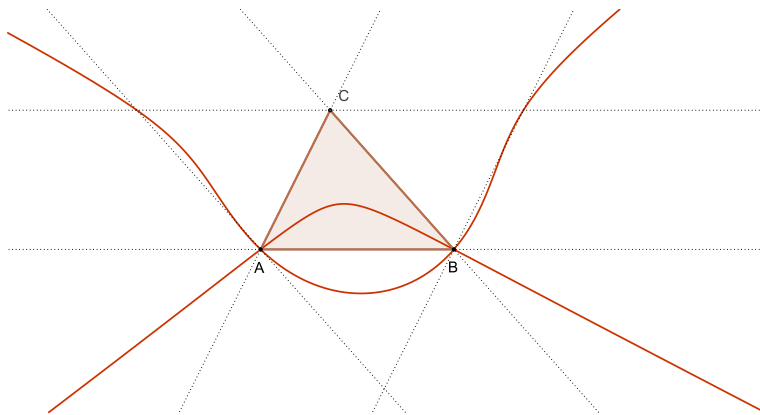


Slika 6. Levo: Ravello, vila Rufolo. Desno: Ravello, detajl.

Ko so težave s tem, da se dve premici v ravnini včasih sekata, včasih pa ne, postale nadležne, se je nekdo spomnil, da bi za vsak snop vzporednih premic tam nekje v neskončnosti dodal eno dodatno točko. V njej se zdaj te premice sekajo. Tako dobimo družino dodatnih točk, ki ji rečemo *premica v neskončnosti*. Ravnini s pridruženimi točkami na premici v neskončnosti potem rečemo *projektivna ravnina* [8, str. 5–6]. V projektivni ravnini se torej poljubni dve premici sekata. Če se zgodi, da presečišče leži na premici v neskončnosti, to pomeni, da sta premici v klasičnem smislu vzporedni. Kot smo v ravnino uvedli kartezične koordinate, lahko uvedemo ustrezne koordinate tudi v projektivno ravnino. Z njimi enakovredno obravnavamo običajne točke kot tudi točke v neskončnosti. Ena od možnih uvedb koordinat v projektivno ravnino so *trilinearne koordinate*. Če so kartezične koordinate definirane glede na dve pravokotni koordinatni osi, so trilinearne koordinate definirane glede na neki trikotnik. Izkaže se, da so te koordinate izjemno primerne za delo v razmerah, ko imamo vseskozi v obravnavi en fiksen trikotnik. Kot smo omenili že v uvodu, tej veji matematike rečemo *geometrija trikotnika*.

Trilinearne koordinate smo v Obzorniku že srečali, in sicer v članku [12]. Na tem mestu povejmo le, da točke opisujemo v obliki $T = \alpha : \beta : \gamma$, pri čemer so to razmerja predznačenih oddaljenosti točke T od nosilk stranic trikotnika ABC . Pri tem je predznak koordinate α pozitiven, če točka leži na istem bregu nosilke stranice a kot trikotnik ABC , in negativen sicer. Analogno to velja za preostali koordinati. Delo s trilinearnimi koordinatami je omogočilo nesluten razvoj geometrije trikotnika. S tem orodjem zlahka preverimo dejstva, za dokaz katerih bi sicer pogosto potrebovali precej inovativnosti. Poznavanje podrobnosti teh tehničnih orodij za spremljanje nadaljevanja naše zgodbe ni nujno potrebno. Radovednemu bralcu pa priporočam vire [1, 9, 10, 15].

Človekova zmožnost, da na strma pobočja vreže terase, zasadi vrtnice, postavi kipe in zgradi amfiteater za simfonični orkester, je navdušujoča. Prav tako pa je navdušujoča tudi zmožnost matematikov, da v trenutku, ko se stvari zapletajo, ustvarijo inovativna orodja, prilagojena situaciji, ki omogočajo izvrsten vpogled in udobno delo.



Slika 7. Prva krivulja četrtega reda, Γ_C .

Vrnimo se k našemu problemu. Pri danem trikotniku $A_1B_1C_1$ iščemo točke $P \in E$, da velja $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$. Kot smo zastavili našo zgodbo, pot do rešitve vodi preko krivulj Γ_A, Γ_B in Γ_C . V ravnino uvedemo trilinearne koordinate glede na osnovni trikotnik ABC . Označimo $k_a = \cot A_1$, $k_b = \cot B_1$ in $k_c = \cot C_1$. Z uporabo analitične geometrije v trilinearnih

koordinatah brez večjih težav izpeljemo [5] enačbe zgoraj omenjenih krivulj Γ_A, Γ_B in Γ_C :

$$\begin{aligned}\alpha^2\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 &= 2\alpha\beta\gamma(-\alpha\cos A + k_a\beta\sin B + k_a\gamma\sin C) \\ -\alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 + \alpha^2\beta^2 &= 2\alpha\beta\gamma(k_b\alpha\sin A - \beta\cos B + k_b\gamma\sin C) \\ \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 - \alpha^2\beta^2 &= 2\alpha\beta\gamma(k_c\alpha\sin A + k_c\beta\sin B - \gamma\cos C).\end{aligned}$$

Gre za krivulje četrte stopnje, zapisane v trilinearnih koordinatah. Ker se pri pretvorbi v kartezične koordinate stopnja krivulj ohranja, gre za krivulje četrte stopnje v običajnem smislu.

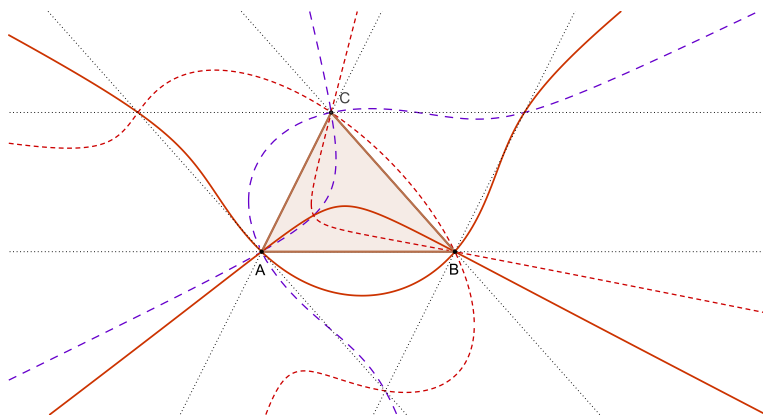
Ko matematiki izpeljemo nove enačbe, jih najprej premerimo s kritičnim pogledom. Je vse v redu? Pri pravkar zapisanih enačbah najprej opazimo elegantno simetrično strukturo, kot pri kakšni snežinki. Kot pravi H. G. Hardy: »Lepota je prvi test, na svetu ni trajnega prostora za grdo matematiko.« Seveda pa eleganca še ni zagotovilo za to, da so zapisane enačbe brezhibne in da bo njihova uporaba učinkovita.

Za potrditev se zatečemo k eksperimentu z GeoGebro. Ta omogoča risanje krivulj v kartezičnih koordinatah, v trilinearnih pa ne. Lotimo se torej pretvorbe danih enačb v kartezične koordinate in nato izrisa krivulj. Spomnim se vznemirjenja, ko je bilo delo opravljeno in je bilo treba pritisniti le še zaključni Enter. Rezultat je na sliki 7.

Narišimo še vse tri krivulje hkrati, to je slika 8. Takoj opazimo, da se glavna poanta na sliki potrdi. Znotraj trikotnika se krivulje sekajo v natanko eni skupni točki. Nadalje opazimo, da smo dogajanje iz notranjosti trikotnika uspešno prenesli tudi navzven. Naslednji pogled pa prinese presenečenje. Pričakovali smo, da bo skozi vsako presečišče dveh krivulj potekala tudi tretja. Na sliki ni vedno videti tako. A nekaj na sliki dodanih elementov razblini dvome. Nepričakovana presečišča dveh krivulj, skozi katera ne poteka tudi tretja, so bodisi oglišča trikotnika ABC bodisi oglišča antikomplementarnega trikotnika $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, torej točke zunaj množice E , znotraj katere rešujemo problem.

Zdaj se lahko prepustimo naslednjemu vzgibu ob pogledu na zgornje enačbe. Da bi namreč enačbe preoblikovali, jih ustrezno seštelili ter pridobili ekvivalenten in morda preprostejši sistem enačb.

Oglišča trikotnika imajo trilinearne koordinate $A = 1 : 0 : 0$, $B = 0 : 1 : 0$ in $C = 0 : 0 : 1$. Seštejmo po dve zgornji enačbi in izpostavimo skupne faktorje. Zlahka opazimo, da točka $P \notin \{A, B, C\}$ zadošča zgornjemu sistemu

Slika 8. Vse tri krivulje: Γ_A, Γ_B in Γ_C .

natanko tedaj, ko zadošča sistemu

$$\begin{aligned}\beta\gamma &= \alpha (m_A \alpha + n_{c,B} \beta + n_{b,C} \gamma) \\ \alpha\gamma &= \beta (n_{c,A} \alpha + m_B \beta + n_{a,C} \gamma) \\ \alpha\beta &= \gamma (n_{b,A} \alpha + n_{a,B} \beta + m_C \gamma),\end{aligned}$$

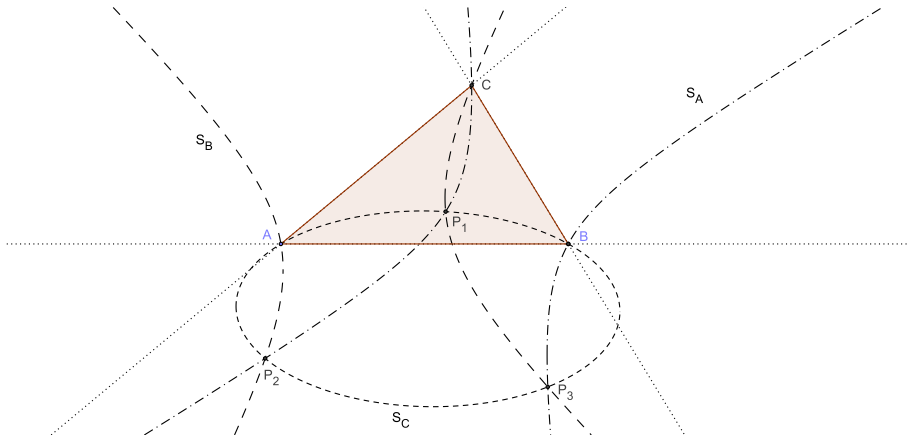
kjer je $m_A = (k_c + k_b) \sin A$, $n_{c,B} = (k_c \sin B - \cos B)$ in so ostali koeficienti definirani analogno.

Tokrat imamo sistem treh enačb drugega reda. Točka P je torej presečišče treh stožnic, označimo jih S_A, S_B, S_C . Premislimo, da ima lahko ta sistem največ tri rešitve. Poleg že znane rešitve znotraj trikotnika lahko torej pričakujemo še največ dve rešitvi zunaj.

Stožnici S_A in S_B se lahko sekata največ v štirih točkah. Ob tem prva očitno poteka skozi točki B in C , druga pa skozi točki A in C . Eno od potencialnih štirih presečišč je torej točka C , ki pa ne leži v množici E in za naš namen ni zanimiva. Tako smo prišli do dodatne informacije glede Cevovih trikotnikov točk zunaj trikotnika ABC .

Izrek 4. *Naj bo $A_1B_1C_1$ poljuben trikotnik. Potem obstajajo največ tri točke P v ravnini, da velja $A_P B_P C_P \approx A_1 B_1 C_1$.*

Do točk se dokopljemo z reševanjem zgornjega sistema. Dobimo kubično enačbo ene spremenljivke, ki ima lahko tri ali pa samo eno realno rešitev. Tako se dejansko zgodi, da imamo včasih tri rešitve, včasih pa eno samo. Na sliki 9 vidimo primer, ko se ustrezne stožnice pri danih trikotnikih ABC in $A_1B_1C_1$ sekajo v treh točkah.



Slika 9. Tri stožnice: S_A , S_B in S_C .

