# Močnik,

# Arithmetik

für

Unter-Gymnasien.

I. Abtheilung.

Preis gebunden 90 kr.

Wien.
Carl Gerold's Sohn.

90-

f

# Lehrbuch
der
# Arithmetik
für
## Unter-Gymnasien.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

**Erste Abtheilung** (für die I. und II. Classe).

Vierunddreißigste umgearbeitete Auflage

bearbeitet von

Dr. W. Pscheidl,

k. k. Professor am Elisabethgymnasium in Wien.

Laut h. Ministerial-Erlass vom 19. Juni 1895, Z. 14.393, zum Unterrichtsgebrauche an Gymnasien mit deutscher Unterrichtssprache allgemein zugelassen.

**Preis geheftet 80 kr.; in Leinwandband 90 kr.**

**Wien.**

Druck und Verlag von Carl Gerold's Sohn.

1895.

# Inhalt.

# I. Rechnen mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.[1])

§. 1.

Um von mehreren Dingen derselben Art anzugeben, wie viele es sind, nimmt man ein solches Ding als Einheit an und untersucht, wie oft diese Einheit in der gegebenen Menge von Dingen derselben Art vorkommt. Der Ausdruck, welcher dies angibt, heißt Zahl.

Eine Zahl, welche nur die Menge der Einheiten, nicht aber die Art derselben ausdrückt, heißt eine unbenannte Zahl; eine Zahl dagegen, welche sowohl die Menge als auch die Art der Einheiten angibt, eine benannte Zahl. Drei ist eine unbenannte, drei Kronen eine benannte Zahl.

Eine benannte Zahl, welche Einheiten einer einzigen Benennung enthält, heißt einnamig, z. B. vier Kronen. Eine benannte Zahl, in welcher Einheiten verschiedener Benennungen, die jedoch zu derselben Art gehören, vorkommen, heißt mehrnamig, z. B. vier Kronen und drei Heller.

Aus gegebenen Zahlen mittels bestimmter Veränderungen andere Zahlen finden, heißt rechnen.

Die gesuchte Zahl, zu der man durch die Rechnung gelangt, wird das Ergebnis oder Resultat der Rechnung genannt.

Die Lehre von den Zahlen und deren Veränderungen heißt Arithmetik.

## 1. Zahlenbildung.

### Dekadische ganze Zahlen.

§. 2.

Jede Zahlenbildung beginnt mit dem Setzen der Einheit und geht, da die Einheit immer wieder gesetzt und zu der bereits entstandenen

[1]) Um den gleichzeitigen Gebrauch der vorhergehenden Auflage mit dieser zu ermöglichen, wurden die Nummern der neu hinzugekommenen und der geänderten Beispiele mit je einem * bezeichnet.

Menge von Einheiten hinzugedacht werden kann, ins Unendliche fort. Die Zahlen so bilden, wie sie der Reihe nach durch fortgesetztes Hinzufügen der Einheit hervorgehen, heißt zählen. Wir zählen: eins, zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun u. s. w. und drücken diese Zahlen schriftlich durch folgende Zeichen (Ziffern) aus: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 u. s. w. Die Reihe dieser Zahlen nennt man die natürliche Zahlenreihe.

Die durch das wiederholte Setzen der Einheit entstandenen Zahlen werden ganze Zahlen genannt.

Alle ganzen Zahlen, wie groß sie auch sein mögen, lassen sich mit einigen wenigen Zahlwörtern genau und bestimmt benennen, und mit noch wenigeren Zahlzeichen schriftlich ausdrücken. Man geht dabei von dem Grundsatze aus, dass eine bestimmte Zahl Einheiten eines Ranges stets wieder als eine Einheit, des nächst höheren Ranges, betrachtet wird und als solche auch einen besonderen Namen erhält. Eine solche Darstellung der Zahlen heißt ein Zahlensystem.

In unserem **dekadischen Zahlensysteme** zählt man, von der Einheit ausgehend, mit den bekannten Zahlwörtern: eins, zwei, .... bis zehn. Zehn ursprüngliche Einheiten, auch Einer genannt, bilden eine neue höhere Einheit, welche ein Zehner heißt; zehn Zehner bilden einen Hunderter, zehn Hunderter einen Tausender, zehn Tausender einen Zehntausender, zehn Zehntausender einen Hunderttausender, zehn Hunderttausender eine Million u. s. w. Jede Zahl ist aus Einern, Zehnern, Hundertern, .... zusammengesetzt, und wird vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viele Einer, Zehner, Hunderter, .... sie enthält.

Mit dem mündlichen Ausdrucke der Zahlen stimmt auch deren schriftliche Darstellung überein. Wir brauchen dazu nur die Ziffern für die ersten neun Zahlen, nämlich 1, 2, .... 9, und das Zeichen 0 (Null), welches anzeigt, dass von einem bestimmten Range keine Einheiten vorhanden sind. Um nun durch die Zusammenstellung dieser zehn Ziffern alle möglichen ganzen Zahlen auszudrücken, nimmt man an, dass jede Ziffer an der ersten Stelle, von der Rechten an gezählt, Einer, und an jeder folgenden Stelle gegen die Linke **zehnmal** so viel bedeutet, als sie an der nächst vorhergehenden Stelle gilt. Hiernach bedeutet jede Ziffer an der zweiten Stelle, von der Rechten an gezählt, so viele Zehner, an der dritten so viele Hunderter, an der vierten so viele Tausender u. s. w., als sie an der ersten Einer ausdrückt.

Das dekadische Zahlensystem, in welchem zehn die Grundzahl bildet, beruhet demnach auf folgenden zwei Gesetzen:

1. Zehn Einheiten eines Ranges bilden immer eine Einheit des nächsthöheren Ranges.

2. Eine Ziffer gilt an jeder Stelle zehnmal so viel, als an der nächsten Stelle gegen die Rechte. (Positionsgesetz.)

Jede Ziffer in einer geschriebenen Zahl hat einen doppelten Wert, den Zifferwert, welcher die Zahl der Einheiten angibt, und den Stellenwert, welcher ihr vermöge der Stelle zukommt und den Rang der Einheiten anzeigt. So bedeutet z. B. in der Zahl 4444 jede vorkommende Ziffer vier, jedoch gilt dieselbe an der ersten Stelle, von der Rechten angefangen, vier Einer, an der zweiten vier Zehner, an der dritten vier Hunderter, an der vierten vier Tausender.

## §. 3.

Die Kenntnis, Zahlen richtig anzuschreiben und die geschriebenen richtig zu lesen, heißt die Numeration.

Die Rangzahlen unseres Zahlensystems lassen sich sehr bequem in Classen zu drei Stellen eintheilen, welche nach der Reihe Einer, Zehner und Hunderter enthalten. Die drei niedrigsten Stellen sind geradezu Einer, Zehner, Hunderter; in der nächstfolgenden Classe kommen Einer, Zehner, Hunderter von Tausendern vor; in der noch weiter folgenden Classe stehen Einer, Zehner, Hunderter von Millionen u. s. w. Durch diese Eintheilung der Zahlen wird die Auffassung und schriftliche Darstellung derselben wesentlich erleichtert.

Der Kürze wegen wollen wir in dem Folgenden die Einer, Zehner, Hunderter, Tausender, Zehntausender, Hunderttausender, Millionen, ... folgeweise durch E, Z, H, T, Zt, Ht, M, ... bezeichnen.

**Aufgaben** für das Lesen und Anschreiben der Zahlen.

1. 200, 735, 364, 285, 511, 749, 180, 690, 906, 101.
2. Fünfhundert, zweihundert acht und dreißig, siebenhundert ein und fünfzig, sechshundert zwanzig, vierhundert und vier.
3. 3000, 9548, 4212, 6336, 2800, 5230, 7508, 1046, 8003.
4. Zweitausend und vierzig, fünftausend siebenhundert vier und neunzig, achttausend und drei, eintausend dreihundert und zehn, dreitausend fünf und zwanzig.
5. 10000, 5700, 36200, 38090, 27026, 80912, 12345; 630427, 938824, 732284, 815500, 493220, 409010.
6. Zu Ende des Jahres 1890 hatte Wien 1355255 Einwohner.
7. Zwölftausend achthundert und zwölf, fünfzigtausend siebenhundert vier und zwanzig, sieben und vierzigtausend dreihundert und fünfzig,

achtzigtausend ein und achtzig, vierhundert sieben tausend zweihundert eilf.

8. Wie viele Zehntausender enthält die Zahl 61735; wie viele Tausender, Hunderter, Zehner, Einer enthält sie?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 61735 = 6 Zt | und | 1 T | 7 H | 3 Z | 5 E | |
| = 61 T | | und | 7 H | 3 Z | 5 E | |
| = 617 H | | | und | 3 Z | 5 E | |
| = 6173 Z | | | | und | 5 E | |
| = 61735 E. | | | | | | |

9. Gib ebenso die Bestandtheile folgender Zahlen an: 6458, 23719, 40821, 325368, 752379.

10. Lies: 3212654, 8900378, 3418509, 9284073, 1050090; 51379486, 20416829, 538191378, 3546790814.

11. Die Sonne ist 1413879mal so groß als unsere Erde.

12. Wenn jemand in einer Secunde eins zählen würde, so brauchte er, um eine Million zu zählen, eilf Tage, dreizehn Stunden, sechs und vierzig Minuten und vierzig Secunden; um eine Billion zu zählen, brauchte er ein und dreißigtausend siebenhundert und neun Jahre, zweihundert neun und achtzig Tage, eine Stunde, sechs und vierzig Minuten und vierzig Secunden.

## Decimalzahlen.

### §. 4.

Wenn man in einer nach dem dekadischen Gesetze geschriebenen ganzen Zahl von der Linken gegen die Rechte zurückschreitet, so gilt jede folgende Ziffer gegen die Rechte nur den zehnten Theil von dem, was sie an der vorhergehenden Stelle gilt, und man kommt zuletzt auf die Einer herab. Es kann aber die Zahlenreihe nach demselben Gesetze auch unter die Einer herab fortgesetzt werden, man kann einen Einer in zehn gleiche Theile theilen, und einen solchen Theil, ein Zehntel, als eine noch niedrigere Einheit betrachten, ferner den zehnten Theil von einem Zehntel, d. i. ein Hundertel, als die Einheit eines noch niedrigeren Ranges ansehen, und so durch fortgesetzte Theilung zu beliebig kleinen Zahleneinheiten hinabsteigen.

Übereinstimmend damit kann man nach dem dekadischen Gesetze auch die Ziffernreihe von den Einern noch weiter rechts fortsetzen, so dass eine Ziffer an der ersten Stelle nach den Einern Zehntel, an der zweiten Hundertel, an der dritten Tausendtel u. s. w. bedeutet. Bei dieser Fortsetzung der Ziffernreihe braucht man nur durch ein Zeichen sichtbar zu machen, wo die Einer aufhören; dieses Zeichen ist ein Punkt, welcher nach den Einern rechts oben gesetzt wird und Decimalpunkt heißt. Die Ziffern links vom Decimalpunkte sind Ganze, die Ziffern rechts vom Decimalpunkte heißen Decimalen. Es bedeutet demnach 444444·44444 Folgendes:

Ganze: Decimalen:

| 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 · | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hunderttausender | Zehntausender | Tausender | Hunderter | Zehner | Einer | Zehntel | Hundertel | Tausendtel | Zehntausendtel | Hunderttausendtel |

Eine Zahl, welche Decimalen enthält, heißt eine Decimalzahl.

Die Zehntel, Hundertel, ... heißen auch niedrigere Rangzahlen zum Unterschiede von den Zehnern, Hundertern, ..., welche höhere Rangzahlen heißen.

Der Kürze wegen werden wir in dem Folgenden die Zehntel, Hundertel, Tausendtel, Zehntausendtel, .. durch z, h, t, zt, .. bezeichnen.

## §. 5.

Eine Decimalzahl wird gelesen, indem man zuerst die Ganzen, und dann entweder alle Decimalen zusammen in Einheiten der niedrigsten Decimalstelle oder jede einzelne Decimale mit oder ohne Angabe ihres Stellenwertes ausspricht. Z. B. 47·385 wird gelesen:

a) 47 Ganze, 385 t; oder
b) 47 Ganze, 3 z, 8 h, 5 t; oder aber
c) 47 Ganze mit den Decimalen 3, 8, 5.

Lies folgende Decimalzahlen:

32·517, 7·0703, 0·005, 3·14159, 0·5596, 17·008, 80·072, 0·480107, 0·20903, 725·008, 0·036, 28·00074.

Um eine Decimalzahl anzuschreiben, schreibt man zuerst die Ganzen an, setzt den Decimalpunkt und dann die einzelnen Decimalen nach der Ordnung ihres Stellenwertes. Fehlen die Ganzen oder einzelne Decimalen, so werden sie durch Nullen ersetzt.

Z. B. 13 Ganze, 5 h, 6 zt schreibt man an: 13·0506; 7 z schreibt man an: 0·7.

× Schreibe folgende Decimalzahlen an:

~~1.~~ a) 5 Ganze, 3 z; ~~b)~~ 28 Ganze, 4 z, 7 h, 1 t;
~~2.~~ a) 110 Ganze, 35 t; ~~b)~~ 7tausend 28 Ganze, 4 h, 9 t;
~~3.~~ a) 7 Hunderttausendtel; ~~b)~~ 39tausend 91 Milliontel.

4. a) 3 E, 1 z, 5 h, 8 t; b) 5 H, 3 E, 8 h.
5. a) 4 T, 8 H, 7 Z, 3 zt; b) 2 Ht, 5 Z, 4 h, 5 t.

Hängt man einer Decimalzahl rechts eine oder mehrere Nullen an, so wird ihr Wert nicht geändert, weil dabei die einzelnen Ziffern ihren früheren Stellenwert beibehalten; z. B.

$$8 \cdot 7 = 8 \cdot 70 = 8 \cdot 700 = 8 \cdot 7000 = 8 \cdot 70000.$$

Folgende Zahlen sollen gleichviele Decimalen erhalten: 2, 3·5, 6·48, 0·397, 14·723.

## Römische Zahlzeichen.

### §. 6.

Die bisher angewendeten Ziffern heißen arabische. Nebst diesen werden manchmal auch die römischen Ziffern gebraucht.

Die Römer hatten sieben Zahlzeichen:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I, | V, | X, | L, | C, | D, | M, |
| für | 1, | 5, | 10, | 50, | 100, | 500, | 1000. |

Sie drückten damit durch gehörige Zusammenstellung alle übrigen Zahlen nach folgenden Gesetzen aus:

1. Stehen mehrere gleiche Buchstaben neben einander, so bedeuten sie so viel, als ihre Werte zusammen genommen betragen; z. B.:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| II | bedeutet | 2, | XXX | bedeutet | 30, |
| III | „ | 3, | CCC | „ | 300. |

2. Steht ein niedriges Zahlzeichen nach einem höheren, so wird der Wert des höheren um so viel vermehrt, als das niedrigere bedeutet; z. B.:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| VI | bedeutet | 6, | XXVI | bedeutet | 26, |
| VIII | „ | 8, | CXV | „ | 115, |
| LX | „ | 60, | DCLX | „ | 660. |

3. Steht ein niedrigeres Zahlzeichen vor einem höheren, so wird der Wert des höheren um so viel vermindert, als das niedrigere bedeutet, z. B.:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| IV | bedeutet | 4, | XIX | bedeutet | 19, |
| IX | „ | 9, | XLIII | „ | 43, |
| XL | „ | 40, | XCIV | „ | 94, |
| XC | „ | 90, | MDCCCLXXIX | bedeutet | 1879. |

Lies: VII, XIII, XV, XXIV, XLI, LXI, XCI, CIX, CXI, CMXIX, MCCCXIV, MDCCXL.

Schreibe mit römischen Ziffern alle Zahlen von 1 bis 20; ferner 28, 49, 84, 365, 719, 930, 1344, 1799, 1892.

## 2. Addieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

§. 7.

Addieren heißt eine Zahl suchen, welche so viele Einheiten enthält, als zwei oder mehrere gegebene Zahlen zusammen genommen. Die gegebenen Zahlen nennt man Summanden (Addenden, Posten); das Resultat der Addition heißt Summe.

Um zu einer Zahl 3 eine zweite 4 zu addieren, darf man nur in der natürlichen Zahlenreihe von der ersten Zahl 3 ausgehend um so viele Einheiten, als die zweite Zahl 4 enthält, vorwärts schreiten: die Zahl 7, zu der man dadurch gelangt, ist die gesuchte Summe.

Das Zeichen der Addition ist $+$, welches mehr (plus) gelesen und zwischen die Summanden gesetzt wird. Zwischen die Summanden und die Summe schreibt man das Gleichheitszeichen $=$ (gleich), welches anzeigt, daſs die Zahlen oder Zahlenverbindungen, zwischen denen es steht, gleichen Wert haben. Z. B.: $3 + 4 = 7$ wird gelesen: 3 mehr 4 ist gleich 7.

Sind mehr als zwei Zahlen zu addieren, so wird zu der Summe zweier Zahlen die dritte, zu der neuen Summe die vierte Zahl u. s. w. addiert.

### Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 8.

**1.** Zähle von 1 aufwärts bis 100, indem du immer 1 dazu setzest; nämlich $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$, ...

**2.** Zu 1 zähle 2, zur Summe wieder 2, und zu jeder folgenden Summe 2 dazu.

**3.** Fange bei 2 an und zähle immer 2 dazu.

**4.** Zähle mit 3 aufwärts
a) von 1 bis 100, b) von 2 bis 101, c) von 3 bis 102.

**5.** Auf gleiche Weise zähle
a) mit 4 vorwärts von 1, 2, 3, 4 anfangend;
b) „ 5 „ „ 1, 2, 3, 4, 5 „
c) „ 6 „ „ 1, 2,... 5, 6 „
d) „ 7 „ „ 1, 2,... 6, 7 „
e) „ 8 „ „ 1, 2,... 7, 8 „
f) „ 9 „ „ 1, 2,... 8, 9 „

**6.** Wie viel ist $7 + 4$? Zähle noch 8 dazu. Wie viel ist also $7 + 4 + 8$?

**7.** a) $5 + 2 + 9 = ?$ b) $8 + 3 + 9 = ?$ c) $7 + 7 + 5 = ?$
$8 + 9 + 4 = ?$ $6 + 8 + 7 = ?$ $9 + 8 + 6 = ?$

8. a) Wenn man in der natürlichen Zahlenreihe einmal von 5 aus um 3 Einheiten, und dann von 3 aus um 5 Einheiten fortschreitet, zu welcher Zahl gelangt man in jedem Falle?

b) Wie viel ist $7 + 4$? Wie viel ist $4 + 7$?

c) $2 + 5 + 8 = ?$ $\quad 5 + 2 + 8 = ?$ $\quad 8 + 2 + 5 = ?$

$2 + 8 + 5 = ?$ $\quad 5 + 8 + 2 = ?$ $\quad 8 + 5 + 2 = ?$

Die Anzahl der in den Summanden enthaltenen Einheiten bleibt dieselbe, in welcher Reihenfolge sie auch vorkommen mögen; es muss daher auch die Summe dieselbe bleiben.

*Dieselben Summanden geben in jeder Ordnung dieselbe Summe. (Gesetz von der Vertauschbarkeit der Summanden.)*

9. Auf wie viele Arten kann a) aus den Zahlen 3, 4 und 6, b) aus den Zahlen 2, 3, 4 und 6 eine Summe gebildet werden?

10. a) $7 + 5 + 9 + 5 = ?$ 16 $\quad$ b) $3 + 2 + 9 + 8 + 4 = ?$ 26

$2 + 7 + 8 + 9 = ?$ 26 $\quad 6 + 9 + 3 + 7 + 5 = ?$

11. a) $4 + 7 + 9 + 6 + 5 = ?$ 31 $\quad$ b) $9 + 2 + 9 + 8 + 5 + 3 = ?$

$6 + 8 + 4 + 5 + 7 = ?$ 30 $\quad 5 + 6 + 8 + 7 + 4 + 3 = ?$

12. Zähle die Zahlen von 1 bis 9 zusammen.

13. Wie groß ist die Summe aller Ziffern in der Zahl 351284?

14. Bestimme die Ziffersumme in jeder der folgenden Zahlen: 2648, 6905, 35973, 72210, 497502, 8044560.

15. Wie viel sind 5 Zehner und 3 Zehner? Wie viel ist $20 + 10$, $30 + 40$, $40 + 50$, $50 + 60$, $80 + 20$, $70 + 90$?

16. Wie viel sind 4 Hunderter und 5 Hunderter? Wie viel ist $300 + 100$, $700 + 200$, $400 + 300$, $600 + 400$?

17. a) Wie viel ist $56 + 3$?

$$50 + 6 + 3 = 50 + 9 = 59.$$

Die Einer werden zu den Einern addiert, die Zehner bleiben ungeändert.

b) Wie viel ist 56 und 30?

$$50 + 6 + 30 = 50 + 30 + 6 = 80 + 6 = 86.$$

Die Zehner werden zu den Zehnern addiert, die Einer bleiben unverändert.

18. Wie viel ist $34 + 10$, $28 + 20$, $47 + 30$, $61 + 20$, $76 + 30$?

19. Wie viel ist $365 + 20$, $330 + 200$, $560 + 300$, $257 + 400$?

20. a) Wie viel ist $46 + 7$? Anstatt in der Zahlenreihe von 46 aus um $7 = 4 + 3$ vorwärts zu zählen, kann man zuerst um 4 und dann um 3 vorwärts zählen; es ist also

$$46 + 7 = 46 + 4 + 3 = 50 + 3 = 53.$$

b) Zähle 46 und 52 zusammen. Wie viel ist 46 und 50? — und noch 2 dazu?

$$46 + 52 = 46 + 50 + 2 = 96 + 2 = 98.$$

Anstatt zu einer Zahl eine Summe zu addieren, kann man zu ihr nach und nach die einzelnen Summanden addieren.

Manchmal verfährt man auch umgekehrt:

Anstatt zu einer Zahl nach und nach mehrere Zahlen zu addieren, addiert man zu ihr auf einmal die Summe dieser Zahlen.

Z. B.: $245 + 37 + 63 = 245 + 100 = 345$.

**21.** Wie viel ist $67 + 21$, $52 + 41$, $58 + 42$, $317 + 69$?

**22.** Welche Zahl ist um 36 größer als 51?

**23.** Ich denke mir eine Zahl; nehme ich von ihr 27 weg, so bleibt mir noch 65; welche Zahl habe ich mir gedacht?

**24.** Zähle folgende unter einander stehende Zahlen zusammen:

| a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|
| 50 | 12 | 81 | 63 | 51 |
| 17 | 57 | 19 | 39 | 19 |
| 43 | 83 | 64 | 23 | 48 |

**25.** a) $19 + 28 + 37 + 46 = ?$ b) $25 + 34 + 19 + 80 = ?$

**26.** Wie viel beträgt $317 + 268$? 317 und 200 ist..., und 60 ist.., und 8 ist...

**27.** Wie viel ist $436 + 324$, $321 + 654$, $818 + 172$?

**28.** Ordne folgende Summanden, so dass sich die Additionen vortheilhaft vereinfachen.

a) $455 + 123 + 208 + 77 + 45 + 92$.

b) $63 + 28 + 116 + 272 + 37 + 84$.

**29.** Wie viel ist 4000 und 3000, $2800 + 4000$, $4108 + 500$?

**30.** Bestimme $5680 + 4007$, $2936 + 4040$.

## Addition ganzer Zahlen.

### §. 9.

Es seien folgende Summen zu bestimmen:

a) $2457 + 4132$; b) $693 + 458 + 357$.

a) 2457 = 2 T 4 H 5 Z 7 E
4132 = 4 T 1 H 3 Z 2 E
Summe 6 T 5 H 8 Z 9 E = 6589

b)
| | |
|---|---|
| 693 | 7 E + 8 E + 3 E = 18 E = 1 Z 8 E |
| 458 | 1 Z + 5 Z + 5 Z + 9 Z = 20 Z = 2 H 0 Z |
| 357 | 2 H + 3 H + 4 H + 6 H = 15 H |
| 1508 | |

Man addiert also zuerst die Einer, dann die Zehner, Hunderter.... Die jedesmalige Summe hat mit den addierten Einheiten gleichen Stellenwert; ist sie zweiziffrig, so bedeuten die Zehner derselben Einheiten des nächst höheren Ranges und werden daher zu den Einheiten dieses Ranges weiter gezählt.

Werden die Summanden wegen der leichteren Übersicht unter einander geschrieben, so müssen die Einheiten desselben Ranges unter einander, also Einer unter Einer, Zehner unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen.

Um die Probe zu machen, d. i. um die Richtigkeit der Summe zu prüfen, kann man das Gesetz über die Vertauschbarkeit der Summanden benützen, indem man, wenn z. B. die Summanden unter einander geschrieben und früher von unten hinauf addiert wurden, dieselben nun von oben herab addiert. Erhält man in beiden Fällen dieselbe Summe, so kann man diese als richtig ansehen, da wegen der veränderten Reihenfolge der Ziffern nicht leicht beidemal derselbe Fehler möglich ist.

**Aufgaben.**

**1.**

$$\begin{array}{r} 38 \\ 94 \\ \underline{57} \\ 189 \end{array}$$

7 und 4 ist 11, und 8 ist **19**, bleibt **1**; 1 und 5 ist 6, und 9 ist 15, und 3 ist **18**.

Die hier fettgedruckten Ziffern werden beim Aussprechen sofort angeschrieben.

**2.** Addiere die folgenden Zahlen, und zwar zuerst jene der verticalen, dann jene der horizontalen Reihen; addiere ferner die bei den Verticalreihen, und dann die bei den Horizontalreihen erhaltenen Summen:

$$\begin{array}{l}
34 + 56 + 36 + 27 + 69 + 43 + 87 + 24 \\
57 + 21 + 90 + 67 + 58 + 63 + 35 + 48 \\
19 + 56 + 76 + 34 + 65 + 50 + 89 + 27 \\
42 + 60 + 45 + 86 + 99 + 17 + 25 + 60 \\
68 + 80 + 26 + 77 + 58 + 69 + 43 + 54
\end{array}$$

**3.**

$$\begin{array}{r} 926 \\ 835 \\ 794 \\ \underline{462} \\ 3017 \end{array}$$

Bei fortgeschrittener Übung werden während des Addierens unmittelbar nur die Summen ausgesprochen. Hier ist zu sprechen:

2, 6, 11, **17**, 1;
7, 16, 19, **21**, 2;
6, 13, 21, **30**.

**4.**

| a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|
| 8063 | 9007 | 2468 | 4178 | 7085 |
| 2497 | 98 | 1357 | 5264 | 926 |
| 811 | 1697 | 753 | 5355 | 182 |
| 2371 | 790 | 840 | 7246 | 6469 |

5. Mache bei den Aufgaben in 4. die Probe, indem du die Summanden in umgekehrter Reihenfolge addierst.

6. Addiere in dem nachstehenden Vierecke zuerst die Zahlen jeder verticalen, dann die Zahlen jeder horizontalen und endlich die Zahlen einer jeden der beiden Diagonalreihen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 924 | 4928 | 2772 | 6776 | 4620 |
| 6160 | 2464 | 6468 | 4312 | 616 |
| 2156 | 7700 | 4004 | 308 | 5852 |
| 7392 | 3696 | 1540 | 5544 | 1848 |
| 3388 | 1232 | 5236 | 3080 | 7084 |

7. Wie groß ist die sechste Zahl in der Zahlenreihe, die mit 2096 beginnt, und bei welcher jede folgende Zahl um 214 größer ist als die vorhergehende? Wie groß ist die Summe aller sechs Zahlen?

8. Von fünf Zahlen ist die erste 3087, die zweite um 690 größer als die erste, die dritte um 516 größer als die zweite, die vierte um 407 größer als die dritte, und die fünfte um 375 größer als die vierte; wie groß ist die Summe der fünf Zahlen?

