PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 5
Strani 270–276

Ivan Vidav:

O DELITVI DEDIŠČINE

Ključne besede: matematika, diofantske enačbe, trikotniki, tlakovanje ravnine, sferični trikotniki, tlakovanje sfere.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1268-Vidav.pdf

O DELITVI DEDIŠČINE

Začnimo s staro zgodbo o kamelah. Bogat trgovec z Bližnjega vzhoda je zapustil svojim trem sinovom 17 kamel. V oporoki je določil, naj dobi najstarejši polovico, srednji tretjino in najmlajši devetino teh kamel. Sinovi niso vedeli, kako naj si razdelijo dediščino, saj bi radi vsi imeli samo žive živali, posamezni kosi jim ni bi dosti koristili. Srednjemu bi na primer pripadalo pet kamel in še dve tretjini. Zato so se za nasvet obrnili na kadija. Ta jim je naročil, naj čredo privedejo na njegovo dvorišče. Ko je bilo to storjeno, je dodal k trgovčevim še eno svojo kamelo, tako da jih je bilo zdaj 18. Nato je razsodil takole: najstarejši naj vzame polovico črede 18 kamel, torej 9, srednji tretjino, to je 6, in najmlajši devetino, se pravi 2. Sinovi so odpeljali $9+6+2=17$ kamel. Ena kamela, namreč kadijeva, pa je ostala. Bratje so bili z razdelitvijo zelo zadovoljni, saj so vsi dobili samo žive živali in vsak celo nekaj več, kakor bi mu pripadalo po oporoki: najstarejši pol kamele več, srednji tretjino in najmlajši devetino kamele več.

Kako je kadi našel tako imenitno rešitev naloge? Tega seveda ne vemo. Danes pa bi lahko razmišljali takole: Ker je vsota ene polovice, ene tretjine in ene devetine enaka $17/18$, torej manj kakor 1, sinovi ne dobijo vse zapuščine, če se dobesedno držimo oporoke. So pa njihovi deleži v razmerju $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$. Zato bo povsem v skladu z očetovo voljo, če se celotna čreda razdeli v tem razmerju. Ker je prvi sin dobil $18/2$, drugi $18/3$ in tretji $18/9$ kamel, je kadi res razdelil zapuščino v razmerju $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$. Povrh se je delitev izšla s celimi živalmi.

Oglejmo si zdaj splošni primer. Denimo, da znaša dediščina k kamel in da dobi najstarejši sin m-ti del, srednji n-ti del in najmlajši p-ti del teh kamel. Tu so m, n in p naravna števila. Če število k ni deljivo z m, n in p, ne bodo dobili vsi sinovi samo živih živali. Nadalje ni rečeno, da je vsota vseh deležev enaka dediščini, lahko je manjša, lahko tudi večja. Zato spet razdelimo kamele v ustreznem razmerju, se pravi v razmerju $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{p}$. Torej bo dobil prvi sin $\frac{r}{m}$, drugi $\frac{r}{n}$ in tretji $\frac{r}{p}$ kamel, kjer je r sorazmernostni faktor, ki ga moramo tako izbrati, da bodo vse kamele razdeljene, da bo torej

$$\frac{r}{m}+\frac{r}{n}+\frac{r}{p}=k. \tag{1}$$

Denimo, da pripada pri tej delitvi vsakemu dediču celo število živali. Potem so kvocienti $r/m, r/n$ in r/p cela števila. To pa pomeni, da je tudi r celo število, in sicer je r skupni večkratnik m, n in p, saj je z vsemi temi števili deljiv.

Če so naravna števila m, n, p dana, lahko vzamemo za r poljuben njihov skupni večkratnik in nato izračunamo k iz enačbe (1). Pri tem številu kamel se delitev med dediči izide z živimi živalmi. Zgled: Naj bo $m = 2, n = 3$ in $p = 4$. Za r vzamemo najmanjši skupni večkratnik, torej $r = 12$. Iz enačbe (1) izračunamo $k = 13$. Prvi sin dobi $r/m = 12/2 = 6$, drugi $r/n = 12/3 = 4$ in tretji $r/p = 12/4 = 3$ kamele, skupaj 13 kamel.

Zapišimo enačbo (1) v tejle ekvivalentni obliki

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{k}{r}. \tag{1*}$$

Imamo tri možnosti: ali je $r = k$, ali $r > k$, ali pa $r < k$. V prvem primeru zadoščajo naravna števila m, n, p enačbi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1, \tag{2}$$

v drugih dveh primerih pa eni izmed neenačb

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} < 1, \quad r > k, \tag{3}$$

oziroma

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} > 1, \quad r < k. \tag{4}$$

Enačba (2) velja, kadar je vsota deležev enaka dediščini, neenačba (3), kadar je manjša, in neenačba (4), kadar je večja od dediščine.

