

Logaritemska skala

Daniela Beroš, Milena Čulav Markičević, Zlatko Lobor, Ivana Martinić
V. gimnazija, Zagreb

Ena izmed dejavnosti učiteljev, članov mednarodnega projekta TIME (Teachers' Inquiry in Mathematics Education), je bila načrtovati učno uro, omogočiti spremljavo izvedbe, opraviti njeno analizo in v izmenjavi mnenj učiteljev, ki so spremljali izvedbo, iskati možnosti za izboljšave. Izbrali smo vsebino *Logaritemska skala*, kot uvod v vsebine o logaritemski funkciji, obravnavane v tretjem letniku po eksponentni funkciji.

Več o projektu TIME najdete na spletni strani projekta: <https://time-project.eu/>.

Motivacija in cilji

Po potresu z magnitudo 5,5 po Richterjevi lestvici, ki je 22. marca 2020 stresel Zagreb, smo prepoznali problem nerazumevanja logaritemske skale. Glavnemu potresnemu sunku so sledili šibkejši, ki so imeli različne jakosti. Prebivalce so enako vznemirili potresni sunki z magnitudo 4 in tisti z magnitudo 3. Izkazalo se je nerazumevanje, da potres z magnitudo manjšo za ena, pomeni potres, ki je približno 32-krat šibkejši, medtem ko je potres z magnitudo manjšo za dva približno 1000-krat šibkejši in podobno naprej. Zvezo ponazarja obrazec za magnitudo potresa M po Richterju: $M = \frac{2}{3}(\log E - 4,8)$, kjer je E količina sproščene energije pri potresu. Opazimo, da je zveza logaritemska in ne linearna, kakršnih smo vajeni.

Rihterjeva lestvica v slovenščini

Moč potresa in njegovi učinki:

Manj kot 3,5 – v glavnem se potresa ne čuti, zaznajo pa ga instrumenti;

- 3,5–3,9 – rahlo nihanje, ki ga zaznajo le občutljivi ljudje;
- 4,0–4,4 – tresenje, kot ga povzroči tovornjak;
- 4,5–4,9 – tresenje povzroča nihanje višjih predmetov;
- 5,0–5,4 – drevesa šelestijo, zazvonijo cerkveni zvonovi;
- 5,5–5,9 – pokanje sten, odpada omet;
- 6,0–6,4 – promet obstane, podirajo se dimniki;
- 6,5–6,9 – slabo grajene stavbe se podrejo;
- 7,0–7,4 – zemlja razpoka, podre se večina stavb, plinovodi, električni vodi in vodovodi so poškodovani;
- 7,5–7,9 – stoji le vsaka 10. hiša, plinovodi, električni vodi in vodovodi so skoraj popolnoma uničeni;
- Več kot 8 – popolno uničenje, tla so vzvalovana in razpokana.

Vir: https://sl.wikipedia.org/wiki/Richterjeva_potresna_lestvica

1	mikro	ljudi ga ne ožije, bilješe ga samo seizmografi
2	manji	ljudi ga mogu ožiete (one iznad 3,0 najčešće ožiete); rijetko uzrokuje šteto
3	lagani	ljudi u zatvorenom prostoru ožiete trešaju i čuju zvukove pomicanja pokućstva, ljudi na otvorenom ga ne ožiete, mala je vjerojatnost nastanka štete
4	umjereni	svi ljudi ga ožiete, a uzrokuje šteto na slabijim građevinama
5	jaki	ljudi ga ožiete i na udaljenostima od nekoliko stotina kilometara od epicentra, uzrokuje manje štete na kvalitetnim građevinama
6	veliki	nanosi šteto većini građevina na udaljenosti 250 km od epicentra
7	razarajući	razara većinu građevina udaljenih 1000 km od epicentra, mijenja se izgled Zemljine površine
8	epski	nije nikad zabilježen
9		
10		

Slika 1: Magnitude potresa po Richterjevi lestvici. (vir: <https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=70926>, ozadje slike: tear by Guilhem from the Noun Project)

