

Kalibracija inercialnih merilnih enot brez dodatne merilne opreme

Jernej Puc, Janez Podobnik, Marko Munih

Laboratorij za robotiko
Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani
Tržaška 25, 1000 Ljubljana
E-pošta: jp4745@student.uni-lj.si, {janezp, marko}@robo.fe.uni-lj.si

Abstract

This paper covers a full calibration process of all sensors incorporated in an inertial measurement unit (IMU): the gyroscope, accelerometer and magnetometer. Sensor characteristics are discussed and different methods presented with respect to the specifics of each sensor. The presented methods assume no aid of additional measuring equipment and inevitably differ in complexity; particular focus is given to the scalar calibration of the magnetometer, as it is the most complex. Method effectiveness is compared to two approaches from literature.

1 Uvod

Inercialne merilne enote (ang. *inertial measurement unit* - IMU) predstavljajo pomemben merilni sistem na področju sledenja gibanja, kjer se na podlagi meritev različnih količin, kot so kotna hitrost, pospešek in gostota magnetnega polja, ter metodami za senzorno fuzijo določa orientacijo objekta glede na globalni koordinatni sistem. Navadno vsebujejo triosni žiroskop in pospeškometer ter pogosto magnetometer. Poleg širše uporabnosti je razvoj majhnih in lahkih naprav (ang. *microelectromechanical systems* - MEMS) omogočil različne aplikacije v povezavi z določanjem gibanja pri človeku in stroju [1, 2].

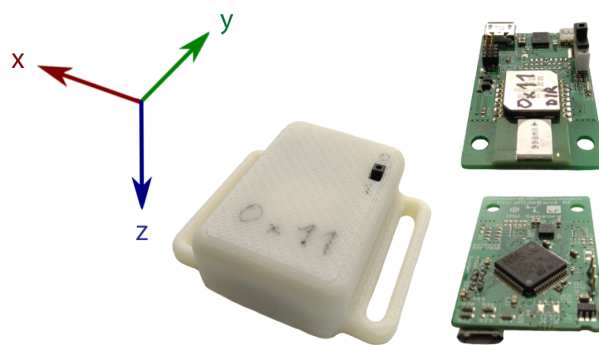
Tovrstni problemi, kot je npr. določanje orientacije z integriranjem kotne hitrosti, so občutljivi na nekompenzirane napake, zato je kalibracija senzorjev ključnega pomena; kot bo vidno pri rezultatih, imajo lahko meritve z nekalibriranimi senzorji velika odstopanja, ki lahko vodijo do napačnega končnega rezultata.

Kalibracija IMU naprav pojmuje določitev parametrov, s katerimi poskušamo zmanjšati vpliv sistemskih pogreškov vseh senzorjev, ki napravo sestavljajo (žiroskop, pospeškometer, magnetometer). Želimo jo izvesti v doglednem času na način, ki je preprost in v praktičnem smislu ponovljiv. Potreba je torej po kalibraciji brez dodatne merilne opreme, kjer se zahteva zadostno zanesljivost uporabljenega analitičnega pristopa. Zaradi pomembnih razlik med značilnostmi senzorjev se do kalibracije posameznega senzorja v splošnem pristopa različno.

Cilj prispevka je podati praktično osnovo za samostojno kalibracijo IMU naprav v celoti. Predstavljenim modelom senzornih napak sledijo opisi pristopov kalibracije in ovrednotenje učinkovitosti glede na primerljive metode iz literature.

2 Metodologija

Slika 1 prikazuje primer IMU naprave uporabljene v tem prispevku. Osi lokalnega koordinatnega sistema so skladne z osmi posameznega senzorja in prikazane glede na zaščitno ohišje.



Slika 1: Realen IMU s pripadajočimi osmi.

V idealnem primeru so izmerjeni odzivi žiroskopa (ω_m), pospeškometra ($\mathbf{a}_m$) in magnetometra ($\mathbf{h}_m$) odvisni le od merjenih količin (kotna hitrost ω , pospešek $\mathbf{a}$ in gostota magnetnega polja, v literaturi pojmovana kot magnetno polje $\mathbf{h}$), kjer vsi simboli predstavljajo tridimenzionalne vektorje. Zaradi raznih lastnosti uporabljenih materialov in neizogibnih napak pri izdelavi navedena razmerja odstopajo, kar se lahko glede na vsak senzor ponazori z ustreznim matematičnim modelom.