Obravnavani postopek ima pred predhodnimi kar nekaj prednosti. Omogoča nam obravnavo točk P zunaj trikotnika. Poleg tega nam ne sporoča samo števila ustreznih točk P , pač pa tudi omogoči, da preko zgornjih enačb izračunamo njihove trilinearne koordinate. Na ta način je točko včasih možno neposredno prepoznati, ali pa recimo dokazati, da je ne moremo konstruirati samo s šestilom in ravnilom. V članku [5] je tako na primer dokazano, da v splošnem točke X_{370} samo z ravnilom in šestilom ni mogoče konstruirati.

Cevianske sestre in sestrične

V tem razdelku bomo spoznali nekaj uporab pravkar predstavljenega pristopa. Opravili bomo kratek informativni sprehod po okolici.

Definicija 5. Naj bo ABC trikotnik v ravnini in $P \in E$ poljubna točka. Točka $Q \in E$, $Q \neq P$ je cevianska sestra točke P , če sta njuna Cevova trikotnika direktno podobna. Točka Q je cevianska sestrična točke P , če sta njuna Cevova trikotnika podobna, a nista direktno podobna.

Recimo, da bi pripravili obrazec, v katerem bi zbirali podatke o določeni točki P v ravnini. Med drugim bi vanj vpisali njene trilinearne koordinate glede na osnovni trikotnik ABC , pa oddaljenosti od oglišč tega trikotnika itd. Na točno določeno mesto v tem obrazcu bi vpisali podatke o velikosti kotov Cevovega trikotnika trikotnika ABC glede na točko P , torej trojico (A_P, B_P, C_P) . Celotnemu obrazcu bi potem lahko rekli *genom* točke P , omenjeni trojici pa *cevianska sekvenca* tega genoma. Točki P in Q sta torej

cevianski sestri, če imata identično ceviansko sekvenco genoma. Točki sta *cevianski sestrični*, če cevianski sekvenci nista identični, vsebujeta pa iste tri kote.

Premislimo zdaj, kaj nam o cevianskih sestrah in sestričnih poljubne točke $P \in E$ sporočata izreka 2 in 4. Za točko P znotraj trikotnika iz izreka 4 sledi, da ima največ dve cevianski sestri. Obe se nahajata zunaj trikotnika. Lahko pa se zgodi, da točka P cevianske sestre sploh nima. Točka $P \in E$ zunaj trikotnika pa ima natanko dve cevianski sestri. Po izreku 2 ima namreč znotraj trikotnika natanko eno ceviansko sestro, kar pomeni, da ima kubični polinom iz argumentacije izreka 4 dve realni ničli, potem pa je realna tudi tretja.

Pri cevianskih sestričnih se bomo omejili samo na točke znotraj trikotnika. Iz definicije izhaja, da je množica kotov Cevovega trikotnika cevianske sestrične Q enaka množici kotov Cevovega trikotnika točke P , torej $\{A_P, B_P, C_P\}$. Denimo, da so to trije različni koti. Ker se sekvenci ne smeta povsem ujemati, imamo na voljo pet permutacij teh treh kotov, vsaka od njih pa nam znotraj trikotnika zagotavlja natanko eno ceviansko sestrično. Če torej točka P leži znotraj trikotnika in je njen Cevov trikotnik raznostraničen, ima znotraj trikotnika natanko pet sestričen.

Na splošno je obravnava te tematike sorazmerno zapletena, zato se omejimo samo na dva posebej lepa primera: $P = X_{370}$ in $P = G$.

Cevov trikotnik točke $P = X_{370}$ je enakostraničen, zato točka nima cevianskih sestričen. V članku [5] obravnavamo njene cevianske sestre in ugotovimo, da te obstajajo samo, če je osnovni trikotnik ABC izrazito topokoten.

Videli smo že, da je težišče G edina točka znotraj trikotnika, katere Cevov trikotnik je direktno podoben osnovnemu trikotniku ABC . V članku [5] obravnavamo možne cevianske sestre točke G . Izkáže se, da te obstajajo natanko tedaj, ko je trikotnik ABC topokoten. Dokažemo tudi, da sta v tem primeru ustrezni cevianski sestri presečišči očrtane krožnice trikotnika ABC z očrtano krožnico antikomplementarnega trikotnika $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Bralca vabim, da nariše sliko v GeoGebri in to preveri.

V članku [6] obravnavamo cevianske sestrične točke G . Najprej dokažemo, da nobene od petih cevianskih sestričen znotraj trikotnika na splošno ne moremo konstruirati samo s šestilom in ravnilom. Nadaljevanje zgodbe odkrije dodatni skriti potencial pristopa, opisanega v poglavju 3.

Že stari Grki so se ukvarjali s problemom, kako neki objekt konstruirati samo s šestilom in ravnilom. Od tod zgodba o trisekciji kota, podvojitvi kocke in kvadraturi kroga. Ključna pri kasnejši razrešitvi tovrstnih problemov je teorija razširitev polj. S tem sredstvom dokažemo,

da nobena od treh naštetih konstrukcij v splošnem ni mogoča. Isti argumenti so tudi v jedru dokaza, da v splošnem s šestilom in ravnilom ni mogoče konstruirati cevianskih sestrice točke G .

Ob tem se nam zastavi vprašanje, ali bi bilo katero od konstrukcij, ki niso izvedljive samo s šestilom in ravnilom, mogoče izvesti, če bi imeli na voljo še kako dodatno sredstvo? Katero bi to dodatno sredstvo lahko bilo? Znano je npr., da je trisekcijo kota možno izvesti, če imamo dodatno na voljo orodje, imenovano tomahavk [2]. Ob tem se vprašamo, ali je to res najbolj naravna izbira. Da bi se namreč matematik po ravnilu in šestilu najprej oborožil ravno s tomahavkom?

Razmislijmo v naslednji smeri. Če imamo na voljo ravnilo, skozi obstoječe točke neke konstrukcije lahko potegnemo premice. Če dodatno v uporabo dobimo šestilo, lahko rišemo krožnice. Tako npr. s šestilom in ravnilom lahko narišemo krožnico skozi dane tri točke, trikotniku lahko očrtamo krožnico. Nove točke pridobivamo kot presečišča tako narisanih premic in krožnic.

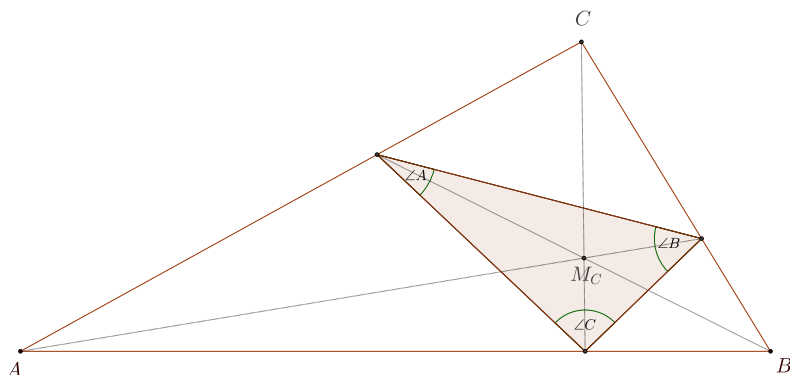
Takšne so naše možnosti, če imamo na voljo ravnilo in šestilo. Kaj bi bil naslednji naravni korak? Da bi poleg risanja premic in krožnic imeli na voljo možnost risanja naslednjih najpreprostejših krivulj, to je stožnic. Gre torej za orodje, ki bi skozi danih pet točk v ustrezni legi narisalo edino stožnico, ki poteka tam skozi. V GeoGebri je tako orodje na voljo, in to pod gumbom, namenjenim stožnicam.

Cevov trikotnik glede na točko G je torej podoben osnovnemu trikotniku, zato ima v cevianski sekvenci genoma zapisane kote tega trikotnika (A, B, C) . Nakažimo, kako bi z uporabo dodatnega orodja za risanje stožnic skozi danih pet točk konstruirali sestrice točke G s ceviansko sekvenco genoma (B, A, C) .

Naša metoda iz 3. poglavja nam je ustrezne točke dala kot presečišča treh stožnic (slika 9). Če bi znali narisati dve od njih, bi kot edino presečišče znotraj trikotnika dobili točko M_C .

Premislimo najprej, kaj na splošno vemo o omenjenih treh stožnicah. Stožnica S_A ne glede na vhodne podatke (torej kote A_1, B_1, C_1) vedno poteka skozi točki B in C , kar je jasno razvidno iz njene enačbe. Poleg tega smo krivuljo S_A dobili s seštevanjem enačb za krivulji Γ_B in Γ_C , za kateri smo svoj čas presenečeni ugotovili, da se sekata v točki $\tilde{A}$. Koordinate točke $\tilde{A}$ torej zadoščajo enačbam za Γ_B in Γ_C , po seštevanju pa tudi enačbi za S_A . Tako vidimo, da vse krivulje S_A potekajo skozi točke B, C in $\tilde{A}$. Če uspemo konstruirati še dve točki na tej stožnici, lahko uporabimo orodje za risanje stožnic skozi pet točk in stožnico narišemo.

Ti dodatni dve točki bosta seveda odvisni od vhodnih podatkov. V našem primeru upoštevamo enakost kotov $A_1 = B, B_1 = A, C_1 = C$ in izra-



Slika 10. Točka M_C s ceviansko sekvenco (B, A, C) .

čunamo ustrezne koeficiente iz enačbe stožnice S_A , torej: $m_A = \frac{b}{c}$, $n_{c,B} = \frac{b^2 - c^2}{ac}$, $n_{b,C} = \frac{c^2 - a^2}{ab}$. Tako dobimo enačbo te stožnice:

$$abc\beta\gamma = ab^2\alpha^2 + b(b^2 - c^2)\alpha\beta + c(c^2 - a^2)\alpha\gamma.$$

Oblika te enačbe nas takoj napelje k zamenjavi trilinearnih koordinat $\alpha : \beta : \gamma$ s ploščinskimi koordinatami $X : Y : Z$, ki so s trilinearnimi povezane takole $X = a\alpha$, $Y = b\beta$ in $Z = c\gamma$. V ploščinskih koordinatah se enačba stožnice S_A glasi:

$$a^2YZ = b^2X^2 + (b^2 - c^2)XY + (c^2 - a^2)XZ.$$

Izračunajmo ploščinske koordinate presečišč U in V stožnice S_A z nosilkama stranic b in c , torej s premicama $Y = 0$ in $Z = 0$. Dobimo $U = (a^2 - c^2) : 0 : b^2$ in $V = (c^2 - b^2) : b^2 : 0$. Za ilustracijo si oglejmo, kako bi konstruirali točko V .

Matematiko včasih primerjajo z alpinizmom. Turo začnemo v izhodišču in zaključimo na določenem cilju. Pogosto se zgodi, da so zares zahtevni le kratki odseki poti, preostanek je ne-problematičen. Če je kritična točka ena sama, je pot iz izhodišča do začetka kritičnega odseka jasna, prav tako pot od konca kritičnega odseka do cilja. Prednost matematike je v možnosti predhodne obravnave teh ne-problematičnih odsekov. Od izhodišča napredujemo, dokler gre, iz cilja se pomikamo nazaj, spet dokler gre in na ta način osamimo ključni problematični odsek. Temu se potem lahko posvetimo s polno pozornostjo in z vsemi močmi.

Naš cilj je točka s plosčinskimi koordinatami $V = (c^2 - b^2) : b^2 : 0$. Ni težko uganiti, da bo izhodišče točka $L = a^2 : b^2 : c^2$. To je Lemoinova točka trikotnika z oznako X_6 v Kimberlingovi Enciklopediji značilnih točk trikotnika [1]. Konstruiramo jo tako, da v trikotniku ABC nosilko težiščnice na stranico a prezrcalimo preko simetrane notranjega kota pri oglišču A . Analogno storimo z nosilkama težiščnic na preostali dve stranici. Dobljene tri premice se sekajo v točki L .

Naš vzpon bo torej potekal od točke L do točke V . Za uspešno pot potrebujemo nekaj preprostih splošnih informacij.

Najprej sta tu koncepta Cevovega in anticevovega trikotnika. Pojem Cevovega trikotnika že poznamo. Anticevov trikotnik trikotnika ABC glede na točko P je tak trikotnik $\tilde{A}_P\tilde{B}_P\tilde{C}_P$, da je trikotnik ABC Cevov trikotnik tega trikotnika glede na točko P . Za ilustracijo si lahko pomagamo kar s sliko 1, saj je antikomplementarni trikotnik $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ anticevov trikotnik trikotnika ABC glede na težišče G .