Drugo aktualno področje je bila pandemija covid-19. Mediji so prikazovali raznovrstne podatke, pri katerih so bile uporabljene različne lestvice, kar lahko zavaja, če grafov ne beremo pozorno in natančno. Graf eksponentne rasti, za katerega uporabimo linearno skalo, ne bo deloval tako zastrašujoče, če za prikaz uporabimo logaritemsko lestvico. Zaradi tega smo pri dijakih želeli ozvesti, kako pomembno je, da pred oblikovanjem zaključkov namenimo pozornost enotam na koordinatnih oseh. Eksponentna in logaritemska funkcija sta v kurikulumu navedeni v tretjem letniku srednje šole, zato smo se odločili, da sistem linearnega razmišljanja v nelinearnem svetu vnesemo v te vsebine in s tem razširimo dosedanje vlogo logaritemske funkcije kot inverzne k eksponentni funkciji. Cilj učne ure je *Uporaba logaritemske lestvice*, z razširjenimi cilji: *Razumevanje različnih grafičnih prikazov istih podatkov, Izbiira ustreznega grafičnega prikaza in Reševanje problemov iz vsakdanjega življenja.*

Načrtovali smo samostojno dejavnost dijakov. S tega vidika nas je kot »učitelje raziskovalce lastne poučevalne prakse« zanimalo, ali nam bo s premišljeno izbiro gradiv uspelo dijake pripeljati do samostojnega zaključka, da so potrebne tudi nelinearne lestvice in kako pomembno je pozorno branje grafov.

Potek dejavnosti

Predviden čas dejavnosti je bil 80–90 minut. Razred smo razdelili v osem skupin s tremi člani v vsaki skupini (želeno stanje). Vsaka skupina je prejela preglednico s podatki (dve skupini

imata enake podatke) in prazen list velikosti A3. Dijaki so imeli nalogo prikazati podatke v koordinatnem sistemu. Da bi se dijaki seznanili z različnimi primeri uporabe logaritemske skale oziroma logaritma, o katerem se bodo učili v nadaljevanju, smo izbrali štiri različna področja.

V preglednici so podatki o skupnem številu okuženih v Italiji v času karantene pomladi 2020.

Datum (2020)	Skupno število okuženih
17. 2.	3
24. 2.	229
2. 3.	2038
9. 3.	9179
16. 3.	27997
23. 3.	63941
30. 3.	101723
9. 4.	143612
16. 4.	168932
23. 4.	189957

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

V preglednici so podatki o koncentraciji vodikovih ionov med fermentacijo kefirja, dodanega v mleko.

Čas (v urah)	Koncentracija vodikovih ionov (mol/L)
0	0.000000095
4	0.000000240
8	0.000000437
12	0.000000912
16	0.000001995
20	0.000015488
24	0.000028840
28	0.000114815
32	0.000354813
36	0.001584893

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

V preglednici so podatki o zvočnem tlaku v 20 minutah koncerta v juliju 2020.

Čas meritve (9.7.2020)	Zvočni tlak (μPa)
22:17	2907.568771
22:19	493776.021
22:21	275124.9621
22:23	6645.535704
22:25	911024.3723
22:27	643472.5065
22:29	101281.4699
22:31	1075300.866
22:33	1782501.876
22:35	23228.97228

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

V preglednici so podatki o količini sproščene energije v potresih v Zagrebu od 22. 3. 2020 do 26. 3. 2020.

Zaporedna številka potresa	Sproščena energija (J)
1.	7943300000000
2.	1995300000000
3.	22387002541
4.	5623400000
5.	1000000000
6.	1412500000
7.	1995300000
8.	22387591200
9.	3981100000
10.	31623000

Podatke prikažite v pravokotnem koordinatnem sistemu.

Slika 2: Tabele s podatki.

Ker smo želeli uporabiti dejanske podatke, smo uporabili naslednje vire:

- covid: spletna stran Italy Coronavirus: <https://www.worldometers.info/coronavirus/country/italy/>;
- kefir: članek Observation of Lactic Acid Bacteria and Yeast Populations During Fermentation and Cold Storage in Cow's, Ewe's and Goat's Milk Kefirs: https://www.researchgate.net/publication/289069040_Observation_of_Lactic_Acid_Bacteria_and_Yeast_Populations_During_Fermentation_and_Cold_Storage_in_Cow's_Ewe's_and_Goat's_Milk_Kefirs;
- hrup: Zavod za istraživanje i razvoj sigurnosti: <https://zag.zirs.hr/>;
- potresi: spletna stran LastQuake: <https://m.emsc.eu/>.

