PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 2
Strani 100–105

Ivan Pucelj:

PITAGOROVO DREVO

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/14/826-Pucelj.pdf

© 1986 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2009 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

PITAGOROVO DREVO

Že več tisočletij poznajo ljudje čudovita matematična dragulja: prvi je Pitagorov izrek, drugi je zlati rez. Med obema bomo našli presenetljivo zvezo.

1) Spomnimo se na vsebino Pitagorovega izreka:

Če je trikotnik pravokoten, je kvadrat najdaljše stranice enak vsoti kvadratov drugih dveh stranic.

Za začetek poglejmo ta naravna števila: 3, 4, 5. Opazimo, da je razlika med sosednjima številoma enaka 1 (aritmetično zaporedje). Drugo opažanje: $5^2 = 4^2 + 3^2$. Edina tri zaporedna naravna števila z lastnostjo, da je kvadrat največjega izmed teh števil enak vsoti kvadratov drugih dveh števil, so ravno števila 5, 4, 3.

Dogovor: Če naravna števila a, b, c ustrezajo zvezi $a^2 + b^2 = c^2$, jih imenujemo **Pitagorova trojica.**

Če so si števila poleg tega še tuja, je (a, b, c) **primitivna** Pitagorova trojica.

Že dolgo je znano, da dobimo vse primitivne Pitagorove trojice takole: izberemo dve tuji si števili $m, n; m > n$, ki sta različnih parnosti (eno je sodo, drugo liho) in oblikujemo trojico (a, b, c):

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2 \tag{1}$$

Števili m, n imenujemo generatorja primitivne Pitagorove trojice (a, b, c). Da je (a, b, c) res Pitagorova trojica, pa se bralec lahko sam prepriča.

2) Zdaj se vprašajmo, ali obstaja kakšna zveza med poljubnima primitivnima trojicama.

Odgovor je pritrdilen. Da bomo sledili nadaljevanju, si oglejmo tri skupine števil, ki jih na kratko zaznamujmo G, N, D in jih zapišimo v obliki:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Imenujemo jih **matrike** velikosti 3 x 3 (matrike s tremi vrsticami in s tremi stolpci).

Tudi Pitagorovo trojico lahko zapišemo v obliki matrike, npr. (a, b, c), ali pa $T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ (stolpčna matrika).

Zdaj pa poglejmo produkte matrik $G.T$, $N.T$, $D.T$. Najprej

$$G.T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b + 2c \\ 2a - b + 2c \\ 2a - 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \qquad (3_1)$$

Če pozorno pogledaš, kar samostojno ugotoviš pravilo za množenje matrike G in T: vsaka vrstica matrike G in stolpec T se zmnožita po komponentah, ki jih nazadnje seštejemo.

Prav lahko preveriš tudi druga dva računa:

$$N.T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b + 2c \\ 2a + b + 2c \\ 2a + 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad (3_2)$$

$$D.T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 2b + 2c \\ -2a + b + 2c \\ -2a + 2b + 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad (3_3)$$

Prav tako lahko samostojno preveriš, da na podlagi (1), $(3_1 - 3_3)$ velja:

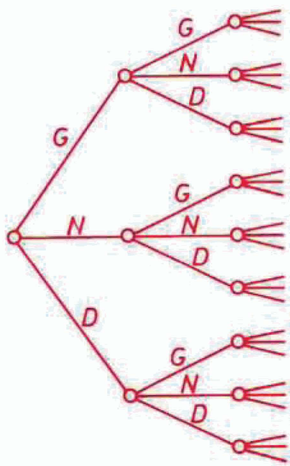
$$\begin{aligned}
a_1{}^2 &= (m^2 - n^2) - 2.2mn + 2(m^2 + n^2) = (2m - n)^2 - m^2 \\
b_1 &= 2(m^2 - n^2) - 2mn + 2(m^2 + n^2) = 2(2m - n)m \\
c_1 &= 2(m^2 - n^2) - 2.2mn + 3(m^2 + n^2) = (2m - n)^2 + n^2 \\
a_2 &= (m^2 - n^2) + 4mn + 2(m^2 + n^2) = (2m + n)^2 - m^2 \\
b_2 &= 2(m^2 - n^2) + 2mn + 2(m^2 + n^2) = 2(2m + n)m \\
c_2 &= 2(m^2 - n^2) + 4mn + 3(m^2 + n^2) = (2m + n)^2 + m^2 \\
a_3 &= -(m^2 - n^2) + 4mn + 2(m^2 + n^2) = (m + 2n)^2 - n^2 \\
b_3 &= -2(m^2 - n^2) + 2mn + 2(m^2 + n^2) = 2(m + 2n)n \\
c_3 &= -2(m^2 - n^2) + 4mn + 3(m^2 + n^2) = (m + 2n)^2 + n^2
\end{aligned}$$

Povzemimo: Če je $T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ primitivna Pitagorova trojica z generatorjema m, n, so GT, NT, DT spet primitivne Pitagorove trojice z generatorji

$$\begin{array}{ccc} G.T & N.T & D.T \\ 2m-n, m & 2m+n, m & m+2n, n \end{array} \tag{4}$$

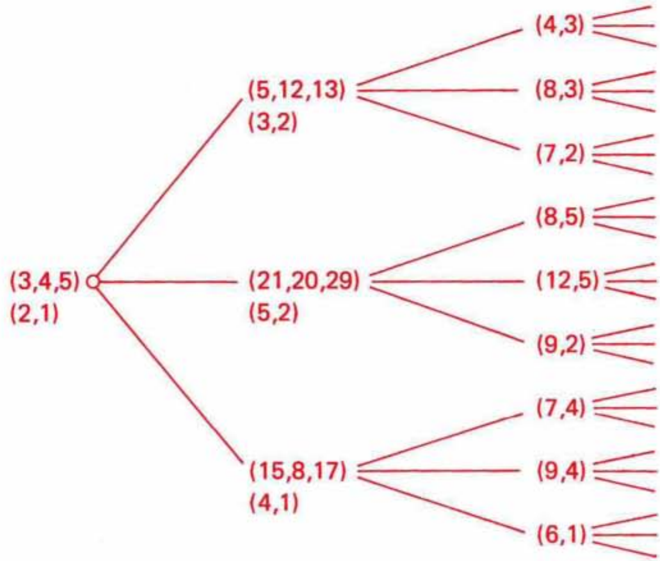
3) Izberimo trojico $T_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, njena generatorja sta $m = 2, n = 1$.