Z osnovnimi metodami analitične geometrije v plosčinskih koordinatah izpeljemo koordinate oglišč Cevovega trikotnika glede na točko $P = X_P : Y_P : Z_P$:

$$A_P = 0 : Y_P : Z_P \quad B_P = X_P : 0 : Z_P \quad C_P = X_P : Y_P : 0.$$

Pri obravnavi koordinat anticevovega trikotnika začnemo z neznanimi devetimi koordinatami točk $\tilde{A}_P, \tilde{B}_P, \tilde{C}_P$ in zapišemo zahteve iz definicije: točka A leži na nosilkah daljic $\tilde{B}_P\tilde{C}_P$ in $\tilde{A}_PP$, analogno za B in C . Rešimo sistem in dobimo:

$$\tilde{A}_P = -X_P : Y_P : Z_P \quad \tilde{B}_P = X_P : -Y_P : Z_P \quad \tilde{C}_P = X_P : Y_P : -Z_P.$$

Oglišča anticevovega trikotnika pri dani točki P so torej enolično določena. Za njihovo konstruktibilnost je ključno dejstvo, da je točka $\tilde{A}_P$ harmonična konjugiranka točke P glede na točki A in A_P [13]. Od tod sledi, da jo lahko konstruiramo celo samo z ravnilom [15, str. 3].

Od nujnih informacij zdaj potrebujemo le še enačbo premice v neskončnosti. V trilinearnih koordinatah se ta glasi $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, v plosčinskih pa $X + Y + Z = 0$.

Zdaj za osnovo vzamemo Lemoinovo točko $L = a^2 : b^2 : c^2$ in se napotimo proti točki $V = (c^2 - b^2) : b^2 : 0$. Do točke $\tilde{C}_L = a^2 : b^2 : -c^2$ že znamo priti. Nadaljujmo na drugem koncu poti, pri točki V . Ta je C -točka Cevovega trikotnika glede na točko $W_Z = (c^2 - b^2) : b^2 : Z$ in to ne glede na izbiro števila Z . Določimo Z tako, da bo točka W_Z ležala na premici v neskončnosti, ki ima enačbo $X + Y + Z = 0$. To dosežemo z izbiro $Z = -c^2$. Naj bo torej $W = (c^2 - b^2) : b^2 : -c^2$. Premica CW seka nosilko stranice c v točki V

in zato točka W leži na premici CV . Vendar pa glede na svoje koordinate točka W očitno leži tudi na premici s preprosto enačbo $c^2Y + b^2Z = 0$. Na tej premici pa ležita tudi točki $A = 1 : 0 : 0$ in $\tilde{C}_L = a^2 : b^2 : -c^2$.

Točka W torej leži na premici v neskončnosti in je presečišče premic $A\tilde{C}_L$ in CV . Ker se ti dve premici sekata na premici v neskončnosti, sta dejansko vzporedni. Od tod sledi, da je točka V presečišče vzporednice premici $A\tilde{C}_L$ skozi točko C in nosilke stranice c .

Ilustrirali smo pot do konstrukcije točke V . Podobna, a morda še malo zahtevnejša je pot do točke U , zato ta detajl tokrat izpustimo. Omenimo le, da je konstrukcija točk U in V najbolj inovativni del celotne zgodbe.

Ta odsek poti je posebej zanimiv, ker znotraj geometrijske teme ključno vlogo odigra žongliranje s simboli, ki je sicer bolj značilno za algebro. Matematične teorije in koncepti se na nenavadne načine prepletajo in oplajajo.

Ko enkrat imamo točki U in V , skozi točke $B, C, \tilde{A}, U$ in V z dodatnim orodjem za risanje stožnic skozi danih pet točk narišemo stožnico S_A . Podobno narišemo stožnico S_B . Njuno edino presečišče znotraj trikotnika je točka M_C .

Na podoben način, a z drugačnimi rešitvami v inovativnem vložku, konstruiramo tudi preostale štiri sestrčne težišča G .

Zaključek

Ameriški matematik John E. Wetzel, zaslužni profesor na University of Illinois v Urbani-Champaign, je izjavil:

Geometrija trikotnika ima več čudežev na kvadratni meter kot katera koli druga veja matematike.

To pogosto citirano izjavo lahko zasledimo na primer v uvodu h knjigi [9, str. 1] ali med zahvalami spletne strani [1]. Izjavo je seveda treba obravnavati dobronamerno in z določeno mero smisla za humor. Vsekakor pa je v njej dobro povzeto bistvo fascinacije z geometrijo trikotnika. Gre za občutek očaranosti nad presenečenji, ki se tu pojavljajo nenavadno pogosto. Zato si želim, da bi se geometrija trikotnika obdržala v študijskih programih matematike in da bi k tej tematiki (vsaj občasno) pristopalo več radovednih

raziskovalcev. To želim tudi številnim drugim živopisnim vejam matematike. Bojim se namreč, da se s časom matematična diverziteteta vse bolj krči in siromaši. Povedano v jeziku biologov pozivam k ohranjanju širokega spektra raznovrstne matematične flore in favne.

Na ta način smo spoznali Seebachov izrek, temo iz geometrije trikotnika. Kaj pa v naslovu počneta Oroslan in Ravello?

Oroslan na eni strani simbolizira eksperiment obravnave tematike na dveh kanalih. Prvi se skuša držati vseh pravil pisanja matematičnega teksta, drugi pa ta pravila krši, a vsebino nadgrajuje z informacijami, ki bi za bralca utegnile biti zanimive. Preklop na drugi kanal zato pomeni drugačen pristop k branju in evalvaciji teksta. Ima pa Oroslan tudi določene simbolne podtone. Oroslan je nekdo, ki je onstran. V tem smislu simbolizira brezčasen, nepretenciozen pogled na razmere.

Ravello je kraj, kjer cvetita narava in ustvarjalnost, vsaka zase in v povezavi druga z drugo. Simbolizira lepoto stvarstva v iskreni, izvorni, v času preverjeni obliki. Ne gre za šopirjenje ali razstavo preračunljivosti, pač pa za razmah človeškega duha, ki s svojo svežino razveseljuje vse okrog sebe.

LITERATURA

- [1] *Encyclopedia of Triangle centers*, dostopno na faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html, ogled 4. 4. 2021.
- [2] M. Barile, *Tomahawk*, dostopno na mathworld.wolfram.com/Tomahawk.html, ogled 9. 4. 2021.
- [3] D. Goering, *Solution to Problem 10358*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), 567–570.
- [4] M. Hajja, *The arbitrariness of the Cevian triangle*, Amer. Math. Monthly **113** (2006), 443–447.
- [5] B. Hvala, *A generalized Seebach's theorem*, Beitr. Algebra Geom. **55** (2014), 471–478.
- [6] B. Hvala, *Cevian cousins of a triangle centroid*, J. Geom. Graph. **19** (2015), 211–218.
- [7] B. Hvala, *Značilne točke trikotnika kot funkcije*, Obzornik Mat. Fiz. **61** (2014), 1–14.
- [8] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean geometry*, Dover Publications, 2007.
- [9] C. Kimberling, *Triangle centers and central triangles*, Congr. Numerantium **129** (1998).
- [10] G. Leversha, *The geometry of the triangle*, United Kingdom Mathematics Trust, 2013.
- [11] K. Seebach, *Ceva-Dreiecke*, Elem. Math. **42** (1987), 132–139.
- [12] T. Veber, *Kubične krivulje trikotnika*, Obzornik Mat. Fiz. **59** (2012), 50–62.
- [13] E. W. Weisstein, *Anticevian triangle*, dostopno na mathworld.wolfram.com/AnticevianTriangle.html, ogled 1. 6. 2021.
- [14] E. W. Weisstein, *Ceva's Theorem*, dostopno na mathworld.wolfram.com/CevasTheorem.html, ogled 31. 5. 2021.
- [15] P. Yiu, *Introduction to the Geometry of the triangle*, dostopno na math.fau.edu/Yiu/YIUIntroductionToTriangleGeometry121226.pdf, ogled 3. 5. 2021.

NOBELOVA NAGRADA ZA RAZVOJ FIZIKALNE KOZMOLOGIJE

DUNJA FABJAN

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 11.11.Aa

Dobitnik polovice Nobelove nagrade za fiziko leta 2019 za pomemben doprinos k razvoju teoretičnega okvira kozmologije je bil James Peebles iz Univerze v Princetonu, ki si je nagrado delil z odkriteljema prvega planeta okrog Soncu podobne zvezde. V članku je predstavljen zgodovinski okvir delovanja Nobelovega nagrajenca. Zaradi širokega obsega znanstvenega delovanja nagrajenca se v članku omejimo le na izbrane teme, pri katerih je doprinos Peeblesovih raziskav predstavljal preskok k uveljavitvi fizikalne kozmologije kot celostne vede.

NOBEL PRIZE FOR THE DEVELOPMENT OF PHYSICAL COSMOLOGY

Half of the Nobel Prize in Physics 2019 was awarded to James Peebles, professor at University of Princeton, for »theoretical discoveries in physical cosmology«, who shared the award with the discoverers of the first planet observed around a Solar-type star. This article presents the historical frame where the Nobel Laureate developed his research. Since he tackled a number of different research topics I decided to emphasise selected themes, where contributions of his research represented a breakthrough and established the basis for the development of physical cosmology.

Eno izmed temeljnih vprašanj, ki si jih postavlja človeštvo, je, kako je nastalo in se razvijalo naše vesolje ter kakšno je naše mesto v njem. V ta okvir spada Nobelova nagrada za fiziko za leto 2019, saj so nagrajenci zaslužni za pomemben »doprinos k razumevanju razvoja vesolja in mesta, ki ga zaseda Zemlja v njem« [17, 16]. V iskanju odgovorov na ta vprašanja se je človekov pogled na vesolje v stoletjih spreminjal: postopoma smo se iz geocentričnega sistema premestili v heliocentrični sistem in kasneje odkrili, da se naše Osončje nahaja v spiralnih rokavih naše Galaksije, ki ni nič kaj posebnega glede na druge galaksije, ki zapolnjujejo vesolje. Kozmologija, ki se ukvarja z vesoljem kot celoto, pa je v zadnjem stoletju razkrila zgodovino in razvoj vesolja ter njegovih sestavin, med katerimi sta najbolj nenavadni temna snov in temna energija.

James Peebles, nagrajen leta 2019 s polovico Nobelove nagrade za fiziko, je vsestranski kozmolog in *Albert Einstein Professor Emeritus of Science* na Univerzi v Princetonu (ZDA). Rodil se je leta 1935 v Winnipegu (Manitoba, Kanada) in se po končani diplomi iz znanosti na Univerzi v Manitobi od tam

odselil. Leta 1958 je študij nadaljeval na Univerzi v Princetonu, kjer se je na začetku zanimal za fiziko delcev in se nato preusmeril v kozmologijo po zaslugi uveljavljenega fizika Roberta Dickeja. Dicke je v Princetonu vodil skupino za raziskovanje gravitacije, bil je vsestranski fizik, ki je s svojimi raziskavami prispeval na več področjih, od gravitacije in atomske fizike do astrofizike in kozmologije. Peebles se je skupini pridružil in opravil doktorsko disertacijo pod Dickejevim mentorstvom. V njej je raziskoval spremembo konstante fine strukture α v daljših geoloških dobah. Iz radioaktivnega razpadnega časa zemeljskih kamnin in meteoritov je ocenil relativno spremembo konstante α na manj kot tisočinko v zadnjih 4,5 milijarde letih [8]. Kmalu za tem je Dicke mlademu Peeblesu predlagal, naj razišče teoretično ozadje ob morebitni detekciji prasevanja z radiometrom, ki sta ga medtem sestavljala sodelavca Peter Roll in Dave Wilkinson. Pomembna kozmološka odkritja so bila za vogalom.

Zgodovinski začetki in osnove kozmologije

Osnove moderne kozmologije, vede, ki se ukvarja z nastankom in razvojem vesolja kot celote, segajo v začetek 20. stoletja, ko je Albert Einstein izoblikoval splošno teorijo relativnosti. Rešitve Einsteinovih enačb polja za različna vesolja je med prvimi raziskal ruski matematik in kozmolog Alexander Friedmann in jih danes poznamo kot *Friedmannovi modeli* vesolja.