2.1 Viri senzornih napak

Poleg visokofrekvenčnega šuma, ki se pojavlja pri vseh senzorjih, so glavni viri napak še skalirni faktor (2.1.1), neortogonalnost (2.1.2) in ničelni odmik (2.1.3).

2.1.1 Skalirni faktor

V splošnem občutljivosti senzorjev niso enake za vse osi. Za skaliranje po oseh zato namesto navadne sorazmerne konstante uvedemo diagonalno matriko $\mathbf{S}$ s skalirnimi koeficienti K :

$$\mathbf{S} = \text{diag}(K_x, K_y, K_z) \quad (1)$$

V primeru magnetometra vpliv prisotnih feromagnetnih materialov popači zunanje magnetno polje, kar se odraža v odzivu senzorja (ang. *soft iron error*) [3]. $\mathbf{S}_h$ je tako polna kvadratna matrika velikosti 3×3 .

2.1.2 Neortogonalnost

Odstopanja v poravnavi osi senzorjev z lokalnimi osmi enote privedejo do neortogonalnosti; prava vrednost za eno os tako ni odvisna le od odziva tiste osi, temveč vsebuje tudi manjšinska prispevka preostalih. Vsak stolpec v matriki neortogonalnosti $\mathbf{N}$ je vektor treh vrednosti, ki za pripadajočo os določa opisano razmerje glede na lokalni koordinatni sistem:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{n}_x \quad \mathbf{n}_y \quad \mathbf{n}_z] \quad (2)$$

2.1.3 Ničelni odklik

Ničelni odziv zaradi specifične narave senzorja izkazuje odklik od ničelne vrednosti, npr. zaradi vpliva magnetiziranih feromagnetnih materialov (ang. *hard iron error*). Ničelni odklik predstavimo z vektorjem $\mathbf{b}$, ki načeloma ni povsem konstanten; poleg naključnega nihanja ima zlasti odklik žiroskopa znatno temperaturno odvisnost, ki ni predstavljena v opisanem modelu, zaradi katere prihaja do časovnega lezenja.

2.2 Modeli senzornih odzivov

Glede na opisano so odzivi za posamezni senzor predstavljeni sledeče:

$$\boldsymbol{\omega}_m = \mathbf{S}_\omega \mathbf{N}_\omega \boldsymbol{\omega} + \mathbf{b}_\omega + \boldsymbol{\epsilon}_\omega \quad (3)$$

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{S}_a \mathbf{N}_a \mathbf{a} + \mathbf{b}_a + \boldsymbol{\epsilon}_a \quad (4)$$

$$\mathbf{h}_m = \mathbf{S}_h \mathbf{N}_h \mathbf{h} + \mathbf{b}_h + \boldsymbol{\epsilon}_h \quad (5)$$

Matriki $\mathbf{S}$ in $\mathbf{N}$ združimo v transformacijsko matriko $\mathbf{A}^{-1}$ in zanemarimo šum $\boldsymbol{\epsilon}$. S preoblikovanjem enačb (3), (4) in (5) izpostavimo približke pravih vrednosti, ki predstavljajo kalibrirani senzorni odziv:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{A}_\omega (\boldsymbol{\omega}_m - \mathbf{b}_\omega) \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{A}_a (\mathbf{a}_m - \mathbf{b}_a) \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{A}_h (\mathbf{h}_m - \mathbf{b}_h) \quad (8)$$

Problem kalibracije tako privede do iskanja ustreznih transformacijskih matrik in ničelnih odklikov za posamezni senzor na enoti.

