

# NAKLJUČNO GIBANJE DELCEV NA NIHAJOČI MEMBRANI V CHLADNIJEVEM POSKUSU

IGOR GRABEC

Amanova d. o. o.  
Tehnološki park, Ljubljana

PACS: 02.50.Ey, 02.60.-x, 05.40.Fb

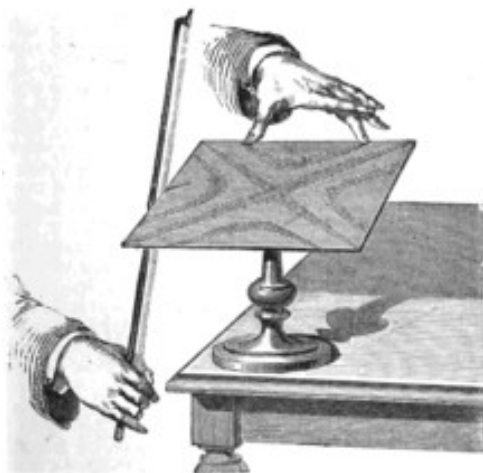
V prispevku je statistično okarakterizirano naključno poskakovanje kremenčevih kamenčkov na nihajoči membrani v Chladnjevem poizkusu. Posnetki trajektorij kažejo, da so skoki krožno porazdeljeni in naključni. Povprečna dolžina horizontalnega premika v skoku je približno sorazmerna amplitudi nihanja nad kritičnim nivojem in znaša okoli eno četrtno ustrezne višine skoka. Horizontalno premikanje delcev je opisano z modelom naključnega gibanja, ki ga poganjajo nihanja podlage. Numerični primeri kažejo dobro ujemanje med eksperimentalnimi in simuliranimi podatki.

## RANDOM WALK OF PARTICLES ON A VIBRATING MEMBRANE OF CHLADNI EXPERIMENT

Bouncing of marble sand particles on a vibrating membrane of a Chladni experiment is statistically characterized in the article. Records of trajectories reveal that bounces are circularly distributed and random. The mean length of their horizontal displacement is approximately proportional to the vibration amplitude above the critical level and amounts about one fourth of the corresponding jump height. The horizontal drifting of particles is described by a model of vibration driven random walk. Numerically simulated examples yield a good agreement with experimental data.

### Uvod

Nastajanje vzorcev zaradi gibanja peščenih delcev na nihajočih površinah je prvi omenil Robert Hook že leta 1680, vendar je preteklo celo stoletje, preden je Ernst Chladni (1756–1827) ta pojav uporabil za prikazovanje nihanja glasbenih instrumentov [1, 2]. Njegove inovacije so nato pospešile razvoj znanosti o nihanjih in akustiki. Čeprav se Chladnijevo prikazovanje nihanj še vedno uporablja v proizvodnji in karakterizaciji glasbenih instrumentov [2], sam pojav nastanka vzorca doslej še ni bil fizikalno zadovoljivo opisan. To je še posebej presenetljivo, ker je bilo poskakovanje delcev pogosto predmet raziskav kaotične dinamike in gibanja zrnatih snovi [3]. Zato je osnovni namen tega članka s poskusi in statistično analizo lastnosti gibanja delcev v Chladnjevem poskusu zapolniti to vrzel.



**Slika 1.** Nastanek Chladnijevega vzorca na nihajoči plošči. Povzeto iz: [en.wikipedia.org/wiki/Ernst\\_Chladni](https://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni).

### Osnovne značilnosti Chladnijevega poskusa

Nepopolnost fizikalnega opisa gibanja delcev v Chladnjevem poskusu je posledica kompleksnosti njegove dinamike, ki zahteva upoštevanje kaotičnih pojavov, naključnih lastnosti oblike delcev, trkov z drugimi delci, izgubljanje energije zaradi trenja itd. Kljub temu pa lahko sklepamo, da se delci gibljejo v zaporednih skokih iz področij močnih nihanj v področja vozelnih linij, kjer je amplituda nihanja zanemarljiva [2]. Namen članka je podati argumente za to sklepanje na osnovi statistične karakterizacije poskakovanja, zato so tukaj raziskane in opisane lastnosti gibanja delcev na krožni nihajoči membrani. Naš končni cilj je opredelitev enostavnega modela za opis nastanka Chladnijevega vzorca. Zaradi poenostavitve obravnavamo primere z majhno gostoto delcev, pri katerih je dovolj, da raziščemo lastnosti gibanja posameznih delcev.