Pričakovali smo, da bodo dijaki za izdelavo grafa potrebovali več časa, saj bodo za izbiro ustreznega prikaza usklajevali mnenja. Zato smo temu delu namenili 30 minut. Predstavniki skupine je nato ostalim predstavil delo skupine, pri tem je navedel vrsto podatkov, ki so jih imeli na voljo, navedel probleme, na katere so naleteli, in opisal, kako so te probleme rešili. Učitelj ni komentiral opravljenega dela posamezne skupine, da ne bi vplival na predstavitev nadaljnjih skupin in na način razmišljanja v nadaljnjih, drugi fazi dela. Narisani grafi, ki so jih izdelale skupine, so bili izobešeni, da so dijaki lahko opazovali različne prikaze istih podatkov.

V drugi fazi dela je vsaka skupina prejela dva grafična prikaza podatkov z istega področja kakor v prvi fazi (eden izmed prikazov je imel na ordinatni osi linearno in drugi logaritemsko skalo) ter tri vprašanja, s pomočjo katerih bi se dijaki odločili, kateri prikaz je primernejši. Dijaki so prejeli navodilo, da pripravijo kratko predstavitev, v kateri podajo odgovore na vprašanja:

Kaj lahko iz danih grafov zaključite? Katere zaključke lažje oblikujete iz levega in katere iz desnega grafa? Kateri graf vam nudi ustreznejše informacije?

Grafi so bili vstavljeni tudi v pripravljeno PowerPoint predstavitev, da bi dijaki nazorneje predstavili vsebino in argumentirali svoje zaključke. Pomembno je, da so vsi dijaki videli vse grafe, in tako aktivno sodelovali v razpravi.

Zaključna razprava je potekala plenarno. Pričakovali smo, da bodo dijaki uvideli potrebo po logaritemski lestvici in da bodo ugotovili, da sta koristna oba grafa, uporaba posameznega je odvisna od konteksta. Pomembno je bilo, da je učitelj dijake pozorno poslušal, slišal njihove komentarje in jim sledil. Učitelj je ponovil najboljše zaključke dijakov, po potrebi jih je dopolnil. Dejavnost smo zaključili s formulami za »stopnjo kislosti«, »raven hrupa« in »magnitudo potresa« (Slika 3), prikazanih na predstavitvi ob izjavi *Razmišljamo linearno, vendar naša čutila delujejo na logaritemski skali*.

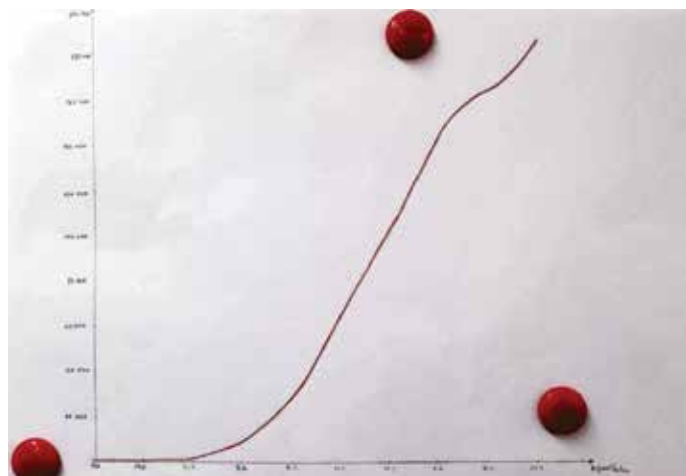
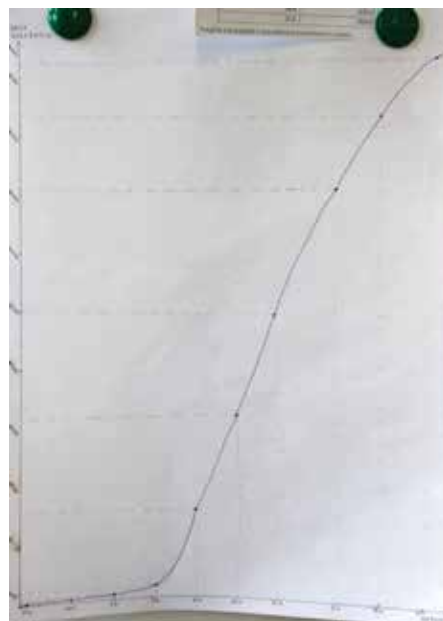
$$\begin{aligned} \text{pH} &= -\log[H^+] \\ \text{dB} &= 20 \log \frac{P}{P_0} \\ M &= \frac{2}{3} (\log E - 4.8) \end{aligned}$$