Poiščimo najprej rešitve enačbe (2). Smemo vzeti – to bomo v nadaljnjem vselej storili – da so naravna števila m, n, p takole urejena po velikosti: $m \leq n \leq p$ (to pomeni, da mlajši brat ne dobi več kakor starejši). V enačbi (2) mora biti m večji od 1, ker je pri $m = 1$ leva stran večja od 1. Ne more pa biti m večji od 3, saj je pri $m > 3$ leva stran manjša od 1. Zato sta samo dve možnosti: ali je $m = 2$ ali $m = 3$. Pri $m = 2$ dobimo iz (2)

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2}.$$

Očitno mora biti tu n večji od 2 in manjši od 5. Pri $n = 3$ imamo $p = 6$, pri $n = 4$ pa $p = 4$. Ostane še možnost $m = 3$. Tedaj sta tudi n in p enaka 3, sicer bi bila leva stran v (2) manjša od 1. Tako smo ugotovili, da premore enačba (2) v bistvu samo tri rešitve v naravnih številih m, n, p. Te rešitve kaže razpredelnica I:

m	n	p
2	3	6
2	4	4
3	3	3

Razpredelnica I.

Če torej razdelimo dediščino med tri osebe tako, da dobi prva m-ti del, druga n-ti del in tretja p-ti del, kjer so m, n, p naravna števila, pri tem pa je vsa dediščina razdeljena, imamo samo tri možnosti: (a) ena oseba dobi polovico, ena tretjino in ena šestino, (b) ena oseba dobi polovico, ostali dve obe po četrtino in (c) vsaka oseba dobi tretjino. Denimo, da je dediščina čreda kamel. Ker obravnavamo primer $k = r$ in je r večkratnik števil m, n in p, se delitev izide s celim številom živali, če je pri prvi rešitvi število kamel k večkratnik števila 6, pri drugi večkratnik 4 in pri tretji večkratnik števila 3.

Oglejmo si zdaj neenačbo (3). Ta je očitno izpolnjena, če so vsa tri števila m, n in p večja od 3. Zato je rešitev nešteto.

Neenačba (3) velja tedaj, ko je $k < r$, in je zato večkratnik r večji od števila kamel. V tem primeru dodamo k čredi, ki je dediščina, še $r - k$ kamel, tako da jih imamo potem r. Najstarejšemu pripada m-ti del, srednjemu n-ti del in najmlajšemu p-ti del od črede r kamel. Vsi trije bratje dobijo skupaj k kamel (to pove enačba (1)), dodanih $r - k$ kamel pa ostane.

V zgodbi, ki smo jo navedli v začetku, je kadi dodal eno samo kamelo. Kdaj to gre, se pravi, kdaj je enačba (1*) rešljiva pri $r - k = 1$? Če je $k = r - 1$, jo lahko zapišemo v obliki

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1. \tag{5}$$

Iščemo rešitve v naravnih številih m, n, p in r. Tudi tu bomo privzeli, da je $m \leq n \leq p \leq r$ (zadnja neenakost velja zato, ker je r večkratnik m, n, p). Hitro vidimo, da je m najmanj enak 2 in največ 4 (pri $m = 1$ je namreč leva stran v (5) večja od 1, pri $m > 4$ pa manjša od 1). Začnimo torej z $m = 2$. Potem je očitno n najmanj 3. Če je $n = 3$, dobimo iz (5) enačbo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{6}.$$

Vidimo, da je p večji od 6, toda manjši od 13 zaradi pogoja $p \leq r$. Cele rešitve dobimo pri $p = 7, 8, 9, 10$ in 12. Nadaljujemo z $n = 4$, nato za $n = 5$ itd. Tako najdemo brez težave vse rešitve enačbe (5) v naravnih številih. Štirinajst jih je, kaže pa jih razpredelnica II.

m	n	p	r
2	3	7	42
2	3	8	24
2	3	9	18
2	3	10	15
2	3	12	12
2	4	5	20
2	4	6	12
2	4	8	8
2	5	5	10
2	6	6	6
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	4	6
4	4	4	4

Razpredelnica II.

Pogoj, da je r večkratnik m, n in p, je izpolnjen pri vseh rešitvah razen pri dveh, namreč pri rešitvi $m = 2, n = 3, p = 10, r = 15$ in pri $m = 3, n = p = 4, r = 6$.