9. Addiere wie in Aufgabe 2. die folgenden Zahlen:

$41782 + 29714 + 80518 + 26396 + 63614 =$ 242.024
$71396 + 29592 + 75801 + 34567 + 90123 =$ 301.497
$95703 + 88466 + 54953 + 63780 + 77266 =$ 380.168
$18278 + 91705 + 27265 + 53927 + 84706 =$ 275.881
$89924 + 93364 + 62879 + 27048 + 60973 =$ 334188

10. Addiere:

| a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|
| 158724 | 303235 | 1234567 | 3098752 |
| 306315 | 684450 | 2345678 | 8345097 |
| 30880 | 471899 | 3456789 | 58091 |
| 246727 | 4206 | 4567890 | 937248 |
| 150236 | 81183 | 5678901 | 5630956 |
| 9876 | 790547 | 6789012 | 1907338 |

8 2

11. Mache bei den Aufgaben in 10. die Probe durch Umkehrung der Reihenfolge der Summanden.

## Addition der Decimalzahlen.

### §. 10.

Die Addition der Decimalzahlen wird so wie die Addition der ganzen Zahlen von der niedrigsten Stelle angefangen ausgeführt. Werden die Summanden unter einander geschrieben, so müssen die Ziffern mit gleichen Stellenwerten und daher auch die Decimalpunkte unter einander zu stehen kommen. Z. B.:

5·82
7·37 — 6, 14, 21, 23 h geben **3** h und 2 z;
3·48 — **2**, 6, 9 17 z geben **7** z und 1 E; Decimalpunkt;
9·06 — 10, 13, 20, **25** E.
25·73

**Aufgaben.**

**1.** 1·76 — Zu sprechen: 5;
3·08 — 4, 12, 18, 1;
2·645 — 7, **14**, 1; Decimalpunkt;
7·485 — 3, 6, 7.

**2.** 3·62 + 9·57 + 8·26 + 2·95 + 7·08 + 5·39 = ?

**3.** 37·3 + 30·3 + 3·84 + 7·29 + 3·90 + 67·2 = ? 149·83

**4.** 24·5 + 728 + 0·75 + 37·6 + 8·35 = ?

**5.** 3·142 + 4·586 + 5·92 + 6·364 + 7·703 = ?

**6.** 38·3 + 20·95 + 60·14 + 505 + 60·39 + 724·9 = ?

**7.** 1·4 + 91·025 + 8·79 + 24·21 + 0·8 + 1·848 + 35·791 = ?

**8.** 0·5 + 0·25 + 0·125 + 0·0625 + 0·03125 = ?

**9.** Addiere drei Zahlen, von denen die erste 8·12, die zweite um 8·79 größer als die erste und die dritte um 10·35 größer als die zweite ist.

**10.** Von einer Zahl nahm man 37·865 weg und es blieb noch 53·196 übrig: wie groß war jene Zahl?

**11.** Welche Zahl ist um 74·865 größer als 42·73 + 91·68? 30

**12.** 315·247 + 93·07 + 100 + 0·39747 + 293·2973 + 67·84 = ?

**13.** 165·8 + 307·405 + 508·7628 + 769·28 + 725 + 70.464 + 690·5237 = ? 29

**14.** 87·549 + 297·315 + 934·046 + 971·5411 + 84·3139 + 51·608 + 35·8423 = ? 32

**15.** 25480·7 + 4138·5 + 82091·08 + 7831·359 + 5092·4 + 1357 + 631·997 = ? 37

45

## Addition einnamiger Zahlen. 50

### §. 11. 43

40

Beim Addieren benannter Zahlen müssen die gegebenen Zahlen gleichen Namen haben, welchen dann auch die Summe erhält.

**Aufgaben.** (Schriftlich und theilweise auch mündlich zu lösen.)

**1.** Ein Gymnasium zählt in der I. Classe 50, in der II. 45, in der III. 43, in der IV. 37, in der V. 44, in der VI. 32, in der VII. 29, in der VIII. 30 Schüler; wie groß ist die ganze Schülerzahl dieses Gymnasiums? 310 S. 306

2. Wie viele Tage verfließen in einem gemeinen Jahre vom 1. Jänner bis zum 15. Mai? = 135 T. 31 31 15 28 30 135

3. Wie viele Tage verfließen in einem Schaltjahre vom 1. Jänner bis zum letzten Tage eines jeden Monats?

4. Jemand wurde im Jahre 1839 geboren und starb in einem Alter von 53 Jahren; in welchem Jahre ist er gestorben? 1892 +

5. Die Kreuzzüge der Christen nach dem heiligen Lande begannen im Jahre 1096 und dauerten 195 Jahre; wann war ihr Ende? 1291

6. Ein Hausherr bezieht an jährlichem Mietzins von fünf Parteien einzeln 396 *K*, 430 *K*, 580 *K*, 600 *K*, 635 *K*; wie viel bezieht er zusammen?

7. Ein Kaufmann bekommt fünf Fässer Kaffee, welche einzeln 220, 224, 222, 227 und 231 *kg* wiegen; wie groß ist das ganze Gewicht?

8. An einem Wochenmarkte wurden verkauft: 432 *hl* Weizen, 305 *hl* Roggen, 287 *hl* Gerste und 613 *hl* Hafer; wie viel *hl* Getreide sind dies zusammen?

9. Jemand hat drei Capitalien; das erste trägt jährlich 62·35 *K*, das zweite 27·68 *K*, das dritte 85·395 *K* Zins; wie viel jährlichen Zins geben alle drei Capitalien?

10. Der Ort A liegt 7·825 *m* höher als B, B 12·15 *m* höher als C, C 9·023 *m* höher als D; um wie viel liegt A höher als D?

11. Wenn man annimmt, dass ein freifallender Körper in der ersten Secunde seines Falles 4·904 *m* und in jeder folgenden Secunde immer 9·808 *m* mehr als in der vorhergehenden zurücklegt; a) welches sind dann die Fallräume für die zweite, dritte und vierte Secunde? b) welches ist der Fallraum für alle vier Secunden?

12. Vier Goldstangen wiegen einzeln 1·375, 1·248, 0·9315, 0·85 *kg*; wie groß ist das ganze Gewicht?

13. Jemand besitzt 31·284 *ha* Ackergrund, 0·95 *ha* Gartenland, 11·256 *ha* Wiesen und 38·5 *ha* Waldungen; wie groß ist sein Grundbesitz?

14. In einem Lande wurden in vier aufeinander folgenden Jahren 83560, 69012, 64805, 60500 *hl* Wein erzeugt; wie viel in allen vier Jahren zusammen?

15. Zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte gab A 2956·6 *K*, B um 532·2 *K* mehr als A, und C um 464·2 *K* mehr als B. Der Gewinn aus diesem Geschäfte wurde so vertheilt, dass A 739·16 *K*, B um 133·05 *K* mehr als A, und C um 116·05 *K* mehr als B bekam. Wie viel haben alle zusammen eingelegt, und wie groß ist der ganze Gewinn gewesen?

16. Die Einnahmen einer Eisenbahn betrugen: im Jänner 755952 *K*, im Februar 678879 *K*, im März 891363 *K*, im April 840504 *K*, im Mai 914154 *K*, im Juni 976083 *K*; wie viel zusammen?
17. Nach der Volkszählung vom J. 1890 hat Böhmen 5843250, Mähren 2276870, Schlesien 605649 Einwohner; wie groß ist die Gesammtbevölkerung dieser drei Länder?

---

## 3. Subtrahieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

§. 12.

Der Addition ist die Subtraction entgegengesetzt. Subtrahieren heißt, aus der Summe zweier Zahlen und einer derselben die andere suchen. Die gegebene Summe heißt Minuend, der gegebene Summand Subtrahend, der gesuchte Summand Differenz, Unterschied oder Rest. Wenn man die Differenz und den Subtrahend addiert, so erhält man den Minuend.

Das Zeichen der Subtraction ist ein horizontaler Strich — und heißt weniger (minus); der Minuend wird vor, der Subtrahend nach dem Striche gesetzt. Z. B.: $8 - 3 = 5$ wird gelesen: 8 weniger 3 ist gleich 5.

Die Subtraction zweier Zahlen kann auf eine zweifache Art ausgeführt werden; entweder dadurch, dass man zu dem Subtrahend so viele Einheiten addiert, bis man den Minuend erhält; oder dadurch, dass man von dem Minuend so viele Einheiten wegzählt, als der Subtrahend hat. Z. B. in der Aufgabe $13 - 5$ sagt man entweder: 5 und 8 ist 13, oder: 5 von 13 bleibt 8.

Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 13.

1. Zähle von 100 rückwärts, indem du wiederholt 1 wegnimmst; nämlich 100, 99, 98,...
2. Welche Zahlen erhält man, wenn man in der natürlichen Zahlenreihe a) von 100, b) von 99 immer um 2 Einheiten rückschreitet?
3. Vermindere a) 100 um 3, und jeden neuen Rest wieder um 3; dann ebenso b) 99, c) 98.
4. Zähle von 100 angefangen mit 4 abwärts; ferner ebenso von 99, 98, 97 angefangen.

**5.** Zähle rückwärts

a) mit 5 von 100, 99, 98, 97, 96 angefangen;
b) „ 6 „ 100, 99, . . . . 96, 95 „
c) „ 7 „ 100, 99, . . . . 95, 94 „
d) „ 8 „ 100, 99, . . . . 94, 93 „
e) „ 9 „ 100, 99, . . . . 93, 92 „

**6.** Zähle von 13 3 weg, ebenso 4, 5, 6, 7, 8, 9.

**7.** Um wie viel Einheiten muss man in der natürlichen Zahlenreihe, von 8 ausgehend, fortschreiten, um zur Zahl 15 zu gelangen?

**8.** Wie viel muss man zu 6, 7, 8, 9 zuzählen, um 14 zu erhalten?

**9.** Bestimme folgende Differenzen:

a) $11 - 3$, $25 - 8$, $37 - 4$, $43 - 7$, $54 - 6$, $60 - 5$.
b) $52 - 9$, $93 - 4$, $17 - 6$, $65 - 8$, $82 - 5$, $29 - 7$.

**10.** Zähle in der natürlichen Zahlenreihe von 15 aus einmal zuerst um 4 und dann um 5 rückwärts, das anderemal zuerst um 5 und dann um 4 rückwärts. Welche Zahl erhältst du in jedem Falle?

$$15 - 4 - 5 = 15 - 5 - 4 = 6.$$

Was folgt daraus?

**11.** Zähle in der natürlichen Zahlenreihe von 8 zuerst um 7 vorwärts und dann um 5 rückwärts; zähle ferner von 8 zuerst um 5 rückwärts und dann um 7 vorwärts. Zu welcher Zahl gelangst du in jedem Falle?

$$8 + 7 - 5 = 8 - 5 + 7 = 10.$$

Was folgt daraus?

**12.** a) $26 - 5 - 6 = ?$ b) $35 - 8 - 3 - 6 = ?$
$31 - 8 - 1 = ?$ $59 - 2 - 9 - 7 = ?$

**13.** a) $4 + 9 - 5 = ?$ b) $78 + 6 - 5 - 4 = ?$
$35 - 7 + 5 = ?$ $46 - 8 + 5 - 6 = ?$

**14.** Wie viel bleibt, wenn man 3 Zehner von 8 Zehnern wegnimmt? Wie viel ist $70 - 20$, $90 - 30$, $80 - 50$, $120 - 40$, $160 - 60$?

**15.** Wie viel bleibt, wenn man 5 Hunderter von 12 Hunderten wegnimmt? Wie viel ist $800 - 300$, $900 - 200$, $1500 - 700$?

**16.** Zähle weg, 10 von 200, 60 von 300, 70 von 420.

**17.** a) Wie viel ist $68 - 5$?

$$60 + 8 - 5 = 60 + 3 = 63.$$

Die Einer werden von den Einern subtrahiert, die Zehner bleiben ungeändert.

b) Wie viel ist $68 - 50$?

$$60 + 8 - 50 = 60 - 50 + 8 = 10 + 8 = 18.$$

Die Zehner werden von den Zehnern subtrahiert, die Einer bleiben ungeändert.

**18.** Wie viel bleibt übrig, wenn man 10 von 25, 20 von 35, 40 von 78, 60 von 96 wegzählt?

**19.** Wie viel ist 126 — 50, 153 — 80, 149 — 90, 118 — 30?

**20.** 98 — 40 + 80 — 50 + 20 — 60.

**21.** a) Wie viel ist 63 — 8? Anstatt in der Zahlenreihe von 63 um 8 = 3 + 5 zurückzuschreiten; kann man zuerst um 3 und dann noch um 5 zurückschreiten, es ist also

63 — 8 = 63 — 3 — 5 = 60 — 5 = 55.

b) Von 67 nimm 24 weg. Von 67 zuerst 20 weg, bleibt 47; davon noch 4 weg, bleibt 43.

67 — 24 = 67 — 20 — 4 = 47 — 4 = 43.

Anstatt von einer Zahl eine Summe zu subtrahieren, kann man von ihr den einen Summanden, vom Resultate den zweiten, vom neuen Resultate den dritten Summanden u. s. w. subtrahieren.

Manchmal macht man auch von dem umgekehrten Satze vortheilhafte Anwendung:

Anstatt von einer Zahl eine zweite, vom Resultate eine dritte Zahl u. s. w. zu subtrahieren, subtrahiert man auf einmal die Summe derselben.

Z. B. 397 — 38 — 62 = 397 — 100 = 297.

**22.** Wie viel bleibt, wenn man 16 von 78, 23 von 65, 38 von 80, 18 von 45, 36 von 71, 88 von 123 wegnimmt?

**23.** Der Unterschied zweier Zahlen ist 27, die größere Zahl 56; welches ist die kleinere?

**24.** Wie viel muss man zu 32, 45, 67 zuzählen, um 100 zu erhalten?

Bestimme:

**25.** 85 — 24, 67 — 26, 94 — 34, 74 — 53, 83 — 51.

**26.** 62 — 34, 54 — 27, 86 — 18, 36 — 29, 64 — 37.

**27.** a) 34 + 56 — 42; b) 100 — 28 — 42.

**28.** Von 749 nehme man 185 weg. Von 749 zuerst 100 weg, bleibt...; davon 80 weg, bleibt...; davon noch 5 weg, bleibt...

**29.** Wie viel ist 466 — 149, 393 — 208, 586 — 250, 423 — 173, 832 — 565, 706 — 658?

**30.** a) Ein Vater ist 41, sein Sohn 12 Jahre alt; 1) um wie viel Jahre ist der Vater älter als der Sohn; 2) wie groß war der Altersunterschied beider vor 10 Jahren; 3) wie groß wird ihr Altersunterschied nach 10 Jahren sein?

b) Wie viel ist 54 — 6, 64 — 16, 74 — 26?

Eine Differenz ändert sich nicht, wenn man zu ihrem Minuend und Subtrahend dieselbe Zahl addiert, oder von beiden dieselbe Zahl subtrahiert.

Von diesem Satze kann manchmal mit Vortheil Gebrauch gemacht werden; z. B.

$$853 - 298 = 855 - 300 = 555,$$
$$648 - 303 = 645 - 300 = 345.$$

## Subtraction ganzer Zahlen.

### §. 14.

Es sollen folgende Differenzen bestimmt werden:

a) 5978 — 3242; b) 845 — 216.

Hier handelt es sich darum, zu bestimmen, wie viel zu den Einheiten eines jeden Ranges im Subtrahend dazu gezählt werden müsse, um die Einheiten desselben Ranges im Minuend zu erhalten.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 5978 = | 5 T | 9 H | 7 Z | 8 E | | |
| | 3242 = | 3 T | 2 H | 4 Z | 2 E | | |
| Differenz | | 2 T | 7 H | 3 Z | 6 E | = 2736; |
| | | | | | 15 | |
| b) | 845 = | | 8 H | 4 Z | 5 E | |
| | 216 = | | 2 H | 1 Z | 6 E | |
| | | | | 2 | | |
| | 629 = | | 6 H | 2 Z | 9 E. | |

Um in dem Beispiele b) die Subtraction bei den Einern verrichten zu können, vermehrt man die Einer des Minuends um 10 Einer, wobei dann auch der Subtrahend, damit die Differenz ungeändert bleibe, um 1 Zehner vermehrt werden muss. Man hat: 6 E und **9** E sind 15 E; bei den Zehnern sind dann 2 Z von 4 Z zu subtrahieren, wodurch man **2** Z als Differenz erhält; endlich hat man: 2 H und **6** H sind 8 H.

Beim Subtrahieren zählt man daher, bei den Einern anfangend, nach der Reihe zu jeder Ziffer des Subtrahends so viel dazu, dass man die entsprechende Ziffer des Minuends erhält, und setzt die jedesmal dazu gezählte Zahl in den Rest. Ist eine Ziffer des Subtrahends größer als die gleichstellige Ziffer des Minuends, so vermehre man diese letztere um 10 und subtrahiere; dagegen muss dann zugleich die Ziffer in der nächst höheren Stelle des Subtrahends um 1 vermehrt werden.

Um sich von der Richtigkeit der Subtraction zu überzeugen, darf man nur den Rest zu dem Subtrahend addieren, wodurch, wenn die Rechnung richtig ist, der Minuend herauskommen muss. Eine zweite Probe für die Richtigkeit des Restes besteht darin, dass man denselben vom Minuend subtrahiert, wodurch der Subtrahend zum Vorschein kommen muss.

Das Subtrahieren kann auch als Probe für die Richtigkeit der Addition angewendet werden. Addiert man nämlich alle Summanden bis auf einen und subtrahiert die dadurch erhaltene Summe von der Summe aller Summanden, so muss, wenn die Addition richtig ist, der weggelassene Summand herauskommen.

**Aufgaben.**

1.

| | |
|---|---|
| 967 | Man spricht: 2 und 5 ist 7; |
| 592 | 9 und 7 ist 16, 1; |
| 375 | 6 und 3 ist 9. |

2. Welche Zahl muss man zu 208 addieren, um 419 zu erhalten?

3.

| a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|
| 865 | 698 | 739 | 905209 | 7242 |
| 342 | 173 | 486 | 637578 | 2987 |

4.

| a) | b) | c) | d) | e) |
|---|---|---|---|---|
| 677 | 694 | 300 | 8343 | 54301 |
| 316 | 452 | 85 | 5086 | 26879 |

5. Mache bei den Aufgaben in 4. die Probe.

6. a) $347 + 906 - 468 = ?$ b) $981 - 483 + 297 = ?$

7. Von 1000 sollen die Zahlen 234, 423 und 342 subtrahiert werden; oder $1000 - (234 + 423 + 342)$.

8. Welche Zahl gibt zu 2109 addiert die Summe 8056?

9.

| a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|
| 4066 | 9521 | 5187 | 3854 |
| 2135 | 670 | 2468 | 1577 |

10. a) $25368 - 14843 = ?$ b) $84691 - 80079 = ?$

11. Mache bei den Aufgaben in 9. und 10. die Probe.

12. $24680 - 18772 + 97531 - 68024 = ?$

13. Um wie viel ist die Summe $25936 + 57108$ größer als die Summe $31527 + 40874$?

14. Um wie viel ist die Differenz $81352 - 62586$ kleiner als die Differenz $72542 - 53079$?

15. Addiere die Zahlen 325467, 527496, 907245, 48394, und subtrahiere von der Summe nach und nach die ersten drei Summanden; wie groß ist der Rest?

16. Von 401894 sollen die Zahlen 139214, 91078, 35709, 102775 subtrahiert werden.

$$\begin{array}{r} 401894 \\ \left.\begin{array}{r} 139214 \\ 91078 \\ 35709 \\ 102775 \end{array}\right\} \\ \hline 33118 \end{array}$$

Anstatt hier zuerst die zu subtrahierenden Zahlen zu addieren und sodann ihre Summe von dem gegebenen Minuend zu subtrahieren, kann man mit der Addition der zu subtrahierenden Zahlen unmittelbar auch die Subtraction von dem Minuend verbinden. Nachdem man nämlich die Einer aller Subtrahenden addiert hat, sucht man sogleich, wie viel man zu ihrer Summe 26 noch dazu zählen müsse, um die nächste höhere Zahl, welche an der Einerstelle die entsprechende Ziffer 4 des Minuends hat, d. i. 34, zu erhalten; 26 und 8 ist 34: die dazu gezählten 8 Einer schreibt man sogleich während des Aussprechens in den Rest. Die 3 Zehner aus der erhaltenen Summe 34 addiert man zu den Zehnern des Subtrahends und verfährt dann wie bei den Einern. Man spricht dabei: 5, 14, 22, 26, und **8** ist 34, 3; 10, 17, 18, und **1** ist 19 u. s. w.

**17.** 5248901 — (863147 + 168854 + 279039 + 996489) = ?

**18.** 71357083 — (674260 + 925476 + 1043325 + 842079) = ?

**19.** Verrichte noch einmal die Additionen in §. 9, Aufgabe 10. und mache die Probe mittelst der Subtraction durch Weglassung des ersten Summanden.

## Subtraction der Decimalzahlen.

### §. 15.

Decimalzahlen werden in gleicher Weise wie ganze Zahlen subtrahiert. Schreibt man dabei den Subtrahend unter den Minuend, so muss dieses derart geschehen, dass die Decimalpunkte genau unter einander zu stehen kommen. Z. B.

$$\begin{array}{r} 8\cdot09 \\ 5\cdot453 \\ \hline 2\cdot637 \end{array}$$

3 t und **7** t sind 10 t, 1; 6 h und **3** h sind 9 h; 4 z und **6** z sind 10 z, 1; 6 E und **2** E sind 8 E.

**Aufgaben.**

**1.**
$$\begin{array}{r} 34\cdot56 \\ 6\cdot92 \\ \hline 27\cdot64 \end{array}$$

Sprich: 2 und **4** ist 6; 9 und **6** ist 15, 1; Decimalpunkt; 7 und **7** ist 14, 1; 1 und **2** ist 3.

**2.** Welche Zahl ist um 2·678 kleiner als 8·765?

**3.** Um wie viel ist 61·43 a) größer als 23·958, b) kleiner als 70?

**4.** Der Unterschied zweier Zahlen ist 5·593, die größere ist 12·75; welches ist die kleinere?

**5.** Subtrahiere und mache die Probe:

a) $\begin{array}{r} 28\cdot355 \\ 16\cdot79 \\ \hline \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 85\cdot7 \\ 9\cdot416 \\ \hline \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 9\cdot04 \\ 0\cdot2607 \\ \hline \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 100 \\ 16\cdot667 \\ \hline \end{array}$

**6.** Berechne: a) 38·593 — 15·838, 23·755 b) 67·859 — 48·369,
c) 73·314 — 8·2076, 75·1130 d) 5·3415 — 0·88723.

**7.** Mache bei den Subtractionen in 6. die Probe.

**8.** 35·1097 + 27·4066 — 41·0365 — 10·3721 = ?

**9.** Wie groß ist die Summe dreier Zahlen, von denen die erste 128·794, die zweite um 53·165 kleiner als die erste, und die dritte um 9·98 kleiner als die zweite ist?

**10.** Subtrahiere von 152·4405 die Zahlen 9·1085, 20·3668, 17·4510.

**11.** 7901·305 — (206·0408 + 123·456 + 789·012 + 135·79 + 802·406 + 918·273) = ?

## Subtraction einnamiger Zahlen.

### §. 16.

Bei der Subtraction benannter Zahlen müssen Minuend und Subtrahend gleichen Namen haben; diesen erhält dann auch die Differenz.

**Aufgaben.** (Schriftlich und theilweise auch mündlich zu lösen.)

1. Von einem Stücke Leinwand, das 52 *m* enthält, werden 35 *m* abgeschnitten; wie viel Meter bleiben noch übrig?
2. Ein Sohn verlor seinen 75jährigen Vater, als er selbst 47 Jahre alt war; um wie viel war der Vater älter als der Sohn?
3. Eine Ware wurde um 350 *K* gekauft und um 408 *K* verkauft; wie viel ist dabei gewonnen worden?
4. Ein Kaufmann verkauft eine Ware für 824·64 *K* und gewinnt dabei 76·08 *K*; wie theuer hat er die Ware eingekauft?
5. Jemand nimmt in einem Vierteljahr 900 *K* ein und gibt 813 *K* aus; wie viel erspart er?
6. Von 750 *kg* Kaffee werden nach und nach verkauft: 128, 57, 105 *kg*; wie viel Kaffee bleibt noch vorräthig?
7. Von einem Acker, welcher 442 *ha* misst, werden 2·0825 *ha* verkauft; wie viel bleibt noch übrig?
8. Amerika wurde im Jahre 1492 von Columbus entdeckt; wie lange ist es jetzt bekannt?
9. Kaiser Franz I. wurde 1768 geboren, trat im Alter von 24 Jahren die Regierung an und starb 1835; a) in welchem Jahre kam er zur Regierung, b) in welchem Alter starb er?
10. Im Jahre 1890 zählte man seit der Erfindung der Dampfmaschinen 191 Jahre, seit der Erfindung der Buchdruckerkunst 450 Jahre und seit der Erfindung unseres Papieres 639 Jahre; in welchem Jahre geschah jede dieser Erfindungen?
11. Wie viel Tage haben die ersten sechs Monate eines gemeinen Jahres weniger als die letzten sechs?
12. Jemand schuldete 742·5 *K* und hat davon noch 318·75 *K* zu zahlen; wie viel hat er schon gezahlt?
13. Ein Vater hinterläßt dem älteren seiner beiden Söhne 6840 *K*, dem jüngeren um 1580 *K* weniger; wie viel bekommen beide Söhne zusammen?
14. Der Ort A liegt 128 *m* höher als B, B 87 *m* höher als C und C 68 *m* tiefer als D; um wie viel liegt A höher als D?
15. Die Länge eines Pendels, das in jeder Secunde eine Schwingung macht, beträgt am Pole 996·808 *mm*, am Äquator 990·891 *mm*; wie groß ist der Unterschied beider Längen?

16. Die Stadt Graz hatte im Jahre 1820 36012 Einwohner und im Jahre 1890 112771; um wie viel hat die Bevölkerung in dieser Zwischenzeit zugenommen?

## 4. Multiplicieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

§. 17.

Die Wiederholung der Addition eines und desselben Summanden führt zur Multiplication. Multiplicieren heißt, eine Zahl so vielmal als Summand setzen, als eine zweite Zahl Einheiten hat. Z. B. 5 mit 3 multiplicieren heißt, 5 3mal als Summand setzen, wodurch man $5 + 5 + 5 = 15$ erhält. Die Zahl, welche mehrmal als Summand genommen wird, heißt der Multiplicand, und die Zahl, welche angibt, wie oft der Multiplicand als Summand gesetzt werden soll, der Multiplicator. Das Resultat der Multiplication heißt Product. Multiplicand und Multiplicator heißen auch die Factoren des Productes.

Der Multiplicator ist immer unbenannt; der Multiplicand kann auch benannt sein, dann ist auch das Product benannt, und zwar mit dem Multiplicand gleichnamig.

Das Zeichen der Multiplication ist ein schiefes Kreuz $\times$ oder auch ein Punkt. Z. B. $5 \times 3 = 15$ oder $5 . 3 = 15$ wird gelesen: 5 multipliciert mit 3 ist gleich 15, oder auch: 3mal 5 ist 15; 5 ist hier der Multiplicand und 3 der Multiplicator.

Unter dem Producte von mehr als zwei Zahlen versteht man das Endproduct, welches erhalten wird, wenn man das Product der ersten zwei Zahlen mit der dritten, das neue Product mit der vierten Zahl u. s. w. multipliciert.

Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 18.

1. Wie viel ist 1mal 1, 1mal 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?
2. Wie viel ist 2mal 1, 2mal 2, 3,...8, 9?
3. Wie viel ist das 3fache von 1, von 2, 3,...8, 9?
4. Wie viel ist 4mal 1, 4mal 2, 3,...8, 9?
5. Wie viel ist 5mal 1, 5mal 2, 3,...8, 9?
6. Welche Zahlenreihe erhält man, wenn man die Zahlen 1, 2, 3... 8, 9 folgeweise 6mal als Summand setzt?
7. Wie viel ist 7mal 1, 7mal 2, 3,...8, 9?
8. Wie viel ist 8mal 1, 8mal 2, 3,...8, 9?

**9.** Welche Zahl ist 9mal so groß als 1, 2, 3,...8, 9?
Die Ergebnisse der voranstehenden Übungen bilden das sogenannte Einmaleins der Zifferwerte, das dem Gedächtnisse fest einzuprägen ist.

**10.** Gib von je zwei neben, und ebenso von je zwei unter einander stehenden Nachbarzahlen, ohne diese selbst auszusprechen, unmittelbar das Product an:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 9 | 7 | 1 | 3 | 5 | 6 | 4 | 8 |
| 4 | 5 | 1 | 9 | 2 | 7 | 3 | 8 | 6 |
| 9 | 3 | 6 | 2 | 4 | 6 | 8 | 2 | 7 |
| 8 | 4 | 9 | 5 | 7 | 6 | 5 | 3 | 2 |

**11.** a) Wie viel ist $5 \times 3$? Wie viel ist $3 \times 5$?

Zerlegt man 5 in fünf Einheiten, macht diese in einer horizontalen Reihe anschaulich und bringt 3 solche Reihen untereinander an:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

so erhält man offenbar gleichviel, ob man die Einheiten aller horizontalen, oder jene aller verticalen Reihen zusammenzählt. Zählt man die Einheiten der horizontalen Reihen, so erhält man 5 Einheiten 3mal, oder $5 \times 3$; zählt man die Einheiten der verticalen Reihen, so erhält man 3 Einheiten 5mal, oder $3 \times 5$. Es ist daher $5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$.

Ein Product zweier Factoren ändert sich nicht, wenn man die Factoren untereinander vertauscht. (Gesetz von der Vertauschbarkeit der Factoren.)