Slika 3: Primeri logaritemskih zvez.

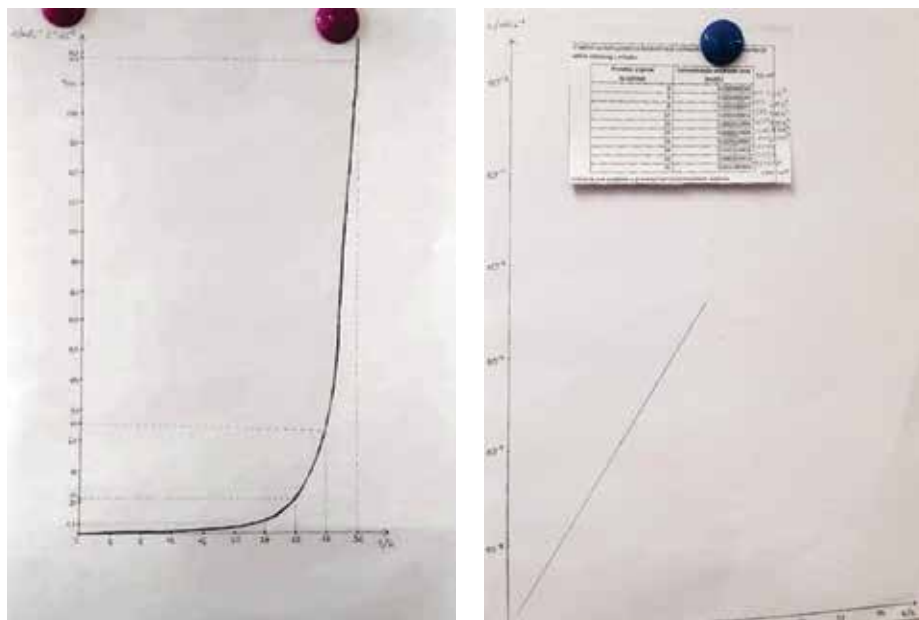
Dijaki so bili tako motivirani, da se naučijo vse o oznaki *log*, ki se pojavlja v obrazcih. Vedeli so, da so koristni logaritmi, kar je spodbujalo njihovo radovednost. Skupine, ki so samostojno odkrile logaritemske skale, so bile ponosne na svoj uspeh.

Spremljanje učne ure

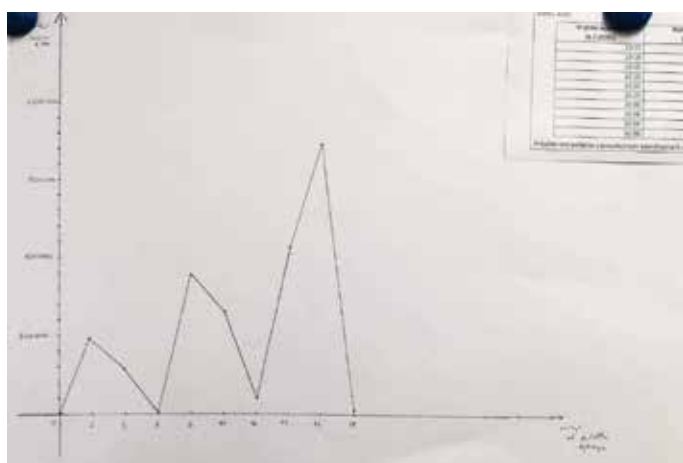
V začetku prve faze so dijaki v skupinah risali koordinatne sisteme po običajni poti – papir so postavili v vodoravno lego – izhodišče so postavili v središče lista, osi so poimenovali *x* in *y*, na oseh so izbrali enaki enoti, merilo je bilo linearno. Ob pogledu na podatke so naleteli na problem. Ugotovili so, da so vse vrednosti pozitivne in potrebujejo le prvi kvadrant. Izhodišče so premaknili v levi spodnji kot lista. Nekatere skupine so list obrnile v navpično lego. Problem, ki so mu namenili največ razmisleka, je razporeditev vseh podatkov vzdolž *y*-osi (odvisno, ali so podatki zelo majhni, tj. kefir, ali zelo veliki, tj. moč potresa), nekateri so oblikovali oznake osi s potencami števila 10.



