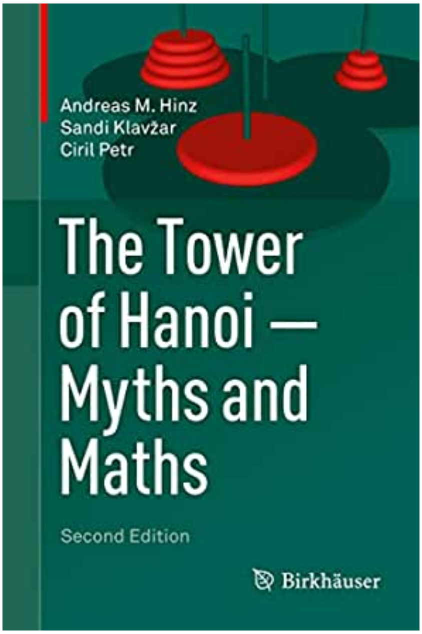
NOVE KNJIGE

A. M. Hinz, S. Klavžar in C. Petr, The Tower of Hanoi – Myths and Maths, With a foreword by Ian Stewart, 2nd edition, Birkhäuser, Cham, 2018, 458 strani.



Hanojski stolp

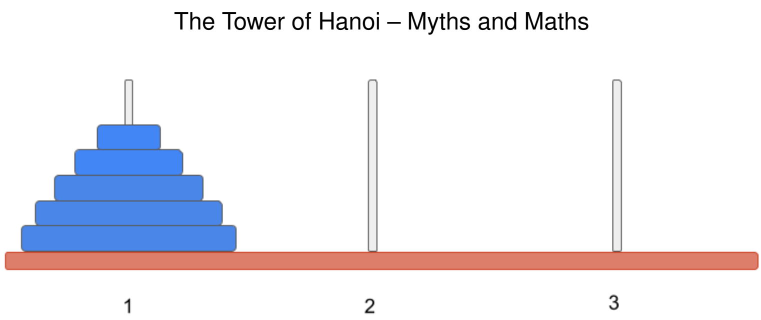
Problem Hanojskega stolpa je mitološko obarvana igra, dobro poznana tako ljubiteljem razvedrilne matematike kot študentom matematike in računalniškega programiranja. Navidez preprosta uganka z elegantno rešitvijo skriva več variacij in posplošitev, katerih analiza presega lahkotno igranje in razkrije zanimive matematične strukture in povezave. Dovolj, da so avtorji Andreas M. Hinz, Sandi Klavžar, Uroš Milutinović[1] in Ciril Petr izdali knjigo »The Tower of Hanoi – Myths and Maths« o matematičnih izzivih, rešitvah in odprtih problemih te igre ter jo obarvali z zanimivimi miti in zgodovinskim ozadjem. Ob nedavnem izidu druge izdaje knjige bralcem predstavimo nekaj zanimivih obravnavanih problemov.

V klasični igri Hanojski stolp imamo tri palice in $n \in \mathbb{N}$ diskov, razvrščenih po velikosti na eni izmed palic, kot lahko vidimo na sliki 1. Cilj je premakniti vse diske na eno izmed preostalih palic z upoštevanjem božanskih pravil: vrhnji disk lahko premaknemo na drugo palico le, če ne položimo večjega diska na manjšega.

Ena izmed rešitev zgornjega problema je klasičen primer rekurzije, neštetokrat uporabljen za predstavitev moči rekurzivnega programiranja. Če želimo premakniti $n > 1$ diskov s prve palice na drugo, najprej premaknemo $n-1$ diskov s prve na tretjo (ob upoštevanju pravil), nato premaknemo največji disk na drugo palico ter zaključimo s premikom $n-1$ diskov s tretje na drugo palico. Tak algoritem lahko implementiramo v nekaj vrsticah kode in nam vrne rešitev z $2^n - 1$ potezami, kar je optimalna rešitev.

Vendar naj nas enostavnost rešitve in formulacije problema ne zavede, saj ga že majhne spremembe lahko zelo otežijo. Imenujmo postavitev diskov

[1] Sodeloval samo pri prvi izdaji.