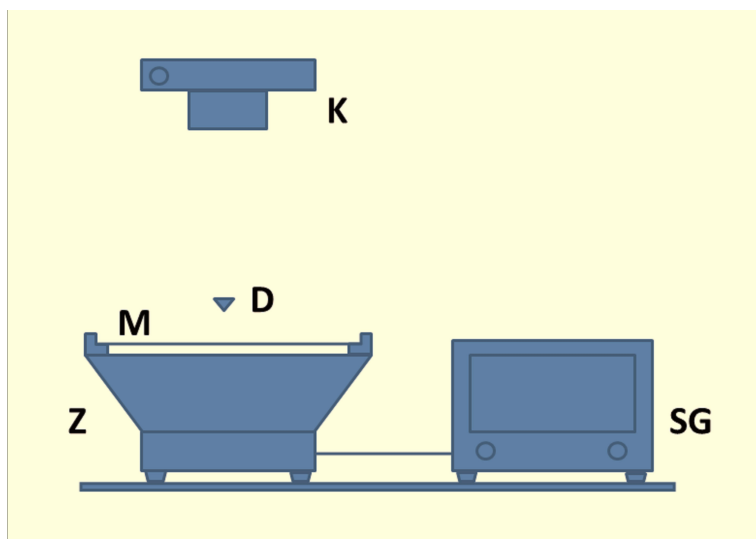
Slika 1 kaže oblikovanje Chladnijevega vzorca na nihajoči plošči, posuti s tanko plastjo peska. Chladni je vzbujal nihanje z drgnjenjem violinskega loka ob rob plošče, dandanes pa se za to uporablja predvsem električno vzbujanje, na primer z zvočnikom.

Chladniji poskusi so običajno izvedeni s peščenimi delci naključnih oblik. Zato je razvoj Chladnijevega vzorca naključen proces in v skladu s tem najprej opišemo njegove lastnosti statistično z eksperimentalnimi podatki. Poskakovanje splošno vključuje vertikalne in horizontalne premike. Slednji so pomembni za oblikovanje Chladnijevega vzorca, zato v nadaljevanju raziščemo samo njihove lastnosti.

Dinamika poskakovanja vključuje metanje delcev z nihajoče površine z vertikalnim pospeškom  $a(\mathbf{r}) = \omega^2 z(\mathbf{r})$ , kakor tudi prosto padanje s pospeškom  $g$ . Pri tem je  $\omega$  krožna frekvenca in  $z(\mathbf{r})$  amplituda nihanj na položaju s krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}$ . Poskakovanje se dogaja nad kritično amplitudo  $z_c = g/\omega^2$ , kjer pospešek  $a(\mathbf{r})$  preseže gravitacijskega. Zato uporabimo za opis poskakovanja relativno amplitudo pospeška:  $A(\mathbf{r}) = [a(\mathbf{r}) - g]/g$ , ki je enaka relativni amplitudi nihanja nad  $z_c$ :  $A(\mathbf{r}) = z(\mathbf{r})/z_c - 1$ . Poskakovanje obstaja, če je  $A > 0$ . Ob vozelnih linijah je  $A < 0$  in poskakovanje, vzbujeno v območju z  $A > 0$ , tam preneha.

### Poskusi in analiza

Sistem za izvedbo poskusov je prikazan na sliki 2. Poskakovanje delcev povzroča nihanje krožne membrane s polmerom  $r_o = 152$  mm, debelino 1 mm, gostoto  $1134$  kg/m<sup>3</sup> in horizontalno napetostjo  $0,194$  N/mm. Membrana je vpeta horizontalno v okvir, pritrjen na ohišje zvočnika. Njen prvi osnovni način nihanja s frekvenco  $f = 36,8$  Hz vzbuja zračni tlak iz zvočnika, ki ga poganja sinusna napetost iz signalnega generatorja. Radialno odvisnost amplitude nihanj opišemo z izrazom  $z(\mathbf{r}) = z_o J_o(2,4r/r_o)$ , pri čemer je  $z_o$  amplituda pri  $r = 0$  in  $J_o$  Besselova funkcija s prvo ničlo pri  $2,4$ . Amplituda napetosti generatorja je nastavljena tako, da je kritična amplituda odmika membrane  $z_c = 0,18$  mm pri kritičnem radiju  $r_c = 95$  mm. V tem primeru