V istem obdobju se je pozornost astronomov usmerila v odkrivanje in proučevanje izvengalaktičnih objektov. Od meritve oddaljenosti¹ Andromedine galaksije dalje so astronomi odkrili, da so nekatere od tako imenovanih *meglic* v resnici galaksije podobne naši, ter začeli z zbiranjem prvih spektroskopskih podatkov o galaksijah. Take podatke je uporabil belgijski matematik George Lemaître (izg. *ləméʔər*), ki je že leta 1927 v članku upošteval primer vesolja, ki se širi, ter objavil zvezo med oddaljenostjo in hitrostjo oddaljevanja galaksij. Dve leti kasneje je na osnovi novih in natančnejših podatkov isto zvezo objavil tudi ameriški astronom Edwin Hubble.² Zakonu

¹Henrietta Swan Leavitt (1868–1921), ki je delala na Harvardskem observatoriju, je leta 1912 objavila odkritje povezave med povprečnim izsevom in periodo za spremenljive zvezde tipa kefeid. S pomočjo te umeritve je Hubble določil razdaljo bližnjim galaksijam.

²Čeprav je Lemaître že leta 1927 opisal širjenje vesolja, njegov članek v francoščini ni bil znan raziskovalni skupnosti. Zakon o širjenju vesolja je zato dobil ime po Hubblu. Leta 1931 je bil Lemaïtrov članek preveden v angleščino, vendar brez odstavka z opisom širjenja vesolja. Pred desetimi leti je Mario Livio v korespondenci med Lemaïtrom in urednikom revije *Monthly Notices* odkril, da je sam Lemaître odločil, da izračuna s podatki ne objavi, ker so bili Hubblovi natančnejši [6]. Na tej podlagi je leta 2018 Mednarodna astronomska zveza volila za preimenovanje zakona v Hubble-Lemaïtrov zakon.

pravimo Hubble-Lemaîtreov zakon [3] in ga zapišemo kot

$$z = \frac{H}{c}d, \quad (1)$$

kjer je z kozmološki rdeči premik spektralnih črt opazovane galaksije, c svetlobna hitrost, d oddaljenost galaksije ter H Hubblov parameter. V tej obliki je zakon veljaven do $z \sim 0,2$ (kar ustreza približno $2,5 \cdot 10^9$ svetlobnim letom). Premo sorazmernost kozmološkega rdečega premika galaksij in njihove oddaljenosti ni posledica hitrosti oddaljevanja posamičnih galaksij, marveč širjenja vesolja samega.

Friedmannove osnovne enačbe, ki opisujejo širjenje vesolja, lahko uvedemo tudi brez uporabe splošne teorije relativnosti. Predpostavimo homogeno vesolje in si oglejmo razvoj sfernega volumna z radijem R , ki se širi zaradi širjenja vesolja. Za objekt z maso m na razdalji R od središča sfere, ki se od središča oddaljuje s hitrostjo $\dot{R} = dR/dt$ zaradi širjenja prostora, lahko zapišemo polno energijo kot:

$$E = \frac{m\dot{R}^2}{2} - \frac{GMm}{R}, \quad (2)$$

kjer je M masa znotraj volumna, ki ga omejuje radij R . Če upoštevamo homogeno porazdelitev mase $M = \rho(t)\frac{4}{3}\pi R(t)^3$, lahko zgornjo enačbo preuredimo v *prvo Friedmannovo enačbo*

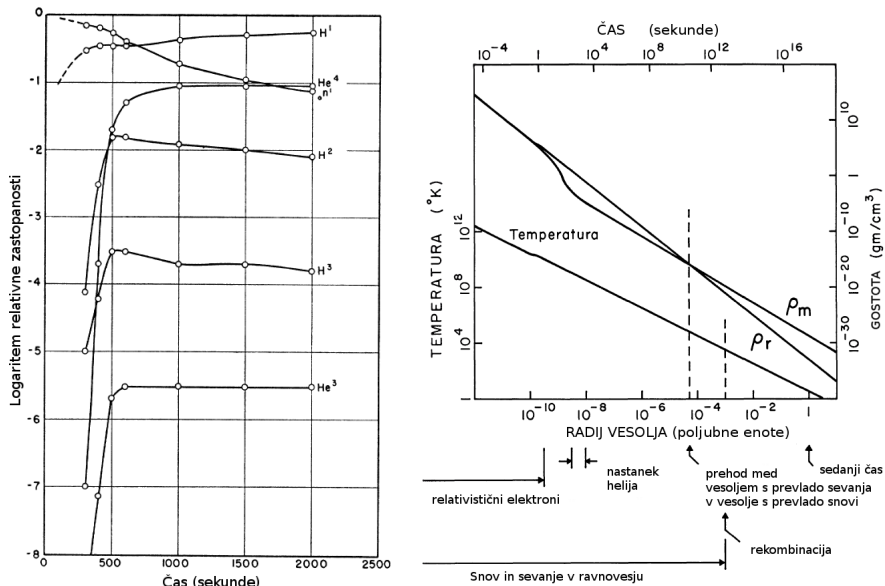
$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{kc^2}{R(t)^2}, \quad (3)$$

kjer smo zapisali Hubblov parameter $H(t)$ v obliki $H(t) = \frac{\dot{R}}{R(t)}$, člen $2E/m$ na desni strani enačbe pa zamenjali z $-kc^2$, kjer je k parameter ukrivljenosti prostora, ki ima vrednost -1 , 0 ali 1 za primer odprtega, ravnega ali zaprtega vesolja. Ker se vesolje širi pospešeno, moramo na desno stran enačbe (3) dodati $+\Lambda c^2/3$, kjer nastopa kozmološka konstanta Λ , ki upošteva učinek še neznane temne energije [5].

Izmerjene vrednosti Hubblovega parametra se danes trenutno gibljejo med 67 in 73 km/s/Mpc. Novejše raziskave so pokazale, da se vrednosti Hubblovega parametra, izmerjene na podlagi podatkov zgodnjega vesolja ter na podlagi podatkov lokalnega vesolja, ne skladajo znotraj nezanesljivosti. Razlog neskladja je trenutno še neznan [12].

Iz prej zapisane Friedmannove enačbe lahko izpeljemo tudi *kritično gostoto* $\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}$, ki predstavlja povprečno gostoto snovi v vesolju, ki bi

zaustavila širjenje ravnega vesolja. Današnja vrednost kritične gostote je $\rho_{cr,0} = 2,78 \cdot 10^{11} \text{ M}_\odot/h \text{ (Mpc/h)}^{-3}$, kar ustreza povprečni masi galaksije v volumnu, ki ga določa povprečna razdalja med galaksijami³ oz. približno petim atomarnim vodikom v kubičnem metru. Kritično gostoto uporabimo pri vpeljavi *parametra gostote*, ki ga izrazimo kot razmerje med gostoto in kritično gostoto, tj. $\Omega(t) = \rho(t)/\rho_{cr}(t)$. Vesolje sestavljajo različne sestavine, katerih gostota se različno spreminja s širjenjem vesolja in jih opišemo s posamičnimi parametri gostote. V primeru ravnega vesolja je njihov seštevek $\Omega = 1$, vrednosti za posamične komponente pa merijo danes $\Omega_m \sim 5 \%$, $\Omega_{dm} \sim 25 \%$ in $\Omega_\Lambda \sim 70 \%$ za navadno snov, temno snov in temno energijo.



Slika 1. Levo: relativna zastopanost lažjih elementov v odvisnosti od časa *po velikem poku* (model vesolja s širjenjem in prevlado sevanja), ki sta ga objavila Alpher in Herman. Koncentracija nukleonov je 10^{21} cm^{-3} pri 1 sekundi. Relativna zastopanost je izračunana kot razmerje med številsko gostoto izbranih nukleonov in številsko gostoto vseh nukleonov. Poleg končnih produktov modela (^1H , ^2H , ^3He in ^4He) so prikazani tudi tritij in nevtroni, ker imajo daljši razpolovni čas od 2000 sekund (12,46 let in 10,25 minut). Povzeto po [1]. Desno: razvoj temperature, gostote snovi (ρ_m) in sevanja (ρ_r) v odvisnosti od starosti oz. radija vesolja. Na sliki so spodaj označeni mejniki (z leve proti desni): prisotnost relativističnih elektronov, nastanek helija, prehod med vesoljem, v katerem prevladuje sevanje, v vesolje s prevladujočo snovjo, rekombinacija (obdobje nastanka prasevanja) in sedanji čas. Črtasti navpični črti označujeta zadnji dve opisani obdobji. Povzeto po [2].

³V kozmologiji se pogosto v enotah pojavi brezdimenzijski Hubblov parameter h , kjer je $H = h \text{ 100 km/s/Mpc}$. Mpc je 10^6 parsekov, kjer je parsek (pc) $3,09 \cdot 10^{16} \text{ m}$.

Odkritje kozmičnega prasevanja

Naslednji preskok v zgodovini kozmologije je sledil po drugi svetovni vojni, ko je teoretski fizik in kozmolog George Gamow po namigu Lemaître raziskoval nastanek kemičnih elementov v procesu *prvinske nukleosinteze*. Če se vesolje širi, je moralo biti v preteklosti veliko manjše, snov in sevanje v njem pa imeti veliko višjo gostoto in temperaturo, ki bi omogočala nastanek elementov.⁴ Podlaga takemu razmisleku so bila opazovanja enakomerne zastopanosti elementov v zvezdah, ki jih je opravila Cecilia Payne Gaposchkin, kot tudi takratno (sicer zmotno) prepričanje, da zvezde v svojih središčih ne dosegajo dovolj visokih temperatur, ki bi omogočale jedrsko zlitje težjih elementov. V kratki časovni skali širitve zgodnjega vesolja pa ni bilo možno sintetizirati elementov težjih od helija. V petdesetih letih prejšnjega stoletja so znanstveniki odkrili trojni alfa proces, pri katerem lahko iz treh jeder helija nastane jedro ogljika, in sklepali, da lahko v zvezdah nastanejo težji kemijski elementi. Toda opazovanih visokih količin helija ($\sim 24\%$ v masnem deležu) zvezde v svoji življenjski dobi ne bi bile zmožne proizvesti, zato se je izvor helija iskalo v prvinski nukleosintezi. Okrog petdesetih let sta Ralph Alpher in Robert Herman sicer pokazala, da lahko v vesolju, ki se širi, nastanejo elementi devterij, tritij in helij v dovolj velikih količinah (slika 1 levo), raziskala sta pa tudi termično zgodovino vesolja in predvidela, da naj bi iz časa rekombinacije⁵ obstajalo difuzno ozadje sevanja črnega telesa s temperaturo okrog 5 K [1, 7].

V obdobju po drugi svetovni vojni so postajali radijski sprejemniki občutljivejši za valovne dolžine okrog centimetra. V družbi Bell Telephone Laboratories so ob koncu petdesetih let preizkušali komunikacijo v mikrovalovih in pri testiranju sprejemnikov ugotavljali, da se jim nikakor ne uspe znebiti sevanja, ki ustreza temperaturi ~ 2 K. Po nekaj letih sta izvor te anomalije začela proučevati Bellova inženirja Arnold Penzias in Robert Wilson. Nedaleč stran, borih 35 km od Holmdelove antene, s katero sta se inženirja ukvarjala, se je Dickejeva skupina lotevala iskanja sledov prasevanja. Še med drugo svetovno vojno je Dicke na Massachusetts Institute of Techno-

⁴Po drugi svetovni vojni sta se uveljavili dve teoriji vesolja. Prva je bila teorija o stabilnem stanju vesolja, ki se širi, vendar ohranja iste lastnosti v času. V takem modelu bi morala snov v vesolju ves čas nastajati. Druga teorija je bila teorija prapoka, ki so jo podpirali George Gamow in sodelavci, po kateri naj bi vesolje nastalo ob enkratnem dogodku pred približno 13,8 milijarde let.