2.3 Kalibracija žiroskopa

Za zanesljivo določitev iskane transformacijske matrike $\mathbf{A}_\omega$ bi potrebovali stabilen vir referenčne kotne hitrosti, kar pomeni uporabo drage merilne opreme in daljših meritvenih postopkov. Zavoljo preprostosti smo primorani privzeti idealno sorazmerje, ponazorjeno s konstanto K_ω . Preostane nam povprečenje meritev v mirovanju za kompenzacijo ničelnega odklika:

$$\mathbf{b}_\omega = \overline{\boldsymbol{\omega}} \quad (9)$$

2.4 Kalibracija pospeškometra

Pri določanju odziva na pospešek imamo zanesljivo referenco vedno na voljo; gravitacijsko polje Zemlje je stabilno in za omejeno geografsko območje praktično nespremenljivo. Navadno je vektor polja $\mathbf{g}$ normaliziran in definiran z enoto $g \doteq 9.80665 \frac{m}{s^2}$:

$$\mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad 1]^T g \quad (10)$$

Glede na definicijo (10) so prave izhodne vrednosti v lokalnem sistemu pri vsaki orientaciji enote določljive s preprostimi trigonometričnimi zvezami. Za kalibracijo običajno zadostujejo meritve v vseh 6 medsebojno pravokotnih položajih; tako je pričakovani odziv ene osi vedno ± 1 , preostalih dveh pa 0. Pri tem je ključno mirovanje za vsako os, sicer se v meritve vnašajo motnje translacijskega pospeška.

V nadaljevanju izhajamo iz enačbe (7) in jo s substitucijo $\mathbf{b}_a^* = \mathbf{A}_a \mathbf{b}_a$ preoblikujemo v linearno vsoto, da za pričakovano vrednost n -tega vzorca $\hat{\mathbf{a}}_n$ velja:

$$\mathbf{A}_a \mathbf{a}_{m,n} - \mathbf{b}_a^* = \hat{\mathbf{a}}_n \quad (11)$$

To nam omogoča, da sestavimo matrični sistem oblike $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} a_m^{x1} & a_m^{y1} & a_m^{z1} & -1 \\ a_m^{x2} & a_m^{y2} & a_m^{z2} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m^{xn} & a_m^{yn} & a_m^{zn} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \\ \mathbf{b}_a^{*T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{x1} & \hat{a}_{y1} & \hat{a}_{z1} \\ \hat{a}_{x2} & \hat{a}_{y2} & \hat{a}_{z2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{xn} & \hat{a}_{yn} & \hat{a}_{zn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Sistem je predoločen in zato nima enolične rešitve. Rešimo ga po linearni metodi najmanjših kvadratov, tako da ga preoblikujemo na minimizacijski problem, kjer za $\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_a^T \\ \mathbf{b}_a^{*T} \end{bmatrix}$ iščemo približek $\hat{\boldsymbol{\beta}}$:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\beta}} \|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}\|^2 \quad (13)$$

Numerično stabilne rešitve problema najmanjših kvadratov vključujejo ortogonalne razcepe. Rešitev poiščemo npr. s singularnim razcepom (ang. *singular value decomposition* - SVD) [4]. Iz enačb (11), (12) in rešitve $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, podane po vrsticah in stolpcih, sledi:

$$\mathbf{A}_a = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1:3,1:3}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{b}_a = \mathbf{A}_a^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1:3,4}^T \quad (15)$$

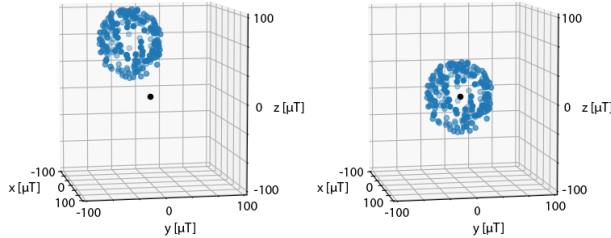
2.5 Kalibracija magnetometra

Z nadzorovano referenco homogenega magnetnega polja bi zveze med primerjanimi vektorji lahko zopet iskali neposredno po metodi najmanjših kvadratov, a se brez merilne opreme zanašamo na Zemljino magnetno polje. Slednje je zaradi relativne šibkosti (red 10^{-5} T) zlahka preglašeno z elektromagnetnimi motnjami. Poleg tega ima horizontalno in vertikalno komponento, kar dodatno otežuje pristop. Pri kalibraciji tako izhajamo iz privzete konstantne magnitude Zemljinega magnetnega polja H_{mag} in stremimo k njeni ohranitvi, zato gre v tem smislu za skalarno kalibracijo.