Läßt man dieses Gesetz auch dann noch gelten, wenn ein Factor Null ist, so erhält man:

$$3.0 = 0.3 = 0 + 0 + 0 = 0.$$

Ist ein Factor Null, so ist auch das Product Null.

b) Sind mehr als zwei Zahlen zu multiplicieren, z. B. 3, 4 und 5, so kann man, ohne das Product zu ändern, je zwei aufeinander folgende Factoren vertauschen und durch wiederholtes Vertauschen jeden Factor an jede beliebige Stelle bringen.

$$3.4.5 = 3.5.4 = 5.3.4 = 5.4.3 = 4.5.3 = 4.3.5 = 60.$$

**12.** Wie viel ist 1mal 10, 2mal 10, 3mal 10,...9mal 10?

**13.** Wie viel ist 1mal 100, 2mal 100,...9mal 100?

**14.** Wie viel sind 2mal 4 Zehner? Wie viel ist 2mal 50, 3mal 40, 5mal 60, 7mal 30, 9mal 80? $50.2 = 5.2.10 = 100$.

**15.** Wie viel ist 3mal 2 Hunderter? Wie viel ist 2mal 400, 5mal 700, 4mal 500, 7mal 600, 8mal 900? $400.2 = 4.2.100 = 800$.

**16.** Wie viel ist 10mal 1, 10mal 2, 10mal 3, 4,...9? Was wird also aus Einern, wenn man sie 10mal nimmt?

**17.** Wie viel ist 10mal 10, 10mal 20, 10mal 50, 10mal 80? Was wird aus den Zehnern, wenn man sie 10mal nimmt?

**18.** Wie viel ist 100mal 1, 100mal 2, 100mal 3, 4,...9?

**19.** Wie viel ist 100mal 10, 20, 50, 90?

**20.** Wie viel ist 4mal 20? Wie viel ist 4mal 6? Wie viel ist also 4mal 26?

$$26 \times 4 = 20 \times 4 + 6 \times 4 = 80 + 24 = 104.$$

Eine Summe wird mit einer Zahl multipliciert, indem man jeden Summanden mit derselben multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.

**21.** Wie viel ist 2mal, 3mal...9mal a) 11, b) 12, c) 15, d) 16?

**22.** Wie viel ist 3mal 18, 4mal 21, 5mal 34, 6mal 53, 2mal 127?

**23.** Nimm jede der Zahlen:

a) 25, b) 84, c) 45, d) 78, e) 51, f) 94, g) 36

m) 2mal, n) 3mal, o) 7mal, p) 8mal, q) 9mal.

**24.** Wie viel ist 15mal 30?

Statt 30 15mal als Summand zu setzen, kann man, da $15 = 3 \times 5$ ist, zunächst je 3 von den gleichen Summanden in eine Summe zusammenfassen; man erhält dadurch 5 gleiche Summen, welche noch zu addieren sind, was geschieht, wenn man eine dieser Summen mit 5 multipliciert.

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 30 & & 30 & & 30 & & 30 & & 30 \\ & & 30 & & 30 & & 30 & & 30 & & 30 \\ & & \underline{30} & & \underline{30} & & \underline{30} & & \underline{30} & & \underline{30} \\ 30 \times 15 & = & 90 & + & 90 & + & 90 & + & 90 & + & 90 = 90 \times 5 = 450, \end{array}$$

$$\text{also } 30 \times 15 = 30 \times 3 \times 5 = 90 \times 5 = 450.$$

Um eine Zahl mit einem Producte zweier Factoren zu multiplicieren, kann man sie mit dem einen Factor und das Ergebnis mit dem andern Factor multiplicieren.

**25.** Wie viel ist 20mal 8? 20 ist $2 \times 10$; anstatt daher mit 20 zu multiplicieren, multipliciert man zuerst mit 2 und das Ergebnis noch mit 10; 2mal 8 ist 16, 10mal 16 ist 160.

**26.** Wie viel ist 20mal 10, 30mal 30, 50mal 40?

**27.** Wie viel ist 20mal 12, 30mal 15, 60mal 13?

**28.** Wie viel ist 12mal 35?

Es beträgt gleichviel, ob man 12 Stücke einer Ware auf einmal, oder zuerst 10 Stücke und dann noch 2 Stücke à 35 *h* bezahlt. $35 \times 12 = 35 \times 10 + 35 \times 2 = 350 + 70 = 420$.

Eine Zahl wird mit einer Summe multipliciert, indem man sie mit jedem Summanden multipliciert und die erhaltenen Theilproducte addiert.

**29.** Wie viel ist 13mal 20, 17mal 51, 24mal 33, 22mal 350?

## Multiplication ganzer Zahlen.

§. 19.

### a) Multiplication mit einer einziffrigen Zahl.

Es sei die Zahl 132 mit 3 zu multiplicieren.

| | |
|---|---|
| 132 | Multiplicand $132 \times 3$ Multiplicator |
| 132 | 396 Product. |
| 132 | 3mal 2 E sind 6 E, |
| 396 | 3mal 3 Z sind 9 Z, |
| | 3mal 1 H sind 3 H. |

Welchen Stellenwert hat das Product, wenn man Einer, Zehner, Hunderter...mit Einern multipliciert?

Es soll ferner 456 mit 8 multipliciert werden.

| | |
|---|---|
| $456 \times 8$ | 8mal 6 E sind 48 E, d. i. 8 E und 4 Z; |
| 3648 | 8mal 5 Z sind 40 Z, und 4 Z sind 44 Z, d. i. 4 Z und 4 H; |
| | 8mal 4 H sind 32 H, und 4 H sind 36 H. |

Man multipliciert also mit dem einziffrigen Multiplicator der Reihe nach die Einer, Zehner, Hunderter ... des Multiplicands und schreibt die erhaltenen Producte als Einheiten desselben Ranges an; ist ein Product zweiziffrig, so werden nur die Einer jenes Ranges an die betreffende Stelle gesetzt, die Zehner dagegen als Einheiten des nächst höheren Ranges zu dem Producte bei der nächst höheren Ziffer dazu gezählt.

### b) Multiplication mit einer höheren Rangzahl.

Um eine Zahl mit 10, 100, 1000 zu multiplicieren, muss man jeder Ziffer derselben einen 10mal, 100mal, 1000mal so hohen Wert ertheilen. Dies geschieht, indem man der ganzen Zahl 1, 2, 3 Nullen anhängt. Z. B.:

| | | |
|---|---|---|
| $318 \times 10$ | $709 \times 100$ | $850 \times 1000$ |
| 3180 | 70900 | 850000 |

Multipliciere jede der Rangzahlen

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000

mit jeder der Rangzahlen

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000.

Welche Rangzahl erhält man jedesmal als Product?

Die Ergebnisse enthält die nachstehende Tabelle, welche einen Theil des sogenannten Einmaleins der Stellenwerte bildet.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E | Z | H | T | Zt | Ht | |
| Z | H | T | Zt | Ht | M | |
| H | T | Zt | Ht | M | Zm | |
| T | Zt | Ht | M | Zm | Hm | |
| Zt | Ht | M | Zm | Hm | Tm | |
| Ht | M | Zm | Hm | Tm | Ztm | |
| | | | | | | |

In dieser Tabelle, welche dem Gedächtnisse einzuprägen ist, kommt das Product irgend einer Rangzahl der obersten Spalte mit irgend einer Rangzahl der links stehenden Spalte in dem Durchschnitte der zur ersten Rangzahl gehörigen Verticalspalte mit der zur zweiten Rangzahl gehörigen Horizontalspalte vor.

### c) Multiplicationen mit einer mehrziffrigen Zahl.

Wenn der Multiplicator z. B. $40 = 4 \times 10$ oder $400 = 4 \times 100$ ist, so multipliciert man den Multiplicand zuerst mit 4 und dann noch mit 10 oder bezüglich mit 100, indem man dem ersteren Producte eine oder zwei Nullen anhängt.

Ist nun z. B. 649 mit 435 zu multiplicieren, so muss man den Multiplicand 400mal, 30mal und 5mal nehmen und die erhaltenen Theilproducte addieren.

Man erhält also

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $649 \times 435$ | oder | $649 \times 435$ |
| 400mal 649... | 259600 | | 2596 |
| 30mal 649... | 19470 | | 1947 |
| 5mal 649... | 3245 | | 3245 |
| | 282315 | | 282315. |

Die Nullen rechts in den Theilproducten haben nur den Zweck, der ersten von 0 verschiedenen Ziffer, und daher dann auch den übrigen die richtige Stelle anzuweisen; sie können somit auch weggelassen werden, sobald über den Stellenwert dieser Ziffern kein Zweifel obwalten kann, was hier der Fall ist, da die niedrigste von 0 verschiedene Ziffer eines jeden Theilproductes Einheiten desselben Ranges bedeuten muss, wie die Ziffer des Multiplicators, mit welcher man multipliciert hat.

Es ist an sich gleichgiltig, in welcher Ordnung man mit den einzelnen Ziffern des Multiplicators multipliciert, wenn nur die Theilproducte in der gehörigen Stellung unter einander geschrieben werden.

Im allgemeinen erscheint es am zweckmäßigsten, zuerst mit der höchsten Ziffer des Multiplicators und dann nach der Reihe mit den niedrigeren zu multiplicieren, wobei man jedes folgende Theilproduct um eine Stelle rechts herausrückt und dann die Theilproducte, wie sie stehen, addiert.

Kommt im Multiplicator in dessen inneren Stellen eine Null vor, so wird diese beim Multiplicieren übergangen, dafür aber das nächstfolgende Theilproduct um zwei Stellen weiter rechts gesetzt.

Zur Probe für die Richtigkeit der Multiplication darf man nur die Factoren vertauschen und dann die Multiplication noch einmal vornehmen; erhält man dabei wieder das nämliche Product, so darf dasselbe als richtig angesehen werden.

### d) Rechnungsvortheile.

1. Läſst sich der Multiplicator in zwei Factoren zerlegen, mit denen man bequem multiplicieren kann, so multipliciert man den Multiplicand zuerst mit dem einen Factor und dann das Ergebnis mit dem andern Factor. Z. B.:

$$\begin{array}{rl} 51046 & \times\ 24 \\ \hline & \times\ 4 \\ 204184 & \\ \hline & \times\ 6 \\ 1225104 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 21596 & \times\ 350 \\ \hline & \times\ 7 \\ 151172 & \\ \hline & \times\ 50 \\ 7558600 & \end{array}$$

2. Ist die erste oder die letzte Ziffer des Multiplicators 1, so läſst man den Multiplicand ungeändert als das zu dieser Ziffer gehörige Theilproduct stehen, multipliciert ihn dann nur mit den übrigen Ziffern des Multiplicators und schreibt die dadurch erhaltenen Theilproducte gehörig darunter. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 15308 \times 13 \\ 45924\phantom{0} \\ \hline 199004\phantom{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 40925 \times 301 \\ 122775\phantom{00} \\ \hline 12318425\phantom{0} \end{array}$$

3. Ist der Multiplicator 11, so schreibt man die erste Ziffer rechts im Multiplicand unverändert an, addiert dann zur ersten Ziffer die zweite, zur zweiten die dritte u. s. w. Z. B.:

$$\begin{array}{r} 79264 \times 11 \\ 79264\phantom{0} \\ \hline 871904\phantom{0} \end{array} \qquad \text{kürzer} \qquad \begin{array}{r} 79264 \times 11 \\ \hline 871904\phantom{0000} \end{array}$$

### Aufgaben.

**1.** $\begin{array}{r} 3716 \times 4 \\ \hline 14864\phantom{00} \end{array}$ Sprich: **24, 2; 4, 6; 28, 2; 12, 14.**

2. Multipliciere mit 2, 3, 4...8, 9 die folgenden Zahlen:
24, 714, 956, 512, 382, 4067, 8406,
87, 508, 484, 205, 475, 2596, 9057.

3. Multipliciere die Zahl 5 mit sich selbst, das Product wieder mit 5 u. s. f., bis du 5 Producte erhälst; a) welches ist das letzte Product, b) wie groß ist die Summe aller Producte?

4. a) $13794 \times 2 = ?$ b) $29078 \times 6 = ?$

5. Multipliciere 91071 mit 3, das Product mit 4, das neue Product mit 5.

6. Multipliciere 905347 6mal nacheinander mit 3, ebenso oft mit 4, 5, 6, 7, 8, 9.

7. a) $49758 \times 10 = ?$ b) $69450 \times 100 = ?$
$1982523 \times 60 = ?$ $193146 \times 5000 = ?$

8. Multipliciere 5798 mit 10, 100, 1000, 30, 500, 8000.

9. Wie viel ist $5016237 \times 9 + 83406 \times 2000$?

10. Bestimme noch vor Ausführung der Multiplication den Stellenwert der höchsten Ziffer des Productes:
a) $563 \times 37$; b) $9154 \times 266$;
c) $13048 \times 74$; d) $38701 \times 453$;
e) $29207 \times 4014$; f) $64075 \times 12345$.

11. Wähle bei der nebenstehenden Multiplication irgend eine Ziffer des Theilproductes aus und bestimme ihren Stellenwert aus den Stellenwerten der Ziffern, durch deren Multiplication sie entstanden ist.

$$
\begin{array}{r}
5179 \times 3648 \\
\hline
15537\phantom{000} \\
31074\phantom{00} \\
20716\phantom{0} \\
41432 \\
\hline
18892992
\end{array}
$$

Z. B.: Die Ziffer 7 des dritten Theilproductes entstand durch Multiplication von 1 H mit 4 Z; die Ziffer hat also den Stellenwert $H \times Z$, d. i. T.

12. Verfahre ebenso mit den Multiplicationen:
a) $7927 \times 3462$; b) $15824 \times 6159$.

13. Bestimme das Product je zweier neben und je zweier unter einander stehender Zahlen und mache die Probe durch Vertauschung der Factoren:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3179 | 5084 | 2263 | 4706 | 5328 |
| 4826 | 7519 | 9081 | 8530 | 6407 |

14. Wie groß ist das 5206fache a) von 49032? b) von 52963?

15. a) $470300 \times 51207 = ?$ b) $85290 \times 14930 = ?$
$89370 \times 38147 = ?$ $21092 \times 49753 = ?$

16. Multipliciere jede der Zahlen a) 63758, b) 29370, c) 57012 mit jeder der Zahlen m) 6120, n) 33049, p) 32678, und mache die Probe durch Vertauschung der Factoren.

**17.** 41397 × 80902 × 4630 = ?

**18.** 5602 × 7981 × 3596 × 4085 = ?

Bestimme mit Anwendung von Vortheilen:

**19.** a) 75263 × 27. b) 32289 × 72.
90648 × 45. 56071 × 36.

**20.** a) 809175 × 48. b) 126054 × 54.
287050 × 64. 293491 × 630.

**21.** a) 17052 × 17. b) 92478 × 144.
947063 × 51. 708347 × 601.

**22.** a) 439251 × 61. b) 135709 × 321.
580463 × 19. 688437 × 159.

**23.** 738526 × 11
8123786

Sprich: 6; 8; 7; 13, 1;
9, 12, 1; 4, 11, 1; 8.

**24.** a) 561289 × 11. b) 834190 × 11.
806509 × 11. 688437 × 11.

**25.** Multipliciere jede der Zahlen 34129, 93256, 170938 4mal nacheinander mit 11.

## Multiplication der Decimalzahlen.

### §. 20.

### a) Multiplication einer Decimalzahl mit einer einziffrigen ganzen Zahl.

Es sei z. B. 0·836 mit 7 zu multiplicieren.

0·836 × 7
5·852

7mal 6 t sind 42 t, oder 2 t und 4 h;
7mal 3 h sind 21 h, und 4 h sind 25 h, oder 5 h und 2 z;
7mal 8 z sind 56 z, und 2 z sind 58 z, oder 8 z und 5 E.

Welchen Stellenwert hat das Product, wenn man Zehntel, Hundertel, Tausendtel, ... mit Einern multipliciert?

### b) Multiplication einer Decimalzahl mit einer höheren Rangzahl.

Um eine Decimalzahl mit 10, 100, 1000 zu multiplicieren, muss man jeder Ziffer derselben einen 10mal, 100mal, 1000mal höheren Wert ertheilen. Dies geschieht, indem man den Decimalpunkt um 1, 2, 3 Stellen nach rechts rückt. Z. B.:

| 8·345 × 10 | 5·082 × 100 | 6·47 × 100 | 0·89 × 1000 |
|---|---|---|---|
| 83·45 | 508·2 | 647 | 890 |

Was für eine Rangzahl erhält man, wenn man jede der Rangzahlen

1, 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001, 0·00001

folgeweise mit den Rangzahlen

1, 10, 100, 1000, 10000, 100000

multipliciert?

Die Ergebnisse enthält die nachstehende das Einmaleins der Stellenwerte erweiternde Tabelle:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| E | z | h | t | zt | ht | |
| Z | E | z | h | t | zt | |
| H | Z | E | z | h | t | |
| T | H | Z | E | z | h | |
| Zt | T | H | Z | E | z | |
| Ht | Zt | T | H | Z | E | |
| | | | | | | |

**c) Multiplication einer Decimalzahl mit einer mehrziffrigen ganzen Zahl.**

Um eine Decimalzahl z. B. mit 30 = 3 × 10 oder mit 300 = 3 × 100 zu multiplicieren, multipliciert man sie zuerst mit 3, und dann das Product noch bezüglich mit 10 oder 100, indem man den Decimalpunkt um 1 oder 2 Stellen nach rechts rückt.

Es sei nun 5·903 mit 257 zu multiplicieren.

| | |
|---|---|
| | 5·90 3 × 257 |
| 200mal 5·903... | 11 80·6 |
| 50mal 5·903... | 2 95·15 |
| 7mal 5·903... | 41·321 |
| | 15 17·071. |

Die niedrigste Ziffer 1 des Productes ist aus der Multiplication der niedrigsten Ziffer 3 des Multiplicands mit den Einern 7 des Multiplicators entstanden; sie muss daher mit den letzteren gleichen Stellenwert haben, d. h. im Producte müssen eben so viele Decimalstellen vorkommen wie im Multiplicand.

**d) Multiplication einer Decimalzahl mit einer niedrigeren Rangzahl.**

Die Multiplication mit 0·1, 0·01, 0·001 hat nach der in §. 17 aufgestellten Erklärung des Multiplicierens keinen Sinn. Soll dieselbe eine Bedeutung haben, so muss der Begriff der Multiplication entsprechend erweitert werden.

Multipliciert man eine Zahl z. B. 5 der Reihe nach mit den Rangzahlen 1000, 100, 10, 1, so ist jedes folgende Product der 10te Theil des vorhergehenden; nach dem dekadischen Gesetze wird dies auch stattfinden, wenn man 5 mit der nächstfolgenden Rangzahl 0·1 multipliciert. Nun ist 5 × 1 = 5, daher ist das Product 5 × 0·1 der 10te Theil von 5.

Berechne mit Anwendung von Vortheilen:

**13.** a) 0·7912 × 32. b) 25·4426 × 56.
7·8507 × 49. 19·0837 × 350.

**14.** a) 6·1384 × 19. b) 6·78913 × 11.
32·7051 × 401. 0·54265 × 110.

**15.** Multipliciere 87·35 mit 0·1, 0·01, 0·001.

**16.** Wie groß ist das Product von 5 Factoren, deren jeder 0·8 ist?

**17.** Bilde ein Product von 6 gleichen Factoren, deren jeder
a) 0·2, b) 0·5, c) 0·9 ist.

**18.** a) 39·56 × 1·2 = ? b) 4·2789 × 7·5 = ?
60·58 × 3·7 = ? 0·4065 × 0·92 = ?

Bestimme in den Aufgaben 19. und 20. vor Ausführung der Multiplication den Stellenwert der höchsten und der niedrigsten Ziffer des Productes.

**19.** a) 628·49 × 0·327. b) 1·8516 × 51·8.
c) 3074·18 × 0·0656. d) 727·391 × 0·875.

**20.** a) 72·462 × 13·907. b) 380·57 × 28·38.
c) 81·427 × 643·27. d) 8313·52 × 0·00665.

**21.** Bilde folgende Producte und bestimme für irgend eine selbstgewählte Ziffer in den Theilproducten den Stellenwert aus ihrer Entstehungsweise:
a) 34·141 × 9·864. b) 5·7719 × 0·507.
c) 0·81302 × 0·129. d) 0·07264 × 0·3642.

**22.** Multipliciere je zwei neben und je zwei unter einander stehende Zahlen und mache die Probe durch Vertauschung der Factoren:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 15·328 | 6·2104 | 8·4025 | 3·1416 | 14·8875 |
| 5·789 | 0·0175 | 0·0957 | 12·8572 | 0·53644. |

**23.** Wie groß sind die Producte, welche man erhält, wenn man jede der Zahlen a) 3709·2, b) 566·25, c) 10·8273 mit sich selbst multipliciert?

**24.** Wie groß ist das Product von drei Factoren, deren jeder gleich a) 0·108, b) 29·05, c) 31·554 ist?

## Multiplication einnamiger Zahlen.

### §. 21.

**Aufgaben.**

**1.** Wie viel *K* sind 3 fl., 8 fl., 23 fl., 72 fl., 158 fl., 500 fl.?

**2.** Wie viel *h* sind 2 kr., 9 kr., 27 kr., 40 kr., 48 kr.?

3. 1 *hl* Wein kostet 48 *K*, wie viel kosten 9 *hl*?

1 *hl* Wein kostet 48 *K*, 9 *hl* sind 9mal 1 *hl*, es kosten also 9 *hl* 9mal 48 *K* = 432 *K*.

4. Wie viel kosten 8 *a* Landes, wovon das *a* mit a) 17 fl., b) mit 23 fl., c) 30 fl., d) 36·75 fl. bezahlt wird?
5. 1 *dm* Tuch kostet 0·34 *K*; wie viel kostet 1 *m*?
6. 1 *l* Wein kostet 0·88 *K*; wie viel kostet 1 *hl*?
7. 1 *kg* Zucker kostet 0·76 *K*; wie viel kostet 1 *q*?
8. 1 *m* kostet 7·28 *K*; wie viel kosten a) 36 *m*, b) 72·25 *m*?
9. Aus 1 *kg* Münzsilber werden 200 Ein-Kronenstücke geprägt; wie viel solche Stücke aus 236 *kg* Münzsilber?
10. Welchen Wert in Kronen haben 2408 Franken à 0·952 *K*?
11. Wenn 1 *hl* Wein im Einkaufe 23 fl. gekostet hat und 32 *hl* für 832 fl. verkauft wurden, wie viel hat man beim Verkaufe gewonnen?
12. A gibt dem B 118 *hl* Gerste à 10 *K* und bekommt dafür von B 14 *hl* Wein à 42 *K*; wie viel an Geld hat er noch von B zu fordern?
13. Jemand kaufte 17 *ha* Ackerland à 955 fl., 4 *ha* Wiesen à 583 fl. und 22 *ha* Waldungen à 295 fl.; wie viel hatte er dafür im ganzen zu bezahlen?
14. Wenn 1 *ha* Ackerland durchschnittlich 13 *hl* Getreide liefert, wie groß ist das Erträgnis von a) 9 *ha*? b) 15 *ha*? c) 29·75 *ha*?
15. Ein Capital gibt in einem Jahre 173·41 *K* Zins; wie viel in 2·5 Jahren?
16. Wie viel kosten 43·25 *hl*, wenn 1 *hl* 4·83 fl. kostet?
17. Wie viel kosten 58·75 *m* eines Stoffes à 5·64 *K*?
18. Eine Locomotive legt in 1 Stunde 25·76 *km* zurück; wie viel in 3·75 Stunden?
19. Ein Faß mit Kaffee wiegt 218·15 *kg*, das leere Faß wiegt 37·5 *kg*; wie viel kostet der Kaffee, wenn 1 *kg* Netto mit 1·52 fl. bezahlt wird?
20. Der Schall legt in jeder Secunde 332·25 *m* zurück; wie viel das Licht, welches sich 902934·5mal so schnell verbreitet als der Schall?
21. Steiermark hat einen Flächeninhalt von 22354·75 $km^2$; wie groß ist die Bevölkerung dieses Landes, wenn man auf 1 $km^2$ durchschnittlich 57 Einwohner rechnet?

## 5. Dividieren mit unbenannten und einnamigen ganzen und Decimalzahlen.

§. 22.

Dem Multiplicieren ist das Dividieren entgegengesetzt. Dividieren heißt, aus dem Producte zweier Factoren und einem derselben den andern suchen. Z. B. 20 ist das Product aus den beiden Factoren 5 und 4; aus dem Producte 20 und dem einen Factor 5 den andern Factor suchen, heißt 20 durch 5 dividieren. Das gegebene Product heißt der Dividend, der bekannte Factor der Divisor, und der unbekannte Factor, welcher durch die Division gefunden wird, der Quotient. Wenn man den Quotienten und den Divisor mit einander multipliciert, so muss der Dividend herauskommen.

Das Zeichen der Division ist ein Doppelpunkt :, welcher anzeigt, dass die Zahl vor dem Doppelpunkte durch die Zahl nach demselben zu dividieren ist; oder ein Strich, über welchem der Dividend und unter welchem der Divisor steht. Z. B. $20 : 4 = 5$ oder $\frac{20}{4} = ?$ 5 wird gelesen: 20 dividiert durch 4 ist gleich 5, oder 4 ist in 20 fünfmal enthalten.

Jede Multiplication zweier Zahlen, z. B. $5 \times 4 = 20$, bietet in ihrer Umkehrung zwei dem Begriffe nach verschiedene Aufgaben der Division, je nachdem außer dem jedesmal gegebenen Producte 20, dem Dividend, entweder der Multiplicand 5 oder der Multiplicator 4 als Divisor gegeben ist.

Ist als Divisor der Multiplicand 5 gegeben, so ist diejenige Zahl zu suchen, welche anzeigt, wie oft 5 als Summand gesetzt werden müsse, um den Dividend 20 als Summe zu erhalten. Diese Zahl 4 erhält man, indem man untersucht, wie oft sich der Divisor 5 von dem Dividend 20 subtrahieren lässt oder wie oft der Divisor 5 in dem Dividend 20 enthalten ist. Die Division ist eine Untersuchung des Enthaltenseins, ein Messen.

Ist dagegen der Multiplicator 4 als Divisor gegeben, so hat man diejenige Zahl zu suchen, welche 4mal als Summand gesetzt den Dividend 20 zur Summe gibt; diese Zahl 5 findet man, indem man den Dividend in 4 gleiche Theile theilt. Die Division ist hier ein Theilen.

Noch deutlicher tritt der Unterschied zwischen den beiden Divisionsarten an benannten Zahlen hervor:

a) Sind Dividend und Divisor gleich benannt, so heißt die Division eine Messung. Der Quotient ist dann eine unbenannte Zahl und gibt uns das Verhältnis der ersten Zahl zur zweiten an. Z. B. $20\,m : 4\,m = 5$.

b) Ist dagegen der Dividend benannt, der Divisor unbenannt, so ist die Division eine **Theilung**; der Quotient gibt dann einen bestimmten Theil des Dividendes an und ist mit diesem gleich benannt. Z. B. $100\,K : 5 = 20\,K$.

So sehr aber die beiden Divisionsarten des Messens und des Theilens dem Begriffe nach verschieden sind, so geben doch beide für denselben Dividend und denselben Divisor, wenn man von den Benennungen absieht, dieselbe Zahl als Quotienten und fallen daher in der Ausführung in eine einzige Rechnungsart zusammen.

Die Ausführung der Division ist in der natürlichen Zahlenreihe nicht immer möglich. Man kann z. B. keine ganze Zahl finden, welche der 3te Theil von 20 wäre; 6 ist zu klein und 7 zu groß. Man muss da den Quotienten so groß nehmen, als es angeht, also die größte Zahl bestimmen, welche mit dem Divisor multipliciert ein Product gibt, das nicht größer ist als der Dividend. Bestimmt man den Quotienten in dieser Weise, so besteht zwischen dem Dividende und dem Producte aus dem Quotienten und Divisor noch ein Unterschied, welcher **Rest** der Division genannt wird. In diesem Falle muss man also zu dem Producte aus dem Quotienten und dem Divisor noch den Rest addieren, um den Dividend zu erhalten. So ist $20 : 3 = 6$ mit dem Reste 2, und daher $6 \times 3 + 2 = 20$.

## Vorübungen (Kopfrechnen).

§. 23.