⁵Doba rekombinacije je mejnik ~ 380000 let po nastanku vesolja, ko so iz prostih elektronov in jeder nastali nevtralni elementi, sevanje pa se je še zadnjič sipalo. Iz tega obdobja, ko je snov v vesolju imela $T \sim 3000$ K, izhaja sevanje ozadja (ali prasevanje), ki ga danes opazujemo v mikrovalovih.

logy (MIT) izumil radiometer za mikrovalovno območje, ki ga je kasneje uporabil za meritve mikrovalovnega sevanja Sonca in Lune ter pokazal, da lahko zelo malo sevanja (ki ustreza temperaturam < 20 K) pri valovnih dolžinah med 1 in 1,5 cm pripiše preostali snovi v vesolju [8]. Leta 1964 je zato Dicke predlagal sodelavcema Petru Rollu in Daveju Wilkinsonu, da predelata Dickejev radiometer za meritve morebitnega prasevanja, Peeblesu pa predlagal, da razišče teoretično ozadje.

Spomladi 1965 sta obe skupini, ki sta slučajno izvedeli druga za drugo, objavili v reviji *The Astrophysical Journal Letters* ločena članka [2, 11] o teoretični razlagi meritev sevanja ozadja v mikrovalovih, h kateri je prispeval Peebles, ter meritve prasevanja s Holmdelovo anteno, ki je odkriteljema Penziasu in Wilsonu prinesla Nobelovo nagrado za fiziko leta 1978.

Dickejeva skupina ni bila prva, ki je predpostavila obstoj ostankov sevanja iz začetka vesolja (desni graf na sliki 1). V istem članku [2] so poudarili, da tudi opazovanja helija narekujejo zgornjo mejo za gostoto snovi v vesolju: v gostejšem vesolju bi s prvinsko nukleosintezo nastalo več helija. Obenem je opazovana temperatura prasevanja omejevala količino navadne, barionske snovi v vesolju na $3 \cdot 10^{-32}$ g/cm³, kar se sicer ni skladalo z večjo količino snovi iz takratnih astronomskih opazovanj in namigovalo na prisotnost eksotične komponente snovi.

V sedemdesetih letih sta Vera Rubin in Kent Ford objavila opazovanja rotacijskih krivulj bližnjih spiralnih galaksij. Ugotavljala sta, da hitrost kroženja zvezd ne pada z razdaljo po običajnem zakonu $v(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ (kjer je M masa znotraj radija r), marveč ostaja konstantna z večanjem oddaljenosti od središča. To pa pomeni, da se masa veča z radijem, in ker je opazno manj vidne snovi prisotne na takih razdaljah, sta sklepala, da je prisotna nevidna *temna snov*. Že 40 let prej je posredni učinek temne snovi ugotavljal tudi švicarsko-ameriški astronom Fritz Zwicky, ko je za gravitacijsko vezane sisteme galaksij ugotavljal neskladje med njihovo dinamično maso iz virialnega teorema in maso vidnih galaksij, ki je bila veliko manjša. Tudi Nobelov nagrajenec Peebles se je lotil problema temne snovi, vendar z vidika stabilnosti galaktičnega diska. Z Jeremiahom Ostrikerjem sta leta 1973 uporabila numerične simulacije spiralnih galaksij in pokazala, da je za stabilnost diska potrebna prisotnost sfernega haloja temne snovi.

Odkritje temne snovi pa je vplivalo tudi na kozmološke modele vesolja. Peebles je v svojem članku leta 1982 prvi upošteval učinek, ki ga ima na nastanek struktur (od nastanka prvih zvezd do galaksij in večjih sistemov) nerelativistična (torej hladna) temna snov. Ocenil je, da bi morala biti za prisotnost take temne snovi lokalna odstopanja temperature prasevanja na

ravni $\delta T/T \sim 3,5 \cdot 10^{-6}$. COBE (COsmic Background Explorer), prvi satelit, ki je bil namenjen meritvi prasevanja in ugotavljanju njegovega spektra, je bil izstreljen leta 1989. Njegovi rezultati, objavljeni leta 1992, so pokazali, da je prasevanje skladno s spektrom črnega telesa s temperaturo 2,725 K. Istočasno pa so izmerili temperaturne anizotropije, odmike od temperature omenjenega spektra, ki so bili reda velikosti $\Delta T/T \sim 10^{-5}$, podobni Peeblesovi oceni. Za to prelomno opazovanje prasevanja in njegovih anizotropij sta leta 2006 Nobelovo nagrado prejela vodja projekta John Maters in glavni vodja instrumenta za opazovanje anizotropij, George Smoot.

Fizikalna kozmologija

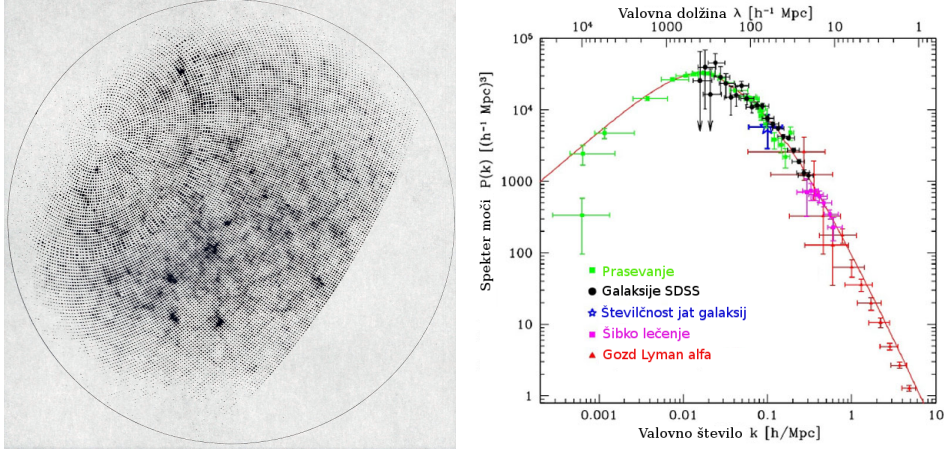
Začetni opis vesolja temelji na kozmološkem principu, osnovni predpostavki o homogenosti in izotropnosti vesolja. Taka predpostavka sicer velja na dovolj velikih prostorskih skalah, toda že sam pogled v nočno nebo nam razkrije, da je vesolje na manjših skalah nehomogeno. Vesoljsko strukturo, katere osnovni gradniki so galaksije, sestavljajo manjša združenja (skupine galaksij) ter večje gravitacijsko vezane strukture (jate galaksij), nadjate, podolgovati filamenti, kot tudi praznine (angl. *voids*).

Za vzpostavitev fizikalne kozmologije sta zaslužna predvsem Peebles in ruski kozmolog Jakov Zeldovič, ki sta v šestdesetih letih v kozmološkem kontekstu raziskovala nastanek in razvoj struktur v vesolju. Peebles je leta 1971 izdal svojo prvo knjigo ravno z naslovom *Physical cosmology* in v govoru ob prejetju Nobelove nagrade razložil izbiro naslova, saj je »nameraval raziskati fizikalne procese, ki so ali bi lahko delovali v vesolju, ki se širi, in raziskati, kako bi teorijo oblikoval na podlagi opazovanj«.

Kvantitativni opis nehomogenega vesolja temelji na raziskovanju kozmoloških modelov, ki imajo iste statistične lastnosti kot naše vesolje. V ta namen je treba opisati nehomogenosti oz. prej omenjeno vesoljsko strukturo. Za opis grozdenja (tj. združevanja) galaksij na večjih kotnih skalah se uporablja *dvo-točkovno korelacijsko funkcijo*. Opišemo jo s porazdelitvijo galaksij na nebu ali v obliki prostorske dvo-točkovne korelacijske funkcije v treh dimenzijah $\xi(r)$, in sicer

$$N(r)dV = N_0[1 + \xi(r)]dV, \quad (4)$$

kjer je $N(r)dV$ število galaksij v volumnu dV na razdalji r od posamične galaksije, N_0 pa povprečna gostota galaksij. $\xi(r)$ opisuje presežek števila galaksij na razdalji r od izbrane galaksije glede na povprečje. V opazovanjih funkcijo $\xi(r)$ določamo tako, da povprečimo produkte gostote galaksij za veliko število parov točk na razdalji r . Meritve primerjamo s potenčno funkcijo



Slika 2. Levo: porazdelitev galaksij na severni polobli iz kataloga Lick [14] (inverzne barve). Temni kvadratici predstavljajo del neba velikosti kvadratne stopinje, njihova velikost je premo sorazmerna s številom prešteti galaksij pod 19 magnitudo na posamičnem območju. Območja so razporejena po deklinaciji in rektascenziji. Svetli galaktični sestav v spodnjem delu slike je jata galaksij Berenikini kodri. Zemljevid pripravila J. A. Peebles in P. J. E. Peebles. Desno: spekter moči $P(k)$ za snov v vesolju v odvisnosti od valovnega števila k . Z različnimi simboli so prikazani podatki za prasevanje satelita COBE, galaksije pregleda neba SDSS, številnost jat galaksij, šibko gravitacijsko lečenje galaksij in gozd Lyman- α . Povzeto po [15].

$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}$, kjer je r_0 korelacijska razdalja. Današnja opazovanja kažejo, da tak opis velja na razdaljah od 2 do nekaj 10 Mpc/ h , in da je korelacijska razdalja $r_0 = 5$ Mpc/ h , eksponent γ pa ima vrednosti v območju 1,7 – 1,8. Na razdaljah, ki so večje od 10 Mpc/ h , korelacija pada hitreje od potenčne funkcije, kar pomeni, da je na večjih fizičnih skalah vesolje izotropno [7, 13].

Med prvimi, ki so opravili podobno analizo, in sicer z uporabo kotne korelacijske funkcije med galaksijami iz različnih katalogov, je bil ravno Peebles. Leta 1977 sta v članku [4] z Edwardom Grothom izračunala dvo- in tri-točkovno korelacijsko funkcijo z uporabo Zwickyjevega kataloga galaksij, Lickovega štetja galaksij (na sliki 2 levo) in galaksij iz Jagiellonskega globokega polja. Ugotavljala sta, kako se v lokalnem vesolju galaksije združujejo v večje sestave in nista opazila znakov prisotnosti filamentarnih struktur.

Alternativni (ekvivalentni) opis statističnih lastnosti naključnega polja fluktuacij in torej strukture vesolja je potenčni spekter $P(k)$. Potenčni spekter in korelacijska funkcija sta povezana s Fourierjevo transformacijo:

$$P(k) = 2\pi \int_0^\infty r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \xi(r) dr, \quad (5)$$

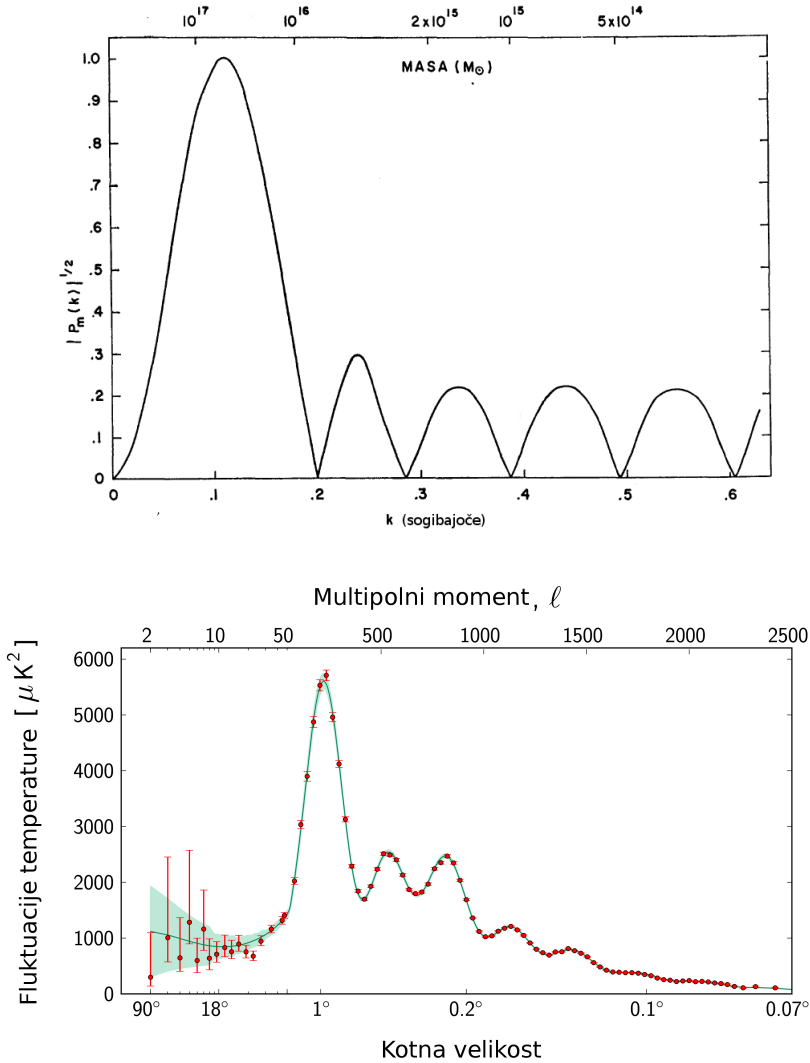
kjer je k valovno število. Spekter moči v grobem opisuje količino strukture v odvisnosti od velikostne skale. Višji potenčni spekter pomeni višjo amplitudo fluktuacij gostote na velikostni skali $2\pi/k$. Primer spektra moči za fluktuacije gostote najdemo na sliki 2 (desno), kjer so predstavljeni rezultati za zelo različna opazovanja vesoljskih objektov, ki zaobjamejo štiri rede velikosti v vesoljskih skalah. V grobem ta spekter opišemo s $P(k) \propto k$ na večjih skalah in $P(k) \propto k^{-3}$ na manjših skalah.