Število kamel je tu enako $k = r - 1$, torej $k = 41$ pri prvi rešitvi iz razpredelnice. Ker je v tem primeru $m = 2, n = 3$ in $p = 7$, dobi prvi sin polovico, drugi tretjino in tretji sedmino. Delitev napravimo tako, da dodamo 41 kamelam še eno. Prvemu pripada potem polovica od 42 kamel, se pravi 21, drugemu tretjina od 42, to je 14, in tretjemu sedmina od 42, torej 6. Vsi sinovi skupaj dobijo $21 + 14 + 6 = 41$ kamel, dodana kamela pa seveda ostane.

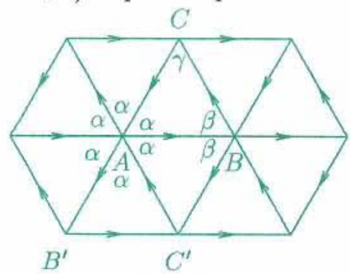
Kako je z rešitvami neenačbe (4) v naravnih številih? Takoj vidimo, da mora biti m manjši od 3, ker je leva stran manjša ali enaka 1, če je $m \geq 3$. (Tudi tu privzamemo, da je $m \leq n \leq p$.) Pri $m = 1$ sta lahko n in p poljubni naravni števili. Pri $m = 2$ pa so tele možnosti: $n = 2, p$ je poljuben, nadalje $n = 3, p = 3$, potem $n = 3, p = 4$ in končno $n = 3, p = 5$. Spet sestavimo razpredelnico rešitev:

m	n	p
1	poljuben	poljuben
2	2	poljuben
2	3	3
2	3	4
2	3	5

Razpredelnica III.

Delitev kamel med dediče v tem primeru ni tako preprosta, ker moramo najprej nekaj živali odvzeti (zaradi $r < k$) in potem spet dodati.

Enačbe (2) ne srečamo smo pri delitvi dediščine med tremi osebami, temveč tudi drugod. Oglejmo si primer iz geometrije. Radi bi pokrili ravnino s trikotnimi ploščami, in sicer tako, da sta dva trikotnika tega pokritja zrcalni sliki drug drugega, če imata skupno stranico. S kakšnimi trikotniki to gre? Imejmo torej trikotnik ABC s koti α, β, γ. Če ga zrcalimo čez stranico AB, dobimo skladen trikotnik ABC', ki pa je nasprotno orientiran kakor ABC (slika 1). Zrcalimo zdaj trikotnik ABC' prek stranice AC'. Novi trikotnik $AB'C'$ je nasprotno orientiran kakor ABC', torej enako orientiran kakor prvotni ABC. Trikotnik $AB'C'$ nastane tudi z vrtenjem prvotnega trikotnika ABC okoli oglišča A za kot 2α. Nadaljujmo z zrcaljenji, in sicer vedno prek stranic, ki imajo eno krajišče v točki A. Po $2m$ korakih pridemo do trikotika, ki ga dobimo tudi tako, da prvotni trikotnik zavrtimo za kot $2m\alpha$ okoli oglišča A. Ali se lahko zgodi, da ta trikotnik pri primerno izbranem m natančno pokrije prvotni trikotnik ABC? Očitno je to res tedaj, kadar smo trikotnik ABC z $2m$ zrcaljenji zavrteli za $360°$, se pravi, kadar je $2m\alpha = 360°$. Od tod dobimo $\alpha = 180/m$. Tudi obratno velja: če je α m-ti del iztegnjenega kota, pridemo po $2m$ zrcaljenjih do trikotnika, ki se ujema z danim trikotnikom ABC (z orientacijo vred). Z $2m$ trikotniki pokrijemo natanko enkrat neko okolico oglišča A. Pri tem sta dva sosednja trikotnika vedno zrcalni sliki drug drugega.



Slika 1.

Kar smo povedali za oglišče A in kot α, velja seveda tudi za oglišče B in kot β, oziroma za C in kot γ. Zdaj zrcalimo čez stranice, ki imajo eno krajišče v točki B. Če je $\beta = 180/n$, kjerje n naravno število, bomo z $2n$ trikotniki natanko enkrat prekrili neko okolico oglišča B. In če je $\gamma = 180/p$, zrcalimo pa čez stranice, ki imajo eno krajišče v točki C, pokrije $2p$ trikotnikov neko okolico oglišča C. Denimo, da so ti pogoji izpolnjeni pri vseh treh ogliščih, da se torej koti trikotnika izražajo takole

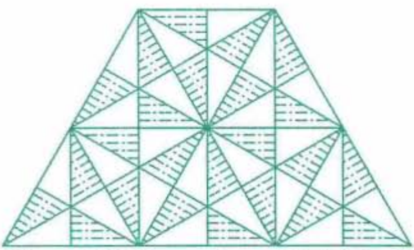
$$\alpha = \frac{180}{m}, \quad \beta = \frac{180}{n}, \quad \gamma = \frac{180}{p}. \tag{6}$$

Tedaj pokrijemo z zrcalnimi trikotniki okolice vseh treh oglišč A, B in C, z nadaljnimi zrcaljenji pa tudi okolice na novo dobljenih oglišč C', B' itd. Sčasoma bodo torej trikotniki prekrili vso ravnino natanko enkrat. Lahko rečemo, da smo na ravnino položili parket, kjer so parketne plošče trikotniki. Dve plošči, ki imata skupno stranico, sta vselej zrcalni sliki druga druge.