Wie oft ist enthalten

**1.** 1 in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

**2.** 2 „ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18?

**3.** Wie oft ist 2 in 7 enthalten? Wie viel bleibt noch übrig?

**4.** Wie oft ist 2 in 3, 19, 13, 15, 9, 17 enthalten, und welcher Rest bleibt jedesmal übrig?

Wie oft ist enthalten

**5.** 3 in 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27; in 7, 20, 14, 26?

**6.** 4 „ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36; „ 6, 15, 21, 34?

**7.** 5 „ 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45; „ 9, 22, 33, 49?

**8.** 6 „ 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54; „ 8, 13, 34, 53?

**9.** 7 „ 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63; „ 10, 25, 36, 60?

**10.** 8 „ 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72; „ 18, 30, 45, 69?

**11.** 9 „ 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81; „ 12, 38, 64, 78?

Wie viel ist

| | | | |
|---|---|---|---|
| 12. | die Hälfte | von | 8, 9, 16, 15, 3, 11, 7, 18, 13, 15? |
| 13. | der dritte Theil | „ | 6, 24, 18, 13, 26, 8, 19, 25, 15, 22? |
| 14. | „ vierte Theil | von | 20, 7, 14, 35, 32, 17, 10, 37, 23, 30? |
| 15. | „ fünfte „ | „ | 15, 26, 9, 36, 40, 12, 23, 45, 34, 18? |
| 16. | „ sechste „ | „ | 24, 13, 32, 8, 55, 46, 49, 36, 23, 50? |
| 17. | „ siebente „ | „ | 49, 64, 10, 37, 60, 42, 18, 29, 40, 13? |
| 18. | „ achte „ | „ | 16, 43, 26, 68, 61, 50, 40, 39, 12, 77? |
| 19. | „ neunte „ | „ | 63, 10, 46, 36, 74, 26, 58, 19, 85, 70? |

20. Wie oft ist 10 in 30 enthalten? wie oft 10 in 50, 20, 80, 60, 40? Was wird aus den Zehnern, wenn man sie durch 10 dividiert?
21. Wie viel ist der 10te Theil von 100, von 500, 700, 900? Was wird aus den Hundertern, wenn man sie durch 100 dividiert?
22. Wie oft sind 2 Zehner in 6 Zehnern, wie oft 20 in 100, 30 in 180, 50 in 200, 60 in 360, 80 in 320, 90 in 270 enthalten?
23. Wie viel ist 80 : 20, 120 : 30, 233 : 50, 137 : 40, 311 : 60?
24. Wie viel ist der 100ste Theil von 1000, 4000, 7000, 8000? Was wird aus den Tausendern, wenn man sie durch 100 theilt?
25. Wie oft sind 3 Hunderter in 15 Hundertern enthalten. Wie oft ist 400 in 1200, 500 in 2000, 600 in 4200 enthalten?
26. Der wievielte Theil von 800 ist 100, 200, 400?
27. Wie viel ist die Hälfte von 20? die Hälfte von 8? Wie groß ist daher die Hälfte von 28?

$$28 : 2 = 20 : 2 + 8 : 2 = 10 + 4 = 14.$$

Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch dieselbe dividiert und die erhaltenen Theilquotienten addiert.

28. Wie oft ist 4 in 56 enthalten? 56 ist 40 + 16; 4 ist in 40 10mal, 4 in 16 4mal, 4 in 56 also 14mal enthalten.
29. Theile durch 2, 3, 4 ... 8, 9 jede der folgenden Zahlen:
    a) 82, 59, 15, 24, 46, 64, 30, 72, 51, 28, 7, 36;
    b) 20, 65, 9, 52, 12, 40, 49, 68, 34, 83, 55, 25.
30. Wie oft ist 2 in 106, 3 in 216, 9 in 648, 4 in 114, 9 in 528, 7 in 580, 5 in 372, 6 in 213 enthalten?
31. Wie viel ist 5mal der 6te Theil von 138; 7mal der 8te Theil von 280; 8mal der 5te Theil von 345?
32. a) Theile 60 in 4 gleiche Theile, und dann jeden solchen Theil noch in 3 gleiche Theile. Wie viele gleiche Theile erhältst du, und wie groß ist jeder? Wie kann man also eine Zahl in 12 gleiche Theile theilen? $60 : 12 = (60 : 4) : 3 = 15 : 3 = 5.$

b) Wie viel ist der 6te Theil von dem 4ten Theile von 120? Wie viel ist der 24ste Theil von 120?

Anstatt eine Zahl durch ein Product zweier Factoren zu dividieren, kann man sie zuerst durch den einen und dann das Ergebnis durch den andern Factor dividieren.

33. Wie viel ist der 15te Theil von 135, der 16te Theil von 352, der 32ste Theil von 448, der 45ste Theil von 945?

34. Eine Summe von 80 *K* wird unter 10 Personen zu gleichen Theilen vertheilt; wie viel erhält jede? Wie viel erhält eine Person, wenn die doppelte, dreifache Summe unter 2mal, 3mal so viel Personen vertheilt wird? Wie viel erhält jede Person, wenn der 5te Theil der Summe unter den 5ten Theil der Personen vertheilt wird?

Der Quotient ändert sich nicht, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multpliciert, oder beide durch dieselbe Zahl dividiert.

## Division ganzer Zahlen.

### §. 24.

### a) Division durch eine einziffrige Zahl.

Dividend 936 : 3 Divisor
312 Quotient

9 H : 3 = 3 H,
3 Z : 3 = 1 Z,
6 E : 3 = 2 E.

Welchen Stellenwert erhält der Quotient, wenn man Einer, Zehner, Hunderter,... durch Einer dividiert?

2738 : 6
456, Rest 2

Da 2 T durch 6 dividiert keine T geben, so nimmt man sogleich 27 H als ersten Theildividend an.

27 H : 6 geben 4 H, bleiben noch 3 H;
3 H und 3 Z sind 33 Z, 33 Z : 6 geben 5 Z, bleiben 3 Z;
3 Z und 8 E sind 38 E, 38 E : 6 geben 6 E, bleiben 2 E als Rest.

Man beginnt also die Division bei der höchsten Stelle und setzt sie dann bis zu den Einern herab fort. Bleibt von einem Theildividende ein Rest übrig, so wird er in Einheiten des niedrigeren Ranges verwandelt und mit der an dieser Stelle befindlichen Ziffer des Dividends vereinigt.

### b) Division durch eine höhere Rangzahl.

Um eine Zahl durch 10, 100, 1000 zu dividieren, muss man von dem Werte jeder Ziffer den 10ten, 100sten, 1000sten Theil nehmen. Dies geschieht, indem man von der ganzen Zahl rechts 1, 2, 3 Ziffern abschneidet; die links bleibenden Ziffern bilden den Quotienten, die rechts abgeschnittenen sind der Rest der Division. Z. B.:

| | | |
|---|---|---|
| 283,0 : 10 | 373,00 : 100 | 17,549 : 1000 |
| 283 | 373 | 17, Rest 549. |

### c) Division durch eine mehrziffrige Zahl.

Wie oft ist 92 in 31924 enthalten?

```
31924 : 92 = 347
276
———
 432
 368
 ———
  644
  644
  ———
    0
```

92 ist in 319 (versuchsweise 9 in 31) 3mal, in 319 H also 300mal enthalten; die erste Ziffer 3 des Quotienten bedeutet also H. Multipliciert man dann 92 E mit 3 H und subtrahiert das Product 276 H von 319 H, so bleiben 43 H, und 2 Z des Dividends dazu, sind 432 Z. 92 ist in 432 (9 in 43) 4mal, in 432 Z also 40mal enthalten; in den Quotienten setzt man daher 4 Z. Subtrahiert man das Product 92 E $\times$ 4 Z = 368 Z von 432 Z, so bleiben 64 Z, und 4 E dazu, sind 644 E. 92 ist in 644 (9 in 64) 7mal enthalten; die dritte Ziffer des Quotienten ist somit 7. 7mal 92 ist 644; es bleibt also kein Rest übrig.

Die erste Ziffer des Quotienten hat einen gleichen Stellenwert mit der niedrigsten Ziffer des ersten Theildividends.

Die Theilproducte aus dem Divisor und der jedesmaligen Ziffer des Quotienten subtrahiert man gewöhnlich sogleich während des Multiplicierens von den entsprechenden Theildividenden und schreibt nur die Reste an. Die obige Division würde sich dabei so stellen:

```
31924 : 92
 432    347
  644
    0
```

Man spricht: 92 in 319 (9 in 31) 3mal; 3mal 2 ist 6 und 3 ist 9; 3mal 9 ist 27 und 4 ist 31. Zum Reste 43 2 herab; 92 in 432 (9 in 43) 4mal; 4mal 2 ist 8 und 4 ist 12, bleibt 1; 4mal ~~9 ist~~ 36 und 1 ist 37 und 6 ist 43; u. s. w.

Die Probe für die Richtigkeit der Division besteht darin, dass man den Divisor mit dem erhaltenen Quotienten multipliciert und zu dem Producte den etwa übrig gebliebenen Rest dazu zählt; ist richtig dividiert worden, so kommt dadurch der Dividend zum Vorschein.

Die Division dient auch als Probe für die Multiplication. Wenn man nämlich das Product durch den einen Factor dividiert, so muss der andere Factor herauskommen.

### d) Rechnungsvortheile.

1. Läst sich der Divisor in zwei Factoren zerlegen, durch die man bequem dividieren kann, so dividiert man den Dividend zuerst durch den einen und dann das Ergebnis durch den andern Factor. Z. B.

```
146055 : 35          171192 : 56
———————— : 5         ———————— : 7
  29211                24456
———————— : 7         ———————— : 8
   4173                 3057
```

2. Eine Zahl wird durch 25 dividiert, indem man das 4fache der Zahl durch 100 dividiert. Eine Zahl wird durch 125 dividiert, indem man das 8fache der Zahl durch 1000 dividiert.

Denn der Quotient wird nicht geändert, wenn man Dividend und Divisor mit 4 oder mit 8 multipliciert.

| | |
|---|---|
| 6149 50 : 25 | 392 875 : 125 |
| —— × 4 | —— × 8 |
| 24598,00 | 3143,000 |

3. Mit 25 wird eine Zahl multipliciert, indem man ihr 100faches durch 4 dividiert. Mit 125 wird eine Zahl multipliciert, indem man ihr 1000faches durch 8 dividiert. Z. B.

| | |
|---|---|
| 3158700 × 25 | 42609000 × 125 |
| —— : 4 | —— : 8 |
| 789675 | 5326125 |

**Aufgaben.**

1. 21564 : 6 Sprich: 6 in 21 **3**mal; in 35 **5**mal;
   3594 in 56 **9**mal; in 24 **4**mal.

2. a) 128 : 4 = ? ~~b)~~ 357 : 7 = ? c) 472 : 8 = ?

~~3.~~ Dividiere durch 2, 3, 4, ... 8, 9 jede der folgenden Zahlen:
   a) 288, 318, 702, 193, 560, 906, 444, 832;
   ~~b)~~ 456, 465, 446, 464, 645, 654, 789, 987;
   c) 1240, 3418, 2195, 5436, 2348, 4786.

4. Die halbe Summe zweier Zahlen nennt man das arithmetische Mittel derselben. Wie groß ist das arithmetische Mittel zwischen 1205 und 4317, 1418 und 8324, 2704 und 4136?

5. a) 398024 : 8 = ? b) 906144 : 3 = ?

6. Wie oft ist 7 in 132076 enthalten?

7. Wie groß ist der 4te Theil von 290356?

8. Wenn 621360 das Product zweier Zahlen und 8 der eine Factor ist, wie groß ist der andere Factor?

9. Welche Zahl muss man mit 3 multiplicieren, um 123456 zu erhalten?

10. Welche Zahl lässt sich von 835245 9mal wegnehmen?

11. Dividiere 8849408 durch 4, diesen und jeden folgenden Quotienten wieder durch 4; wie groß ist der 5te Quotient?

12. a) 135000 : 100. b) 289462 : 1000.

13. 61025 : 83
    292 735
    435
    20 Rest

Sprich: 83 in 610 **7**mal; 21 und **9** ist 30, 3; 56, 59 und **2** ist 61.
83 in 292 **3**mal; 9 und **3** ist 12, 1; 24, 25 und **4** ist 29; u. s. f.

**14.** Verrichte folgende Divisionen und mache jedesmal auch die Probe:

a) 58056 : 82.
28567 : 53.
11016 : 51.

b) 12035 : 29.
30048 : 58.
78310 : 67.

**15.** Ebenso:

a) 489168 : 516.
388240 : 240.
5228724 : 6137.

b) 238400 : 298.
293962 : 847.
3804423 : 5604.

Berechne mit Anwendung von Vortheilen:

**16.** a) 466320 : 48.
100856 : 28.

b) 8872472 : 56.
5185738 : 64.

**17.** a) 930450 : 25.
2369575 : 25.

b) 524625 : 125.
1398750 : 125.

**18.** a) 123456 × 25.
413210 × 25.

b) 93078 × 125.
75542 × 125.

**19.** Welche Zahl gibt, mit dem Unterschiede der Zahlen 5724 und 4912 multipliciert, die Summe der Zahlen 2345670 und 5222170 zum Producte?

**20.** Das Product zweier Zahlen ist um 1392 kleiner als 45624998, der eine Factor ist 6958; wie groß ist der andere Factor?

**21.** Verrichte noch einmal die Multiplicationen in §. 19, Aufgabe 10, und mache die Probe mit Hilfe der Division.

## Division der Decimalzahlen.

### §. 25.

**a) Division einer Decimalzahl durch eine höhere Rangzahl.**

Um eine Decimalzahl durch 10, 100, 1000 zu dividieren, d. i. um von dem Werte jeder Ziffer den 10ten, 100sten, 1000sten Theil zu erhalten, darf man nur den Decimalpunkt um 1, 2, 3 Stellen nach links rücken. Z. B.

$$\frac{61\cdot48 : 10}{6\cdot148} \qquad \frac{34\cdot56 : 100}{0\cdot3456} \qquad \frac{2354\cdot2 : 1000.}{2\cdot3542}$$

**b) Division einer Decimalzahl durch irgend eine ganze Zahl.**

$$\frac{2\cdot568 : 6}{0\cdot428}$$

25 z : 6 = 4 z, bleibt 1 z;
16 h : 6 = 2 h, bleiben 4 h;
48 t : 6 = 8 t.

Dividiert man Zehntel, Hundertel, Tausendtel, ... durch Einer, so erhält man wieder Einheiten desselben Ranges.

847·85 : 31 = 27·35
227
 108
  155

84 Z : 31 geben 2 Z,
227 E : 31 geben 7 E,
108 z : 31 geben 3 z,
155 h : 31 geben 5 h.

Man dividiert also die Decimalzahl wie eine ganze Zahl und setzt im Quotienten den Decimalpunkt, bevor man die Zehntel des Dividends in Rechnung zieht.

Die erste Ziffer des Quotienten hat auch hier gleichen Stellenwert mit der niedrigsten Ziffer des ersten Theildividends.

Bleibt bei der Division ein Rest übrig, so kann man, da der Wert eines Decimalbruches durch Hinzufügen von Nullen nicht geändert wird, diesem sowie jedem folgenden Reste eine Null anhängen und die Division fortsetzen. Z. B.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $303\cdot8_{00} : 56$ | | $19\cdot934 : 317$ | |
| 23 8 | $5\cdot425$ | 914 | $0\cdot06288\ldots$ |
| 1 40 | | 2800 | |
| 280 | | 2640 | |
| 0 | | 104 | |

Dieses Verfahren kann auch angewendet werden, wenn bei der Division ganzer Zahlen am Ende ein Rest übrig bleibt, da sich jede ganze Zahl als ein Decimalbruch darstellen läßt, wenn man ihr rechts den Decimalpunkt und dann beliebig viele Nullen beifügt. Es wird dabei im Quotienten der Decimalpunkt angebracht, wenn man in dem Reste die erste Decimalnull anhängt. Z. B.:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $5802\cdot_{00} : 75$ | | $836 : 234$ | |
| 552 | $77\cdot36$ | 1340 | $3\cdot572\ldots$ |
| 270 | | 1700 | |
| 450 | | 620 | |
| 0 | | 152 | |

### c) Division durch eine niedrigere Rangzahl.

Da nach §. 20, d) $10.0\cdot1 = 1$, $100.0\cdot01 = 1$, $1000.0\cdot001 = 1$, $52\cdot3.0\cdot1 = 5\cdot23$, $0\cdot56.0\cdot01 = 0\cdot0056$, $25\cdot4.0\cdot001 = 0\cdot0254$ ist, muß umgekehrt $1 : 0\cdot1 = 10 = 1.10$, $1 : 0\cdot01 = 100 = 1.100$, $5\cdot23 : 0\cdot1 = 52\cdot3 = 5\cdot23.10$, $0\cdot0056 : 0\cdot01 = 0\cdot56 = 0\cdot0056.100$ u. s. w. sein. Daraus folgt: *Statt eine Zahl durch eine niedrigere Rangzahl zu dividieren, kann man sie mit der entsprechenden höheren Rangzahl multiplicieren.*

### d) Division durch eine Decimalzahl.

Da die aufeinander folgenden Ziffern des Quotienten erhalten werden, indem man die Division ohne Rücksicht auf die Decimalpunkte wie bei ganzen Zahlen ausführt, so handelt es sich hier nur noch um die Bestimmung des Stellenwertes dieser Ziffern, zu welchem Zwecke es genügt, den *Stellenwert der ersten von Null verschiedenen* (geltenden) Ziffer des Quotienten zu finden. Dieser aber kann aus dem Einmaleins der Stellenwerte durch Umkehrung ermittelt werden. Man untersucht nämlich, mit welcher Rangzahl man die Rangzahl der höchsten, geltenden Ziffer des Divisors multiplicieren muss, um die Rangzahl der höchsten Ziffer oder der aus den zwei höchsten Ziffern gebildeten Zahl des Dividendes zu erhalten, je nachdem die erste geltende Ziffer des Divisors in der höchsten Ziffer oder in der aus den beiden höchsten, geltenden Ziffern gebildeten Zahl des Dividendes enthalten ist. Die so ermittelte Rangzahl gibt den Stellenwert der ersten geltenden Quotientenziffer an.

Z. B. a) 9558·066 : 62·3.

Da 6 in 9 enthalten ist und H × Z = T geben, so hat die erste Quotientenziffer den Stellenwert der Hunderter.

```
9558·066 : 62·3 = 153·42
3328
 2130
  2616
   1246
```

b) 1749·3608 : 0·538 = ?

Da 5 in 1 nicht enthalten ist, so untersucht man, womit die Rangzahl von 5, d. i. z, zu multiplicieren ist, um die Rangzahl der aus den zwei höchsten, geltenden Ziffern gebildeten Zahl 17 des Dividendes, d. i. H, zu ergeben. Da nun z mit T als Product H ergeben, so hat die erste Quotientenziffer den Stellenwert der Tausender, also

1749·3608 : 0·538 = 3.....
(oder 17 H : 5 z = 3 T).

c) 0·810432 : 0·3456 = 2.... (8 z : 3 z = 2 E).

*d) 67·4608 : 0·0022 = 3.... (6 Z : 2 t = 3 Zt).

*e) 0·007632 : 56·4 = 0·0001.. (7 t : 5 Z = 1 zt).

**Aufgaben.**

1. Dividiere durch 2, 3, 4,...8, 9 jede der folgenden Zahlen:
   a) 50·4, 24·8, 7·63, 0·918, 32·2, 4·32;
   b) 37·85, 8·796, 0·9488, 3·262, 6·425, 75·84.
2. Dividiere die Zahl 135·79 durch 10, 100, 1000, 10000, 100000.

Mache bei den nachfolgenden Divisionen auch die Probe.

3. a) 139·5 : 31 = ? 136·62 : 23 = ?
   b) 130·83 : 21 = ? 5·93524 : 18 = ?

4. *a) $14 \cdot 7 : 0 \cdot 1 = ?$ *b) $264 \cdot 3 : 0 \cdot 001 = ?$
$0 \cdot 0459 : 0 \cdot 01 = ?$ $76 \cdot 2 : 0 \cdot 0001 = ?$
c) $379 \cdot 42 : 0 \cdot 4 = ?$ d) $39 \cdot 83 : 0 \cdot 7 = ?$
$3 \cdot 14155 : 0 \cdot 5 = ?$ $0 \cdot 07614 : 0 \cdot 06 = ?$

5. a) $285 \cdot 59 : 5 \cdot 3 = ?$ b) $248 \cdot 67 : 0 \cdot 81 = ?$
$1391 \cdot 52 : 7 \cdot 4 = ?$ $530 \cdot 955 : 0 \cdot 057 = ?$

6. Dividiere jede der Zahlen a) 90889, b) 272·667, c) 45·4445 durch jede der Zahlen m) 0·97, n) 48·5, o) 291.

7. a) $19147 \cdot 8 : 329 = ?$ b) $24 \cdot 0484 : 0 \cdot 472 = ?$
$270 \cdot 2146 : 8 \cdot 69 = ?$ $540 \cdot 9835 : 0 \cdot 02447 = ?$

8. a) $389 \cdot 007 : 52 = ?$ b) $0 \cdot 784 : 3 \cdot 08 = ?$
$7 \cdot 3402 : 0 \cdot 0098 = ?$ $616 \cdot 337 : 0 \cdot 2569 = ?$

9. a) $4 \cdot 554144 : 1 \cdot 506 = ?$ b) $1 : 3 \cdot 14159 = ?$
$0 \cdot 06584508 : 0 \cdot 3451 = ?$ $7 \cdot 470799 : 0 \cdot 00917 = ?$

10. Dividiere 5409835 durch a) 4·61, b) 23·47, c) 489·8.

11. Wie oft muss 4·2052 als Summand gesetzt werden, damit man 12640·8312 erhalte?

12. Dividiere a) 89990166, b) 2149·09526 durch jede der Zahlen m) 599, n) 25·039, o) 364·13.

*13. a) $0 \cdot 0005842 : 10 \cdot 24 = ?$ b) $442 \cdot 021 : 0 \cdot 000493 = ?$
$0 \cdot 002744832 : 357 \cdot 4 = ?$ $2729 \cdot 46 : 0 \cdot 00128 = ?$

## Division einnamiger Zahlen.

### §. 26.

**Aufgaben.**

1. Wie viel fl. sind 2 *K*, 10 *K*, 36 *K*, 124 *K*, 492 *K*?
2. Wie viel kr. sind 4 *h*, 12 *h*, 40 *h*, 76 *h*, 138 *h*?
3. Jemand kauft 8 *hl* Wein für 336 *K*; wie hoch kommt 1 *hl* zu stehen?

   1 *hl* ist der 8te Theil von 8 *hl*; daher kostet 1 *hl* nur den 8ten Theil von 336 *K*, also 42 *K*.

4. Jemand kauft 9 *ha* Wiesen um 3780 fl.; wie viel kostet 1 *ha*?
5. 1 *m* Seidenstoff kostet 24 *K*; wie viel kostet 1 *dm*?
6. 1 *hl* Öl wiegt 95 *kg*; wie viel 1 *l*?
7. Aus 1 *kg* Münzsilber werden 200 Ein-Kronenstücke geprägt; wie viel wiegt 1 solches Stück?
8. Ein Röhrbrunnen liefert 55 *l* Wasser in 5 Minuten, ein anderer 84 *l* in 7 Minuten; welcher ist ergiebiger?
9. In einer Mühle werden in 15 Tagen 36300 *kg* Mehl gemahlen; wie viel in einem Tage?

**10.** Ein Beamter hat eine jährliche Besoldung von 2100 *K*; wie viel bezieht er monatlich?

**11.** Die jährlichen Zinsen eines Capitals betragen 258·36 *K*; wie groß sind die Zinsen für einen Monat?

**12.** Ein Rad macht auf einem Wege von 1241·5 *m* 382 Umdrehungen; wie groß ist sein Umfang?

**13.** 1 *m* Tuch kostet 5 *K*; wie viel *m* erhält man für 135 *K*?

Man erhält so vielmal 1 *m*, wie oft 5 *K* in 135 *K* enthalten sind;

135 *K* : 5 *K* = 27.

Man erhält also 27mal 1 *m*, d. i. 27 *m*.

**14.** Wenn 1 *kg* 0·5 fl. kostet, wie viel *kg* erhält man für 37 fl.?

**15.** Wie groß ist eine Baustelle, welche 14400 *K* kostet, wenn das $m^2$ mit 9 *K* bezahlt wird?

**16.** Für 16·4 *m* bezahlt man 155·8 *K*; wie viel für 1 *m*?

**17.** 2976 *K* werden unter mehrere Personen so vertheilt, dass jede 24 *K* erhält; wie viele Personen sind es?

**18.** 59415 *K* sind unter 255 Personen zu gleichen Theilen zu vertheilen; wie viel kommt auf eine Person?

**19.** In einer Baumpflanzung befinden sich in regelmäßigen Reihen 31928 Pflanzen, und zwar in jeder Reihe 104 Pflanzen; wie viel Reihen sind da?

**20.** Auf einer Eisenbahn wurden im Jahre 1891 1250855 Personen befördert; wie viel kamen durchschnittlich auf einen Tag?

**21.** Die Höhe einer Treppe soll 4 *m*, und die Höhe jeder Stufe 0·125 *m* betragen; wie viele Stufen muss die Treppe erhalten?

**22.** Ein Kaufmann erhielt 186 Ries Papier à 8·4 *K* und verkaufte dasselbe mit 208·32 *K* Gewinn; wie theuer hat er 1 Ries verkauft?

**23.** Ein Kaufmann hat 75 *m* Tuch um 336 fl. gekauft; wie viel *m* muss er zu 5·4 fl. verkaufen, um 31·28 fl. zu gewinnen?

**24.** 0·741893 Myriameter betragen 1 geographische Meile; wie viel geogr. Meilen beträgt ein Myriameter?

**25.** Wie viel Kronen betragen 2127·5 deutsche Mark, wenn 1 Krone zu 0·85 Mark gerechnet wird?

**26.** Ein Sack, welcher mit 500 Zwanzig-Kronenstücken gefüllt ist, wiegt 3·4147 *kg*; der leere Sack wiegt 0·0272 *kg*; wie groß ist das Gewicht eines Zwanzig-Kronenstückes?

**27.** Ein Land hat 2462886 Einwohner, von denen durchschnittlich 72 auf eine Fläche von 1 $km^2$ kommen; wie viel $km^2$ beträgt der Flächeninhalt des Landes?

28. Das Herzogthum Salzburg hat auf einer Fläche von 7154·54 $km^2$ 173510 Einwohner; wie viele Einwohner kommen im Durchschnitte auf 1 $km^2$?

29. Im Jahre 1891 zählte ein Land bei einer Bevölkerung von 2207520 Seelen 61320 Sterbefälle; a) wie viele Sterbefälle kamen durchschnittlich auf 1 Tag, b) auf wie viele Einwohner kam 1 Sterbefall?

30. Wenn man 3 45 *hl* Wein à 48 *K* mit 5·55 *hl* à 60 *K* mischt, welchen Wert hat 1 *l* dieser Mischung?

31. Jemand kauft 10 *kg* Zucker zu 35 kr., 10 *kg* zu 37 kr. und 40 *kg* zu 39 kr.; wie hoch kommt im Durchschnitte 1 *kg* zu stehen?

32. Jemand hat von einer Ware 60 *kg* à 60 *h* und 80 *kg* à 55 *h*; er setzt noch 100 *kg* einer dritten Sorte dazu und erhält dadurch eine Mischung, von der das *kg* 50 *h* kostet; wie viel kostet das *kg* der letzten Sorte?

# II. Maße, Gewichte und Münzen.

## §. 27.

### 1. Zeit- und Bogenmaße.

Die Zeit wird nach Jahren, Monaten, Wochen, Tagen u. s. w., und zwar nach folgender Eintheilung bestimmt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 Jahr | hat | 12 Monate, | 1 Tag | hat | 24 Stunden, |
| 1 Monat | „ | 30 Tage, | 1 Stunde | „ | 60 Minuten, |
| 1 Woche | „ | 7 „ | 1 Minute | „ | 60 Secunden. |

In der Zinsrechnung wird zwar gewöhnlich der Monat zu 30 Tagen, und somit das Jahr zu 360 Tagen angenommen; nach dem Kalender aber hat der Februar 28 oder 29 Tage, April, Juni, September, November haben je 30 und die übrigen Monate haben je 31 Tage, so dass auf ein gemeines Jahr 365, auf ein Schaltjahr 366 Tage kommen.

Der Umfang eines Kreises wird in 360 gleiche Bogen getheilt, welche Grade heißen. Jedem Bogengrade entspricht am Mittelpunkte des Kreises ein Winkel, welcher auch ein Grad, und zwar ein Winkelgrad genannt wird. Sowohl bei den Bogen als bei den Winkeln wird jeder Grad ($^0$) in 60 Minuten ($'$) und jede Minute in 60 Secunden ($''$) eingetheilt.

### 2. Zählmaße.

Ein Schock hat 60, ein Schilling 30, ein Mandel 15, ein Dutzend 12 Stücke.

Ein Ballen Papier hat 10 Ries, ein Ries 10 Buch, ein Buch 10 Lagen, eine Lage 10 Bogen.

§. 28.

### 3. Maße und Gewichte der österreichisch-ungarischen Monarchie.

Der neuen österr. Maß- und Gewichtsordnung vom 25. Juli 1871 liegt das metrische System, das zuerst in Frankreich und später in den meisten europäischen Staaten eingeführt wurde, zugrunde.