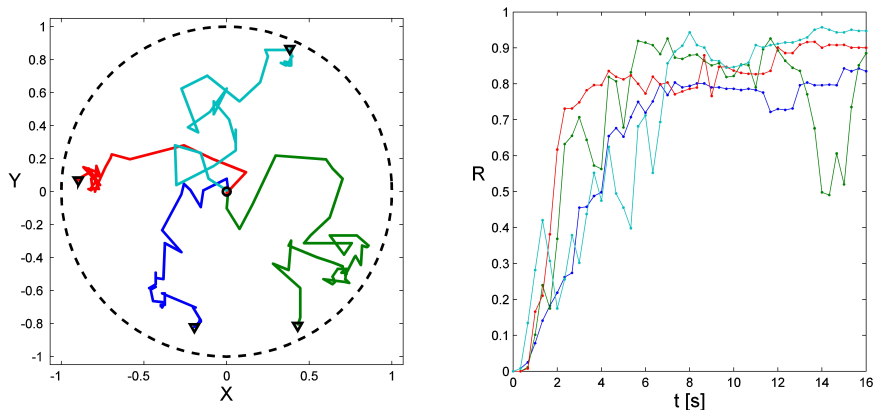
**Slika 2.** Shema eksperimentalnega sistema. SG – signalni generator, Z – zvočnik, M – membrana, D – delec, K – kamera.

je  $z_o = 2z_c$  in območje relativne amplitude  $-1 \leq A \leq 1$ .

Testno množico delcev tvori  $N = 30$  kremenčevih kamenčkov z obliko podobno tetraedru. Porazdelitev višine  $\chi$  je približno normalna s srednjo vrednostjo  $\langle \chi \rangle = 1,55$  mm in standardno deviacijo  $\Delta\chi = 0,38$  mm. V poskusih opazujemo poskakovanje posameznih delcev, ki jih položimo v center mirujoče membrane in nato vzbudimo nihanje. Trajektorije delcev posnamemo s fotografsko kamero v časovnih razmikih  $\delta t = 1/3$  s. Celotni posnetek trajektorije tvori 45 slik, posnetih v času 15 s. Iz vzorčne množice posnetkov vektorjev horizontalnega položaja  $\{r_n(\tau); 1 \leq n \leq 30, 1 \leq \tau \leq 45\}$  določimo ustrezne relativne radije  $R_n(\tau) = r_n(\tau)/r_c$ , amplitude  $A_n(\tau)$ , premike  $\mathbf{s}_n(\tau) = \mathbf{r}_n(\tau + 1) - \mathbf{r}_n(\tau)$  pri  $t = (\tau - 1)\delta t$  in vektorje normaliziranega premika  $\mathbf{S}_n(\tau) = \mathbf{s}_n(\tau)/r_c$ . Srednje vrednosti  $\langle \dots \rangle = \sum_n (\dots)/N$  in standardne deviacije  $\Delta(\dots) = [\text{Var}(\dots)]^{1/2}$  [4, 5] spremenljivk  $R$ ,  $A$  ter  $S$  so osnovne karakteristike pojava poskakovanja delcev.

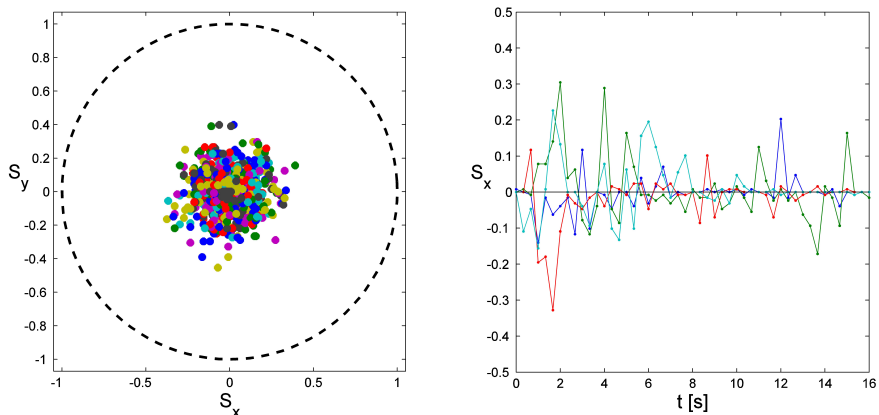
Slika 3 levo kaže štiri vzorce trajektorij od  $r = 0$  k  $r_c$ , slika 3 desno pa časovno odvisnost ustreznega relativnega radija  $R = r/r_c$ . Obe sliki nakazujeta naključnost in trend poskakovanja.