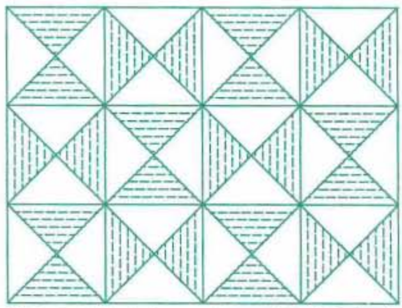
Če seštejemo kote (6) in upoštevamo, da je vsota trikotniških kotov 180°, dobimo enačbo, ki se po krajšanju s faktorjem 180 glasi

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1. \tag{*}$$

To pa je enačba (2). Ugotovili smo, da ima enačba (2) v bistvu le tri rešitve v naravnih številih m, n in p. Če namreč privzamemo, da je $m \leq n \leq p$, je bodisi $m = 2$, $n = 3$, $p = 6$ bodisi $m = 2$, $n = p = 4$ bodisi $m = n = p = 3$. V prvem primeru imamo kote $\alpha = 180/2 = 90°$, $\beta = 180/3 = 60°$, $\gamma = 180/6 = 30°$; pripadajoči trikotnik je polovica enakostraničnega trikotnika. V drugem primeru so koti $\alpha = 180/2 = 90°$, $\beta = \gamma = 180/4 = 45°$; trikotnik je polovica kvadrata. V tretjem primeru pa je $\alpha = \beta = \gamma = 180/3 = 60°$; trikotnik je enakostraničen (slika 1). Pokritje ravnine s prvimi trikotniki kaže slika 2, z drugimi slika 3.



Slika 2. Pokritje ravnine s skladnimi trikotniki s koti $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 30°$. Osenčeni in neosenčeni trikotnik sta vedno zrcalni sliki drug drugega.



Slika 3. Pokritje ravnine s skladnimi trikotniki s koti $\alpha = 90°$, $\beta = \gamma = 45°$. Osenčeni in neosenčeni trikotnik sta vedno zrcalni sliki drug drugega.

Kaj pa neenačbi (3) in (4)? Zvezo (*) med števili m, n in p smo izpeljali iz dejstva, da je vsota notranjih kotov v trikotniku 180°. To velja za našo običajno evklidsko geometrijo. V neevklidski geometriji pa je vsota kotov manjša od 180°. Če hočemo pokriti neevklidsko ravnino na podoben način s skladnimi trikotniki, ugotovimo kakor prej, da se morajo koti α, β, γ teh trikotnikov izražati v obliki (6), kjer so m, n in p naravna števila. Ker je vsota kotov zdaj manjša od 180°, zadoščajo m, n in p neenačbi (3). Ta pa ima nešteto rešitev v naravnih številih. Zato lahko neevklidsko ravnino pokrijemo na neskončno različnih načinov s skladnimi trikotnimi ploščami.

Sferični trikotnik je trikotnik na sferi (površini krogle). Njegove stranice so loki glavnih krogelnih krogov, glavni krogelni krog pa dobimo, če prerežemo sfero z ravnino, ki gre skozi središče sfere. Vsota notranjih kotov sferičnega trikotnika je večja od $180°$. Če si spet zastavimo nalogo pokriti sfero s trikotniki tako, da sta dva trikotnika, ki imata skupno stranico, zrcalni sliki drug drugega, ugotovimo, da se koti α, β, γ trikotnikov izražajo v obliki (6). Ker je vsota kotov večja od $180°$, velja zdaj med m, n in p neenačba (4). Rešitve v naravnih številih kaže razpredelnica III. Vendar rešitve, pri katerih je $m = 1$, ne pridejo v poštev, ker so koti v trikotniku manjši od $180°$. V evklidski in neevklidski geometriji je število skladnih trikotnikov, ki pokrivajo ravnino, neskončno. Sfera pa ima končno površino, zato je število trikotnikov, ki jo prekrivajo, končno.

Povejmo še to, da je razdelitev sfere na skladne oziroma zrcalne trikotnike povezana s pravilnimi poliedri.

Ivan Vidav