Idealno je norma oz. skupna velikost senzornega odziva $\mathbf{h}$ ne glede na orientacijo magnetometra konstantna:

$$\|\mathbf{h}\| = konst. = H_{mag} \quad (16)$$

Posledično bi morali vzorci magnetometra, vzeti v različnih orientacijah, opisovati sfero s polmerom, ki je enak podani magnitudi (cca. 47,95 μT), in središčem v lokalnem koordinatnem izhodišču.



Slika 2: Sfera glede na koordinatno izhodišče, kot jo opisujejo vzorci magnetometra pred in po kalibraciji.

Kot je razvidno iz slike 2, je v skrajnem primeru oblika sfere popačena, njeno središče pa od izhodišča znatno odstopa, zato je smiselna umestitev na površino elipsoida s premaknjenim središčem. V primeru znanih polosov se lahko te po velikosti izenači in ustrezno skalira, središče elipsoida pa prestavi v lokalno izhodišče, s čimer dobimo pričakovano sfero.

Pri določanju elipsoida izhajamo iz enačbe drugega reda v prostoru treh spremenljivk, ki v splošnem opisuje različne kvadrične površine:

$$\begin{aligned} & ax^2 + by^2 + cz^2 \\ & + 2fyz + 2gxz + 2hxy \\ & + 2px + 2qy + 2rz + d = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Koeficiente poiščemo po splošnem algoritmu za prilaganje vzorcev na elipsoid (Li [5]). Ta se prevede na reševanje matričnih sistemov po metodi najmanjših kvadratov; rezultat končnega sistema sta lastna vektorja $\mathbf{v}_1$ in $\mathbf{v}_2$, ki skupaj tvorita vektor koeficientov kvadrične enačbe $\mathbf{v}$, na podlagi katerih je elipsoid v celoti določen:

$$\mathbf{v} = [a \ b \ c \ f \ g \ h \ p \ q \ r \ d]^T \quad (18)$$

Preoblikovanje izraza (17) v matrični zapis s substitucijami $h_x = x$, $h_y = y$ in $h_z = z$ privede do oblike:

$$\mathbf{h}^T \mathbf{M} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{n} + d = 0, \quad (19)$$

kjer so $\mathbf{h}$, $\mathbf{M}$ in $\mathbf{n}$ definirani kot:

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad (20)$$

Izraz (19) dopolnimo do popolnega kvadrata, da izrazimo središče (iskani odmik b_h):

$$\begin{aligned} & \mathbf{h}^T \mathbf{M} \mathbf{h} + \mathbf{h}^T \mathbf{n} + d = \\ & (\mathbf{h} - \mathbf{b}_h)^T \mathbf{M} (\mathbf{h} - \mathbf{b}_h) - C, \end{aligned} \quad (21)$$

kjer velja:

$$\mathbf{b}_h = -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{n} \quad (22)$$

$$C = \mathbf{b}_h^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_h - d \quad (23)$$

V nadaljevanju določimo skalirne vrednosti, vsebovane v iskani transformacijski matriki $\mathbf{A}$. Velja, da lastni vektorji matrike $\mathbf{M}$ ($\mathbf{h}_\lambda$) predstavljajo polosni danega elipsoida (ang. *principal axis theorem* [6]):

$$\begin{aligned} & (\mathbf{h}_{\lambda_{a,b,c}} - \mathbf{b}_h)^T \mathbf{M} (\mathbf{h}_{\lambda_{a,b,c}} - \mathbf{b}_h) \\ & = \lambda (\mathbf{h}_{\lambda_{a,b,c}} - \mathbf{b}_h)^T (\mathbf{h}_{\lambda_{a,b,c}} - \mathbf{b}_h) \\ & = \lambda \|(\mathbf{h}_{\lambda_{a,b,c}} - \mathbf{b}_h)\|^2 = C \end{aligned} \quad (24)$$

Polosi so tako določene z izrazom (25):

$$s_{a,b,c} = \|(\mathbf{h}_{\lambda_{a,b,c}} - \mathbf{b}_h)\| = \sqrt{\frac{C}{\lambda_{a,b,c}}} \quad (25)$$