Slika 4 levo kaže porazdelitev vseh izmerjenih vrednosti normaliziranega premika  $S$  ob različnih časih, slika 4 desno pa časovno odvisnost njegove  $x$ -komponente  $S_x$  vzorcev iz slike 3 levo. Osnovne lastnosti  $S_x$  so prikazane na sliki 5. Slika 5 levo nakazuje, da so vrednosti  $S_x$  približno simetrično porazdeljene okoli 0 pri dani vrednosti amplitude  $A$ , širina porazdelitve pa narašča z  $A$ . Povezavo med standardno deviacijo  $\Delta S_x$  in srednjo vrednostjo  $\langle A \rangle$  vseh delcev kaže slika 5 desno. Ustrezna regresijska premica  $\Delta S_x = \kappa \langle A \rangle$  s  $\kappa \approx 0,16$  nakazuje, da je širina porazdelitve približno sorazmerna s

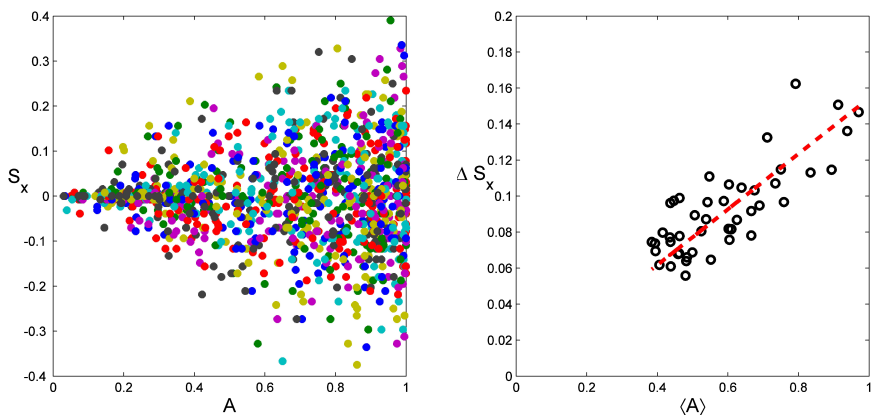


**Slika 3.** Levo: Štirje vzorci posnetkov trajektorij delcev; črtkani krog ima radij  $r_c$ . Desno: Časovna odvisnost relativnega radija  $R(t) = r/r_c$  trajektorij iz slike 3 levo.





**Slika 4.** Levo: Porazdelitev vseh izmerjenih normaliziranih vektorjev premika  $\mathbf{S}_n = \mathbf{s}_n/r_c$ . Desno: Časovna odvisnost komponente  $S_x$ , določena iz vzorcev trajektorij na sliki 3 levo.



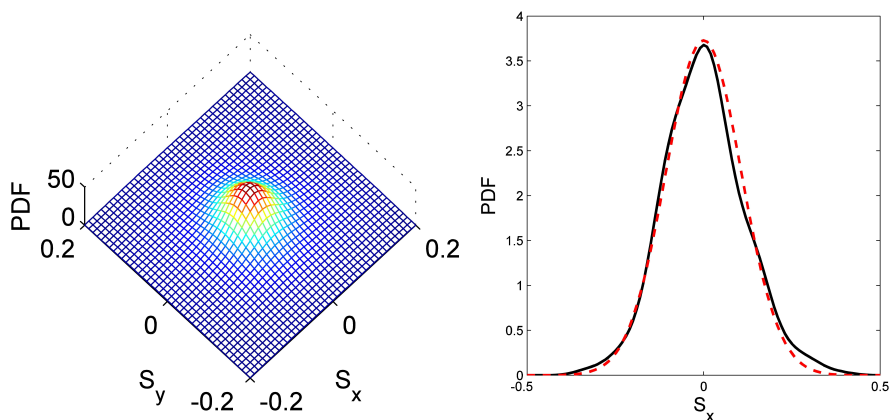
**Slika 5.** Levo: Povezava med izmerjenimi  $S_x$  in relativno amplitudo  $A = z/z_c - 1$  na mestu skoka. Desno: Povezava standardne deviacije  $\Delta S_x$  s srednjo vrednostjo  $\langle A \rangle$ ; ustrezna regresijska premica je prikazana črtkano.

povprečno amplitudo  $\langle A \rangle$  [5].