Slika 1. Začetna postavitev, popolno stanje.

na tri palice, v kateri ni noben disk položen na manjšega, *regularno stanje*. Če so vsi diski na eni palici, stanju rečemo, da je *popolno*. Takoj smo soočeni z izzivom, kako (optimalno) preiti iz poljubnega regularnega stanja v popolno stanje. Lahko bi želeli premakniti diske iz izbranega stanja[2] v poljubno regularno stanje. Kaj če je palic več kot tri? Kaj se zgodi, če naključno prehajamo med stanji? Problemi, povezani s hanojskimi stolpi, so v zadnjih desetletjih navdahnili veliko matematičnih znanstvenih prispevkov, ki igro povežejo s teorijo grafov, razvojem računalniških algoritmov, teorijo števil in drugimi znanstvenimi področji. Avtorji »The Tower of Hanoi – Myths and Maths« so zbrali zanimive in pomembne prispevke v knjigo, ki je primerna tako za ljubitelja razvedrilne matematike kot tudi za raziskovalca, ki želi spoznati področje. Vsebuje tako uvod v vse potrebno znanje za matematično analizo problema, dokaze rezultatov, kot tudi vaje za utrjevanje in razmislek o prebranem.

V nadaljevanju si oglejmo nekaj zanimivih smeri raziskovanja hanojskih stolpov v upanju, da bralca navdahnemo k branju predstavljene knjige.

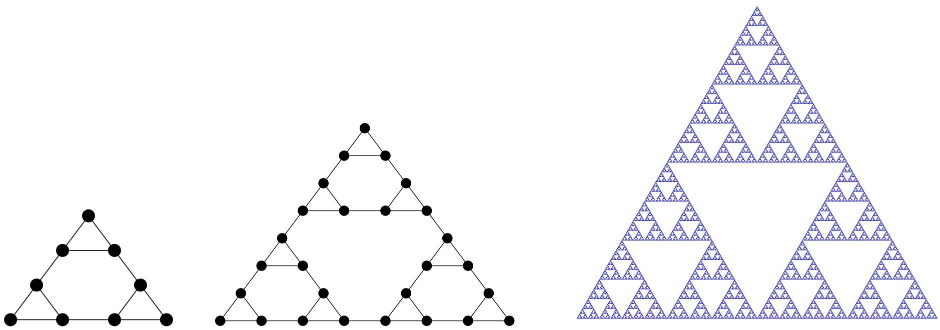
Hanojski grafi, trikotnik Sierpińskega in $\frac{466}{885}$

Vsako regularno stanje lahko predstavimo s preprostim kodnim zapisom. Naj bo T množica palic: v igri s tremi palicami lahko torej označimo $T = \{1, 2, 3\}$. Vsako regularno stanje lahko opišemo tako, da za vsakega izmed n diskov povemo, na katero palico je položen. Ker so diski na vsaki palici v regularnih stanjih urejeni po velikosti, nam tak opis enolično določi stanje. Torej lahko regularna stanja predstavimo z elementi iz $T^n = T \times \cdots \times T$. Ker poljuben element T^n kodira neko regularno stanje, vidimo, da lahko T^n enačimo z množico vseh regularnih stanj in da je takih stanj natanko 3^n.

Dodajmo še relacije med regularnimi stanji in ustvarimo graf. *Hanojski*

[2]Definicija dovoljenih premikov nam celo dovoljuje začeti v stanjih, ki niso regularna.

graf H_3^n je graf, katerega vozlišča so regularna stanja, dve stanji pa sta povezani, če lahko z dovoljenim premikom preidemo iz enega v drugo. Kot lahko vidimo na sliki 2, dobimo grafe zanimivih oblik. Z grafa lahko opazimo rekurzivno strukturo hanojskih stolpov: H_3^n je sestavljen iz treh H_3^{n-1}, ter treh povezav med njimi. Slika H_3^n, ko n povečujemo, postaja vedno bolj podobna trikotniku Sierpińskega, fraktalni množici v ravnini. Pogled na igro Hanojski stolp kot gibanje po grafu H_3^n nam da nov vpogled, hkrati pa odpre nova vprašanja, ki se pogosto pojavljajo v teoriji grafov: vprašanja o simetrijah, metričnih lastnostih, invariantah itd.