Omenili smo, da kozmološki modeli slonijo na predpostavki enakomerne porazdelitve snovi, vendar je današnje vesolje daleč od enakomernega. Kmalu po odkritju prasevanja sta Rainer Sachs in Arthur Wolfe prva napovedala anizotropije v prasevanju. Raziskala sta, kako spremembe gravitacijskega potenciala (zaradi fluktuacij v gostoti) učinkujejo na temperaturo prasevanja. Učinek Sachs-Wolfe, ki sta ga opisala, temelji na kombinaciji dveh procesov: rahle zgostitve, ki so prisotne na začetku vesolja, bodo spremenile temperaturo prasevanja: fotoni bodo za izhod iz potencialne jame izgubili del svoje energije (gravitacijski rdeči premik) in istočasno se bodo fotoni v zgostitvi sipali nekoliko prej, torej pri višji temperaturi (gravitacijski časovni zamik). Efekt Sachs-Wolfe je povezan z anizotropijami prasevanja na velikih skalah.

V zgodnjem vesolju se zaradi začetnih fluktuacij v gostoti v plazmi iz fotonov in barionov pojavijo tudi akustični valovi, ki zamrznejo ob nastanku prasevanja, ko se fotoni še zadnjič sipljejo od atomov in začnejo prosto potovati po vesolju. Akustične valove opazujemo v spektru moči anizotropij prasevanja (slika 3 spodaj) in so povezani z geometrijo vesolja (prvi vrh), količino navadne snovi (drugi vrh) ter temno snovjo (tretji vrh) [17]. Fizikalno sta akustične vrhove razložila Rashid Sunyaev in Jakov Zeldovič, medtem ko sta Peebles in njegov magistrski študent Jer Yu poračunala gostotne fluktuacije za različne kozmološke parametre (primer na sliki 3 zgoraj) in postavila svoje delo v kontekst opazovanj [10].

Kozmološka konstanta in usklajeni model vesolja

Omenili smo prispevek nobelovca Peeblesa k povezovanju opazovanj struktur v vesolju in teorije, ki bi te strukture znala napovedati. Peebles je, kot smo že zapisali, prvi uporabil hladno temno snov, da bi izračunal njen učinek na nastanek struktur v vesolju. V istih letih se je razvila teorija inflacije, po kateri naj bi bilo vesolje ravno ($\Omega = 1$). Toda opazovanja astronomov so ugotavljala bistveno nižji prispevek navadne in temne snovi k parametru gostote Ω . Da bi lahko pojasnil tako nastanek struktur kot tudi vključil inflacijo, je Peebles pri izračunih v svojem članku leta 1984



Slika 3. Zgoraj: spekter moči perturbacij za model ravnega vesolja, ki sta ga v svojem članku poračunala Peebles in Yu. Spekter je normaliziran na 1. Maksimalno amplitudo doseže tak model pri kritični masi $\sim 5 \cdot 10^{16} M_\odot$. Povzeto po [10]. Spodaj: kotni spekter moči fluktuacij temperature v prasevanju v odvisnosti od kotne velikosti fluktuacij (spodnja skala) oz. multipolni moment (zgornja skala). Med momentom l in kotno velikostjo θ v grobem velja $\theta \sim 180^\circ/l$. Na sliki so prikazani podatki vesoljskega satelita Planck, v zasenčenem delu in s polno črto pa je predstavljeno območje, ki ga zajema trenutno uveljavljeni model, ki opisuje vesolje, tj. standardni model vesolja (avtorstvo: ESA in Kolaboracija Planck).

uporabil kozmološko konstanto, ki je bila do takrat opuščena. Z leti pa je postalo jasno, da je kozmološka konstanta potrebna in leta 1995 so se večji deli sestavljanke končno sestavili v sliko vesolja, ki mu danes pravimo usklajeni model vesolja (angl. *concordance cosmology*), ki upošteva zelo različna in komplementarna opazovanja. Le nekaj let kasneje so opazovanja oddaljenih eksplozij supernov tipa Ia potrdila pospešeno širjenje vesolja, za kar je odgovorna še neznana temna energija. Vodilnim znanstvenikom pri teh meritvah pospešitve širjenja vesolja je bila leta 2011 podeljena Nobelova nagrada (glej članek v Obzorniku [5]).

Zaključek

Nobelov nagrajenec James Peebles je še vedno aktiven na področju fizikalne kozmologije, na katerem se ukvarja z znanstvenimi vprašanji, ki so podcenjena in kot sam trdi, je takih vprašanj veliko. Zanimajo ga predvsem nenavadne lastnosti galaksij v kozmološkem kontekstu [18]. Naj navedemo tri posebne primere, s katerimi se ukvarja. Prvi primer predstavljajo izolirane galaksije, ki so odmaknjene od drugih, zato bi pričakovali, da je bila njihova rast konstantna, posledično pa njihova oblika aksialno simetrična, kar pa ne drži.

Drug problem je povezan z nastankom različnih generacij zvezd v galaksijah. Iz novejših opazovanj je razvidno, da je približno polovica večjih bližnjih galaksij sestavljena samo iz zvezdnega diska, v katerem so pretežno zvezde poznejših generacij. Prve generacije zvezd naj bi sestavile središčno odebelitev, ki pa v teh galaksijah ni prisotna. Odgovor na vprašanje, kje so prve generacije zvezd v takih galaksijah, iščejo z uporabo simulacij nastanka struktur na velikih skalah, s katerimi sledijo zvezdam in njihovi razporeditvi znotraj galaksij.

Tudi raziskovanje gibanja in preteklih orbit bližnjih galaksij je izredno zanimivo. Z analizo 23 najbližjih znanih galaksij je pred kratkim Peebles ocenil, da je 21 manjših galaksij Lokalne skupine nastalo v dveh skupkih. Ena izmed teh galaksij naj bi nekoč bila bližje naši Galaksiji, vendar tokovi plina, ki nastanejo ob takih bližnjih srečanjih, niso jasno razvidni v opazovalnih podatkih in velja temu posvetiti dodatna opazovanja.

Zakaj naj bi se Nobelov nagrajenec ukvarjal z znanstvenimi vprašanji, ki niso trenutno med najbolj pribljubljenimi ali aktualnimi? Taka vprašanja nam, po besedah nobelovca, »pomagajo preveriti sprejete ideje, kar je vedno dobro, in še vedno obstaja možnost, da je Narava pripravila za nas še kako presenečenje.«

LITERATURA

- [1] R. A. Alpher in R. C. Herman, *Theory of the Origin and Relative Abundance Distribution of the Elements*, Rev. Mod. Phys. **22** (1950), 153.
- [2] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll in D. T. Wilkinson, *Cosmic Black-Body Radiation*, Astroph. Journal **142** (1965), 414.
- [3] E. Gibney, *Belgian priest recognized in Hubble-law name change*, Nature, 30. oktober 2018.
- [4] E. J. Groth in P. J. E. Peebles, *Statistical analysis of catalogs of extragalactic objects. VII. Two- and three-point correlation functions for the ghig-resolution Shane-Wirtanen catalog of galaxies*, ApJ **217** (1977), 385.
- [5] V. Iršič in A. Slosar, *Nobelova nagrada za fiziko 2011 – temna energija*, Obzornik mat. fiz. **58** (2011), 221–231.
- [6] M. Livio, *Mystery of the missing text solved*, Nature **479** (2011), 171–173.
- [7] M. S. Longair, *Galaxy formation*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [8] P. J. E. Peebles, *Seeing Cosmology Grow*, Annual Review Astr. Astrophys. **50** (2012), 1–12.
- [9] P. J. E. Peebles, *Cosmology's early days*, Nat. Astron. **3** (2019), 1055–1057.
- [10] P. J. E. Peebles in J. T. Yu, *Primeval Adiabatic Perturbation in an Expanding Universe* ApJ, **162** (1970), 815.
- [11] A. A. Penzias in R. W. Wilson, *A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s*, Astroph. Journal **142** (1965), 419.
- [12] A. G. Riess, *The expansion of the Universe is faster than expected*, Nat. Rev. Phys **2** (2020), 10–12.
- [13] P. Schneider, *Extragalactic Astronomy and Cosmology*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.
- [14] C. D. Shane in C. A. Wirtanen, *The distribution of extragalactic nebulae*, Astron. Journal **59** (1954), 285.
- [15] M. Tegmark, M. R. Blanton, M. A. Strauss, F. Hoyle, D. Schlegel, R. Scoccimarro, M. S. Vogeley, et al., *The Three-Dimensional Power Spectrum of Galaxies from the Sloan Digital Sky Survey*, ApJ **606** (2004), 702.
- [16] T. Zwitter, *Nobelova nagrada odkriteljema planetov drugih zvezd*, Obzornik mat. fiz. **66** (2019), 132–145.
- [17] *The Nobel Prize in Physics 2019*, NobelPrize.org, Nobel Media AB 2020, dostopno na www.nobelprize.org/prizes/physics/2019/summary/, ogled 25. 10. 2021.
- [18] *P. James Peebles*, dostopno na phy.princeton.edu/people/p-james-peeble, ogled 25. 10. 2021.

Državno tekmovanje v razvoju novih analitskih metod v medicini – RIS

Aprila in maja 2021 je potekalo prvo državno tekmovanje v razvoju novih analitskih metod v medicini – poimenovano RIS – v organizaciji Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA) ter raziskovalne skupine Medicinska fizika, ki deluje v okviru Univerze v Ljubljani, Fakultete za matematiko in fiziko, Instituta Jožef Stefan, Univerzitetnega kliničnega centra Ljubljana in Onkološkega inštituta. Tekmovanje je bilo namenjeno vsem študentom in dijakom z zanimanjem za področje naprednih računskih metod na stičišču medicine, fizike in računalništva.

Tekmovalci so se soočili z izzivom na temo diagnoze in prognoze okužbe s COVID-19. Natančnejše napovedi obsežnosti okužbe s COVID-19 v pljučih



Slika 1. Drugouvrščena ekipa Night foxes. Od leve proti desni: Filip Cvetko (Medicinska fakulteta, Univerza v Ljubljani), Tim Cvetko (Gimnazija Brežice) in tajnik tekmovanja RIS doc. dr. Urban Simončič (Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani). Zaradi epidemije se vsem tekmovalcem podelitve ni uspelo udeležiti.



Slika 2. Tekmovanje v razvoju novih analitskih metod v medicini – RIS.

lahko pomagajo pri odločitvah o hospitalizaciji in zdravljenju. Tekmovalci so sestavljali avtomatizirano rešitev, ki bi iz CT-slik prsnega koša omogočila čim zanesljivejšo napoved obsežnosti okužbe s COVID-19 v pljučih.

Namen tekmovanja je bil popularizacija sodobnih metod analize podatkov v medicini, zato je bilo tekmovanje zastavljeno tudi kot učna priložnost. Na uvodnem predavanju je bilo predstavljeno medicinsko ozadje problema, slikanje s CT in statistične ter računske metode, ki se trenutno uporabljajo v znanosti za klasifikacijo podatkov. Pri tem je bil največji poudarek na najsodobnejših metodah strojnega učenja – umetni inteligenci.