Gostota porazdelitve verjetnosti (GPV), določena s Parzenovo cenilko [4, str. 99; 5, str. 31] iz podatkov  $S_n$  na sliki 4 levo, je prikazana na sliki 6 levo. Normalna porazdelitev, centrirana na merskih podatkih, je uporabljena kot jedro cenilke; njena širina je podana s  $\sigma = 2\Delta S/[N]^{1/2}$ , kjer je  $\Delta S$  standardna deviacija absolutnih vrednosti  $S_n = |\mathbf{S}_n(\tau)|$ . Porazdelitev na sliki 6 levo je centralno simetrična in odvisna samo od absolutne vredno-

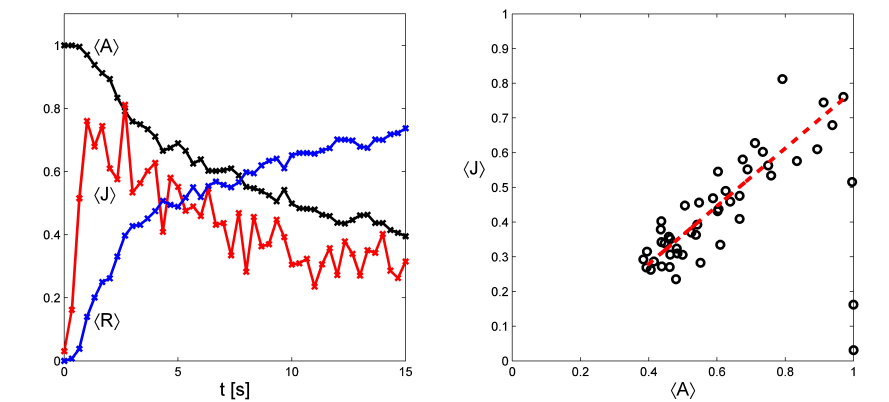
sti  $S$ . Prikazana GPV ni normalna, ker je izračunana iz celotne množice vzorcev premika, v kateri so prevladujoči majhni premiki blizu kritičnega radija. Če ocenimo GPV samo iz vzorcev v območjih s približno enako amplitudo  $A$ , pa dobimo normalno porazdelitev. Polna črta na sliki 6 desno kaže GPV spremenljivke  $S_x$ , določene iz vzorcev, posnetih v času od 2 s do 6 s, medtem ko kaže črtkana linija normalno (Gaussovo) porazdelitev [4, str. 99; 5, str. 186], določeno z ustrežno srednjo vrednostjo in standardno deviacijo  $S_x$ .

Za karakterizacijo trajektorij je smiselno izraziti premik  $\mathbf{S}$  med dvema zaporednima posnetkoma glede na kritični radij  $r_c$  kot  $\mathbf{S} = \mathbf{s}/r_c$ , za opis poskakovanja pa ga je bolje izraziti glede na kritično amplitudo  $z_c$  in premik, ki se zgodi med enim nihajem. Zato vektor  $\mathbf{s}$  delimo s številom nihajev med dvema posnetkoma  $\delta N = f\delta t = 12,3$  in  $z_c$ , da dobimo  $\mathbf{J} = \mathbf{s}/(\delta N z_c)$ . Ta vektor pomeni skoke delcev med posameznimi nihaji relativno glede na  $z_c$ . Ker je vektor  $\mathbf{J}$  sorazmeren  $\mathbf{S}$ , sovpadajo lastnosti njegove GPV s tistimi, ki so prikazane na sliki 6. Nadalje raziščemo še vpliv amplitude  $A$  na absolutno vrednost normaliziranega premika  $J = |\mathbf{J}|$ . Dodatne podatke o lastnostih poskakovanja dobimo tako, da obravnavamo točko membrane, kjer vertikalni premik  $z(r, t) = z(r) \sin(\omega t)$  preide kritično vrednost  $z_c$  in vrže delec. Iz ustreznega faznega kota  $\phi = \arcsin[z_c/z(r)] = \arcsin[1/(1 + A)]$  in vertikalne hitrosti  $v = \omega z(r) \cos(\phi)$  dobimo za relativno višino skoka  $H = (z_c + v^2/2g)/z_c$ , nato izraz  $H = [1 + (1 + A)^2]/2$ , ki opisuje vpliv relativne amplitude nihanja  $A$  na poskakovanje. S to formulo in podatki na sliki 7 levo določimo  $\langle H \rangle$ ,  $\langle J \rangle$ , in  $\langle J \rangle / \langle H \rangle$  kot funkcije časa, ki so prikazane