Die Normaleinheit dieses Systems bildet das Meter, welches französische Gelehrte als den 10000000sten Theil der Länge eines Meridianquadranten unserer Erde annahmen, welches aber nach späteren astronomischen Messungen genauer nur als der 10000855ste Theil des Meridianquadranten befunden wurde.

Aus der Länge des Meters werden nicht nur die Flächen- und Körpermaße, sondern auch die Gewichte dieses Systems auf eine sehr einfache Art abgeleitet.

#### Längenmaße.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter.

Die Vielfachen und Untertheilungen des metrischen Systems werden sowohl beim Längen- als bei den übrigen Maßen zur leichteren Auffassung und bequemeren Rechnung durchgängig nach dem Decimalsysteme gebildet. Die Vielfachen sind 10fache, 100fache, 1000fache, 10000fache; die Untertheilungen 10tel, 100stel, 1000stel. Sie bekommen jedoch nicht, wie in den alten Systemen, besondere Eigennamen, sondern behalten den Namen der Grundeinheit, welchem zur näheren Bestimmung gewisse Wörter vorgesetzt werden, die man, damit sie für alle Völker gleich bleiben, aus der griechischen und lateinischen Sprache entlehnt hat.

Die Vielfachen sowohl des Meters als der darauf beruhenden Flächen-, Körper- und Gewichtsmaße benennt man dadurch, dass man den Namen der Grundeinheit die griechischen Zahlwörter mit der Endung a oder o, und zwar

Deka für das 10fache,
Hekto „ „ 100fache,
Kilo „ „ 1000fache und
Myria „ „ 10000fache

vorsetzt. Die Untertheilungen werden durch Vorsetzen lateinischer Zahlwörter mit der Endung auf i bezeichnet, und zwar durch

Deci für den 10ten Theil,
Centi „ „ 100sten „
Milli „ „ 1000sten „

Demgemäß ergibt sich für die Vielfachen und Untertheilungen des metrischen Längenmaßes folgende Stufenleiter:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 Myriameter ($\mu m$) | = | 10000 | Meter, |
| 1 Kilometer ($km$) | = | 1000 | „ |
| 1 Hektometer | = | 100 | „ |
| 1 Dekameter | = | 10 | „ |
| 1 Meter ($m$) | = | 1 | „ |
| 1 Decimeter ($dm$) | = | 0·1 | „ |
| 1 Centimeter ($cm$) | = | 0·01 | „ |
| 1 Millimeter ($mm$) | = | 0·001 | „ |

Jedes Maßglied aus der Stufenleiter der Längenmaße hat 10 Einheiten des nächstniedrigeren Maßgliedes.

In die österr. Maß- und Gewichtsordnung sind jedoch das Hektometer und das Dekameter, da sie für das praktische Leben und für die Wissenschaft entbehrlich erscheinen, nicht aufgenommen worden. In derselben besteht daher für die Längenmaße folgende Eintheilung:

$$1 \text{ Myriameter } (\mu m) = 10\, km = 10000\, m,$$
$$1\, km = 1000\, m;$$
$$1\, m = 10\, dm = 100\, cm = 1000\, mm,$$
$$1\, dm = 10\, cm = 100\, mm,$$
$$1\, cm = 10\, mm.$$

**Flächenmaße.**

a) Als Flächenmaße dienen allgemein Quadrate, deren Seiten den Längeneinheiten gleich sind. Ein Quadrat, dessen Seite 1 Meter lang ist, heißt ein Quadratmeter ($m^2$). Theilt man jede Seite eines Quadratmeters in 10 gleiche Theile und verbindet die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch gerade Linien, so entstehen 100 Quadrate, deren jedes ein Decimeter zur Seite hat, also ein Quadratdecimeter ($dm^2$) ist; 1 $m^2$ hat demnach 100 $dm^2$. Verfährt man auf ähnliche Art mit dem Quadratdecimeter, so erhält man 100 Quadratcentimeter ($cm^2$); und ebenso ergibt sich 1 $cm^2$ = 100 $mm^2$. — In gleicher Weise folgt auch, dass 1 Quadratmyriameter = 100 $km^2$, 1 $km^2$ = 100 Quadrathektometer à 100 Quadratdekameter à 100 $m^2$ ist.

Jedes Maßglied aus der Stufenleiter der Flächenmaße hat also 100 Einheiten des nächstniedrigeren Maßgliedes.

Da das Quadrathektometer und das Quadratdekameter in der österr. Maß- und Gewichtsordnung nicht vorkommen, so hat man in dieser für die allgemeinen Flächenmaße folgende Scala:

1 Quadratmyriameter ($\mu m^2$) $= 100\ km^2 = 100000000\ m^2$,

$1\ km^2 = 1000000\ m^2$,

$1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ mm^2$,

$1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10000\ mm^2$,

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$.

b) Die Einheit des Bodenflächenmaßes bildet das Ar ($a$), d. i. ein Quadrat, dessen Seite 10 $m$ lang ist; 1 Ar ist also gleich 100 $m^2$.

Vielfaches: Das Hektar ($ha$) $= 100\ a$.

Es ist demnach

$1\ ha = 100\ a = 10000\ m^2$,

$1\ a = 100\ m^2$.

$1\ km^2$ ist $= 100\ ha$.

**Körpermaße.**

a) Wie das Flächenmaß, so beruht auch das Körpermaß auf dem Längenmaße. Man wählt dafür Würfel, deren Seiten oder Kanten den Längeneinheiten gleich sind. Ein Würfel, dessen Seite 1 Meter ist, heißt ein Cubikmeter ($m^3$). Jede Fläche eines Cubikmeters ist ein Quadratmeter und enthält 100 Quadratdecimeter. Denkt man sich das Cubikmeter hohl, die Grundfläche desselben in 100 $dm^2$, und die Höhe in 10 $dm$ getheilt, so kann man zunächst auf der Grundfläche 100 Würfel auflegen, deren jeder 1 $dm$ zur Seite hat und daher ein Cubikdecimeter ($dm^3$) heißt. Diese 100 Cubikdecimeter bilden eine Schicht von 1 $dm$ Höhe. Da aber das Cubikmeter 10 $dm$ hoch ist, so fasst es 10 solche Schichten von je 100 $dm^3$, daher im ganzen 1000 $dm^3$; also $1\ m^3 = 1000\ dm^3$. Ebenso folgt, dass $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$, $1\ cm^3 = 1000\ mm^3$, dass ferner 1 Cubikmyriameter $= 1000\ km^3$, $1\ km^3 = 1000$ Cubikhektometer u. s. w. ist.

Jedes Maßglied aus der Stufenleiter der allgemeinen Körpermaße enthält also 1000 Einheiten des nächstniedrigeren Maßgliedes.

In der österr. Maß- und Gewichtsordnung entfallen das Cubikhektometer und das Cubikdekameter; es besteht daher für die allgemeinen Körpermaße folgende Eintheilung:

1 Cubikmyriameter ($\mu m^3$) $= 1000\ km^3 = 1000000000000\ m^3$,
$1\ km^3 = 1000000000\ m^3$,
$1\ m^3 = 1000\ dm^3 = 1000000\ cm^3 = 1000000000\ mm^3$,
$1\ dm^3 = 1000\ cm^3 = 1000000\ mm^3$,
$1\ cm^3 = 1000\ mm^3$.

b) Die Einheit des Hohlmaßes sowohl für trockene als für flüssige Gegenstände ist das Liter ($l$), welches einem Cubikdecimeter gleich ist.

Vielfaches: das Hektoliter ($hl$) = 100 Liter,
Untertheilungen: das Deciliter ($dl$) = 0·1 „
das Centiliter ($cl$) = 0·01 „

Es ist demnach

$$1\ hl = 100\ l = 1000\ dl = 10000\ cl,$$
$$1\ l = 10\ dl = 100\ cl,$$
$$1\ dl = 10\ cl.$$

**Gewichte.**

Die neuen Gewichte werden aus den Körpermaßen hergeleitet.

Die Grundbenennung für die Gewichte bildet das Gramm ($g$), d. i. das Gewicht eines Cubikcentimeters destillierten Wassers im Zustande der größten Dichte.

Da jedoch eine so kleine Wassermenge, wie sie ein Cubikcentimeter fasst, nicht leicht genau gemessen und gewogen werden kann, so füllte man, um das Urgewicht des metrischen Systems zu bestimmen, das 1000fache dieses Rauminhaltes, d. i. ein Cubikdecimeter, mit reinem Wasser im Zustande seiner größten Dichte, welche bei der Temperatur 4 Grad des 100theiligen Thermometers vorhanden ist, und wog dasselbe im luftleeren Raume ab. Das so gefundene Gewicht war das 1000fache eines Gramms, also ein Kilogramm ($kg$).

Das Kilogramm, gleich dem Gewichte eines Cubikdecimeter destillierten Wassers im luftleeren Raume bei der Temperatur von 4 Grad des 100theiligen Thermometers, ist die Einheit des österreichischen Gewichtes.

Vielfache: die Tonne ($t$) = 1000 $kg$; der metrische Centner ($q$) = 100 $kg$.

Untertheilungen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| das Dekagramm ($dkg$) | = | 0·01 | Kilogr. | = | 10 | Gramm, |
| „ Gramm ($g$) | = | 0·001 | „ | = | 1 | „ |
| „ Decigramm ($dg$) | = | 0·0001 | „ | = | 0·1 | „ |
| „ Centigramm ($cg$) | = | 0·00001 | „ | = | 0·01 | „ |
| „ Milligramm ($mg$) | = | 0·000001 | „ | = | 0·001 | „ |

Es ist demnach

$$1\ t = 10\ q = 1000\ kg = 100000\ dkg = 1000000\ g,$$
$$1\ q = 100\ kg = 10000\ dkg = 100000\ g;$$
$$1\ kg = 100\ dkg = 1000\ g,$$
$$1\ dkg = 10\ g;$$
$$1\ g = 10\ dg = 100\ cg = 1000\ mg,$$
$$1\ dg = 10\ cg = 100\ mg,$$
$$1\ cg = 10\ mg.$$

Zur Prüfung des Feingehaltes von Gold- und Silberlegierungen besteht kein besonderes Gewicht. Der Feingehalt wird nach Tausendtheilen bestimmt. Der Feingehalt des Goldes oder Silbers ist 900 Tausendtheile ($\frac{900}{1000}$ oder $\frac{9}{10}$), heißt: unter 1000 Gewichtstheilen des legierten Metalles sind 900 Theile Gold oder Silber, und 100 Theile Zusatz (Kupfer). Feines Gold oder Silber ist 1000theilig.

§. 29.

## 4. Münzsystem der österreichisch-ungarischen Monarchie.

a) Seit 1. November 1858 war der gesetzliche Münz- und Rechnungsfuß der österreichisch-ungarischen Monarchie der 45-Guldenfuß, wonach aus einem halben Kilogramm feinen Silbers 45 Gulden geprägt wurden. Der Gulden (fl.) wird in 100 Kreuzer (kr.) eingetheilt. Dieses Geld wird die österreichische Währung genannt.

Geprägte Münzen der österr. Währung:

In Silber: Ein-Guldenstücke; als Scheidemünze: Stücke zu 10 Kreuzer.

In Kupfer: als Scheidemünze: Stücke zu 1 und $^1/_2$ Kreuzer.

An Papiergeld hat man Banknoten zu 10, 100 und 1000 Gulden, und Staatsnoten zu 5 und 50 Gulden österreichischer Währung.

b) Nach dem Gesetze vom 2. August 1892 tritt an die Stelle der bisherigen österreichischen Währung die Goldwährung, deren Rechnungseinheit die Krone ist. Die Krone ($K$) wird in 100 Heller ($h$) eingetheilt.

Von Landesgoldmünzen werden ausgeprägt: Zwanzig-Kronenstücke, von denen 164, und Zehn-Kronenstücke, von denen 328 auf ein Kilogramm Feingold gehen.

Auch werden, wie bisher, die österreichischen Ducaten, und zwar $81\frac{189}{355}$ Stück aus einer Wiener Mark = 0·280668 $kg$ Feingold, als Handelsmünze ausgeprägt.

Außer den Landesgoldmünzen werden folgende Münzen der Kronenwährung ausgeprägt: Silbermünzen: Ein-Kronenstücke; Nickelmünzen: Stücke zu 20 und 10 Heller; Bronzemünzen: Stücke zu 2 und 1 Heller.

Außerdem werden noch die sogenannten Levantiner Thaler mit dem Bildnisse der Kaiserin Maria Theresia und der Jahreszahl 1780, wie bisher, 12 Stück aus 1 Wiener Mark = 0·280668 *kg* Feinsilber, als Handelsmünze geprägt.

Die auf österr. Währung lautenden Papiergeldzeichen, sowie die in dieser Währung geprägten Silber- und Kupfermünzen bleiben bis auf weiteres noch im Umlaufe, und zwar wird 1 Gulden = 2 Kronen, 1 Kreuzer = 2 Heller gerechnet.

Bei Zahlungen, welche in Goldgulden zu leisten sind, insbesondere bei Zollzahlungen, werden 42 Goldgulden = 100 Kronen gerechnet.

# III. Rechnen mit mehrnamigen Zahlen.

## Resolvieren.

### §. 30.

Einheiten einer höheren Benennung in Einheiten einer niedrigeren Benennung derselben Art verwandeln, heißt sie **resolvieren**.

Die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer niedrigeren Benennung eine Einheit der höheren Benennung enthält, heißt die **Verwandlungszahl** zwischen diesen beiden Benennungen.

Das Resolvieren einer benannten Zahl in eine niedrigere Benennung geschieht durch die **Multiplication** mit der entsprechenden Verwandlungszahl. Z. B.

Wie viel Minuten sind 21 Stunden?

1 Stunde hat 60 Minuten; die gesuchte Zahl der Minuten ist also 21mal so groß wie von einer Stunde; mithin

$$\frac{60 \times 21}{1260} \text{ Minuten.}$$

Bei benannten Zahlen, deren Benennungen dem Decimalsysteme angehören, d. i. deren Verwandlungszahlen 10, 100, 1000 sind, kann das Resultat des Resolvierens unmittelbar angegeben werden; z. B.

8 *m* 7 *dm* = 87 *dm*; 12 *hl* 8 *l* = 1208 *l*.

**Aufgaben.**

1. Wie viel Secunden sind 5 Grad 14 Minuten 53 Secunden?

$5^0$ sind $5 \times 60 = 300'$ und $14'$ dazu sind $314'$; $314'$ sind $314 \times 60 = 18840''$ und $53''$ dazu sind $18893''$.

$$5^0\ 14'\ 53''$$
$$314'$$
$$18893''.$$

**2.** Wie viele Tage sind
a) 7 Mon. 24 Tage? b) 3 Jahre 8 Mon. 15 Tage?

**3.** Wie viele Secunden betragen
a) 51 Min. 13 Sec.? b) 18 Stund. 35 Min. 40 Sec.?

**4.** Wie viel Secunden hat ein gemeines Jahr?

**5.** Wie viel Heller sind
a) 39 *K* 38 *h*? b) 250 *K* 90 *h*? c) 310 *K* 45 *h*?
d) 4 *K* 13 *h*? e) 45 *K* 9 *h*? f) 206 fl. 5 kr.?

**6.** Wie viel Kreuzer sind a) 0·37 fl.? b) 0·085 fl.? c) 13·59 fl.?

**7.** Wie viel *cm* sind a) 8 *m*? b) 5 *dm* 8 *cm*? c) 6·35 *m*?

**8.** Wie viel $cm^2$ sind a) 8 $dm^2$? b) 7 $m^2$ 15 $dm^2$? c) 0·7586 $m^2$?

**9.** Wie viel *l* sind a) 37 *hl*? b) 2 *hl* 55 *l*? c) 0·385 *hl*?

**10.** Wie viel *g* sind a) 35 *kg*? b) 4 *kg* 8 *dkg*? c) 1·38 *kg*?

**11.** Wie viel Bogen Papier enthalten
a) 5 Buch 15 Bogen? b) 4 Ries 7 Buch 12 Bogen?

**12.** Wie viel Grad, Minuten und Secunden sind 43·275 Grad?

$$43\cdot2\,75^0 = 43^0\;16'\;30''.$$
$$1\;6\cdot50'$$
$$3\;0\cdot0''$$

**13.** Das Sonnenjahr hat 365·24222 Tage; um wie viel Stunden, Minuten und Secunden ist es größer als das bürgerliche Jahr von 365 Tagen?

**14.** Wie viel Kronen und Heller sind
a) 3·92 *K*? b) 155·07 *K*? c) 207·535 *K*?

**15.** Wie viel *m*, *dm*, *cm* und *mm* sind
a) 5·397 *m*? b) 318·091 *m*? c) 0·9075 *m*?

**16.** Wie viel *ha*, *a* und $m^2$ sind
a) 129·235 *ha*? b) 6·2325 *ha*? c) 49·7801 *ha*?

**17.** Wie viel *kg*, *dkg* und *g* sind
a) 7·345 *kg*? b) 0·075 *kg*? c) 25·803 *kg*?

### Das Reducieren.

§. 31.

Einheiten einer niedrigeren Benennung in Einheiten einer höheren Benennung derselben Art verwandeln, heißt sie **reducieren.**

Das Reducieren einer benannten Zahl auf eine höhere Benennung geschieht mittelst der **Division** durch die bezügliche Verwandlungszahl. Z. B.

Wie viel Tage sind 816 Stunden? — 1 Tag hat 24 Stunden; die gesuchte Zahl der Tage ist also der 24ste Theil der gegebenen Zahl der Stunden; folglich

816 : 24 = 34 Tage.

Bei benannten Zahlen, welche nach dem Decimalsystem gebildet sind, kann das Ergebnis der Reduction unmittelbar angegeben werden.

**Aufgaben.**

1. Wie viel Tage, Stunden und Minuten sind 31024 Minuten?

31024 (Min.) : 60
4 Min. 517 (Stund.) : 24
37 21 Tage
13 Stunden

also: 31024 Minuten = 21 Tage 13 Stund. 4 Min.

Reduciere auf Ganze der höheren Benennungen:

2. a) 148134 Zeitsecunden, b) 28481 Bogensecunden.
3. a) 356 *h.* b) 3809 *h.* c) 79085 kr.
4. a) 2735 *cm.* b) 19628 *mm.* c) 544063 *mm.*
5. a) 5563 $dm^2$. b) 31446 *a.* c) 850582 $m^2$.
6. a) 7048 *g.* b) 94722 *dg.* c) 92258 *mg.*
7. Die Zeit von einem Vollmonde zum andern beträgt 2551443 Secunden; wie viel sind dies Tage, Stunden, Minuten und Secunden?
8. Ein Buch von 14 Druckbogen erschien in einer Auflage von 4500 Exemplaren; wie viel Ries wurden dazu erfordert?
9. Reduciere 83° 56′ 24″ auf Grade.

24 : 60 = 0·4′ also 83° 56′ 24″ = 83·94°
56·4 : 60 = 0·94°;

Verwandle in einen Decimalbruch der nächst höheren Benennung:

10. a) 16 *h,* b) 38 *h,* c) 1365 *h.*
11. a) 4 *dm,* b) 37 *dm,* c) 564 *cm.*
12. a) 13·5 *a,* b) 602 *l,* c) 28·4 *dkg.*

Reduciere auf einen Decimalbruch der höchsten Benennung:

13. a) 12 *K* 24 *h.* b) 75 fl. $8\frac{1}{2}$ kr.
14. a) 5 *m* 3 *dm* 8 *cm* 1 *mm.* b) 1 $m^2$ 83 $dm^2$ 5 $cm^2$ 23 $mm^2$.
15. a) 3 $m^3$ 618 $dm^3$ 708 $cm^3$. b) 35 *hl* 87 *l* 7 *dl.*
16. a) 29 *kg* 4 *dkg* 5 *g.* b) 3 *g* 4 *dg* 9 *mg.*
17. a) 53° 15′ 6″. b) 12 Tage 18 Stund. 45 Min.

## Addition mehrnamiger Zahlen.

### §. 32.

Beim Addieren mehrnamiger Zahlen beginnt man bei den Zahlen der niedrigsten Benennung und reduciert die Summe jeder Be-

10000

752

nennung, wenn sie Ganze der nächst höheren Benennung enthält, auf diese höhere Benennung. Man kann auch alle Summanden auf dieselbe höchste oder niedrigste Benennung bringen und dann die Addition verrichten.

**Aufgaben.**

1. 308 $K$ 45 $h$ oder 308·45 $K$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 308 $K$ 45 $h$ | | 308·45 $K$ | |
| 92 „ 88 „ | | 92·88 „ | |
| 157 „ 64 „ | | 157·64 „ | |
| 250 „ 75 „ | | 250·75 „ | |
| 809 $K$ 72 $h$ | | 809·72 $K$ | |

Addiere folgende mehrnamige Zahlen:

2. a) 23 $m$ 7 $dm$ 8 $cm$ 5 $mm$. b) 247 $ha$ 38 $a$ 15 $m^2$

| a) | b) |
|---|---|
| 23 $m$ 7 $dm$ 8 $cm$ 5 $mm$. | 247 $ha$ 38 $a$ 15 $m^2$ |
| 47 „ 3 „ 4 „ 8 „ | 109 „ 74 „ 8 „ |
| 16 „ 9 „ 6 „ 7 „ | 328 „ 9 „ 76 „ |

3.

| a) | b) |
|---|---|
| 123 $hl$ 83 $l$ | 58 $kg$ 75 $dkg$ 8 $g$ |
| 86 „ 72 „ | 32 „ 19 „ 6 „ |
| 174 „ 60 „ | 19 „ 6 „ 5 „ |

4.

| a) | b) |
|---|---|
| 57 Tage 19 St. 47 Min. | 95° 47′ 51″. |
| 11 „ 22 „ 14 „ | 51° 18′ 40″. |
| 38 „ 8 „ 55 „ | 32° 53′ 29″. |

5. Ein Kaufmann hat nachstehende Summen zu fordern: 351 $K$ 84 $h$, 247 $K$ 73 $h$, 480 $K$ 76 $h$, 37 $K$ 8 $h$, 147 $K$ 68 $h$; wie groß ist seine Gesammtforderung?

6. Von zwei Gärten misst der eine 148 $m^2$ 24 $dm^2$, der andere ist um 137 $m^2$ 18 $dm^2$ größer; wie groß sind beide zusammen?

7. Europa liegt zwischen 11° 50′ 20″ westlicher und 60° 30′ östlicher Länge von Paris; wie viel Längengrade umfasst dieser Erdtheil?

8. Die geogr. Breite von Triest ist 45° 38′ 8″, Wien liegt 2° 34′ 27″ nördlicher als Triest, Prag liegt 1° 52′ 54″ nördlicher als Wien; wie groß ist die geogr. Breite von Wien und von Prag?

9. In Paris tritt der Mittag 48 Minuten 19 Secunden später ein als in Prag; wie viel zeigt eine Uhr in Prag, wenn es in Paris 3 Uhr 55 Min. 40 Sec. ist?

10. Jemand wurde am 5. Jänner 1809 geboren und starb in einem Alter von 60 Jahren, 6 Monaten und 12 Tagen; an welchem Tage war dies?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Geburtszeit: | 1808 Jahre | — Mon. | 4 Tage | nach Chr. G. |
| Lebensdauer: | 60 „ | 6 „ | 12 „ | |
| Sterbezeit: | 1868 Jahre | 6 Mon. | 16 Tage | nach Chr. G. |

Er starb also am 17. Juli 1869.

**11.** Kaiser Franz Josef I. wurde am 18. August 1830 geboren und übernahm in einem Alter von 18 Jahren 3 Monaten 14 Tagen die Regierung; wann war dies?

**12.** Kaiser Josef II. wurde am 13. März 1741 geboren und starb in einem Alter von 48 Jahren 11 Monaten und 7 Tagen; wann starb er?

**13.** Schiller war am 10. November 1759 geboren und erreichte ein Alter von 45 Jahren 5 Monaten 29 Tagen; wann starb er?

**14.** Die Zeit von einem Vollmond bis zum andern (synodischer Monat) beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden; wenn nun am 18. Mai um 5 Uhr 27 Min. 29 Sec. abends Vollmond ist, wann tritt der nächste Vollmond ein?

## Subtraction mehrnamiger Zahlen.

### §. 33.

Auch das Subtrahieren mehrnamiger Zahlen wird bei der niedrigsten Benennung angefangen. Ist bei einer Benennung die Zahl des Subtrahends größer als jene des Minuends, so wird letztere, damit man subtrahieren könne, um so viel Einheiten vermehrt, als ihrer eine nächst höhere Einheit enthält; sodann wird aber, damit die Differenz ungeändert bleibe, auch der Subtrahend in der nächst höheren Benennung um 1 vermehrt. Bei Benennungen mit decimaler Theilung ist es am einfachsten, Minuend und Subtrahend als Decimalbrüche der höchsten Benennung darzustellen.

**Aufgaben.**

**1.** Von 135° 48′ 37″ soll subtrahiert werden
62° 25′ 52″; wie viel bleibt übrig?
73° 22′ 45″.

Subtrahiere:

**2.** a) 81 *m* 61 *cm* 5 *mm*
27 „ 67 „ 8 „
b) 650 $m^2$ 47 $dm^2$ 55 $cm^2$
278 „ 8 „ 64 „

**3.** a) 5 *ha* 28 *a*
97 „ 25 $m^2$
b) 53 *hl* 9 *l*
14 „ 72 „

**4.** a) 789 *g* 502 *mg*
291 „ 375 „
b) 662 *K* 37 *h*
284 „ 8 „

**5.** a) 215 fl. 35 kr.
96 „ 68 „
b) 23 Tage 12 St. 35 Min.
9 „ 20 „ 48 „

**6.** Von einem Acker, welcher 2 *ha* 54·7 *a* groß ist, wird eine Fläche von 1 *ha* 81·5 *a* mit Weizen, der Rest mit Korn besäet; wie viel beträgt die Kornfläche?

7. Die Eisenbahnstrecke von Wien bis Triest beträgt 577 *km* 340 *m*; wenn nun die Strecke von Wien bis Mürzzuschlag 118 *km* 289 *m*, von Mürzzuschlag nach Laibach 314 *km* 118 *m* beträgt, wie lang ist die Strecke von Laibach nach Triest?

8. Die Summe der drei Winkel eines Dreieckes ist gleich 180°; wie groß ist der dritte Winkel, wenn die beiden anderen Winkel 57° 25′ 46″ und 71° 53′ 50″ betragen?

9. Innsbruck hat 9° 3′ 41″, Wien 14° 2′ 36″, Lemberg 21° 42′ 40″ östlicher Länge von Paris; wie viel Längengrade liegt Lemberg östlicher als jede der zwei anderen Städte?

10. Eine Uhr geht um 13 Min. 8 Sec. zu früh; wenn nun dieselbe 7 Uhr 3 Min. zeigt, welches ist dann die richtige Zeit?

11. Wenn eine Uhr in Graz 4 Stund. 52 Min. 18 Sec. zeigt, weist eine Uhr in Paris 3 Stund. 59 Min. 50 Sec.; wie viel Uhr ist es in Paris, wenn die Uhr in Graz 8 Stund. 23 Min. 48 Sec. zeigt?

12. Jemand wurde am 3. Juni 1802 geboren und starb am 25. September 1877; wie alt ist er geworden?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Sterbezeit: | 1876 J. | 8 M. | 24 T. | nach Chr. G. |
| Geburtszeit: | 1801 „ | 5 „ | 2 „ | „ „ „ |
| Alter | 75 J. | 3 M. | 22 T. | |

13. Die Kaiserin Maria Theresia wurde am 13. Mai 1717 geboren und starb am 29. November 1780; welches Alter erreichte sie?

14. Kaiser Franz I. starb am 2. März 1835 im Alter von 67 Jahren 18 Tagen; wann wurde er geboren?

15. Ein Capital war am 1. Juli 1885 fällig, wurde jedoch 3 Monate 24 Tage früher bezahlt; an welchem Tage geschah dies?

## Multiplication mehrnamiger Zahlen.

### §. 34.

Soll eine mehrnamige Zahl mit einer unbenannten multipliciert werden, so multipliciert man die Einheiten einer jeden Benennung von der niedrigsten angefangen und reduciert die bei den niedrigeren Benennungen erhaltenen Producte. Ist die Verwandlungszahl 10, 100 oder 1000, so gestaltet sich die Rechnung am einfachsten, wenn man die gegebene mehrnamige Zahl in einen Decimalbruch der höchsten Benennung verwandelt und dann die Multiplication verrichtet.

**Aufgaben.**

1. Multipliciere 14 Tage 12 Stunden mit 9.

14 T. 12 St. × 9 — 130 T. 12 St.

12 St. × 9 = 108 St. = 4 T. 12 St.

14 T. × 9 = 126 T.; 126 T. + 4 T. = 130 T.

2. 37 fl. 65 kr. × 31.

