PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 1
Strani 6–9

Marija Vencelj:

GEOMETRIJSKI RAZREZI

Ključne besede: matematika, rekreativna geometrija, ravninski liki, pravokotniki, kvadrati.

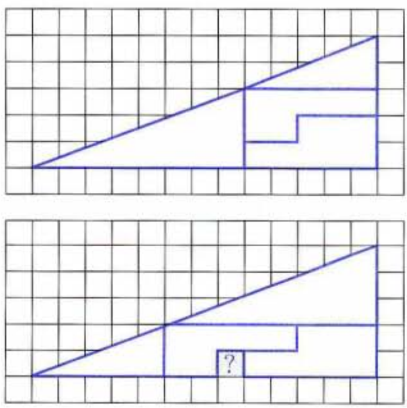
Elektronska verzija: http://www.presek.si/28/1430-Vencelj.pdf

GEOMETRIJSKI RAZREZI

Geometrijski razrezi sodijo med naloge rekreativne geometrije. Navadno je podan ravninski lik ali skupina likov, ki jih moramo razrezati na manjše like tako, da lahko natanko iz vseh dobljenih kosov brez prekrivanja sestavimo drug predpisan lik ali skupino likov. Za rezultirajoči lik oziroma like je praviloma podana le oblika, saj je njihova ploščina določena z izhodnimi liki. Število razrezov prvotnih likov je lahko z zahtevami naloge natanko določeno, navzgor omejeno ali poljubno. Rezi so lahko bodisi samo ravni bodisi poljubnih oblik. Najpreprostejši primer je, če naloga dovoljuje en sam ravni prerez.

V manj zahtevnih revijah so naloge rekreativne matematike večinoma oblikovane tako, da vnaprej zagotavljajo, da rešitev obstaja. S takim privzetkom je reševanje seveda lažje, prinese pa tudi manj zadovoljstva. Ta splošna ugotovitev velja tudi za geometrijske razreze. Te vrste nalog ne zahtevajo veliko geometrijskega znanja; denimo toliko, da zmoremo preveriti, ali iz danega lika sploh lahko naredimo iskanega. Ne glede na to, ali sestavljalcu naloge verjamemo, da je naloga rešljiva, ali ne, je tak preverek lahko koristen. Pogosto nam pokaže pot do rešitve naloge.

Po drugi strani se na rešitve, dobljene 'na oko', ne smemo zanesti. Lahko, da smo sestavili nekaj, kar je le blizu iskanemu liku. Ena od različic sicer zelo znanega 'protislovnega' primera, dobljenega 'na oko', je na sliki 1. Pravokotni trikotnik s katetama 5 in 13 enot smo razrezali na štiri kose, jih nekoliko drugače zložili in spet dobili pravokotni trikotnik s katetama 5 in 13, v katerem manjka ena kvadratna enota. Le od kod se je luknja vzela?



Slika 1.

Področje geometrijskih razrezov ima dolgo zgodovino. Tako npr. razni razrezi kvadrata, taki, da lahko iz dobljenih kosov sestavimo dva nova kvadrata, dajejo številne dokaze Pitagorovega izreka.

Kako transformirati kvadrat v pravilni petkotnik in pravilni šestkotnik, je bilo znano na začetku 19. stoletja.

Že v stoletju prej pa je francoski matematik Montuca (1747–1799) precej temeljito opisal transformacije pravokotnika v kvadrat. Na tem področju so raziskovali še Američan Sam Loyd (1844–1911), Anglež Dudeney (1847–1930) in Avstralec Lindgren. Nekaj njihovih rezultatov si bomo ogledali v tem sestavku.

1. Najenostavnejši primer je pretvorba pravokotnika 4×1 (s stranicama 4 enote in 1 enota) v kvadrat. Gre z enim samim ravnim prerezom pravokotnika (slika 2).

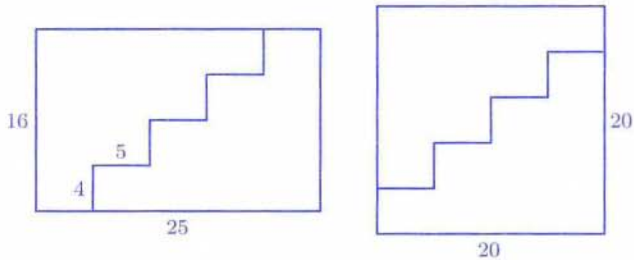
Slika 2.

Če razmerje stranic pravokotnika ni natanko $4 : 1$, z enim samim ravnim prerezom naloge očitno ne moremo rešiti.