**Slika 6.** Levo: Gostota porazdelitve verjetnosti (GPV) vektorja  $\mathbf{S}$ , določena iz vzorcev na sliki 4 levo. Desno: GPV komponente  $S_x$ , določena iz vzorcev v časovnem intervalu od 2 s do 6 s (polna črta), in normala porazdelitev z ustrežno  $\langle S_x \rangle$  in  $\Delta S_x$  (črtkana).

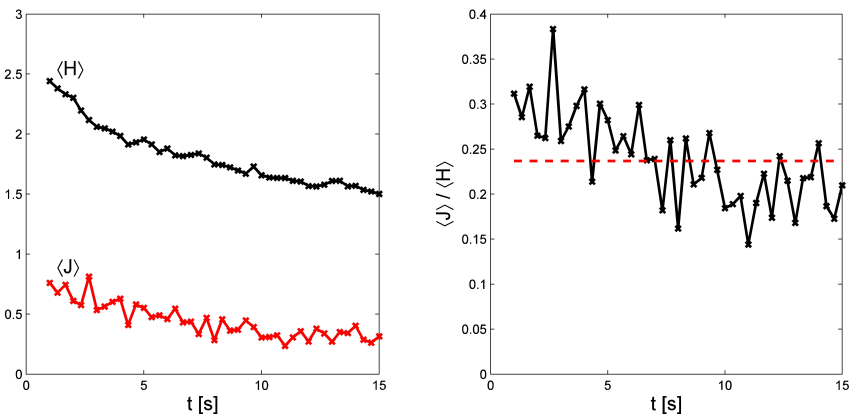
na sliki 8. Na sliki 8 desno označuje črtkana linija povprečno vrednost razmerja  $\langle J \rangle / \langle H \rangle$  glede na čas; njena vrednost  $\approx 0,24$  pa kaže, da poskakovanje poteka pretežno v vertikalni smeri, kakor je opredeljeno z višino skoka  $\langle H \rangle$ , medtem ko je horizontalni premik  $\langle J \rangle$  v primerjavi z njo sorazmerno majhen in zato pomeni šibko naključno komponento skoka z normalno GPV. Ta lastnost nas v nadaljevanju vodi do poenostavljenega opisa razvoja Chladnijevega vzorca z modelom naključnega gibanja.



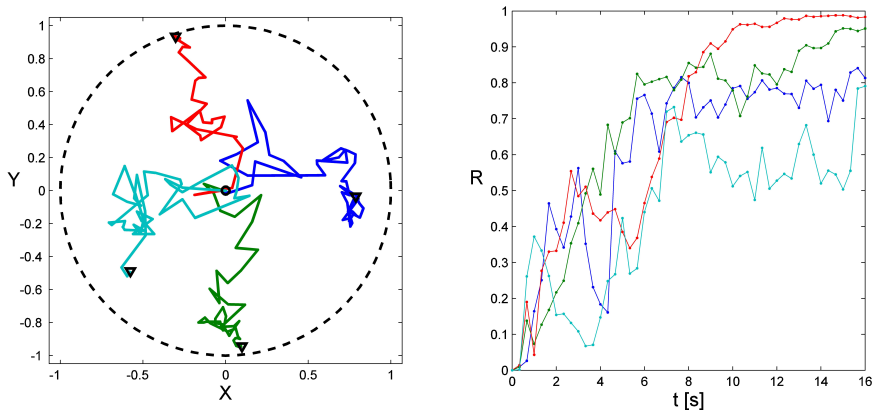
**Slika 7.** Levo: Odvisnost srednjih vrednosti  $\langle R \rangle$ ,  $\langle J \rangle$  in  $\langle A \rangle$  od časa  $t$ . Desno: Povezava med  $\langle J \rangle$  in  $\langle A \rangle$  (krožci) ter regresijska premica  $\langle J \rangle = 0,83 \langle A \rangle - 0,05$  (črtkano). Tri točke pri  $\langle A \rangle \approx 1$  ustrezajo začetni vzbuditvi in niso vključene v oceno regresijske premice.