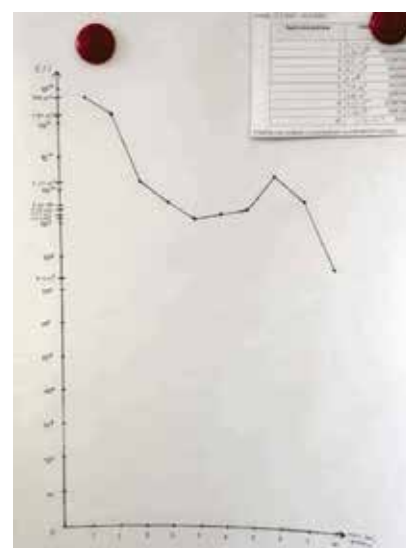
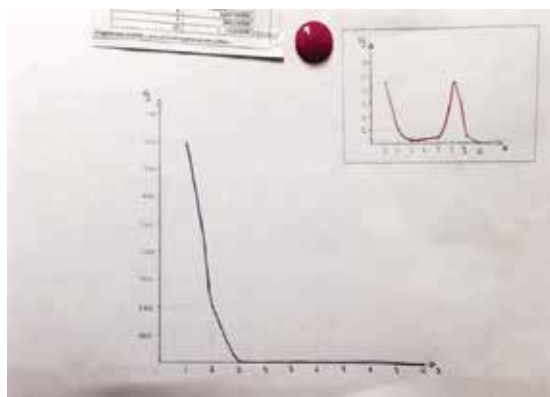
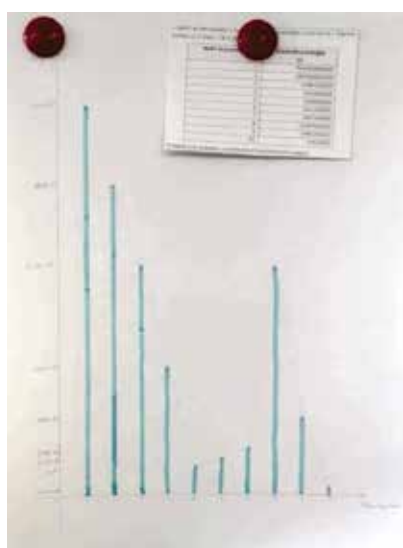
Slika 4: Primera izdelkov dijakov – covid.



Slika 5: Primera izdelkov dijakov – kefir. Ena izmed skupin je izpostavila, da je vrednost 150 cm nad listom.