1167 fl. 15 kr.

37·65 fl. × 31

1129·5

1167·15 fl. = 1167 fl. 15 kr.

3. a) 25 *m* 3 *dm* 38 *mm* × 25 = ? b) 37 *km* 287 *m* × 9 = ?

4. a) 7 *ha* 5·2 *a* × 146 = ? b) 15 *hl* 56 *l* × 39 = ?

5. a) 8 *kg* 47 *dkg* × 64 = ? b) 317 *K* 84 *h* × 542 = ?

6. Wenn 1 Ducaten 11 *K* 29 *h* gilt, wie viel betragen 25 Ducaten?

7. Ein *hl* Gerste wiegt 64 *kg* 15 *dkg*; wie viel wiegen 43 *hl*?

8. Wie lang ist eine Schnur, die sich um eine Welle, deren Umfang 3 *dm* 5 *cm* 8 *mm* ist, 58mal herumwinden lässt?

9. Ein Mondmonat beträgt 29 Tage 12 Stunden 44 Minuten 3 Secunden; wie viel betragen 12 Mondmonate?

10. Ein Kaufmann kauft 128 *m* 28 *cm* à 8 *K* 54 *h* das *m*, und 106 *m* 52 *cm* à 6 *K* 12 *h* das *m*; er verkauft die ganze Ware zu 7 *K* 92 *h* das *m*; wie viel hat er dabei gewonnen oder verloren?

11. Zwei Körper bewegen sich zu gleicher Zeit von dem nämlichen Orte aus, a) in gleicher, b) in entgegengesetzter Richtung. Wenn nun der erste in jeder Minute 38 *m* 2·5 *dm*, der zweite 32 *m* 1·8 *dm* zurücklegt, wie weit werden sie in jedem Falle nach 56 Minuten von einander entfernt sein?

12. Wie viel Längengrade ein Ort weiter gegen Osten liegt als ein anderer, so oftmal 4 Zeitminuten früher ist es daselbst Mittag, d. i. dem Längenunterschiede von $1^0$ entspricht in der Uhrzeit eine Differenz von 4 Zeitminuten. Bestimme aus den Angaben in §. 33, Aufgabe 9, wie viel Uhrzeit man in Paris, Innsbruck, Lemberg hat, wenn es in Wien 11 Uhr 52 Minuten 15 Secunden vormittags ist?

13. Wenn man das Sonnenjahr, welches 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 48 Secunden beträgt, zu 365 Tagen rechnet und wegen des dabei Vernachlässigten jedes vierte Jahr als Schaltjahr mit 366 Tagen annimmt; wie groß wird der Fehler, den man bei dieser Rechnungsweise in 400 Jahren begeht?

## Division mehrnamiger Zahlen.

### §. 35.

a) Ist eine mehrnamige Zahl durch eine unbenannte zu dividieren (Aufgabe des Theilens), so dividiert man die Einheiten jeder Benennung von der höchsten angefangen, indem man dabei den jedesmaligen Rest in die niedrigere Benennung auflöst und die im Dividend vorhandenen Einheiten dieser Benennung dazu zählt. Man kann auch die mehrnamige Zahl zuerst in die niedrigste oder höchste Benennung verwandeln und dann dividieren, z. B.

Wie viel ist der 26ste Theil eines Bogens von 116° 34′?

116° 34′ : 26 = 4° 29′
12°
754′
234
0

oder 116° 34′ : 26
6994′ : 26 = 269′ = 4° 29′
179
234
0

b) Ist eine mehrnamige Zahl durch eine andere benannte Zahl zu dividieren (Aufgabe des Messens), so müssen beide früher auf dieselbe Benennung gebracht werden.

**Aufgaben.**

1. a) 530 *K* 84 *h* : 23, b) 9225 fl. 30 kr. : 382.
2. a) 120 *km* 509 *m* : 37, b) 289 *kg* 674 *g* : 57.
3. 28 *hl* Wein werden mit 1421 *K* 28 *h* bezahlt; wie viel kostet 1 *hl*?
4. Eine Locomotive legt in 1 Stunde 30 *km* 720 *m* zurück; wie viel in 1 Minute?
5. 31 *K* 50 *h* : 2 *K* 25 *h*.
6. 1108 *kg* 14 *dkg* : 5 *kg* 6 *dkg*.
7. 71° 1′ 15″ : 2° 1′ 45″.
8. Zu einer 5 *m* 6 *cm* hohen Treppe sollen die Stufen 2 *dm* 3 *cm* hoch werden; wie viele Stufen wird die Treppe erhalten?
9. Der Umfang eines Kreises hat 360°; der wievielte Theil des Umfanges ist ein Bogen von 2° 48′ 45″?
10. Für 19 *K* 75 *h* kauft man 1 *hl*; wie viel *hl* erhält man a) für 256 fl. 75 kr., b) für 730 fl. 75 kr.?
11. Die Triebräder einer Locomotive haben 3 *m* 77 *cm* im Umfange; wie viel Umläufe müssen sie machen, um die Eisenbahnstrecke zwischen Wien und Linz, welche 188 *km* 890 *m* beträgt, zurückzulegen?
12. Für 98 *m* 72 *cm* werden 666 *K* 36 *h* bezahlt; wie hoch kommt 1 *m*?
13. Das *hl* Bier kostet 15 fl. 50 kr.; wie viel *l* erhält man für 53 fl. 94 kr.?
14. Ein Wirt kauft 4 *hl* Wein à 60 *K* 80 *h*, 2 *hl* à 48 *K* 52 *h* und 3 *hl* à 44 *K*; wie viel kostet im Durchschnitte 1 *hl*?
15. 8 Dutzend Tücher werden für 87 *K* 68 *h* eingekauft; man will an jedem Dutzend 1 *K* 76 *h* gewinnen; wie theuer muss man 1 Stück verkaufen?

**16.** Eine silberne Schüssel wiegt 7 *kg*, in jedem *kg* sind 750 *g* feines Silber; wenn nun für die Schüssel 514 fl. 50 kr. bezahlt wurden, wie hoch rechnete man 1 *kg* feines Silber?

**17.** In Petersburg tritt der Mittag um 55 Minuten 45·6 Secunden früher ein als in Wien, das 14° 2′ 36″ östliche Länge (von Paris) hat; welche östliche Länge hat Petersburg? (§. 34, Aufg. 12.)

# IV. Theilbarkeit der Zahlen.

## §. 36.

Eine Zahl heißt durch eine andere theilbar, wenn sie durch dieselbe dividiert eine ganze Zahl zum Quotienten gibt. Z. B. 24 ist durch 6 theilbar, da 24 durch 6 dividiert 4 zum Quotienten gibt und kein Rest übrig bleibt; dagegen ist 27 durch 6 nicht theilbar, da bei der Division von 27 durch 6 ein Rest übrig bleibt.

Ist eine Zahl durch eine andere theilbar, so heißt der Divisor ein Maß des Dividends, und der Dividend ein Vielfaches des Divisors; z. B. 6 ist ein Maß von 24, und 24 ein Vielfaches von 6.

Zahlen, welche nur durch 1 und durch sich selbst theilbar sind, heißen Primzahlen; z. B. 1, 2, 5, 11, 17. Zahlen, welche nicht nur durch 1 und durch sich selbst, sondern auch durch andere Zahlen theilbar sind, heißen zusammengesetzte Zahlen; z. B. 12 ist durch 1 und 12, aber überdies auch noch durch 2, 3, 4, 6 theilbar; 12 ist also eine zusammengesetzte Zahl.

Gib alle Primzahlen von 1 bis 100 an.

### Kennzeichen der Theilbarkeit.

## §. 37.

1. Jede Zahl, welche am Ende 1, 2, 3... Nullen hat, ist ein Vielfaches von 10, beziehungsweise 100, 1000,... und daher durch 10, beziehungsweise 100, 1000,.. theilbar.

2. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, deren einer ein Vielfaches von 10, der andere die Ziffer der Einer enthält; z. B. 57876 = 57870 + 6; 21335 = 21330 + 5.

Da jedes Vielfache von 10 durch 10, somit auch durch 2 und durch 5 theilbar ist, so hängt es nur von der Ziffer der Einer ab, ob die ganze Zahl durch 2 oder 5 theilbar ist.

Ist die Ziffer der Einer durch 2 theilbar, d. i. eine der Ziffern 0, 2, 4, 6, 8, so ist die Zahl selbst durch 2 theilbar. Man nennt die Zahlen, welche Vielfache von 2 sind, gerade Zahlen, während die übrigen, als 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 ... ungerade Zahlen heißen.

Ist die Ziffer der Einer durch 5 theilbar, d. i. steht an der niedersten Stelle 0 oder 5, so ist die Zahl selbst durch 5 theilbar.

3. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 100, der andere die von den zwei niedrigsten Ziffern gebildete Zahl ist; z. B.

$$2548 = 2500 + 48; \quad 375375 = 375300 + 75.$$

Das Vielfache von 100 ist durch 4 und durch 25 theilbar; ist auch die von den zwei niedrigsten Ziffern gebildete Zahl durch 4 oder 25 theilbar, so ist es auch die Zahl selbst.

4. Jede Zahl läßt sich in zwei Bestandtheile zerlegen, von denen der eine ein Vielfaches von 1000, der andere die von den drei niedrigsten Ziffern gebildete Zahl ist; z. B.

$$31624 = 31000 + 624; \quad 79875 = 79000 + 875.$$

Da nun jedes Vielfache von 1000 durch 8 und durch 125 theilbar ist, so folgt:

Eine Zahl ist durch 8 oder durch 125 theilbar, wenn die aus ihren drei niedrigsten Ziffern gebildete Zahl, durch 8 oder 125 theilbar ist.

5. Jede Zahl kann in zwei Bestandtheile zerlegt werden, von denen der eine lauter Vielfache von 9, der andere die Summe aller Ziffern der Zahl enthält. So besteht z. B. 5724 aus folgenden Theilen:

$$\begin{aligned} 5000 &= 1000.5 = 999.5 + 5 \\ 700 &= 100.7 = 99.7 + 7 \\ 20 &= 10.2 = 9.2 + 2 \\ 4 &= \ldots\ldots\ldots\ldots 4, \\ \text{daher} \quad 5724 &= 999.5 + 99.7 + 9.2 \\ &\quad + 5 + 7 + 2 + 4. \end{aligned}$$

Der erste Bestandtheil, welcher lauter Vielfache von 9 enthält, ist nun durch 3 theilbar; ist auch der zweite Bestandtheil, nämlich die Ziffernsumme der Zahl durch 3 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl. Die eben zerlegte Zahl 5724 ist also durch 3 theilbar, weil die Ziffernsumme $5 + 7 + 2 + 4 = 18$ durch 3 theilbar ist.

Ebenso folgt auch: Eine Zahl ist durch 9 theilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 9 theilbar ist.

6. Ist eine Zahl sowohl durch 2 als durch 3 theilbar, so muss sie auch durch $2 \times 3$, d. i. durch 6, theilbar sein.

Durch 6 sind also alle geraden Zahlen theilbar, deren Ziffernsumme durch 3 theilbar ist.

7. Es ist

$$\begin{array}{rlrl} 10 = & 1.11 - 1; & 100 = & 9.11 + 1; \\ 1000 = & 91.11 - 1; & 10000 = & 909.11 + 1; \\ 100000 = & 9091.11 - 1; & 1000000 = & 90909.11 + 1; \end{array}$$

u. s. w.

Hieraus ergibt sich, dass jede Zahl in zwei Bestandtheile zerlegt werden kann, von denen der eine lauter Vielfache von 11 enthält. So besteht z. B. 281743 aus folgenden Theilen:

$$\begin{array}{rl} 200000 = & 18182.11 - 2 \\ 80000 = & 7272.11 + 8 \\ 1000 = & 91.11 - 1 \\ 700 = & 63.11 + 7 \\ 40 = & 4.11 - 4 \\ 3 = & \ldots\ldots 3 \\ \hline \text{daher } 281743 = & 18182.11 + 7272.11 + 91.11 + 63.11 + 4.11 \\ & + (8 + 7 + 3) - (2 + 1 + 4). \end{array}$$

Der eine Bestandtheil, welcher lauter Vielfache von 11 enthält, ist durch 11 theilbar; ist auch die Differenz $(8 + 7 + 3) - (2 + 1 + 4)$ durch 11 theilbar oder gleich 0, so ist auch die ganze Zahl 281743 durch 11 theilbar.

Eine Zahl ist daher durch 11 theilbar, wenn die Differenz der Ziffernsumme der ungeraden und jener der geraden Stellen 0 oder durch 11 theilbar ist.

**Aufgaben.**

**1.** Gib für alle zusammengesetzten Zahlen zwischen 1 und 100 an, durch welche der Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25 sie theilbar sind.

**2.** Welche von den Zahlen 138, 759, 1235, 2184, 19326, 93128, 13020, 35731, 24689, 75314 sind durch 2 theilbar, welche nicht?

**3.** Gib von folgenden Zahlen diejenigen an, welche durch 4 theilbar sind: 152, 372, 574, 1380, 2324, 198760, 293456, 135731.

**4.** Welche von den Zahlen 352, 1630, 2876, 4756, 9492, 12748, 22062, 25864, 30508 sind durch 2, welche auch durch 4, und welche durch 8 theilbar?

5. Welche von den Zahlen 35, 120, 1225, 2300, 2375, 3500, 38405, 312750, 278000 sind nur durch 5, welche auch durch 10, 25, 100, 125, 1000 theilbar?

6. Welche von den Zahlen 273, 1540, 5926, 8028, 12345, 20475, 38124, 67089, 705426, 791426, 310629 sind durch 3, welche zugleich durch 9, welche weder durch 9 noch durch 3 theilbar?

7. Welche von folgenden Zahlen sind durch 6 theilbar: 870, 1258, 5082, 5184, 27082, 31406, 560742, 934316?

8. Welche von den Zahlen 737, 2516, 3904, 17820, 37191, 56789, 265474, 847165, 5063487 sind durch 11 theilbar?

9. Gib an, durch welche von den Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 25, 100, 125 die nachfolgenden Zahlen theilbar sind:
a) 312, 8316, 3975, 57585, 23584, 740024, 652400;
b) 396, 1840, 5715, 31750, 50787, 714282, 1000362;
c) 375, 3450, 7132, 24377, 250875, 219350, 221625.

## Zerlegung in Factoren.

### §. 38.

Unter den einfachen Factoren oder Primfactoren einer Zahl versteht man diejenigen Primzahlen, deren Product sie ist.

Wird eine zusammengesetzte Zahl durch einen ihrer Primfactoren dividiert, so ist der Quotient das Product aller übrigen Factoren jener Zahl.

Um daher eine zusammengesetzte Zahl in ihre einfachen Factoren zu zerlegen, dividiere man dieselbe durch die kleinste Primzahl, durch die sie theilbar ist, 1 nicht mitgerechnet; den Quotienten dividiere man wieder durch die kleinste Primzahl, durch die er theilbar ist, die frühere Primzahl nicht ausgenommen, und verfahre so mit jedem folgenden Quotienten, bis man als Quotienten eine Primzahl selbst erhält. Die nach und nach angewendeten Divisoren und der letzte Quotient sind die Primfactoren der vorgelegten Zahl.

Ist z. B. 150 die gegebene Zahl, so erhält man

| | | | |
|---|---|---|---|
| $150 : 2 = 75$ | oder | 150 | 2 |
| $75 : 3 = 25$ | | 75 | 3 |
| $25 : 5 = 5$ | | 25 | 5 |
| | | 5 | 5 |

folglich $150 = 2.3.5.5$.

Bei kleineren Zahlen geschieht die Zerlegung in Primfactoren leicht im Kopfe.

**Aufgaben.**

Zerlege folgende Zahlen in Primfactoren:

1. 6, 14, 22, 26, 46, 62, 86, 94.
2. 9, 15, 33, 39, 51, 69, 87, 93.
3. 18, 28, 45, 50, 68, 97, 84, 96.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4. | a) 100, | b) 144, | c) 168, | d) 260. |
| | 108, | 156, | 180, | 300. |
| | 120, | 160, | 250, | 320. |
| 5. | a) 432, | b) 625, | c) 924, | d) 990. |
| | 549, | 648, | 930, | 1050. |
| | 576, | 680, | 936, | 1540. |

## Größtes gemeinsames Maß.

§. 39.

Sind zwei oder mehrere Zahlen durch dieselbe Zahl theilbar, so heißt diese ein gemeinsames Maß jener Zahlen; z. B. 8 ist ein gemeinsames Maß von 24 und 16, ebenso 5 ein gemeinsames Maß von 10, 20, 50. Die größte Zahl, durch welche zwei oder mehrere Zahlen theilbar sind, heißt das größte gemeinsame Maß dieser Zahlen; z. B. 12, 24, 36, 60 haben die Zahlen 2, 3, 4, 6, 12 zu gemeinsamen Maßen, die Zahl 12 aber ist ihr größtes gemeinsames Maß.

Zahlen, welche außer 1 kein anderes gemeinsames Maß haben, heißen Primzahlen untereinander oder relative Primzahlen; z. B. 5 und 13, 7 und 15, 9 und 25.

Zerlegt man zwei oder mehrere Zahlen in ihre Primfactoren, so ist das Product derjenigen Factoren, welche in allen gegebenen Zahlen gemeinsam vorkommen, gewiss ein gemeinsames Maß dieser Zahlen; es ist aber auch das größte, weil, sobald man noch einen andern Factor hinzufügen würde, durch das neue Product nicht mehr alle gegebenen Zahlen theilbar wären.

Ist z. B. das gr. g. Maß von 36 und 90 zu suchen, so hat man:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 36 | 2 | 90 | 2 |
| 18 | 2 | 45 | 3 |
| 9 | 3 | 15 | 3 |
| 3 | 3 | 5 | 5 |

Scheidet man die den beiden Zahlen gemeinsamen Factoren 2, 3, 3 aus, so bleiben die relativen Primfactoren 2 und 5 übrig; die zwei Zahlen haben also außer 2, 3, 3, keinen gemeinsamen Factor mehr und ist daher ihr größtes gemeinsames Maß das Product:

$$2 . 3 . 3 = 18.$$

Das größte gemeinsame Maß gegebener Zahlen, z. B. von 36 und 90 wollen wir durch M (36, 90) darstellen.*) Es ist also

$$M\ (36, 90) = 18.$$

*) Nach der in J. Schrams Lehrbuche der Arithmetik eingeführten Bezeichnung.

Für kleinere Zahlen kann das größte gemeinsame Maß im Kopfe bestimmt werden.

**Aufgaben.**

Bestimme die folgenden größten gemeinsamen Maße:

| | | |
|---|---|---|
| **1.** a) M (6, 15). | b) M (15, 24). | c) M (24, 60). |
| M (8, 12). | M (15, 36). | M (28, 42). |
| **2.** a) M (10, 15). | b) M (18, 24). | c) M (30, 54). |
| M (12, 16). | M (24, 32). | M (32, 48). |
| **3.** a) M (40, 48). | b) M (60, 75). | c) M (15, 21, 25). |
| M (48, 60). | M (60, 96). | M (18, 30, 48). |
| M (54, 72). | M (72, 80). | M (40, 64, 72). |

## Kleinstes gemeinsames Vielfaches.

### §. 40.

Eine Zahl, welche durch zwei oder mehrere andere Zahlen theilbar ist, heißt ein gemeinsames Vielfaches dieser Zahlen; z. B. 24 ist durch 8 und 12 theilbar, 24 ist also ein gemeinsames Vielfaches von 8 und 12 Die kleinste Zahl, welche durch mehrere andere theilbar ist, heißt das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen; z. B. die Zahlen 3, 4, 6, 10 haben die Zahlen 60, 120, 180, 240,... zu gemeinsamen Vielfachen, die Zahl 60 aber ist das kleinste gemeinsame Vielfache jener Zahlen.

Das kleinste gemeinsame Vielfache gegebener Zahlen wollen wir durch v bezeichnen; z. B. v (8, 12) = 24.

Wenn man mehrere Zahlen miteinander multipliciert, so ist das Product immer ein gemeinsames Vielfaches derselben. Sind diese Zahlen Primzahlen untereinander, so ist ihr Product zugleich ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches; sind aber zwei oder mehrere unter den Zahlen durch eine gemeinsame Zahl theilbar, so haben sie auch kleinere gemeinsame Vielfache, als es ihr Product ist.

Bei leicht zerlegbaren Zahlen geschieht die Bestimmung des kl. g. Vielfachen durch Zerlegung in Primfactoren, und zwar am einfachsten auf folgende Art:

Man zerlegt die gegebenen Zahlen in ihre Primfactoren, geht dann von der größten Zahl aus und fügt von den übrigen Zahlen nach und nach die noch fehlenden Factoren hinzu.

a) Ist z. B. das kleinste gemeinsame Vielfache von 24, 36, 60 zu suchen, so hat man: die größte Zahl ist 60 = 2.2.3.5,
von 24 = 2.2.2.3 fehlt der Factor 2 einmal.. 2.2.2.3.5,
„ 36 = 2.2.3.3 „ „ „ 3 „ .. 2.2.2.3.3.5.

Das Product 2.2.2.3.3.5 enthält daher alle in 24, 36, 60 enthaltenen Factoren, und zwar keinen öfter, als nothwendig ist; es ist sonach das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Zahlen oder

v (24, 36, 60) = 2.2.2.3.3.5 = 360.

Ist z. B. v (16, 45, 60) zu suchen, so hat man:

die größte Zahl ist 60...2.2.3.5;
von 16 = 2.2.2.2 fehlt der Factor 2 2mal...2.2.2.2.3.5;
von 45 = 3.3.5 fehlt der Factor 3 1mal...2.2.2.2.3.3.5,
also v (16, 45, 60) = 2.2.2.2.3.3.5 = 720.

Dieses Verfahren empfiehlt sich besonders dann, wenn das kl. g. Vielfache im Kopfe bestimmt wird.

b) Für kleine Zahlen kann man auch das kl. g. Vielfache dadurch erhalten, dass man von einer Zahl der Reihe nach die Vielfachen bildet, bis man zur andern Zahl oder einem Vielfachen derselben gelangt.

Z. B. v (9, 12); 9, 18, 27, 36; 36 ist das erste Vielfache von 9, welches gleichzeitig auch ein Vielfaches von 12 ist; 36 ist somit das kl. g. Vielfache von 9 und 12.

v (8, 12, 18); 8, 16, 24; 24 ist das kl. g. Vielfache von 8 und 12,
24, 48, 72; 72 ist das kl. g. Vielfache von 8, 12 und 18 oder v (8, 12, 18) = 72.

**Aufgaben.**

Bestimme:

**1.** a) v (5, 6). b) v (15, 18). c) v (24, 54).
v (6. 8). v (18, 30). v (36, 96).

**2.** a) v (8, 10). b) v (18, 48). c) v (60, 72).
v (9, 15). v (24, 30). v (75, 90).

**3.** a) v (3, 5, 6). b) v (8, 15, 20).
v (2, 7, 12). v (42, 56, 98).
v (4, 6, 9). v (54, 72, 126).

**4.** a) v (5, 6, 10, 12). b) v (6, 15, 20, 30).
v (5, 12, 16, 20). v (2, 5, 16, 25).

# V. Vorübungen für das Rechnen mit gemeinen Brüchen.

(Kopfrechnen.)

§. 41.

Theilt man ein Ganzes in 2 gleiche Theile, so heißt jeder Theil ein Halbes ($^1/_2$). Theilt man ein Ganzes in 3 gleiche Theile, so heißt jeder Theil ein Drittel ($^1/_3$); 2 solche Theile sind zwei Drittel ($^2/_3$); u. s. w.

Eine Zahl, welche einen Theil der Einheit ein- oder mehrmal enthält, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch, wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$.

Zur Darstellung eines Bruches sind zwei Zahlen nothwendig, eine, welche angibt, in wie viele gleiche Theile die Einheit zerlegt wird oder zerlegt gedacht wird, und Nenner heißt, und eine zweite Zahl, welche angibt, wie viele solche gleiche Theile genommen werden, und Zähler heißt. Man schreibt den Nenner unter den Zähler und setzt zwischen beide einen Strich (Bruchstrich), z. B. $\frac{3}{4}$ oder $^3/_4$, und liest drei Viertel.

In dem Bruche $\frac{3}{4}$ zeigt der Nenner 4 an, dass die Einheit in vier gleiche Theile getheilt wurde, und der Zähler 3 gibt an, dass man drei solche Theile genommen hat.

Welche Benennung und Bedeutung haben darnach die Zahlen in den Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$?

Jeder Bruch kann als ein angezeigter Quotient betrachtet werden, worin der Zähler als Dividend und der Nenner als Divisor vorkommt.

Der Bruch $^4/_5$ bedeutet 4mal den 5ten Theil von 1 Ganzen. Der Quotient 4 : 5 bedeutet den 5ten Theil von 4 Ganzen; um aber den 5ten Theil von 4 Ganzen zu bestimmen, wird man jedes einzelne Ganze in 5 gleiche Theile theilen und von jedem 1 Theil nehmen; man erhält daher auch hier 4mal den 5ten Theil von 1 Ganzen. Es ist also

$$^4/_5 = 4 : 5.$$

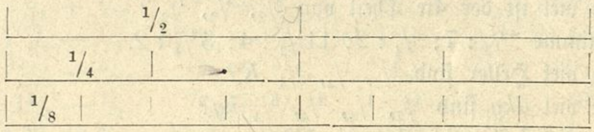
Ein Bruch, dessen Zähler kleiner als der Nenner ist, heißt echt, z. B. $^1/_2$, $^2/_3$, $^5/_8$. Ein echter Bruch ist kleiner als 1

Ein Bruch, dessen Zähler gleich dem Nenner oder größer als der Nenner ist, heißt unecht; z. B. $^2/_2$, $^6/_3$, $^5/_4$, $^{13}/_8$. Ein unechter Bruch ist entweder gleich 1, oder größer als 1.

Die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruche nennt man eine gemischte Zahl, z. B. $5 + \frac{3}{4}$, wofür man kurz $5\frac{3}{4}$ schreibt und 5 Ganze 3 Viertel liest.

## §. 42.

### Halbe, Viertel und Achtel.




**1.** Wie entstehen die Brüche $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^3/_4$, $^5/_8$, $^{11}/_8$?

**2.** Wie viel Halbe hat 1 Ganzes? Wie viel Halbe sind 2, 7, 15 Ganze; $4^1/_2$, $9^1/_2$, $17^1/_2$?

**3.** Wie viel Viertel sind 1, 2, 5, 12 Ganze; $1^1/_4$, $3^3/_4$, $12^1/_4$?

**4.** Wie viel Achtel sind 1, 3, 7, 14 Ganze; $1^1/_8$, $4^3/_8$, $10^7/_8$?

**5.** Wie viel Ganze sind

a) $^2/_2$, $^4/_2$, $^{10}/_2$, $^{26}/_2$, $^{48}/_2$; $^5/_2$, $^9/_2$, $^{19}/_2$, $^{53}/_2$?

b) $^4/_4$, $^8/_4$, $^{20}/_4$, $^{32}/_4$, $^{60}/_4$; $^5/_4$, $^{14}/_4$, $^{41}/_4$, $^{82}/_4$?

c) $^8/_8$, $^{16}/_8$, $^{40}/_8$, $^{72}/_8$, $^{96}/_8$; $^9/_8$, $^{20}/_8$, $^{37}/_8$, $^{95}/_8$?

**6.** Wie viel Viertel sind $^1/_2$, $^2/_2$, $^5/_2$, $^9/_2$, $^{17}/_2$, $^{47}/_2$?

**7.** Wie viel Achtel sind $^1/_2$, $^3/_2$, $^7/_2$, $^{15}/_2$, $^{21}/_2$, $^{35}/_2$?

**8.** Wie viel Achtel sind $^1/_4$, $^2/_4$, $^5/_4$, $^{13}/_4$, $^{27}/_4$, $^{51}/_4$?

**9.** Wie viel Halbe sind $^2/_4$, $^6/_4$, $^{10}/_4$, $^{18}/_4$, $^{34}/_4$, $^{76}/_4$?

**10.** Wie viel Halbe sind $^4/_8$, $^{12}/_8$, $^{20}/_8$, $^{36}/_8$, $^{56}/_8$, $^{84}/_8$?

**11.** Wie viel Viertel sind $^2/_8$, $^6/_8$, $^{18}/_8$, $^{42}/_8$, $^{66}/_8$, $^{92}/_8$?

**12.** Mache gleichnamig: a) $^1/_2$ und $^3/_4$; b) $^1/_4$ und $^5/_8$; c) $^1/_2$ und $^7/_8$; d) $^1/_2$, $^3/_4$ und $^3/_8$.