Pa oblikujmo drevo, ki ima začetek (korenino) T_0, veje pa oblikujmo tako:



G	"gor"
N	"naprej"
D	"dol"

Če označimo na primer trojice in pare generatorjev, dobimo:



To drevo ima nešteto mnogo razvejišč (vozlišč). Stopnja vsakega vozlišča je 4, le korenina ima stopnjo enako 3.

Ali so v tem (neskončnem) drevesu na razvejiščih vse primitivne Pitagorove trojice?

Da to drži, vidimo iz premisleka:

Izberimo števili $M, N, M > N$, tuji in različnih parnosti. Ta generatorja določata primitivno Pitagorovo trojico (A, B, C):

$$A = M^2 - N^2 \qquad B = 2MN \qquad C = M^2 + N^2$$

Treba je pokazati, da je ta trojica v nekem vozlišču drevesa.

Za M, N proučimo tri možnosti:

(1) $N < M < 2N$ (2) $2N < M < 3N$ (3) $3N < M$

S pomočjo para (M, N) oblikujmo nov par (m, n) takole:

$$\begin{array}{lll} (1)\ m = N & (2)\ m = N & (3)\ m = M - 2N \\ \quad n = 2N - M & \quad n = M - 2N & \quad n = N \end{array} \qquad (5)$$

Zato je

$$(1') \; M = 2m - n, \; N = m \qquad (2') \; M = 2m + n, \; N = m \qquad (3') \; M = m + 2n, \; N = n$$

V (1), (2), (3) je vedno

$$m + n < M + N$$

Nadalje: Nova generatorja m, n sta si tuja in velja $m > n$.

Zato par (m, n) določa primitivno Pitagorovo trojico, npr. $T' = (a, b, c)$. Zgoraj smo pa ugotovili, da so potem GT', NT', DT' spet primitivna Pitagorova trojica; z generatorjema m, n naredimo po (5) novo dvojico generatorjev, npr. m' in n'. Potem je

$$m' + n' < m + n < M + N$$

Če ta postopek (igrico, algoritem) nadaljujemo, pridemo končno do para (2,1). Temu ustreza primitivna trojica T_0, torej korenina drevesa. Od tod pa pridemo do trojice (A, B, C) tako, da delujemo na T_0 z G, N, D (večkrat). Torej T je v drevesu!

Sklep. V tem drevesu je vsaka primitivna Pitagorova trojica.
Zato imenujemo to drevo Pitagorovo drevo.

4) Oglejmo si nekaj lastnosti "verig" v drevesu.
Za prvi primer izračunajmo pare generatorjev vozlišč verige

$$T_0 \, G \, N \, G \, N \, G \, N \, G \, N \ldots$$

$$(2,1) \xrightarrow{G} (3,2) \xrightarrow{N} (8,3) \xrightarrow{G} (13,8) \xrightarrow{N} (34,13) \xrightarrow{G} (55,34) \ldots$$

In verige $T_0 \, N \, G \, N \, G \, N \, G \ldots$

$$(2,1) \xrightarrow{N} (5,2) \xrightarrow{G} (8,5) \xrightarrow{N} (21,8) \xrightarrow{G} (34,21) \xrightarrow{N} (89,34) \ldots$$

Števila, ki nastopajo v teh parih, pa poznamo iz nekega drugega vira, namreč iz zlatega reza. Poglejmo na kratko v to področje.

Daljica $a = AB$ je razdeljena s točko Z v zlatem rezu, če je razmerje med vso daljico AB in daljšim odsekom AZ enako razmerju med daljšim odsekom AZ in krajšim odsekom ZB. Če označimo odseka z M in m, velja potemtakem

$$a : M = M : m, \quad a = M + m$$

Označimo na kratko $M : m = \tau$, pa imamo $\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$ ali $\tau^2 = \tau + 1$. Število τ lahko zato razvijemo v verižni ulomek

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

Približki števila τ so od tod

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{8}, \frac{34}{21}, \dots$$

Števila v števcih in imenovalcih teh približkov so generatorji trojic v omenjenih verigah.

Omenimo, da prva veriga stremi proti trikotniku, ki ima tangens notranjega kota 1/2, druga veriga pa stremi proti trikotniku, ki ima sinus notranjega kota 2/3.

Na kraju naj navedem še nekaj problemov:

Dan je par (m, n) generatorjev primitivne trojice. Treba je najti matriko M, tako da je ta trojica tudi $M T_0$.

Dana sta para generatorjev. Treba je najti najbližje skupno vozlišče njunih verig.

Proučiti je treba lastnosti trikotnikov raznih verig Pitagorovega drevesa; npr. verig

$T_0 G N D G N D G N D \dots$

$T_0 G N D G D N N G D N D G D G N D N G \dots$

Na koncu naj opozorim na to, da ima trojica (3,4,5) med vsemi Pitagorovimi trojicami izjemno vlogo.

Ivan Pucelj