## Model in numerična simulacija

Pri opisu modela obravnavamo poskakovanje delcev na nihajoči membrani in privzamemo, da je absolutna vrednost horizontalnega premika normalno porazdeljena s povprečno vrednostjo  $\langle J \rangle = K \langle A \rangle$ . Tu je naklonski koeficient  $K$  edini parameter, s katerim prilagodimo model k eksperimentalnim podatkom. Komponenti premika  $x$  in  $y$  sta numerično simulirani z normalnim (Gaussovimi) generatorjem naključnih števil ob uporabi iste vrednosti  $[2/\pi]^{1/2} \langle J \rangle$  za obe standardni deviaciji  $\Delta J_x$  in  $\Delta J_y$ . Rezultati numerične simulacije so prikazani na slikah 9, 10 in 11, ki ustrezajo slikam 3, 4 in 7. Statistične karakteristike simuliranih spremenljivk se ujemajo z eksperimentalno določenimi do vrednosti razlik, ki so odvisne od začetne vrednosti generatorja naključnih števil. Dokaj dobro ujemanje med eksperimentalnimi in numeričnimi podatki kaže, da so glavne značilnosti oblikovanja Chladnijevega vzorca precej izčrpno opisane s tukaj vpeljanim modelom naključnega gibanja delcev, povzročenega z nihanjem membrane.



**Slika 8.** Levo: Povprečna relativna višina skoka  $\langle H \rangle$  in povprečni normalizirani horizontalni premik v enem nihaju  $\langle J \rangle$  v odvisnosti od časa  $t$ . Desno: Odvisnost razmerja  $\langle J \rangle / \langle H \rangle$  od časa  $t$ ; črtkana linija kaže povprečno vrednost razmerja  $\langle J \rangle / \langle H \rangle \approx 0,24$ .

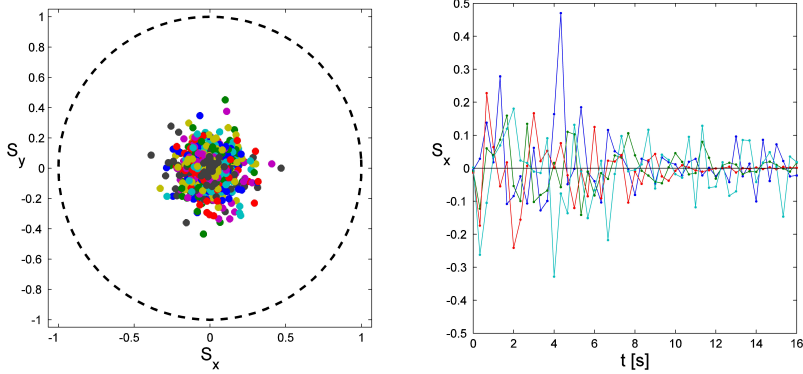


**Slika 9.** Levo: Štirje vzorci simuliranih trajektorij. Desno: Časovna odvisnost relativnega radija  $R = r/r_c$ .

### Za konec

Dokaj dobro ujemanje med karakteristikami eksperimentalnih in numerično simuliranih podatkov kaže, da je poskakovanje delcev med oblikovanjem Chladnijevega vzorca možno obravnavati kot primer Markovskega procesa, za katerega je značilno, da je verjetnost prehoda v naslednje stanje odvisna samo od trenutnega stanja in z njim povezanega položaja.

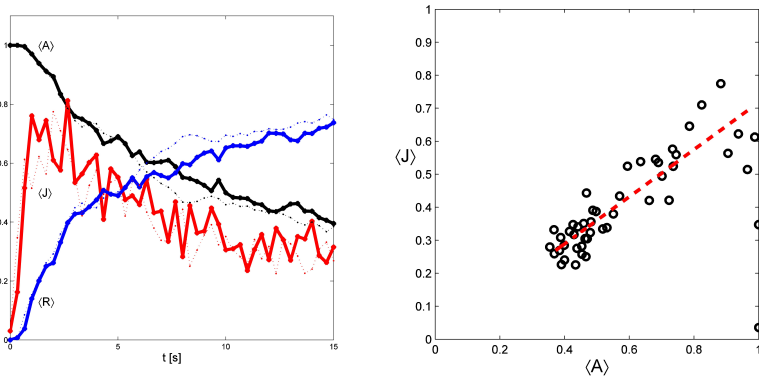
Opisana analiza je osnovana na ponovljenih opazovanjih gibanja posa-



**Slika 10.** Levo: Porazdelitev simuliranih normaliziranih vektorjev premika  $\mathbf{S}_n = \mathbf{s}_n/r_c$ . Desno: Časovna odvisnost komponente  $S_x$ , določena iz vzorcev na sliki 9 levo.

meznih delcev, vendar je za opis razvoja Chladnijevega vzorca zelo primerno tudi obravnavanje gostote mnogo prisotnih delcev. Za ta namen je možno izvesti prehod od naključnega gibanja k difuzijskemu procesu, pri katerem je difuzijski koeficient odvisen od amplitude nihanja oziroma položaja.