Berechne:

**13.** a) $^1/_2 + ^1/_2$. b) $^1/_4 + ^1/_4$. c) $^3/_8 + ^1/_8$. d) $2^1/_2 + 4^1/_2$.
$^3/_2 + ^1/_2$. $^3/_4 + ^1/_4$. $^5/_8 + ^3/_8$. $5^3/_4 + 3^3/_4$.
$4^1/_2 + ^1/_2$. $^1/_4 + 3^3/_4$. $4^7/_8 + ^5/_8$. $8^1/_8 + 2^3/_8$.

**14.** $^1/_2 + ^3/_4 = ^2/_4 + ^3/_4 = ^5/_4 = 1^1/_4$.

**15.** Wie viel ist $^7/_4 + ^1/_2$; $^5/_8 + ^1/_2$; $^3/_4 + ^7/_8$; $3^1/_2 + 5^3/_8$?

Berechne:

**16.** a) $^5/_2 - ^1/_2$. b) $^3/_4 - ^1/_4$. c) $^7/_8 - ^3/_8$. d) $^3/_4 - ^1/_2$.
$3 - ^1/_2$. $5 - ^3/_4$. $7^5/_8 - 2^3/_8$. $1^1/_8 - ^1/_4$.
$3^1/_2 - ^1/_2$. $4^1/_4 - ^3/_4$. $^7/_8 - ^3/_4$. $12^1/_2 - 10^5/_8$.

**17.** a) $^1/_2 \times 4$. b) $^3/_8 \times 3$. c) $1^1/_2 \times 7$. d) $3^1/_4 \times 12$.
$^1/_4 \times 9$. $^5/_8 \times 4$. $1^3/_4 \times 10$. $4^3/_8 \times 5$.
$^3/_4 \times 12$. $^7/_8 \times 6$. $5^1/_2 \times 8$. $9^5/_8 \times 10$.

**18.** Wie oft ist enthalten

a) $^1/_2$ in $^5/_2$; $^3/_4$ in $^{16}/_4$; $1^1/_4$ in $8^3/_4$; $2^5/_8$ in $7^7/_8$?

b) $^1/_2$ in 2; $^1/_4$ in $^1/_2$; $^1/_8$ in $^3/_4$; $^3/_4$ in 6; $1^1/_4$ in $7^1/_2$?

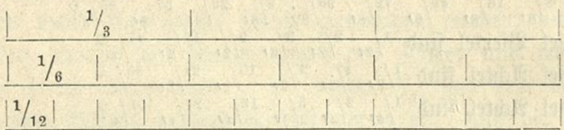


$6 : 3/4 =$

19. Wie viel ist der 5te Theil von $^{15}/_{2}$, $^{25}/_{4}$, $^{45}/_{8}$?
20. Wie viel ist die Hälfte von $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$?
*21. Wie viel ist der 4te Theil von $^{3}/_{2}$, $^{5}/_{2}$, $^{7}/_{2}$?
*22. Bestimme $^{49}/_{2} : 7$; $^{5}/_{4} : 2$; $11^{1}/_{2} : 4$; $3^{3}/_{4} : 2$.
23. Wie viel Heller sind $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ *K*?
24. Wie viel *dkg* sind $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{2}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ *kg*?
25. Wie viel *l* sind $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$ *hl*?
26. Wie viel Stunden sind $^{1}/_{2}$, $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$, $^{1}/_{8}$, $^{3}/_{8}$, $^{7}/_{8}$ Tage?
*27. $4 \times {}^{1}/_{2}$; $5 \times {}^{1}/_{4}$; $3 \times {}^{1}/_{8}$.
*28. $7 \times {}^{3}/_{2}$; $3 \times {}^{5}/_{4}$; $2 \times {}^{7}/_{8}$.
*29. $^{1}/_{2} \times {}^{1}/_{2}$; $^{1}/_{2} \times {}^{1}/_{4}$.
*30. $^{3}/_{4} \times {}^{1}/_{2}$; $1^{1}/_{2} \times {}^{3}/_{4}$; $^{5}/_{2} \times {}^{7}/_{4}$.

## §. 43.

### Drittel, Sechstel, Neuntel und Zwölftel.




1. Wie erhält man die Brüche $^{1}/_{3}$, $^{2}/_{3}$, $^{1}/_{6}$, $^{5}/_{6}$, $^{1}/_{12}$, $^{7}/_{12}$, $^{11}/_{12}$?
2. Wie viel Drittel sind 1, 2, 8 Ganze; $1^{1}/_{3}$, $4^{2}/_{3}$, $13^{1}/_{3}$?
3. Wie viel Sechstel sind 1, 3, 12 Ganze; $2^{1}/_{6}$, $5^{5}/_{6}$, $9^{1}/_{6}$?
4. Wie viel Zwölftel sind 1, 5, 9 Ganze; $3^{1}/_{12}$, $4^{5}/_{12}$, $7^{7}/_{12}$?
5. Wie viel Ganze sind $^{3}/_{3}$, $^{18}/_{3}$, $^{6}/_{6}$, $^{30}/_{6}$, $^{12}/_{12}$, $^{72}/_{12}$?
6. Sondere von $^{5}/_{3}$, $^{14}/_{3}$, $^{31}/_{3}$, $^{53}/_{3}$; $^{7}/_{6}$, $^{19}/_{6}$, $^{41}/_{6}$, $^{73}/_{6}$; $^{13}/_{12}$, $^{25}/_{12}$, $^{65}/_{12}$ die Ganzen aus.
7. Wie viel a) Sechstel, b) Zwölftel sind $^{1}/_{3}$, $^{5}/_{3}$, $^{11}/_{3}$, $^{29}/_{3}$?
8. Drücke $^{1}/_{6}$, $^{5}/_{6}$, $^{11}/_{6}$, $^{35}/_{6}$ in Zwölfteln aus.
9. Wie viel ist das Drittel von $^{1}/_{2}$, von $^{1}/_{4}$? Wie viel ist das Sechstel von $^{1}/_{2}$?
10. Wie viel Sechstel sind $^{1}/_{2}$, $^{3}/_{2}$, $^{7}/_{2}$, $^{13}/_{2}$, $^{25}/_{2}$?
11. Wie viel Zwölftel sind $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{2}$, $^{19}/_{2}$; $^{1}/_{4}$, $^{3}/_{4}$, $^{17}/_{4}$?
12. Drücke in gleichen Theilen aus: a) $^{1}/_{3}$, $^{5}/_{6}$; b) $^{2}/_{3}$, $^{5}/_{12}$; c) $^{1}/_{2}$, $^{5}/_{6}$; d) $^{1}/_{2}$, $^{2}/_{3}$; e) $^{2}/_{3}$, $^{3}/_{4}$.
13. Wie viel Halbe sind $^{3}/_{6}$, $^{21}/_{6}$, $^{57}/_{6}$; $^{6}/_{12}$, $^{42}/_{12}$, $^{78}/_{12}$?
14. Wie viel Drittel sind $^{2}/_{6}$, $^{20}/_{6}$, $^{56}/_{6}$; $^{4}/_{12}$, $^{28}/_{12}$, $^{64}/_{12}$?
15. Drücke $^{3}/_{12}$, $^{39}/_{12}$ in Vierteln, $^{2}/_{12}$, $^{46}/_{12}$ in Sechsteln aus.

Berechne:

16. a) $^{2}/_{3} + {}^{1}/_{3}$. b) $^{5}/_{6} + {}^{1}/_{6}$. c) $^{7}/_{12} + {}^{5}/_{12}$. d) $8^{5}/_{6} + 3^{5}/_{6}$.
$1^{1}/_{3} + 4^{1}/_{3}$. $^{19}/_{6} + {}^{5}/_{6}$. $^{11}/_{12} + {}^{7}/_{12}$. $10^{5}/_{12} + 9^{11}/_{12}$.

17. $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$.

18. a) $\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$. b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{12}$. c) $1\frac{1}{2} + \frac{5}{6}$. d) $3\frac{7}{12} + \frac{2}{3}$.
$\frac{1}{3} + \frac{5}{12}$. $\frac{3}{4} + \frac{1}{6}$. $2\frac{1}{2} + 5\frac{1}{3}$. $8\frac{11}{12} + 7\frac{3}{4}$.

19. a) $\frac{5}{6} - \frac{1}{6}$. b) $\frac{3}{4} - \frac{7}{12}$. c) $1\frac{1}{2} - \frac{5}{6}$. d) $5\frac{1}{3} - 2\frac{1}{4}$.
$\frac{11}{12} - \frac{5}{12}$. $\frac{5}{6} - \frac{5}{12}$. $\frac{11}{12} - \frac{1}{6}$. $7\frac{5}{12} - 3\frac{1}{6}$.
$1\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$. $\frac{7}{12} - \frac{1}{2}$. $8 - \frac{2}{3}$. $9\frac{2}{3} - 8\frac{5}{6}$.

20. a) $\frac{2}{3} \times 5$. b) $\frac{7}{12} \times 8$. c) $8\frac{1}{3} \times 3$. d) $8\frac{5}{6} \times 9$.
$\frac{5}{6} \times 6$. $\frac{5}{12} \times 10$. $9\frac{2}{3} \times 7$. $5\frac{7}{12} \times 6$.

*21. $\frac{1}{3} : 2$; $\frac{1}{3} : 3$; $\frac{1}{4} : 3$.

*22. $\frac{5}{4} : 3$; $2\frac{1}{3} : 4$; $\frac{3}{2} : 6$.

23. Wie viel ist der 5te Theil von $\frac{25}{3}$, $\frac{35}{6}$, $7\frac{1}{12}$?

24. Wie viel Monate sind $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{7}{12}$ Jahre?

25. Wie viel Stunden sind $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{11}{12}$ Tage?

26. Wie viel Minuten sind $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{12}$ Stunden?

*27. $7 \times \frac{1}{3}$; $5 \times \frac{1}{6}$; $8 \times \frac{1}{9}$; $3 \times \frac{1}{12}$.

*28. $5 \times \frac{2}{3}$; $2 \times \frac{5}{6}$; $4 \times \frac{4}{9}$; $7 \times \frac{11}{12}$.

*29. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$.

*30. $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$; $\frac{9}{2} \times 1\frac{1}{3}$; $2\frac{2}{3} \times 3\frac{1}{3}$.

31. $\frac{8}{3} : \frac{2}{3}$; $3 : \frac{1}{3}$; $8 : \frac{2}{3}$; $12 : \frac{3}{8}$; $\frac{5}{6} : \frac{5}{12}$; $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$; $\frac{1}{8} : \frac{1}{12}$.

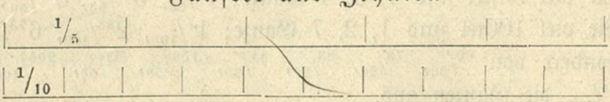
32. $1\frac{2}{3} : \frac{5}{6}$; $12\frac{1}{2} : \frac{5}{6}$; $3\frac{1}{4} : 1\frac{1}{12}$; $11\frac{1}{3} : 1\frac{5}{12}$.

*33. $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4} : \frac{1}{3}$.

*34. $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$; $1\frac{1}{3} : \frac{3}{4}$.

## §. 44.

### Fünftel und Zehntel.




1. Erkläre die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{10}$.
2. Wie viel Fünftel sind 1, 2, 7 Ganze; $1\frac{1}{5}$, $5\frac{3}{5}$, $8\frac{4}{5}$?
3. Wie viel Zehntel sind 1, 3, 10 Ganze; $1\frac{3}{10}$, $4\frac{7}{10}$, $5\frac{9}{10}$?
4. Wie viel Ganze sind $\frac{5}{5}$, $\frac{15}{5}$, $\frac{55}{5}$; $\frac{10}{10}$, $\frac{40}{10}$, $\frac{70}{10}$?
5. Sondere von $\frac{6}{5}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{33}{5}$, $\frac{64}{5}$; $\frac{13}{10}$, $\frac{37}{10}$ die Ganzen aus.
6. Wie viel Zehntel sind $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{19}{5}$, $\frac{42}{5}$?
7. Wie viel Zehntel sind $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{31}{2}$?
8. Mache gleichnamig: $\frac{1}{5}$ und $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{2}$ und $\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{5}$.
9. Wie viel Fünftel sind $\frac{2}{10}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{28}{10}$, $\frac{40}{10}$, $\frac{62}{10}$?
10. Wie viel Halbe sind $\frac{5}{10}$, $\frac{25}{10}$, $\frac{35}{10}$, $\frac{55}{10}$, $\frac{95}{10}$?

Berechne:

11. a) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$. b) $5\frac{2}{5} + 6\frac{1}{5}$. c) $\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$. d) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$.
$\frac{7}{10} + \frac{3}{10}$. $3\frac{2}{10} + 2\frac{7}{10}$. $\frac{1}{2} + \frac{9}{10}$. $7\frac{3}{10} + 4\frac{1}{2}$.

12. a) $^9/_{10} - ^3/_{10}$. b) $6^4/_5 - 3^2/_5$. c) $^1/_5 - ^1/_{10}$. d) $8^7/_{10} - 3^1/_2$.
$5 - ^2/_5$. $7^1/_{10} - 2^3/_{10}$. $^1/_2 - ^2/_5$. $6^1/_5 - 5^1/_2$.

13. $^3/_5 \times 6$; $^7/_{10} \times 5$; $9^3/_{10} \times 8$; $4^4/_5 \times 10$; $3^7/_{10} \times 20$.

14. Wie groß ist der vierte Theil von $^{24}/_5$, $36^4/_5$; der dritte Theil von $^9/_{10}$, $^{36}/_{10}$, $5^1/_{10}$?

*15. $^1/_5 : 2$; $^1/_{10} : 3$.

*16. $^3/_5 : 4$; $^7/_{10} : 8$; $2^3/_5 : 10$.

17. Gib $^1/_5$ ($^2/_5$, $^4/_5$) *K*, *m*, *hl*, *kg*, Ries, Stunden in Einheiten der nächst niedrigeren Benennung an.

18. Ebenso $^1/_{10}$ ($^3/_{10}$, $^7/_{10}$) *K*, *m*, *hl*, *kg*, Ries, Stunden.

*19. $12 \times ^1/_5$; $7 \times ^1/_{10}$; $4 \times ^1/_{15}$; $5 \times ^1/_{20}$.

*20. $3 \times ^2/_5$; $11 \times ^3/_{10}$.

*21. $^1/_2 \times ^1/_5$; $^1/_3 \times ^1/_5$; $^1/_4 \times ^1/_5$; $^1/_8 \times ^1/_{10}$.

*22. $^3/_4 \times ^2/_5$; $^5/_8 \times ^3/_{10}$; $1^1/_5 \times 4^2/_{10}$.

*23. $1 : ^1/_5$; $14 : ^1/_5$; $11 : ^7/_{10}$.

*24. $^1/_2 : ^1/_5$; $^1/_3 : ^1/_5$; $^1/_4 : ^1/_5$; $^2/_3 : ^3/_{10}$; $^7/_8 : ^4/_5$.

## §. 45.

### Zwanzigstel, Fünfundzwanzigstel, Fünfzigstel und Hundertel.

(Anschauung an einem eingetheilten Meterstabe.)

1. Wie viel 20stel sind 1, 2, 5 Ganze; $1^3/_{20}$, $3^7/_{20}$, $6^{13}/_{20}$?
2. Wie viel 25stel sind 1, 2, 8 Ganze; $1^8/_{25}$, $2^{11}/_{25}$, $5^{22}/_{25}$?
3. Wie viel 50stel sind 1, 3, 4 Ganze; $1^9/_{50}$, $3^{17}/_{50}$, $8^{39}/_{50}$?
4. Wie viel 100tel sind 1, 2, 7 Ganze; $1^7/_{100}$, $2^{33}/_{100}$, $6^{73}/_{100}$?
5. Sondere von $^{60}/_{20}$, $^{73}/_{20}$, $^{28}/_{25}$, $^{84}/_{25}$, $^{150}/_{50}$, $^{93}/_{50}$, $^{200}/_{100}$, $^{113}/_{100}$, $^{243}/_{100}$ die Ganzen aus.
6. Wie viel 100tel sind $^1/_{50}$, $^{17}/_{50}$; $^1/_{25}$, $^{16}/_{25}$; $^1/_{20}$, $^{11}/_{20}$; $^1/_{10}$, $^3/_{10}$; $^1/_5$, $^4/_5$; $^1/_4$, $^3/_4$; $^1/_2$, $^5/_2$?
7. Wie viel 50stel sind $^1/_{25}$, $^8/_{25}$; $^1/_{10}$, $^3/_{10}$, $^9/_{10}$; $^1/_5$, $^4/_5$; $^1/_2$, $^3/_2$?
8. Wie viel 25stel sind $^1/_5$, $^2/_5$, $^3/_5$, $^7/_5$, $^{13}/_5$?
9. Wie viel 20stel sind $^1/_{10}$, $^7/_{10}$; $^1/_5$, $^4/_5$; $^1/_4$, $^3/_4$; $^5/_2$?
10. Drücke folgende Brüche in kleineren Zahlen aus: $^6/_{100}$; $^8/_{100}$, $^2/_{50}$; $^5/_{100}$, $^{45}/_{100}$; $^{30}/_{100}$, $^{35}/_{50}$, $^2/_{20}$; $^{20}/_{100}$, $^{10}/_{50}$, $^{15}/_{25}$, $^4/_{20}$; $^{25}/_{100}$, $^5/_{20}$; $^{25}/_{50}$, $^{10}/_{20}$.

Berechne:

11. a) $^{23}/_{100} + ^{57}/_{100}$. b) $^7/_{20} + ^{23}/_{100}$. c) $4^7/_{20} + ^3/_5$.
$^{13}/_{25} + ^9/_{25}$. $^{23}/_{25} + ^3/_{50}$. $1^3/_{25} + ^1/_4$.
$2^{31}/_{50} + ^{11}/_{100}$. $1^{11}/_{20} + ^7/_{10}$. $3^1/_2 + 1^{39}/_{50}$.

12. a) ${}^{37}/_{100} - {}^{13}/_{100}$. b) ${}^{13}/_{20} - {}^{3}/_{10}$. c) $6^3/_4 - 2^{17}/_{20}$.
$1 - {}^{41}/_{50}$. ${}^{22}/_{25} - {}^{1}/_{4}$. $3^2/_5 - 1^{27}/_{50}$.
${}^{16}/_{25} - {}^{37}/_{100}$. $3^{71}/_{100} - 2^1/_2$. $2^1/_2 - {}^{24}/_{25}$.

13. a) ${}^{23}/_{50} \times 8$. b) ${}^{7}/_{20} \times 7$. c) $1^{11}/_{50} \times 10$.
${}^{12}/_{25} \times 5$. ${}^{29}/_{100} \times 6$. $2^{14}/_{25} \times 4$.

14. Wie viel ist
*a) der 4te Theil von ${}^{1}/_{5}$, ${}^{17}/_{25}$, $1^{16}/_{25}$?
b) der 5te Theil von ${}^{1}/_{5}$, ${}^{3}/_{10}$, $25^3/_5$?

15. Wie viel Heller
16. " " Kreuzer
17. " " *cm*
18. " " *l*
19. " " *a*

sind ${}^{1}/_{100}$, ${}^{17}/_{100}$, ${}^{1}/_{50}$, ${}^{33}/_{50}$, ${}^{1}/_{25}$, ${}^{4}/_{25}$, ${}^{11}/_{25}$, ${}^{16}/_{25}$, ${}^{1}/_{20}$, ${}^{3}/_{20}$, ${}^{13}/_{20}$, ${}^{19}/_{20}$

Kronen? Gulden? *m*? *hl*? *ha*?

*20. $6 \times {}^{1}/_{20}$; $3 \times {}^{4}/_{25}$; $7 \times {}^{3}/_{50}$; $9 \times {}^{11}/_{100}$.

*21. ${}^{1}/_{4} \times {}^{1}/_{25}$; ${}^{1}/_{3} \times {}^{1}/_{20}$; ${}^{7}/_{2} \times {}^{4}/_{100}$; $1^1/_{50} \times 2^3/_{100}$.

22. a) ${}^{49}/_{50} : {}^{7}/_{50}$. b) $3^1/_2 : {}^{7}/_{50}$. c) $3^9/_{500} : {}^{3}/_{100}$.
${}^{27}/_{100} : {}^{3}/_{100}$. $3^3/_5 : {}^{9}/_{20}$. $8^2/_5 : {}^{14}/_{25}$.

*23. ${}^{1}/_{20} : {}^{1}/_{3}$; ${}^{1}/_{4} : {}^{1}/_{50}$; ${}^{1}/_{12} : {}^{1}/_{25}$; ${}^{7}/_{8} : {}^{3}/_{100}$; ${}^{9}/_{50} : {}^{4}/_{12}$.

## §. 46.

### Verschiedene Nenner.

1. Welche Bedeutung haben die Brüche ${}^{1}/_{7}$, ${}^{3}/_{7}$, ${}^{5}/_{9}$, ${}^{8}/_{15}$, ${}^{25}/_{36}$?

2. Mache gleichnamig die Brüche:
a) ${}^{1}/_{2}$, ${}^{5}/_{9}$. b) ${}^{5}/_{6}$, ${}^{8}/_{21}$. c) ${}^{4}/_{9}$, ${}^{7}/_{15}$. d) ${}^{3}/_{10}$, ${}^{22}/_{45}$.
${}^{3}/_{7}$, ${}^{9}/_{14}$. ${}^{7}/_{9}$, ${}^{13}/_{8}$. ${}^{5}/_{12}$, ${}^{17}/_{30}$. ${}^{7}/_{16}$, ${}^{11}/_{40}$.

3. Stelle folgende Brüche mit kleineren Nennern dar:
${}^{15}/_{18}$, ${}^{6}/_{14}$, ${}^{10}/_{32}$, ${}^{12}/_{44}$, ${}^{16}/_{36}$, ${}^{22}/_{28}$, ${}^{8}/_{42}$, ${}^{28}/_{92}$.

Berechne:

4. a) ${}^{7}/_{13} + {}^{5}/_{13}$. b) ${}^{3}/_{4} + {}^{1}/_{7}$. c) ${}^{1}/_{2} + {}^{3}/_{14}$. d) $4^3/_5 + 3^8/_{15}$.
${}^{43}/_{60} + {}^{17}/_{60}$. ${}^{2}/_{9} + {}^{5}/_{11}$. ${}^{5}/_{8} + {}^{3}/_{40}$. $8^3/_4 + 2^7/_{18}$.

5. a) ${}^{6}/_{7} - {}^{4}/_{7}$. b) ${}^{9}/_{11} - {}^{2}/_{5}$. c) ${}^{19}/_{24} - {}^{7}/_{16}$. d) $6^7/_{10} - 3^4/_{15}$.
${}^{8}/_{15} - {}^{3}/_{15}$. $1 - {}^{5}/_{14}$. ${}^{23}/_{30} - {}^{11}/_{20}$. $7^1/_{12} - 4^9/_{16}$.

*6. ${}^{3}/_{7} \times 5$; ${}^{4}/_{11} \times 6$; ${}^{7}/_{16} \times 4$.

7. Wie viel ist der 7te Theil von ${}^{1}/_{2}$, ${}^{2}/_{3}$, ${}^{3}/_{4}$, ${}^{4}/_{5}$?

8. Wie groß ist a) der 5te Theil von $3^3/_8$; b) der 15te Theil von $1^1/_4$; c) der 9te Theil von $2^3/_{30}$; d) der 7te Theil von $4^4/_5$?

*9. ${}^{3}/_{11} \times {}^{5}/_{9}$; ${}^{5}/_{8} \times {}^{9}/_{7}$; ${}^{2}/_{3} \times {}^{5}/_{16}$.

*10. Wie oft ist enthalten ${}^{3}/_{16}$ in ${}^{15}/_{16}$? ${}^{1}/_{15}$ in 2? ${}^{2}/_{7}$ in 4? $1^2/_{11}$ in $3^1/_{11}$? $1^1/_{16}$ in $9^1/_2$?

# VI. Größtes gemeinsames Maß und kleinstes gemeinsames Vielfaches größerer Zahlen.

## Größtes gemeinsames Maß.

§. 47.

Auch bei größeren Zahlen läſst sich das im §. 39 angegebene Verfahren anwenden, um das größte gemeinsame Maß zwischen zwei oder mehreren Zahlen zu finden. Z. B.: M (240, 280, 320).

Da 240 = 2.2.2.2.3.5, 280 = 2.2.2.5.7, 320 = 2.2.2.2.2.2.5 ist, so kommt der Factor 2 in allen gegebenen Zahlen dreimal, der Factor fünf einmal vor, es ist daher 2.2.2.5 = 40 das größte gemeinsame Maß von 240, 280, 320 oder

M (240, 280, 320) = 40.

Dividiert man die einzelnen Zahlen durch ihr größtes gemeinsames Maß, so sind die sich ergebenden Quotienten relative Primzahlen, d. h. sie haben außer 1 kein gemeinsames Maß mit einander gemein. In dem vorliegenden Beispiele sind die Quotienten 6, 7, 8.

**Aufgaben.**

Berechne:

**1.** a) M (440, 840). b) M (495, 585).
**2.** a) M (378, 594). b) M (624, 816).
**3.** a) M (84, 108, 156). b) M (135, 165, 195).
**4.** a) M (168, 312, 408). b) M (216, 456, 528).
**5.** a) M (664, 747). b) M (996, 1494).
**6.** a) M (2448, 2736). b) M (3312, 4464).

Prüfe die Richtigkeit folgender Angaben:

**7.** M (1494, 2075) + M (328, 369) = M (1240, 1612).
**8.** M (2448, 2976) — M (972, 1116) = M (1140, 1212).

Bestimme:

**9.** a) M (1120, 1431, 1536). b) M (1472, 1728, 3888).
**10.** a) M (5824, 6720, 7324). b) M (5022, 6075, 7533).

## Kleinstes gemeinsames Vielfaches.

§. 48.

Außer den im §. 40 erwähnten Arten kann man auch das kl. g. Vielfache auf folgende Arten finden:

a) Man zerlegt die einzelnen Zahlen in Primfactoren und nimmt jeden Primfactor so vielmal, als er in einer der Zahlen am öftesten vorkommt.

Ist z. B. das kl. g. Vielfache von 24, 36, 60 zu bestimmen, so hat man

$$24 = 2.2.2.3,\ 36 = 2.2.3.3,\ 60 = 2.2.3.5.$$

Jedes gemeinsame Vielfache von 24, 36, 60 muss
den Factor 2 mindestens 3mal,
" " 3 " 2mal, und
" " 5 " 1mal
enthalten; das Product, welches nur die Factoren 2.2.2.3.3.5 enthält, ist daher das kleinste g. Vielfache jener Zahlen, also

$$v\ (24, 36, 60) = 2.2.2.3.3.5 = 360.$$

b) Man sondert aus den gegebenen Zahlen, nachdem man diejenigen, welche in den größeren ohne Rest enthalten sind, weglässt, nach und nach die Primfactoren aus, bis zuletzt nur mehr relative Primzahlen zurückbleiben. Das Product aus diesen Primzahlen und den nach und nach ausgeschiedenen Primfactoren ist das kl. g. Vielfache der gegebenen Zahlen. Z. B.

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2},\ \cancel{4},\ \cancel{5},\ 8,\ 10,\ 15,\ 36 & \\
\hline
\quad 4,\ \cancel{5},\ 15,\ 18 & 2 \\
\quad 2,\quad 15,\ 9 & 2 \\
\quad 2,\quad 5,\ 3 & 3
\end{array}$$

$$v\ (2, 4, 5, 8, 10, 15, 36) = 2.5.3.2.2.3 = 360.$$

**Aufgaben.**

Bestimme:

**1.** a) v (42, 60). b) v (252, 220).
**2.** a) v (264, 396). b) v (378, 462).
**3.** a) v (468, 624). b) v (1144, 1287).
**4.** a) v (1001, 1309). b) v (3080, 3465).
**5.** a) v (84, 126, 441). b) v (99, 132, 330).
**6.** a) v (1290, 1720, 1935). b) v (3498, 4664, 5247).
**7.** v (1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10).
**8.** v (2, 3, 5, 8, 12, 18, 28, 40).
**9.** v (2, 3, 7, 8, 16, 20, 35, 42, 50).
**10.** v (5, 12, 8, 10, 21, 28, 30, 15, 60).

# VII. Zusammenhängende Darstellung der Rechnung mit gemeinen Brüchen.

§. 49.

Eine Zahl, welche einen Theil der Einheit ein- oder mehreremal enthält, heißt eine gebrochene Zahl oder ein Bruch. Der Bruch wird durch zwei Zahlen dargestellt, durch den Nenner, welcher angibt, in wie viele gleiche Theile die Einheit zerlegt wird, und durch den Zähler, welcher angibt, wie viele solche gleiche Theile genommen werden. Z. B. $\frac{5}{8}$ sagt, die Einheit ist in acht gleiche Theile zerlegt und fünf solche Theile sind genommen worden.

Die in dieser Form dargestellten Brüche heißen gemeine Brüche.