(a) H_3^2 (b) H_3^3 (c) Trikotnik Sierpińskega

Slika 2. Hanojski grafi in trikotnik Sierpińskega.

Omenimo vprašanje, katerega odgovor je presenetljiv, dokaz pa žal presega ta prispevek. Če imamo graf H_3^n za n dovolj velik, bo tak graf imel 3^n vozlišč in nekateri pari vozlišč bodo precej oddaljeni med seboj. Na največji razdalji $2^n - 1$ bosta poljubni dve popolni stanji (na sliki 2 so to vozlišča, ki ustrezajo ogliščem zunanjega trikotnika). Večji kot bo n, večja bo tudi povprečna razdalja med vozlišči, vendar v kakšnem razmerju sta povprečna in največja razdalja v H_3^n? Izkaže se, da to razmerje konvergira k nenavadnemu številu $\frac{466}{885}$, ko n povečujemo. Rezultat implicira, da je tudi v trikotniku Sierpińskega z zunanjo stranico dolžine 1 povprečna razdalja med točkami $\frac{466}{885}$. To presenetljivo racionalno število je bilo počaščeno z izborom med *neverjetna števila* [2].

Frame-Stewartova domneva in druge variacije

Nepričakovano težek zasuk osnovnega problema igre Hanojski stolp, tj. prehoda iz popolnega stanja v drugo popolno stanje s čim manj koraki, se zgodi, če dodamo še četrto palico. Nova palica, imenovana tudi hudičeva palica, nalogo prehajanja med popolnimi stanji seveda olajša, saj jo lahko preprosto ignoriramo. Vendar taka rešitev ni več optimalna, saj lahko hudičevo palico uporabimo za rešitev z manj premiki.

Imejmo $n \in \mathbb{N}$ diskov položenih na prvo palico, ki jih želimo premakniti na drugo. Strategija je naslednja: najprej m diskov, kjer je $0 \leq m < n$ premaknemo na hudičevo palico s čim manj premiki, nato preostalih $n-m$ diskov premaknemo na drugo palico brez uporabe hudičeve palice in zaključimo s premikom m diskov iz hudičeve palice na drugo palico. Strategija motivira definicijo *Frame-Stewartovih števil*:

Definicija 1. *Frame-Stewartova števila* FS_4^n, za vsak $n \in \mathbb{N}_0$, so definirana rekurzivno

$$\begin{aligned} \mathrm{FS}_4^0 &= 0 \\ \mathrm{FS}_4^n &= \min\{2\mathrm{FS}_4^m + \mathrm{FS}_3^{n-m} \mid 0 \leq m < n\}, \end{aligned}$$

kjer je $\mathrm{FS}_3^n = 2^n - 1$ optimalno število premikov v igri Hanojski stolp s tremi palicami in n diski.

Po zgoraj opisani strategiji velja, da lahko v igri Hanojski stolp s štirimi palicami preidemo s FS_4^n premiki iz popolnega stanja v poljubno drugo popolno stanje. *Frame-Stewartova domneva*, matematičen problem, ki je čakal na rešitev celih 73 let, trdi, da je taka strategija optimalna. Po številnih poskusih reševanja ter preverjanjih z računalnikih za vrednost vse do $n \leq 30$ je Thierry Bousch uspel leta 2014 dokazati [1], da domneva drži. Knjiga »The Tower of Hanoi – Myths and Maths« med drugim vsebuje prvi angleški opis njegove rešitve[3].

O še drugih posplošitvah igre Hanojski stolp, grafih Sierpińskega, Stockmeyerjevi domnevi in podobnih problemih lahko bralec več prebere v predstavljeni knjigi.

LITERATURA

[1] T. Bousch, *La quatrième tour de Hanoï*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **21** (2014), 895–912.

[2] I. Stewart, *Professor Stewart's incredible numbers*, Basic Books, New York, 2015.

Tilen Marc

[3] Bouscheva rešitev je bila objavljena v francoščini in je zato manj dosegljiva povprečnemu bralcu.