Dolžine polosov izenačimo glede na poljubno polos, npr. s_a . Skalirna matrika $\mathbf{S}$ je tako:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_a}{s_b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_a}{s_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{\lambda_b}{\lambda_a}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\lambda_c}{\lambda_a}} \end{bmatrix} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\lambda_a}} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_c} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_a}} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (26)$$

Za pravilno skaliranje polosov poravnamo z osmi koordinatnega sistema; spremenimo orientacijo elipsoida in ga po skaliranju vrnemo v prvotno lego. Orientacijo elipsoida določajo orientacije pripadajočih polosov oz. normalizirani lastni vektorji matrike $\mathbf{M}$; slednji tvorijo stolpce rotacijske matrike $\mathbf{V}$, ki opisuje omenjeno orientacijo. Pravilno skaliranje tako dosežemo z zaporedjem operacij $\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$. Za kvadratno matriko $\mathbf{M}$ z ortogonalnimi lastnimi vektorji, ki tvorijo stolpce matrike $\mathbf{V}$ velja [7]:

$$\mathbf{M} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^{-1} \quad (27)$$

Z upoštevanjem izrazov (26) in (27) ter lastnosti rotacijskih matrik $\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^T$ lahko zapišemo:

$$\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \sqrt{\frac{1}{\lambda_a}} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \mathbf{V}^{-1} = \sqrt{\frac{1}{\lambda_a}} \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

V zadnjem koraku upoštevamo zvezo (25) in skaliramo polmer sfere na željeno dolžino, npr. H_{mag} ali 1. Poleg izraza (22) sta tako določena oba kalibracijska parametra:

$$\mathbf{A}_h = \frac{H_{mag}}{\sqrt{C}} \mathbf{M}^{\frac{1}{2}} \quad (29)$$

3 Rezultati

Sledi ovrednotenje metod za kalibracijo pospeškometa in magnetometra na podlagi primerjave z dvema metodama iz literature (Merayo [8], Frosio [9]). Prva temelji na kalibraciji s prilaganjem vzorcev na elipsoid, medtem ko je druga iterativna in sloni na Gauss-Newtonovi optimizaciji.

3.1 Ovrednotenje kalibracije pospeškometra

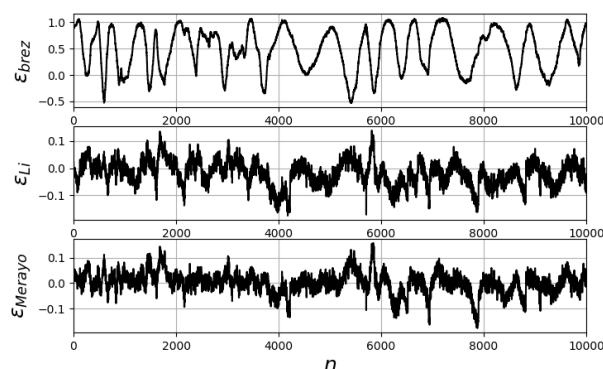
Opaznejša odstopanja se pojavljajo pri RMS vrednostih napake (ang. *Root-Mean-Square*). Vzrok odstopanj leži v izračunanih ničelnih odmikih, ki RMS vrednostim dodaja izrazito enosmerno komponento; primerjanim metodam pritiče večje odstopanje kot pri navadnem skaliranju, kalibracija po metodi najmanjših kvadratov pa daje boljše rezultate.

Tabela 1: RMS napake odstopanj kalibriranih meritev od pričakovanih vrednosti; skupno in po oseh. *LSTSQ* označuje opisani postopek po metodi najmanjših kvadratov, *Merayo* [8] in *Frosio* [9] pa sta primerjani metodi. Razdelek *brez* predstavlja originalne rezultate brez kalibracije.

RMS	<i>brez</i>	<i>LSTSQ</i>	<i>Merayo</i>	<i>Frosio</i>
x-os	0.06343	0.00640	0.08447	0.04743
y-os	0.03357	0.00620	0.03284	0.08435
z-os	0.04977	0.02745	0.03312	0.03339
vse osi	0.08734	0.02886	0.09649	0.10237

3.2 Ovrednotenje kalibracije magnetometra

Pri ovrednotenju smo obravnavali magnetometer z velikim ničelnim odmikom kot najslabši možni primer. Netipično veliki odmiki so se pri iterativni metodi ([9]) izkazali za problematične; konvergenca ni bila nikoli dosežena, zato je metoda na sliki 3 izpuščena.