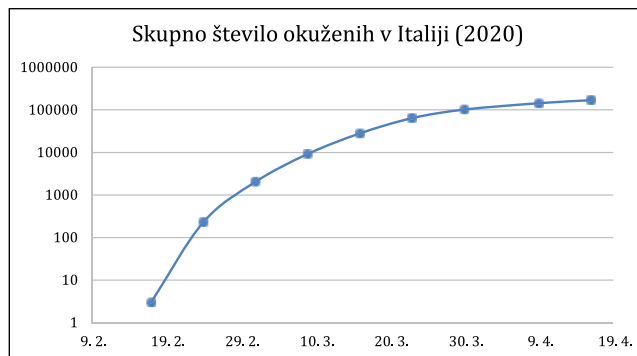
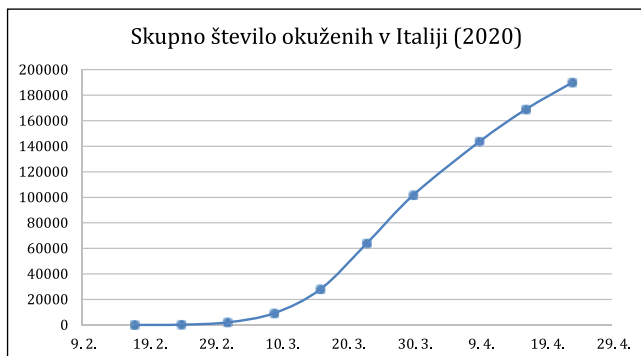


Slika 6: Primera izdelkov dijakov – raven hrupa.



Slika 7: Primeri izdelkov dijakov – potres. Nekatere skupine so ugotovile in se odločile, da graf potresa ni zvezen temveč diskreten. Ena izmed skupin je del grafa povečala.

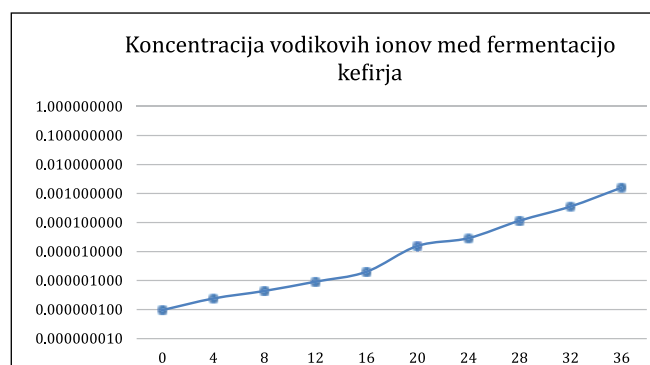
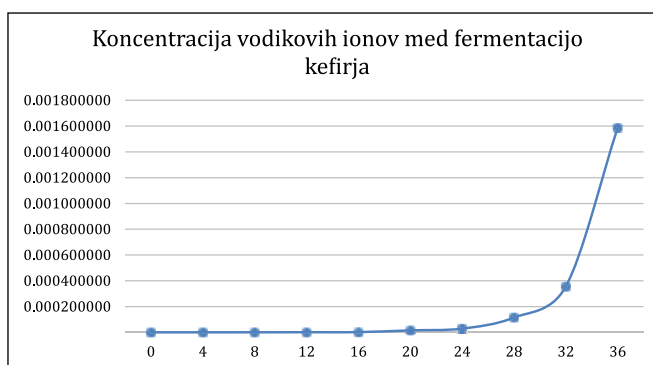
COVID-19 V ITALIJI



V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. Ocenite število okuženih na dan 30. 4. 2020.
2. Na katerem časovnem intervalu je sprememba števila bolnikov največja?
3. Kdaj se rast števila bolnikov upočasni?

FERMENTACIJA KEFIRJA

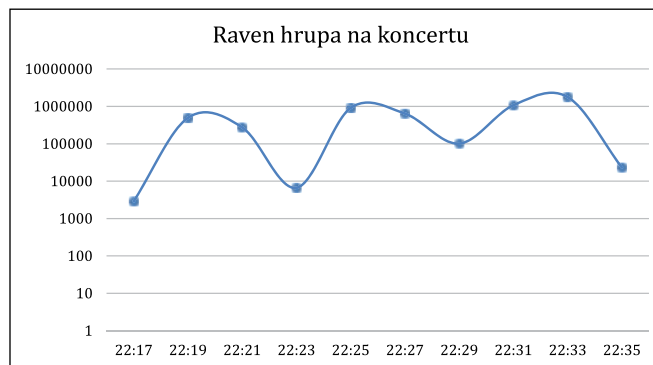
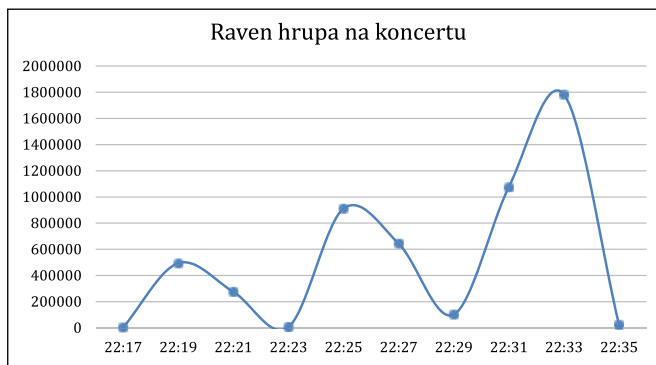