Tekmovanje je potekalo v dveh krogih. V prvem krogu tekmovanja so morali tekmovalci ustvariti avtomatiziran model, ki bi iz CT-slik prepoznal blago in zelo obsežno okužbo s COVID-19 (binarna klasifikacija). V drugem krogu so tekmovalci dobili nekoliko bolj zapleten problem: njihov model je moral na CT-slikah prepoznati blago, zmerno in zelo obsežno okužbo s COVID-19 (večrazredna klasifikacija).

Na tekmovanje se je prijavilo 15 ekip s skupno 35 tekmovalci. Večina študentov je obiskovala Univerzo v Ljubljani, nekaj študentov pa je prišlo z Univerze v Mariboru. Zastopane so bile skoraj vse fakultete s poudarkom na naravoslovju: Fakulteta za matematiko in fiziko (FMF), Medicinska fakulteta (MF), Fakulteta za računalništvo in informatiko (FRI), Fakulteta za elektrotehniko (FE), Biotehniška fakulteta (BF), Fakulteta za strojništvo (FS) in Fakulteta za naravoslovje in matematiko (FNM). Tekmovanja se je

udeležil tudi en dijak iz Gimnazije Brežice (GB). V prvem krogu je svoje rešitve pravočasno oddalo 13 ekip, od katerih se jih je v drugi krog tekmovanja uvrstilo šest najboljših. Nagradni sklad 1.500 EUR je bil na podlagi uspešnosti klasifikacijskega algoritma razdeljen vsem šestim ekipam iz drugega kroga. Zmagovalno ekipo so sestavljali Luka Leban (MF), Tim Poštuvan (FRI) in Sara Veber (FRI), drugouvrščeno pa brata Tim Cvetko (MF) in Filip Cvetko (GB). Preostale štiri ekipe finalnega kroga so si razdelile tretje mesto.

Tekmovalci so pri reševanju problemov v obeh krogih tekmovanja uporabljali predvsem metode strojnega učenja. Najuspešnejše ekipe so za klasifikacijo CT-slik uporabile konvolucijske nevronske mreže. Zmagovalna ekipa, ki je v zadnjem krogu tekmovanja dosegla prepričljivo zmago, je pri svoji rešitvi veliko poudarka namenila pazljivi izbiri hiperparametrov za učenje nevronske mreže ter augmentaciji že razpoložljivih podatkov. Pomembno se je izkazalo tudi upoštevanje neuravnoteženosti razredov, saj je bila večina slik v učni množici iz razreda z blago okužbo. Zmagovalci so pri izbiri ogrođa za svojo rešitev uporabili filtre že naučene konvolucijske nevronske mreže ResNet-34. Dobre rešitve tekmovalcev bodo neposredno koristile širšim raziskavam na področju analize medicinskih slik, predvsem v okviru medicinsko-fizikalnih raziskav. Z izzivi klasifikacije se raziskovalci srečujejo pri vsakodnevnem raziskovalnem delu. Rezultati teh raziskav pa počasi, vendar bistveno spreminjajo klinično prakso.

Tekmovanje RIS je tako udeležencem približalo zahtevne in aktualne izzive, s katerimi se srečuje medicina. V prvi vrsti tiste povezane z razvojem in aplikacijo naprednih analitskih metod, zasnovanih na osnovi umetne inteligence. Hkrati pa so tekmovalci spoznali izzive in prednosti interdisciplinarnega dela. Prvo državno tekmovanje v razvoju novih analitskih metod v medicini je bilo v celoti izredno uspešno, z odlično udeležbo in zanimanjem tekmovalcev. Nekatere ekipe so se na svojih fakultetah odločile tudi za objavo članka in konferenčnih prispevkov.

Programska skupina Medicinska fizika

<http://www.dmfa-zaloznistvo.si/>

Vabilo na Občni zbor DMFA Slovenije

Spoštovane članice in člani DMFA Slovenije. Vljudno vabljeni na **znanstveno popoldne in 74. občni zbor društva, ki bo v petek, 19. novembra 2021, od 17-ih dalje**. Občni zbor bo potekal na daljavo preko spletne aplikacije Zoom, povezava za udeležbo bo 3 dni pred sejo poslana vsem članom na njihove elektronske naslove.

17:00 Znanstveno popoldne

Krajši poljudni predavanji o svojem delu in aktualnih odkritjih na področjih matematike in fizike bosta pripravila **fizik prof. dr. Samo Kralj**, UM FNM, prejemnik Zoisovega priznanja 2020 in državne nagrade za šolstvo 2021, ter **matematik prof. dr. Bojan Mohar**, UL FMF in Simon Frasier University, Kanada, prejemnik mednarodne nagrade John L. Synge (2018), nedavno izvoljen med častne člane American Mathematical Society (2020) in v akademijo znanosti pri Royal Society of Canada (2020). Več informacij o predavanjih bo objavljenih na spletni strani www.dmfa.si.

18:30 Občni zbor DMFA Slovenije

Predlog dnevnega reda:

1. Otvoritev

Med čakanjem na sklepčnost bo kratko predavanje **Barbare Japelj Pavšič** s Pedagoškega inštituta o slovenskem matematičnem in fizikalnem izobraževanju v luči mednarodnih primerjav.

2. Izvolitev delovnega predsedstva

3. Spremembe statuta DMFA Slovenije¹

4. Izvolitev častnih članov

5. Podelitev društvenih priznanj

6. Poročila o delu društva

7. Računovodsko in poslovno poročilo DMFA²

8. Vprašanja in pobude³

9. Razno

Nežka Mramor Kosta, predsednica DMFA Slovenije

¹Predlog spremenjenega statuta je objavljen na spletni strani www.dmfa.si.

²Vpogled v dokumentacijo je možen od 15. do 18. 11. po dogovoru (ga. Simona Puncer, racunovodstvo@dmfa.si).

³Vprašanja in pobude lahko člani pošljejo vnaprej po elektronski pošti do 18. 11. na naslov tajnik@dmfa.si.

Martini Koman v spomin (1931–2021)

V enaindevetdesetem letu življenja nas je 9. julija 2021 zapustila častna članica, nekdanja predsednica in dolgoletna podpredsednica DMFA Slovenije, Martina Koman.

Martina Koman se je rodila 2. 1. 1931 v Ljubljani. Prva znanja je prejela na II. državni mešani osnovni šoli Valentina Vodnika v Zgornji Šiški. Med vojno je obiskovala nižjo gimnazijo, po vojni pa žensko realno gimnazijo v Ljubljani, saj so nekaj časa po vojni še ločevali ženske in moške oddelke. Diplomirala je na matematičnem oddelku Prirodoslovno matematične fakultete v Ljubljani. Eden izmed njenih profesorjev je bil tudi dr. Josip Plemelj.



Najprej je še pred diplomo poučevala na Gimnaziji Ptuj, po diplomi leta 1954 pa je odšla na Jesenice, kjer je na takrat še osemletni gimnaziji poučevala matematiko in fiziko. Po vzpostavitvi osemletne osnovne šole pa je poučevala na OŠ Prežihov Voranc na Jesenicah, kjer je bila nekaj časa tudi pomočnica ravnatelja. Od septembra 1968 je delala na gimnaziji v Postojni, kjer je bila vse do upokojitve 1988. Tudi v Postojni je bila več let pomočnica ravnatelja, pa tudi vodja aktiv. Sodelavci so jo zelo cenili, saj je vsakomur rada priskočila na pomoč in se lotila vsakega dela, ne glede na to, ali je zanj prejela plačilo ali ne. Njen odnos do dela se kaže tudi v tem, da se je zaradi pomanjkanja profesorjev fizike leta 1989 znova zaposlila na tej gimnaziji in za eno leto prekinila upokojitvev.

V času poučevanja v Postojni je skupaj s kolegi v letih 1975 in 1985 organizirala tekmovanje srednješolcev v znanju matematike, leta 1986 pa 27. zvezno tekmovanje srednješolcev v znanju matematike.

Bila je priljubljena tudi med dijaki, saj je s svojim optimističnim pogledom na svet in preudarnim odnosom do mladih znala vzbuditi njihovo zanimanje za matematiko in fiziko. Njena nekdanja dijakinja Eva Čeč je zapisala: *Njena posebno mehka pedagoška duša je zmogla tudi s tistimi, ki sta jim fizika in matematika povzročali težave. Takoj si vedel, če si ustrelil mimo: »A pejte no!« in prizadevanja za uspešen odgovor si usmeril drugam. ...*

Za svoje pedagoško delo je že leta 1970 prejela občinsko priznanje *Temeljne izobraževalne skupnosti* Postojne.

Martina je bila več kot 30 let ena najbolj aktivnih članic DMFA Slovenije. Članica *Komisije za pedagoško dejavnost* je postala leta 1971, dve leti pozneje pa sekretarka te komisije in hkrati članica UO društva. Kot sekretarka je organizirala več dvodnevni in enodnevni krajsi seminarjev za učitelje matematike in fizike. Njena poročila o delu društva so še danes pomemben vir informacij za proučevanje zgodovine DMFA Slovenije. Med 35. in 36. občnim zborom (1982–1983) je bila predsednica društva, nato pa od 1984–1991 podpredsednica. Ves ta čas je skrbela za strokovna srečanja in organizacijo občnih zborov in reševala finančne težave društva. Zadnja leta aktivnega delovanja v DMFA Slovenije je bila sekretarka *Komisije za informiranje*. Zbirala in objavljala je podatke o novih članih društva, o diplomantih in doktorandih iz matematike in fizike. V UO društva je sodelovala vse do leta 1999.

Ob 30-letnici DMFA Slovenije je leta 1978 prejela posebno društveno priznanje za dolgoletno delo v društvu, na 40. občnem zboru 1988 pa jubilejno priznanje za delo sekretarke *Komisije za pedagoško dejavnost in za delo podpredsednice društva*. Leta 2000 je postala častna članica DMFA Slovenije.

Zadnja leta je Martina preživela v domu upokojencev v Postojni. Ko smo jo ob neki priložnosti obiskali in vprašali, ali kaj pogreša, je v smehu odgovorila: *Tukaj je zaposlenih več mojih nekdanjih dijakinj in lepo skrbijo zame. Včasih pa še kakšne njihove potomce malo poinštruiram, pa čas hitro mine*. Tudi v domu je bila aktivna. Nekaj časa je bila v svetu doma, pisala je v lokalne časopise o dogodkih v domu in se vključevala v različne programe, bila je tudi prostovoljka. Nekateri otroci gotovo poznajo njen glas, saj je sodelovala v projektu *Lahkonočnice*, v katerem so prebivalci nekaterih domov brali in pripovedovali otrokom zgodbe za lahko noč.

Rada je klepetala s stanovalci doma in razpravljala o različnih nepravilnostih v družbi. Lansko jesen se je še jezila nad kolesarji po Ljubljani, ki so se lepo družili, medtem ko so bili stanovalci v domovih praktično zaprti v svoje sobe. Vedno je trdno stala za svojimi stališči in jih tudi zavzeto zagovarjala.

Veliko let je kot prostovoljka delala za Karitas. Društvo katoliških pedagogov Slovenije ji je leta 2019 podelilo Slomškovo priznanje.

Zadnjič sva govorili po telefonu, ko smo zbirali spomine še živečih študentov na prof. Plemlja. V njenem glasu ni bilo več čutiti tiste značilne radoživosti, tudi pogovor ni več tekel gladko.

Martina Koman je s svojim delom v DMFA Slovenije pustila neizbrisen pečat.

Nada Razpet

A. M. Hinz, S. Klavžar in C. Petr, The Tower of Hanoi – Myths and Maths, With a foreword by Ian Stewart, 2nd edition, Birkhäuser, Cham, 2018, 458 strani.