Slika 3: Napaka norme vzorcev $\epsilon_h = 1 - \|\mathbf{h}\|$ v odvisnosti od n -tega vzorca $\mathbf{h}_n$. ϵ_{Li} [5] označuje opisani postopek, ϵ_{Merayo} [8] primerjano metodo in ϵ_{brez} originalni rezultat na podlagi nekalibriranih vzorcev.

Pomanjkljivost iterativne primerjane metode se je odpravilo tako, da se je skupini vzorcev predhodno odštela njihova povprečna vrednost; končni odmik je tako določala vsota povprečja in novo izračunani odmik. Za ustrezno primerjavo je bil enak pristop uporabljen tudi pri drugih metodah.

Iz tabele 2 je razvidno, da je predhodno odštevanje povprečja povzročilo splošno izboljšanje; napake so pri vseh metodah manjše oz. vsaj manj razpršene. Po izboljšanju opisana metoda le še minimalno odstopa od primerjanih.

Tabela 2: RMS odstopanja norme od pričakovanega radija konstantne dolžine 1 ($\epsilon_h = 1 - \|\mathbf{h}\|$) za vse pristope pred in po predhodnem odštevanju povprečja. *Li* [5] se nanaša na opisano metodo, *Merayo* [8] in *Frosio* [9] sta primerjani metodi, razdelek *brez* pa se navezuje na originalne rezultate brez kalibracije.

RMS	<i>brez</i>	<i>Li</i>	<i>Merayo</i>	<i>Frosio</i>
Pred	0.62576	0.05010	0.04220	-
Po	0.24736	0.04122	0.03997	0.04372

4 Zaključek

V prispevku je bil predstavljen hiter in praktičen postopek za celotno kalibracijo inercialskih merilnih enot. Podani so bili modeli senzornih napak in glede na specifične lastnosti vsakega senzorja opisani pristopi za njihovo kalibracijo. Obe metodi, ki sta bili primerjani s pristopoma iz literature, sta dosegli zadovoljive rezultate in predstavljata smiselno alternativo na področju enostavne kalibracije. Od teh se je dokaj neposredna uporaba metode najmanjših kvadratov pri kalibraciji pospeškometra kljub očitni preprostosti izkazala za posebej natančno in robustno. Na podlagi rezultatov je bil utemeljen tudi sklep, da z majhnim posegom pred kalibracijo v obliki odštevanja povprečne vrednosti od skupine vzorcev dosežemo vidne izboljšave.

Literatura

- [1] O. J. Woodman. An introduction to inertial navigation. University of Cambridge, Computer Laboratory, Technical Report UCAM-CL-TR-696. August, 2007.
- [2] J. Podobnik, M. Munih. Določanje transformacije med triado optičnih markerjev in inercialsko merilno enoto. ERK'2014, Portorož, A:103-106.
- [3] V. Renaudin, M. H. Afzal, G. Lachapelle. Complete Tri-axis Magnetometer Calibration in the Magnetic Domain. Hindawi Publishing Corporation, Journal of Sensors. Vol. 2010.
- [4] B. Plestenjak. Razširjen uvod v numerične metode. DMFA - založništvo (2015), ISBN 978-961-212-264-5.
- [5] Q. Li, J. G. Griffiths. Least Squares Ellipsoid Specific Fitting. IEEE Computer Society, Proceedings of the Geometric Modeling and Processing 2004.
- [6] J. N. Franklin. Matrix theory. Dover Publications (2012), sec. 4.6, 95. ISBN 978-048-641-179-8.
- [7] H. Abdi. Eigen-decomposition: eigenvalues and eigenvectors. SAGE Publications, Encyclopedia of Measurement and Statistics (2007), 304–308.
- [8] J. M. G. Merayo, P. Brauer, F. Primdahl, J. R. Petersen, O. V. Nielsen. Scalar calibration of vector magnetometers. IOP Publishing, Meas. Sci. Technol. 11 (2000), 120-132.
- [9] I. Frosio, F. Pedersini, N. A. Borghese. Autocalibration of MEMS Accelerometers. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, Vol. 58, No. 6, June 2009.