V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. Ocenite koncentracijo vodikovih ionov v 40. uri.
2. Na katerem časovnem intervalu je sprememba koncentracije vodikovih ionov največja?
3. Koncentracije vodikovih ionov nad 0,003 preprečujejo fermentacijo, kefirne grudice se lahko razgradijo in se pojavijo druge nezaželene bakterije. Koliko časa preteče od začetka fermentacije kefirja do možne zastrupitve?



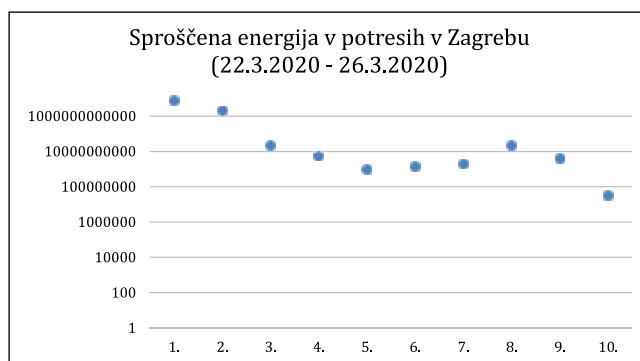
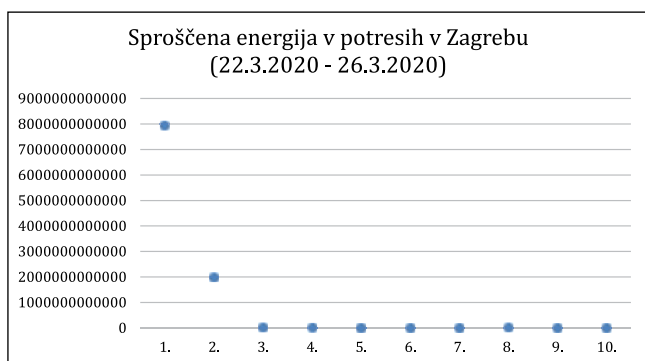
HRUP NA KONCERTU



V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. Raven normalnega pogovora je približno $6500 \mu\text{Pa}$. Ali lahko med koncertom v določenih časovnih intervalih poteka normalen pogovor?
2. Na katerem časovnem intervalu je sprememba ravni hrupa največja?
3. Dolgotrajna izpostavljenost hrupu nad $200000 \mu\text{Pa}$ lahko povzroči poškodbe sluha. Kako dolgo so bili obiskovalci izpostavljeni taki ravni hrupa?

POTRESI V ZAGREBU



V skupini odgovorite na naslednja vprašanja.

1. V katerem potresnem sunku se je sprostil več energije: v 5. ali 8.?
2. Katera zaporedna potresna sunka se najbolj razlikujeta v količini sproščene energije?
3. Večina ljudi bo zaznala potres, pri katerem je količina sproščene energije večja od 63095730000 J . Katere od potresnih sunkov je zaznala večina prebivalcev?

V drugi fazi so dijaki razpravljali o vprašanjih na listih. Pomembni zaključki po predstavitvi odgovorov skupin so bili:

- Oba grafa sta uporabna, odvisno, katere informacije želimo.
- Linearna skala nam daje boljšo sliko podatkov, vendar je težko vnesti vse podatke.
- Logaritemska skala reši problem vnašanja podatkov različnih velikosti v isti graf, vendar lahko zavaja.
- Na linearni skali vidimo absolutno spremembo, na logaritemski vidimo hitrost spreminjanja podatkov.
- Zelo moramo paziti na zapis ob oseh.