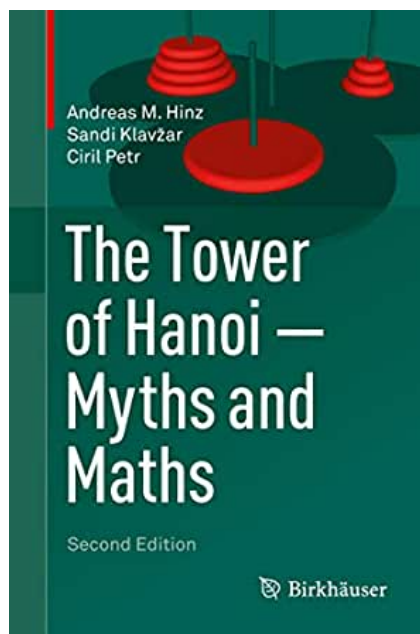
Hanojski stolp

Problem Hanojskega stolpa je mitološko obarvana igra, dobro poznana tako ljubiteljem razvedrilne matematike kot študentom matematike in računalniškega programiranja. Navidez preprosta ugan-ka z elegantno rešitvijo skriva več variacij in posplošitev, katerih analiza presega lahkotno igranje in razkrije zanimive matematične strukture in povezave. Dovolj, da so avtorji Andreas M. Hinz, Sandi Klavžar, Uroš Milutinović¹ in Ciril Petr izdali knjigo »The Tower of Hanoi – Myths and Maths« o matematičnih izzivih, rešitvah in odprtih problemih te igre ter jo obarvali z zanimivimi miti in zgodovinskim ozadjem. Ob nedavnem izidu druge izdaje knjige bralcem predstavimo nekaj zanimivih obravnavanih problemov.

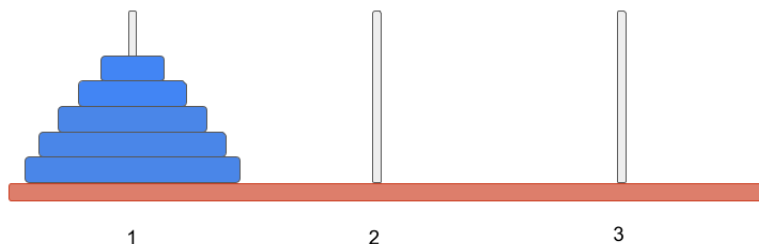
V klasični igri Hanojski stolp imamo tri palice in $n \in \mathbb{N}$ diskov, razvrščenih po velikosti na eni izmed palic, kot lahko vidimo na sliki 1. Cilj je premakniti vse diske na eno izmed preostalih palic z upoštevanjem božanskih pravil: vrhnji disk lahko premaknemo na drugo palico le, če ne položimo večjega diska na manjšega.

Ena izmed rešitev zgornjega problema je klasičen primer rekurzije, nestetokrat uporabljen za predstavitev moči rekurzivnega programiranja. Če želimo premakniti $n > 1$ diskov s prve palice na drugo, najprej premaknemo $n - 1$ diskov s prve na tretjo (ob upoštevanju pravil), nato premaknemo največji disk na drugo palico ter zaključimo s premikom $n - 1$ diskov s tretje na drugo palico. Tak algoritem lahko implementiramo v nekaj vrsticah kode in nam vrne rešitev z $2^n - 1$ potezami, kar je optimalna rešitev.

Vendar naj nas enostavnost rešitve in formulacije problema ne zavede, saj ga že majhne spremembe lahko zelo otežijo. Imenujmo postavitev diskov



¹Sodeloval samo pri prvi izdaji.



Slika 1. Začetna postavitev, popolno stanje.

na tri palice, v kateri ni noben disk položen na manjšega, *regularno stanje*. Če so vsi diski na eni palici, stanju rečemo, da je *popolno*. Takoj smo soočeni z izzivom, kako (optimalno) preiti iz poljubnega regularnega stanja v popolno stanje. Lahko bi želeli premakniti diske iz izbranega stanja² v poljubno regularno stanje. Kaj če je palic več kot tri? Kaj se zgodi, če naključno prehajamo med stanji? Problemi, povezani s hanojskimi stolpi, so v zadnjih desetletjih navdahnili veliko matematičnih znanstvenih prispevkov, ki igro povežejo s teorijo grafov, razvojem računalniških algoritmov, teorijo števil in drugimi znanstvenimi področji. Avtorji »The Tower of Hanoi – Myths and Maths« so zbrali zanimive in pomembne prispevke v knjigo, ki je primerna tako za ljubitelja razvedrilne matematike kot tudi za raziskovalca, ki želi spoznati področje. Vsebuje tako uvod v vse potrebno znanje za matematično analizo problema, dokaze rezultatov, kot tudi vaje za utrjevanje in razmislek o prebranem.

V nadaljevanju si oglejmo nekaj zanimivih smeri raziskovanja hanojskih stolpov v upanju, da bralca navdahnemo k branju predstavljene knjige.

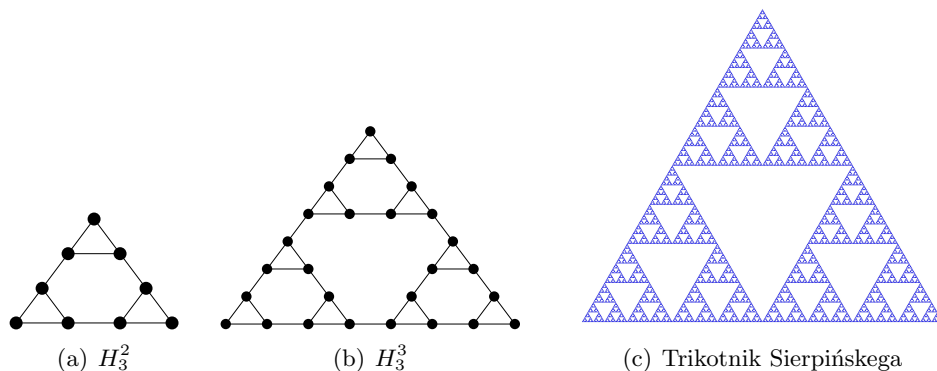
Hanojski grafi, trikotnik Sierpińskega in $\frac{466}{885}$

Vsako regularno stanje lahko predstavimo s preprostim kodnim zapisom. Naj bo T množica palic: v igri s tremi palicami lahko torej označimo $T = \{1, 2, 3\}$. Vsako regularno stanje lahko opišemo tako, da za vsakega izmed n diskov povemo, na katero palico je položen. Ker so diski na vsaki palici v regularnih stanjih urejeni po velikosti, nam tak opis enolično določi stanje. Torej lahko regularna stanja predstavimo z elementi iz $T^n = T \times \cdots \times T$. Ker poljuben element T^n kodira neko regularno stanje, vidimo, da lahko T^n enačimo z množico vseh regularnih stanj in da je takih stanj natanko 3^n .

Dodajmo še relacije med regularnimi stanji in ustvarimo graf. *Hanojski*

²Definicija dovoljenih premikov nam celo dovoljuje začeti v stanjih, ki niso regularna.

graf H_3^n je graf, katerega vozlišča so regularna stanja, dve stanji pa sta povezani, če lahko z dovoljenim premikom preidemo iz enega v drugo. Kot lahko vidimo na sliki 2, dobimo grafe zanimivih oblik. Z grafa lahko opazimo rekurzivno strukturo hanojskih stolpov: H_3^n je sestavljen iz treh H_3^{n-1} , ter treh povezav med njimi. Slika H_3^n , ko n povečujemo, postaja vedno bolj podobna trikotniku Sierpińskega, fraktalni množici v ravnini. Pogled na igro Hanojski stolp kot gibanje po grafu H_3^n nam da nov vpogled, hkrati pa odpre nova vprašanja, ki se pogosto pojavljajo v teoriji grafov: vprašanja o simetrijah, metričnih lastnostih, invariantah itd.



Slika 2. Hanojski grafi in trikotnik Sierpińskega.

Omenimo vprašanje, katerega odgovor je presenetljiv, dokaz pa žal presega ta prispevek. Če imamo graf H_3^n za n dovolj velik, bo tak graf imel 3^n vozlišč in nekateri pari vozlišč bodo precej oddaljeni med seboj. Na največji razdalji $2^n - 1$ bosta poljubni dve popolni stanji (na sliki 2 so to vozlišča, ki ustrezajo ogliščem zunanega trikotnika). Večji kot bo n , večja bo tudi povprečna razdalja med vozlišči, vendar v kakšnem razmerju sta povprečna in največja razdalja v H_3^n ? Izkaže se, da to razmerje konvergira k nenavadnemu številu $\frac{466}{885}$, ko n povečujemo. Rezultat implicira, da je tudi v trikotniku Sierpińskega z zunanjo stranico dolžine 1 povprečna razdalja med točkami $\frac{466}{885}$. To presenetljivo racionalno število je bilo počašчено z izborom med *neverjetna števila* [2].

Frame-Stewartova domneva in druge variacije

Nepričakovano težek zasuk osnovnega problema igre Hanojski stolp, tj. prehoda iz popolnega stanja v drugo popolno stanje s čim manj koraki, se zgodi,

če dodamo še četrto palico. Nova palica, imenovana tudi hudičeva palica, nalogo prehajanja med popolnimi stanji seveda olajša, saj jo lahko preprosto ignoriramo. Vendar taka rešitev ni več optimalna, saj lahko hudičevo palico uporabimo za rešitev z manj premiki.

Imejmo $n \in \mathbb{N}$ diskov položenih na prvo palico, ki jih želimo premakniti na drugo. Strategija je naslednja: najprej m diskov, kjer je $0 \leq m < n$ premaknemo na hudičevo palico s čim manj premiki, nato preostalih $n - m$ diskov premaknemo na drugo palico brez uporabe hudičeve palice in zaključimo s premikom m diskov iz hudičeve palice na drugo palico. Strategija motivira definicijo *Frame-Stewartovih števil*:

Definicija 1. *Frame-Stewartova števila* FS_4^n , za vsak $n \in \mathbb{N}_0$, so definirana rekurzivno

$$FS_4^0 = 0$$

$$FS_4^n = \min\{2FS_4^m + FS_3^{n-m} \mid 0 \leq m < n\},$$

kjer je $FS_3^n = 2^n - 1$ optimalno število premikov v igri Hanojski stolp s tremi palicami in n diski.

Po zgoraj opisani strategiji velja, da lahko v igri Hanojski stolp s štirimi palicami preidemo s FS_4^n premiki iz popolnega stanja v poljubno drugo popolno stanje. *Frame-Stewartova domneva*, matematičen problem, ki je čakal na rešitev celih 73 let, trdi, da je taka strategija optimalna. Po številnih poskusih reševanja ter preverjanjih z računalnikih za vrednost vse do $n \leq 30$ je Thierry Bousch uspel leta 2014 dokazati [1], da domneva drži. Knjiga »The Tower of Hanoi – Myths and Maths« med drugim vsebuje prvi angleški opis njegove rešitve³.

O še drugih posplošitvah igre Hanojski stolp, grafih Sierpińskega, Stockmeyerjevi domnevi in podobnih problemih lahko bralec več prebere v predstavljeni knjigi.

LITERATURA

- [1] T. Bousch, *La quatrième tour de Hanoï*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **21** (2014), 895–912.
- [2] I. Stewart, *Professor Stewart's incredible numbers*, Basic Books, New York, 2015.

Tilen Marc

³Bouscheva rešitev je bila objavljena v francoščini in je zato manj dosegljiva povprečnemu bralcu.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2021

Letnik 68, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Geometrija trikotnika, Oroslan in Ravello (Bojan Hvala)	81–99
Nobelova nagrada za razvoj fizikalne kozmologije (Dunja Fabjan)	100–111
Vesti	
Državno tekmovanje v razvoju novih analitskih metod v medicini – RIS (Programska skupina Medicinska fizika)	112–114
Vabilo na Občni zbor DMFA Slovenije (Nežka Mramor Kosta)	115
Martini Koman v spomin (1931–2021) (Nada Razpet)	116–117
Nove knjige	Strani
A. M. Hinz, S. Klavžar in C. Petr, The Tower of Hanoi – Myths and Maths (Tilen Marc)	118–XI

CONTENTS

Articles	Pages
Triangle geometry, Oroslan and Ravello (Bojan Hvala)	81–99
Nobel Prize for the development of physical cosmology (Dunja Fabjan)	100–111
News	112–117
New books	118–XI

Na naslovnici: Koncertni oder v parku vile Rufolo v mestecu Ravello nad Amalfijsko obalo (glej članek na straneh 81–99). Foto: Bojan Hvala.