2. Nekatere druge pravokotnike lahko z enim samim prerezom razbijemo na dva dela in iz njiju sestavimo kvadrat, če se odpovemo zahtevi, da je rez raven. Če ima npr. pravokotnik stranici v razmerju $(n+1)^2 : n^2$, kjer je n naravno število, lahko uporabimo *stopnično tehniko*. Če vzamemo, da merita stranici $(n+1)^2$ in n^2 enot, mora imeti končni kvadrat stranico dolžine $n(n+1)$ enot. Ker je

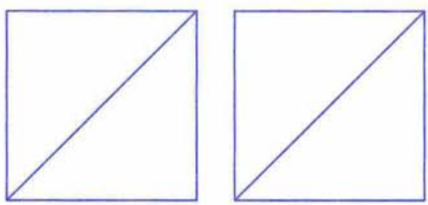
$$n(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) \quad \text{in} \quad n(n+1) = n^2 + n\,,$$

moramo daljšo stranico pravokotnika skrajšati za $n+1$ in krajšo povečati za n. To dosežemo tako, da pravokotnik prerežemo z rezom iz n stopnic z dimenzijama $n+1$ in n in dobljena kosa vzdolž reza medsebojno zamaknemo za eno stopnico. Na sliki 3 je prikazan primer za $n = 4$, to je, preoblikovanje pravokotnika 25×16 v kvadrat 20×20. Podobno potekajo pretvobe $9 \times 4 \to 6 \times 6$, $16 \times 9 \to 12 \times 12$, $36 \times 25 \to 30 \times 30$ itd.



Slika 3.

Za $n = 1$ je razmerje $(n+1)^2 : n^2$ enako 4. To je največje možno razmerje te oblike. Stopnici sta široki 2 enoti in visoki 1 enoto. Gre torej za primer ravnega reza na sliki 2.
Če n narašča, se število stopnic veča, velikost stopnic pa se glede na velikost pravokotnikovih stranic manjša. Tudi razmerje $(n+1)^2 : n^2$ se z naraščajočim n manjša in se približuje 1, ko gre n v neskončno. V mejnem primeru je začetni pravokotnik kvadrat, višina stopnice je enaka 0, ustrezni rez pa kar diagonala kvadrata (slika 4).

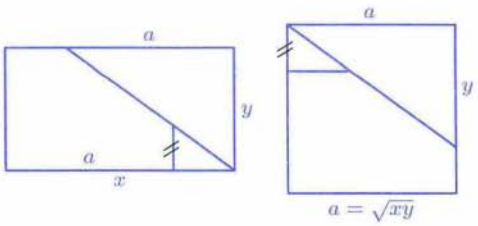


Slika 4.

3. Z razrezi na tri ali več kosov lahko rešimo nalogo, če sta stranici pravokotnika v razmerju, ki je večje kot 4, ali če je razmerje manjše od 4 in različno od $\frac{(n+1)^2}{n^2}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

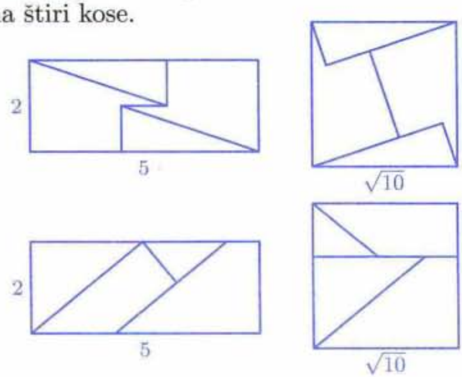
   Če je razmerje stranic pravokotnika $x : y \neq \frac{(n+1)^2}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$, in je $\frac{x}{y} < 4$, lahko rešimo nalogo z razrezom pravokotnika na tri kose, kot kaže slika 5.[1] S slike je očitno, da je razrez dober, če je kvadratova stranica a večja od polovice daljše izmed pravokotnikovih stranic. Ta pogoj je vedno izpolnjen, saj je $a = \sqrt{xy} > \sqrt{4x^2} = 2x$.

[1] Dolžino kvadratove stranice $a = \sqrt{xy}$ lahko natančno konstruiramo s šestilom in ravnilom iz pravokotnikovih stranic x in y z uporabo višinskega ali Evklidovega izreka v pravokotnem trikotniku.



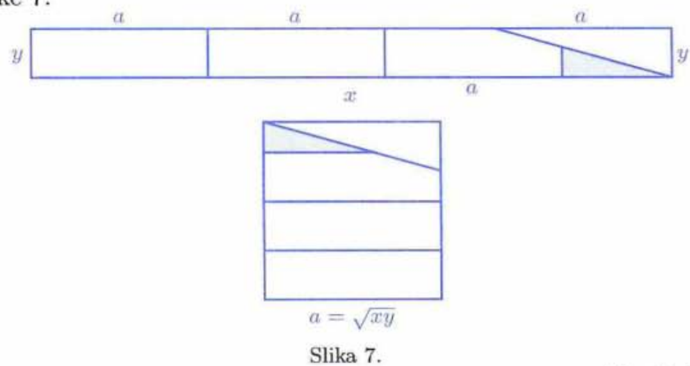
Slika 5.

Seveda lahko rešimo nalogo tudi z razrezom na več kosov. Slika 6 prikazuje dve različni pretvorbi pravokotnika 5×2 v kvadrat $\sqrt{10} \times \sqrt{10}$ z razrezom na štiri kose.



Slika 6.

Naloge za $\frac{x}{y} > 4$ z razrezom pravokotnika le na tri kose ne moremo rešiti. Potrebnih je več kosov. Odvisnost njihovega števila od razmerja dolžin pravokotnikovih stranic lahko ugotovite s pomočjo slike 7.



Slika 7.

Marija Vencelj