Kljub našim ugodnim rezultatom numeričnega simuliranja gibanja delcev je izvor naključja v Chladnjevem eksperimentu ostal neopredeljen, čeprav ga je možno simulirati z generatorjem naključnih števil. V zvezi s tem



**Slika 11.** Levo: Polne črte – karakteristike simuliranega procesa: odvisnost  $\langle R \rangle$ ,  $\langle J \rangle$  in  $\langle A \rangle$  od časa  $t$ . Črtkane linije – karakteristike eksperimentalnega procesa. Desno: Povezava med  $\langle J \rangle$  in  $\langle A \rangle$  pri numerično simuliranem procesu (krogci) in ustrezna regresijska premica (črtkano). Tri točke pri  $\langle A \rangle \approx 1$  ob vzbuditvi poskakovanja niso upoštevane pri oceni regresijske premice.

omenimo, da je možno kaotične lastnosti poskakovanja kroglic v nekaterih primerih teoretično pojasniti z nelinearno dinamiko [3]. Naš dodatni eksperiment s kovinskimi kroglicami premera nad 2 mm je pokazal, da kroglice poskakujejo pretežno vertikalno na istem mestu, medtem ko se izrazito horizontalno premikanje opazi predvsem pri kroglicah s premerom  $\approx 1$  mm. Ali je horizontalno gibanje takšnih majhnih kroglic posledica valov, ki jih kroglice same vzbujaajo na membrani, je še vedno neznan. Neodvisno od te nejasnosti pa lahko domnevamo, da je v našem primeru naključni značaj poskakovanja predvsem posledica neregularne oblike delcev. Novejše raziskave poskakovanja neokroglih delcev so pokazale [6], da je pri njih opazno več načinov kaotičnega gibanja v vertikalni, kakor tudi v horizontalni smeri. Razni načini, kot na primer kotaljenje, obračanje in drsenje, so bili tudi opaženi v naših poskusih pri kritičnem radiju, vendar niso bistveno vplivali na karakteristike poskakovanja [7].

Glede na navedene lastnosti poskakovanja delcev na nihajočih površinah in neopredeljenost izvora naključja je dokaaj presenetljivo, da lahko s tukaj opisanim preprostim modelom naključnega gibanja, ki vključuje en sam prilagodljiv parameter  $K$ , tako dobro opišemo premikanje poskakujočih delcev med oblikovanjem Chladnijevega vzorca.

## Zahvala

Avtor se zahvaljuje Matjažu Mikliču in Tomažu Klincu za sodelovanje pri pripravi tega članka.

## LITERATURA

- [1] E. F. F. Chladni, *Entdeckungen über die Theorie des Klanges*, Leipzig, 1787, dostopno na: [en.wikipedia.org/wiki/Ernst\\_Chladni](http://en.wikipedia.org/wiki/Ernst_Chladni), ogled: 11. 4. 2017.
- [2] U. Smilansky in H.-J. Stöckmann, *Nodal Patterns in Physics and Mathematics – From Chladni’s Seminal Work to Modern Applications – A Historic-Scientific Perspective*, EU Phys. J. ST, 2007, str. 145.
- [3] A. J. Lichtenberg in M. A. Lieberman, *Regular and Stochastic Motion*, Springer, New York, 1983.
- [4] I. Grabec in W. Sachse, *Synergetics of Measurements, Prediction and Control*, Springer, Berlin, 1997.
- [5] I. Grabec in J. Gradišek, *Opis naključnih pojavov*, UL Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 2014.
- [6] S. Dorbolo, D. Volfson, L. Tsimring in A. Kudrolli, *Dynamics of a Bouncing Dimer*, Phys. Rev. Lett., 95, 2005, 044101.
- [7] I. Grabec, *Vibration driven random walk in a Chladni experiment*, Physics Letters A, 381, 59–64, 2017.