Dejavnost je bila izvedena v treh različnih oddelkih. Po vsaki izvedbi smo zbrali povratne informacije dijakov. Navajamo nekatere:

- *Naučil sem se, da moram več pozornosti nameniti osem v grafu. Prav tako sem se naučil, da je to pravzaprav uporabno v življenju.*
- *Presenetilo me je, kako se razlikujejo grafi, ki imajo različne razporeditve vrednosti na ordinatni si.*
- *Presenetilo me je, kako lahko manipuliramo s podatki, če jih grafično prikazemo.*

- *Naučil sem se razlike med logaritemsko in linearno skalo, o »naravnosti« prve in o koristnosti druge.*
- *Naučil sem se, da lahko podatke prikazemo na različne načine z uporabo več skal in grafov in da ima vsaka metoda svoje prednosti v branju potrebnih informacij.*
- *Naučil sem se bolje risati in brati grafe, paziti na zapise ob oseh, ne gledati le številke, prvič sem videl grafe z logaritemsko skalo in jih primerjal z normalnimi. Zabaval sem se ...*

Ob branju komentarjev dijakov smo vedeli, da smo dosegli zastavljeni cilj dejavnosti.

Poudarimo, da dijaki potrebujejo najmanj 30 minut za prvo fazo, 10 do 15 minut zadostuje za drugo fazo. Zagotovo je treba omogočiti dovolj časa za predstavitve, razpravo in formulacije, ki jih oblikuje učitelj. Učitelj morala poskrbeti, da dijaki predstavijo le, kar se od njih zahteva in ne celotnega dela. Pomembno je spodbujati dijake, da oblikujejo individualno povratno informacijo, tako razmišljajo in ubesedijo, kar so se naučili. Izražanje z besedami poveča pomnjenje. Za ustrezno grafično prikazovanje dijaki potrebujejo ustrezna pisala in veliko ravnilo.

Razprava in zaključki

V timu smo prvič skupaj zasnovali dejavnost, odločili smo se za vzvraten pristop – nismo začeli z vsebino, ki jo moramo podati dijakom, temveč smo izhajali iz poslanstva šole. Z upoštevanjem splošnih ciljev, ki jih želimo vpletati v pouku matematike in z izbiro tem, ki so dijakom in/ali nam izziv, smo izbrali vsebino. Izvedli smo mnogo srečanj članov tima, veliko smo raziskovali izbrano področje in kar nekajkrat spremenili koncept dejavnosti.

Upali smo, da smo gradivo pripravili dovolj dobro in da bo delo učitelja v času izvedbe delavnice minimalno. Pred prvo izvedbo nismo vedeli, kaj pričakovati, kar je bilo vznemirljivo. Zdi se, da smo dobro izbrali cilj dejavnosti.

Dejavnost je bila zelo uspešna, dijaki so uspeli odkriti logaritemsko skalo, opaziti pomen pozornega branja grafov in razumeti uporabnost logaritma – matematika je s tem postala uporabna. V zaključni fazi je učitelj moral le reči »Da, prav imate,« saj so dijaki povedali vse, kar je bilo pričakovano.

Vprašanje, ali je dejavnost dijakom pomagala, da bolje razumejo pojem logaritma, ostaja odprto. Raziskujemo naprej.

Delo v projektu je privedlo do več razprav o matematiki, o njenih in naših ciljih, ciljih dijakov in ciljih učiteljev. S skupnim delom smo dosegli, da se uspeh množi, neuspeh pa deli.

Viri

<https://time-project.eu/> (marec 2022)

<https://enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=70926> (marec 2022)

<https://www.worldometers.info/coronavirus/country/italy/> (marec 2022)

https://www.researchgate.net/publication/289069040_Observation_of_Lactic_Acid_Bacteria_and_Yeast_Populations_During_Fermentation_and_Cold_Storage_in_Cow's_Ewe's_and_Goat's_Milk_Kefirs (marec 2022)

Zavod za istraživanje i razvoj sigurnosti: <https://zag.zirs.hr/> (marec 2022)

LastQuake: <https://m.emsc.eu/> (marec 2022)