Ist der Nenner des Bruches 10, 100, 1000.., z. B. $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$..., so kann er nach dem dekadischen Zahlensysteme auch 0·3, 0·05 geschrieben werden und heißt dann eine Decimalzahl oder ein Decimalbruch.

Der gemeine Bruch heißt echt, wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, unecht aber, wenn der Zähler so groß oder größer ist als der Nenner.

Der Wert des echten Bruches ist daher kleiner als 1, der Wert des unechten Bruches aber gleich 1 oder größer als 1.

Die Summe aus einer ganzen Zahl und einem echten Bruch heißt eine gemischte Zahl; z. B. $5\frac{3}{4}$, $6\frac{7}{8}$, $9\frac{2}{3}$.

1. Welche von den Brüchen $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{18}{10}$, $\frac{20}{20}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{21}{25}$, $\frac{25}{40}$ sind echt, welche unecht?

2. Welche von diesen Brüchen sind dem Werte nach kleiner als 1, gleich 1, größer als 1?

3. Welche Bedeutung haben diese Brüche, wenn die ihnen zugrunde liegende Einheit ein Kilogramm ist?

4. Welche Bedeutung haben die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{29}{30}$, $\frac{19}{60}$, wenn die ihnen zugrunde liegende Einheit eine Stunde ist?

## Formveränderung der Brüche.

§. 50.

### Umformung unechter Brüche und gemischter Zahlen.

1. Jeder unechte Bruch kann in eine ganze oder gemischte Zahl verwandelt werden.

Sollen z. B. aus dem unechten Bruche $^{27}/_4$ die Ganzen ausgesondert werden, so schließt man: 4 Viertel sind 1 Ganzes, 27 Viertel sind also so viel Ganze, wie oft 4 in 27 enthalten ist, somit 6 Ganze und es bleiben noch 3 Viertel.

$$^{27}/_4 = 27 : 4 = 6^3/_4.$$

2. **Jede gemischte Zahl kann in einen unechten Bruch verwandelt werden.**

Es sei z. B. $3^7/_8$ in einen unechten Bruch umzuformen. Man schließt: 1 Ganzes hat 8 Achtel, 3 Ganze sind also 3mal 8 = 24 Achtel, und die 7 Achtel dazu, sind 31 Achtel; folglich

$$3^7/_8 = \frac{3 \times 8 + 7}{8} = {}^{31}/_8.$$

**Aufgaben.**

1. Wie viel Ganze enthalten $^6/_6$, $^{50}/_6$, $^{29}/_7$, $^{58}/_8$, $^{70}/_9$, $^{83}/_{10}$, $^{55}/_{12}$?
   (Die hier angeführten und in diesem Abschnitte weiter folgenden Aufgaben sind, soweit es die Einfachheit der Zahlen zuläßt, im Kopfe zu lösen.)
2. Suche die Ganzen aus folgenden Brüchen:
   $^7/_3$, $^{35}/_5$, $^{57}/_6$, $^{31}/_7$, $^{85}/_9$, $^{13}/_{11}$, $^{25}/_{12}$, $^{71}/_{15}$, $^{87}/_{20}$, $^{100}/_{25}$.
3. Verwandle in gemischte Zahlen die folgenden Brüche:
   $\frac{103}{32}$, $\frac{117}{37}$, $\frac{80}{17}$, $\frac{257}{84}$, $\frac{5320}{57}$, $\frac{1041}{416}$, $\frac{2177}{208}$, $\frac{50713}{471}$, $\frac{31073}{1000}$.
4. Verwandle 1, 3, 6, 9, 13, 25, 128 in Brüche, deren Nenner a) 10, b) 25, c) 60, d) 100 ist.

Verwandle folgende gemischte Zahlen in unechte Brüche:

5. $3^4/_5$, $12^3/_7$, $9^9/_{10}$, $3^8/_{15}$, $14^2/_9$, $21^3/_4$, $102^7/_{12}$, $58^9/_{20}$.
6. $9\frac{13}{16}$, $27\frac{43}{81}$, $41\frac{31}{400}$, $84\frac{32}{125}$, $702\frac{27}{400}$, $37\frac{317}{422}$, $581\frac{147}{1000}$.

## §. 51.
## Erweitern der Brüche.

Wird in einem Bruche $^3/_5$ der Zähler z. B. mit 4 multipliciert, so erhält man 4mal so viele Theile, als ihrer der frühere Bruch enthielt; wird zugleich auch der Nenner mit 4 multipliciert, so werden die einzelnen Theile des neuen Bruches 4mal kleiner ausfallen, als die früheren; der neue Bruch enthält also 4mal so viele, aber 4mal kleinere Theile, so dass er mit dem früheren Bruche gleichen Wert hat; folglich

$$^3/_5 = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = {}^{12}/_{20}.$$

**Der Wert eines Bruches wird also nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliciert.**

Indem der Bruch $^3/_5$ in $^{12}/_{20}$ verwandelt wurde, hat sich seine Form geändert, der Wert ist aber unverändert geblieben.

Die Formveränderung eines Bruches durch die Multiplication des Zählers und Nenners mit derselben Zahl wird die Erweiterung des Bruches genannt.

Durch die Erweiterung kann man jeden Bruch ohne Änderung seines Wertes in einen andern verwandeln, dessen Nenner ein Vielfaches des früheren Nenners ist.

Um z. B. $\frac{7}{12}$ in einen Bruch, dessen Nenner 48 ist, zu verwandeln, muss man untersuchen, womit 12 zu multiplicieren ist, um 48 zu erhalten; dieses erfährt man, indem man 48 durch 12 dividiert. Da $48 : 12 = 4$ ist, so ergibt sich $\frac{7}{12} = \frac{7.4}{12.4} = \frac{28}{48}$.

Im Kopfe rechnet man: ein Ganzes hat $\frac{48}{48}$, $\frac{1}{12}$ hat $\frac{4}{48}$, $\frac{7}{12}$ sind also $\frac{28}{48}$.

Durch die Erweiterung kann man auch mehrere Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, sobald dieser durch alle Nenner der gegebenen Brüche theilbar ist. Um die Rechnungen so einfach als möglich zu führen, bringt man die Brüche gewöhnlich auf den kleinsten gemeinsamen Nenner; dieser ist die kleinste Zahl, welche durch alle gegebenen Nenner theilbar ist, somit ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches.

**Aufgaben.**

1. Bringe a) die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ auf den Nenner 10;
   b) " " $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ " " " 60;
   c) " " $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ " " " 120.
2. Bringe die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{10}$ auf den kleinsten gemeinsamen Nenner.

| v (4, 6, 10) = 60 | | |
|---|---|---|
| $\frac{3}{4}$ | 15 | 45 |
| $\frac{5}{6}$ | 10 | 50 |
| $\frac{7}{10}$ | 6 | 42 |

$\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$, $\frac{5}{6} = \frac{50}{60}$, $\frac{7}{10} = \frac{42}{60}$.

Oder: $1 = \frac{60}{60}$;
$\frac{1}{4} = \frac{15}{60}$, $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$;
$\frac{1}{6} = \frac{10}{60}$, $\frac{5}{6} = \frac{50}{60}$;
$\frac{1}{10} = \frac{6}{60}$, $\frac{7}{10} = \frac{42}{60}$.

Diese Darstellungsweise schließt sich an den Gedankengang des mündlichen Rechnens an.

Stelle folgende Brüche mit dem kl. g. Nenner dar:

3. a) $\frac{4}{10}$, $\frac{7}{15}$. b) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{14}$. c) $\frac{13}{25}$, $\frac{8}{15}$.
4. a) $\frac{4}{9}$, $\frac{11}{17}$. b) $\frac{7}{12}$, $\frac{13}{20}$. c) $\frac{16}{21}$, $\frac{37}{70}$.
5. a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$. b) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$. c) $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{19}{24}$.
6. a) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{13}{15}$. b) $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{14}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{19}{30}$.
7. a) $\frac{17}{44}$, $\frac{35}{72}$, $\frac{29}{56}$. b) $\frac{11}{15}$, $\frac{18}{35}$, $\frac{24}{55}$, $\frac{98}{105}$.
8. a) $\frac{37}{108}$, $\frac{113}{132}$, $\frac{79}{162}$. b) $\frac{91}{120}$, $\frac{147}{264}$, $\frac{103}{198}$, $\frac{211}{495}$.

## §. 52.

### Abkürzen der Brüche.

Wird in einem Bruche $^{12}/_{20}$ der Zähler z. B. durch 4 dividiert, so erhält man 4mal weniger Theile; wenn man zugleich auch den Nenner durch 4 dividiert, so werden die einzelnen Theile des neuen Bruches 4mal so groß; man erhält daher 4mal weniger, aber 4mal so große Theile, also wird der Bruch durch diese Division nur der Form, nicht aber dem Werte nach geändert; man hat

$$^{12}/_{20} = \frac{12:4}{20:4} = {}^{3}/_{5}.$$

Der Wert eines Bruches wird also nicht geändert, wenn man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.

Durch die Formveränderung eines Bruches mittels der Division des Zählers und Nenners durch dieselbe Zahl kann man den Bruch abkürzen, d. i. denselben ohne Änderung des Wertes mit kleineren Zahlen darstellen. Dies kann jedoch nur dann geschehen, wenn Zähler und Nenner ein gemeinsames Maß haben.

**Aufgaben.**

1. a) $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$; b) $\frac{420}{510} = \frac{42}{51} = \frac{14}{17}$.

Kürze folgende Brüche soweit als möglich ab:

2. $^{12}/_{18}$, $^{15}/_{24}$, $^{10}/_{25}$, $^{18}/_{30}$, $^{20}/_{36}$, $^{25}/_{40}$, $^{36}/_{54}$, $^{48}/_{60}$, $^{44}/_{66}$.

3 $\frac{75}{200}$, $\frac{192}{240}$, $\frac{102}{153}$, $\frac{135}{480}$, $\frac{666}{909}$, $\frac{1625}{2000}$, $\frac{410}{2520}$, $\frac{960}{1728}$.

4. Kürze noch folgende Brüche ab, indem du zwischen Zähler und Nenner das gr. g. Maß suchst:

$\frac{805}{966}$, $\frac{2924}{5117}$, $\frac{803}{1752}$, $\frac{741}{1254}$, $\frac{791}{1243}$, $\frac{2567}{6191}$, $\frac{1707}{2845}$.

## Addition und Subtraction der Brüche.

## §. 53.

### Addition der Brüche.

5 Neuntel und 2 Neuntel sind 7 Neuntel; oder

$$^{5}/_{9} + {}^{2}/_{9} = {}^{7}/_{9}.$$

Brüche von gleichen Nennern werden addiert, indem man ihre Zähler addiert und als Nenner den gemeinsamen Nenner beibehält. Haben die Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und dann addiert.

**Aufgaben.**

1. $^{4}/_{15} + {}^{7}/_{15} + {}^{11}/_{15} = {}^{22}/_{15} = 1^{7}/_{15}$.

Berechne:

2. a) $^{3}/_{20} + {}^{7}/_{20} + {}^{9}/_{20}$. b) $5^{3}/_{8} + 6^{7}/_{8} + 8^{5}/_{8}$.

1.520 × 2
1040

3. $12\frac{7}{32} + 44\frac{17}{32} + 10 + 18\frac{23}{32} + 7\frac{29}{32}$.

4. Man hat vier Zahlen; die erste ist $8^4/_5$, jede folgende ist um $2^3/_5$ größer als die vorhergehende; wie groß ist die Summe aller?

5. Addiere die Brüche $^3/_5$, $^5/_6$ und $^7/_{10}$.

$v\,(5, 6, 10) = 30$

| | | |
|---|---|---|
| $^3/_5$ | 6 | 18 |
| $^5/_6$ | 5 | 25 |
| $^7/_{10}$ | 3 | 21 |

$\frac{64}{30} = \frac{32}{15} = 2\frac{2}{15}$.

Berechne:

6. a) $^3/_4 + {}^5/_6$. b) $^7/_8 + {}^5/_6$.

7. a) $^1/_2 + {}^3/_4 + {}^5/_8$. b) $^2/_3 + {}^4/_5 + {}^7/_9$.

8. a) $^7/_8 + {}^5/_{12} + {}^{11}/_{20}$. b) $^{17}/_{18} + {}^{16}/_{27} + {}^{13}/_{36} + {}^{14}/_{45}$.

9. a) $8^3/_8 + {}^7/_{12} + 6^{13}/_{20}$. b) $12^7/_{10} + 13^8/_{15} + 25^{19}/_{24}$.

10. $4\frac{5}{6} + 8\frac{13}{21} + 5\frac{20}{33} + 3\frac{29}{36} + 7\frac{37}{54}$.

11. $25\frac{17}{48} + 32\frac{23}{72} + 15\frac{11}{64} + 24\frac{7}{36} + 20\frac{31}{98}$.

12. Prüfe die Richtigkeit folgender Aufgaben:

a) $^3/_4 + {}^1/_2 + {}^5/_6 + {}^7/_{10} = {}^2/_3 + {}^7/_{12} + {}^3/_5 + {}^{14}/_{15}$.

b) $^2/_9 + {}^7/_{12} + {}^9/_{14} + {}^{29}/_{63} = {}^3/_7 + {}^{13}/_{18} + {}^8/_{21} + {}^{11}/_{36}$.

c) $\frac{13}{44} + \frac{47}{75} + \frac{53}{165} + \frac{217}{275} = \frac{29}{60} + \frac{23}{66} + \frac{39}{100} + \frac{107}{132}$.

13. Wie groß ist die Summe von fünf Zahlen, von denen die erste $731^{11}/_{12}$ und jede folgende um $27^3/_5$ größer als die vorhergehende ist?

14. Jemand hat $37^4/_4$ *K*, $15^7/_{10}$ *K*, $22^{13}/_{20}$ *K*, $5^{16}/_{25}$ *K* und $12^1/_2$ *K* zu zahlen; wie viel zusammen?

15. Die Seiten eines Dreieckes betragen $225^1/_2$ *m*, $173^3/_4$ *m* und $205^2/_5$ *m*; wie groß ist der Umfang?

16. Ein Wasserbehälter wird durch drei Röhren gefüllt; die erste Röhre allein füllt in 1 Stunde $^1/_3$ des Behälters, die zweite in derselben Zeit $^1/_4$, die dritte $^1/_6$. Welcher Theil des Behälters wird in einer Stunde gefüllt, wenn alle drei Röhren zugleich fließen?

17. Eine Wasserpumpe kann das in einer Grube enthaltene Wasser in 15 Tagen, eine andere in 12 Tagen herausschaffen; welcher Theil des Wassers wird von beiden Maschinen zusammen in einem Tage herausgepumpt?

18. Wie hoch kommt das Ausgraben eines 8 *m* tiefen Brunnens, wenn das Ausgraben für das erste *m* $3^3/_4$ fl. und für jedes folgende *m* $^4/_5$ fl. mehr als für das vorhergehende kostet?

## §. 54.

### Subtraction der Brüche.

7 Achtel weniger 5 Achtel sind 2 Achtel; oder

$$7/_8 - 5/_8 = 2/_8.$$

Brüche von gleichen Nennern werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und als Nenner den gemeinsamen Nenner beibehält. Haben die Brüche ungleiche Nenner, so werden sie zuerst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht und dann subtrahiert.

**Aufgaben.**

Berechne:

1. a) $8/_9 - 5/_9$. b) $11/_{12} - 5/_{12}$. c) $23/_{30} - 13/_{30}$.
2. a) $8\,3/_7 - 3$. b) $12\,7/_{10} - 9$. c) $9\,8/_{15} - 2\,2/_{15}$.
3. a) $1 - 5/_6$. b) $5 - 9/_{16}$. c) $15 - 10\,3/_4$.
4. a) $8\,9/_{16} - 5\,13/_{16}$. b) $57\frac{59}{100} - 38\frac{83}{100}$.
5. Subtrahiere $2/_9$ von $5/_{12}$.

$v\,(9,\ 12) = 36$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{5}{12}$ | 3 | 15 |
| $\frac{2}{9}$ | 4 | 8 |
| | | $\frac{7}{36}$ |

$\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$; $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$. Wenn man nun $\frac{8}{36}$ von $\frac{15}{36}$ subtrahiert, so bleiben $\frac{7}{36}$.

Berechne ebenso:

6. a) $8/_9 - 7/_8$. b) $17/_{20} - 3/_5$. c) $13/_{18} - 3/_{10}$.
7. a) $15/_{28} - 4/_{21}$. b) $9/_{16} - 5/_{12}$. c) $19/_{25} - 11/_{30}$.
8. a) $\frac{53}{60} - \frac{13}{25}$. b) $\frac{59}{84} - \frac{71}{112}$. c) $\frac{209}{480} - \frac{253}{600}$.
9. a) $19\frac{7}{8}$, $7\frac{2}{3}$, $12\frac{5}{24}$; 24: 3 | 21, 8 | 16, 5. b) $35\frac{2}{9}$, $21\frac{7}{12}$, $13\frac{23}{36}$; 36: 4 | 8 + 36, 3 | 21, 23.
10. a) $23\frac{13}{15} - 18\frac{17}{25} = ?$ b) $19\frac{53}{60} - 15\frac{47}{48} = ?$
11. a) $129\frac{13}{24} - 105\frac{27}{32} = ?$ b) $52\frac{71}{300} - 25\frac{103}{250} = ?$
12. Um wie viel wird der Bruch $\frac{37}{48}$ größer oder kleiner, wenn man a) zum Zähler und Nenner 5 addiert, b) vom Zähler und Nenner 5 subtrahiert?
13. Um wie viel wird der Bruch $\frac{5408}{7219}$ größer oder kleiner, wenn man im Zähler und Nenner a) die letzte, b) die zwei letzten Ziffern rechts wegläßt?
14. Man hat folgende Brüche: $1/_2$, $1/_4$, $1/_8$, $1/_{16}$, $1/_{32}$, $1/_{64}$; um wie viel ist die Summe der ersten zwei Brüche kleiner als 1? — um wie viel die Summe der ersten drei, vier, fünf, sechs Brüche?

15. Man hat vier Zahlen: die erste ist $25\frac{1}{3}$, die zweite um $8\frac{3}{4}$ größer als die erste, die dritte um $12\frac{3}{5}$ kleiner als die zweite, die vierte ist gleich dem Unterschiede zwischen der ersten und dritten; wie groß ist die Summe aller vier Zahlen?

16. Ein Beamter bezieht in einem Monate $174\frac{1}{2}$ *K* Gehalt, er gibt $149\frac{1}{5}$ *K* aus; wie viel erspart er?

17. Drei Säcke wiegen mit dem darin enthaltenen Reis $125\frac{3}{5}$, $127\frac{7}{10}$, $128\frac{1}{4}$ *kg*; die leeren Säcke wiegen $8\frac{1}{2}$, $8\frac{3}{5}$, $8\frac{3}{4}$ *kg*; wie viel Reis ist in allen Säcken?

18. Aus einem Fasse, welches $32\frac{1}{4}$ *hl* Wein enthält, werden drei kleinere Fässer, von denen das erste $7\frac{1}{2}$, das zweite $6\frac{3}{4}$, das dritte $6\frac{7}{20}$ *hl* fasst, gefüllt; wie viel Wein bleibt noch im großen Fasse übrig?

## Multiplication und Division der Brüche.

### §. 55.

### Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl.

Nimmt man den Zähler eines Bruches, z. B. 5mal so groß, so wird die Anzahl der Theile, somit auch der Bruch 5mal so groß. Nimmt man den Nenner eines Bruches 5mal so klein, d. i. nimmt man von ihm den 5ten Theil, so erhält man 5mal so große Theile, somit wird auch der Bruch 5mal so groß.

Ein Bruch wird demnach mit einer ganzen Zahl multipliciert, indem man entweder den Zähler mit der ganzen Zahl multipliciert oder den Nenner durch dieselbe dividiert.

$$\text{z. B. } \frac{7}{10} \times 5 = \frac{7 \times 5}{10} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}; \text{ oder}$$

$$\frac{7}{10} \times 5 = \frac{7}{10 : 5} = \frac{7}{2}.$$

Das zweite Verfahren ist vortheilhafter, jedoch nur dann anwendbar, wenn der Nenner des Bruches durch die ganze Zahl theilbar ist.

$$\frac{5}{8} \times 8 = 5, \quad \frac{12}{25} \times 25 = 12.$$

Ein Bruch mit seinem Nenner multipliciert gibt den Zähler zum Producte.

**Aufgaben.**

1. a) $\frac{8}{11} \times 7 = ?$ b) $\frac{5}{12} \times 8 = ?$ c) $\frac{3}{10} \times 5 = ?$
   $\frac{7}{12} \times 5 = ?$ $\frac{11}{15} \times 6 = ?$ $\frac{17}{30} \times 15 = ?$
2. a) $\frac{37}{64} \times 5 = ?$ b) $\frac{59}{63} \times 16 = ?$ c) $\frac{21}{112} \times 337 = ?$

3. $\frac{13}{18} \times 12 = \frac{156}{18} = 8\frac{12}{18} = 8\frac{2}{3}$; oder $\frac{13}{\underset{3}{\cancel{18}}} \times \overset{2}{\cancel{12}} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Wenn der Nenner des Bruches und die ganze Zahl ein gemeinsames Maß haben, so wird die Multiplication vereinfacht, wenn man dieselben noch vor dem Multiplicieren durch jenes Maß dividiert.

4. a) $\frac{10}{21} \times 14 = ?$ b) $\frac{25}{32} \times 36 = ?$ c) $\frac{17}{21} \times 15 = ?$

5. a) $\frac{17}{30} \times 20 = ?$ b) $\frac{112}{125} \times 75 = ?$ c) $\frac{83}{150} \times 103 = ?$

6. $5\frac{3}{4} \times 7 = 40\frac{1}{4}$ oder $5\frac{3}{4} \times 7 = \frac{23}{4} \times 7 = \frac{161}{4} = 40\frac{1}{4}$.

Bei der ersten Multiplicationsart spricht man: 7mal $\frac{3}{4}$ sind $\frac{21}{4}$, d. i. 5 Ganze und $\frac{1}{4}$; 7mal 5 ist 35, und 5 ist 40.

Berechne:

7. a) $19\frac{5}{8} \times 9$. b) $18\frac{7}{12} \times 11$. c) $19\frac{23}{25} \times 37$.

8. a) $91\frac{7}{12} \times 61$. b) $12\frac{37}{40} \times 25$. c) $31\frac{12}{27} \times 18$.

9. a) $89\frac{8}{35} \times 55$. b) $45\frac{107}{125} \times 105$. c) $271\frac{39}{160} \times 93$.

10. a) $53\frac{7}{12} \times 35$.

$$\begin{array}{r} \hline \times\, 5 \\ 267\frac{11}{12} \\ \hline \times\, 7 \\ 1875\frac{5}{12} \end{array}$$

b) $23\frac{9}{16} \times 45$.

c) $17\frac{13}{32} \times 56$.

d) $241\frac{125}{236} \times 72$.

11. 1 $q$ kostet $35\frac{17}{25}$ $K$; wie viel kosten a) 10 $q$, b) 43 $q$?

12. Wie groß ist der Umfang eines Rades, welches 48 Zähne hat, wenn diese $4\frac{3}{8}$ $cm$ von einander abstehen?

13. Die neuen Ein-Kronenstücke enthalten $4\frac{7}{40}$ $g$ feinen Silbers; wie viel $g$ Feinsilber enthalten 200 Ein-Kronenstücke?

14. Ein russischer Silberrubel gilt 1 fl. $61\frac{23}{25}$ kr. ö. W.; wie viel in ö. W. betragen a) 204 Rubel? b) 793 Rubel? c) 2465 Rubel?

## §. 56.

## Division eines Bruches durch eine ganze Zahl.

Nimmt man den Zähler eines Bruches 4mal so klein, so wird die Anzahl der Theile, somit auch der Bruch, 4mal so klein. Nimmt man den Nenner eines Bruches 4mal so groß, so wird jeder einzelne Theil, somit auch der Bruch, 4mal so klein.

Ein Bruch wird also durch eine ganze Zahl dividiert, indem man entweder den Zähler durch die ganze Zahl dividiert oder den Nenner mit derselben multipliciert.

Z. B. $\quad {}^{8}/_{9} : 4 = \frac{8 : 4}{9} = {}^{2}/_{9}$; oder

$$ {}^{8}/_{9} : 4 = \frac{8}{9 \times 4} = {}^{8}/_{36} = {}^{2}/_{9}.$$

Das erste Verfahren ist vortheilhafter, jedoch nur dann anwendbar, wenn der Zähler durch die ganze Zahl theilbar ist.

**Aufgaben.**

**1.** a) $^{10}/_{11} : 2 = ?$ b) $^{9}/_{10} : 3 = ?$ c) $^{8}/_{15} : 4 = ?$
$^{7}/_{9} : 3 = ?$ $^{11}/_{15} : 2 = ?$ $^{21}/_{25} : 8 = ?$

**2.** $\frac{8}{15} : 12 = \frac{8}{180} = \frac{2}{45}$; oder $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{15} : \overset{3}{\cancel{12}} = \frac{2}{45}$.

**3.** a) $\frac{15}{16} : 20 = ?$ b) $\frac{12}{33} : 14 = ?$ c) $\frac{35}{43} : 21 = ?$

**4.** $9\frac{1}{8} : 5 = 1\frac{33}{40}$; oder $9\frac{1}{8} : 5 = \frac{73}{8} : 5 = \frac{73}{40} = 1\frac{33}{40}$.

Bei der ersten Divisionsart sagt man: der 5te Theil von 9 ist 1, bleibt 4, 4 Ganze sind $\frac{32}{8}$ und $\frac{1}{8}$ sind $\frac{33}{8}$; der 5te Theil von $\frac{33}{8}$ sind $\frac{33}{40}$.

**5.** a) $12^{6}/_{7} : 3 = ?$ b) $17^{3}/_{4} : 5 = ?$ c) $59^{7}/_{10} : 7 = ?$

**6.** a) $307\frac{17}{28} : 9 = ?$ b) $342\frac{9}{11} : 23 = ?$ c) $1346\frac{13}{25} : 31 = ?$

**7.** a) $517\frac{3}{8} : 36$. Berechne ebenso: b) $1907\frac{7}{24} : 56$.

$$\begin{array}{l} \underline{\phantom{517\frac{3}{8}}} : 6 \\ 86\frac{11}{48} \\ \underline{\phantom{517\frac{3}{8}}} : 6 \\ 14\frac{107}{288} \end{array}$$

c) $9248\frac{17}{20} : 45$.

d) $6804\frac{7}{10} : 28$.

**8.** 9 *m* kosten $38\frac{1}{4}$ *K*; wie viel kostet 1 *m*?

**9.** 1 *hl* kostet 18 *K*; wie viel *hl* bekommt man für $499\frac{1}{2}$ *K*?

**10.** In einer Classe von 45 Schülern ist 1 Schüler $10^{1}/_{2}$ Jahre alt, 17 sind je 11, 15 sind je $11^{2}/_{3}$, 11 sind je 12, und 1 ist 13 Jahre alt; welches ist das durchschnittliche Alter eines Schülers dieser Classe?

**11.** Wenn man 24 *hl* Weizen à $12^{1}/_{2}$ *K* und 16 *hl* à $12^{2}/_{5}$ *K* mischt und beim Verkaufe den 7ten Theil des Preises gewinnen will; wie viel beträgt der Gewinn und wie theuer muss man das *hl* des so gemischten Weizens verkaufen?

## §. 57.

### Multiplication mit einem Bruche.

Es sei eine Zahl mit $^{3}/_{4}$ zu multiplicieren. Hier sollte nach der in §. 17 gegebenen Erklärung der Multiplication die gegebene Zahl $^{3}/_{4}$mal als Summand gesetzt werden, welche Aufgabe offenbar keinen Sinn hat. Wir werden daher den ursprünglich für ganze Zahlen aufgestellten Vorgang in derselben Weise wie beim Multiplicieren mit einer niedrigeren Rangzahl (§. 20, d) anwenden.

Multipliciert man eine Zahl, z. B. 5, der Reihe nach mit 4, 3, 2, 1, so erhält man als Producte 20, 15, 10, 5; bei gleichbleibendem Multiplicanden nimmt sonach das Product in dem Maße ab wie der Multiplicator, ist der Multiplicator die Hälfte, der vierte Theil, so wird auch das Product die Hälfte, der vierte Theil.

1 ist die Hälfte von 2, 2 die Hälfte von 4 und 5 ist die Hälfte von 10 und 10 die Hälfte von 20. In $5 \times \frac{1}{2}$ ist der Multiplicator nur halb so groß wie in $5 \times 1$, daher wird auch das erstere Product nur halb so groß sein als das letztere, also

$$5 \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}; \text{ ebenso ergibt sich } 5 \times \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4},$$

demgemäß kann man auch sagen: eine Zahl wird mit $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ multipliciert, wenn man sie durch 2, beziehungsweise 3, 4.. dividiert.

Ist eine Zahl, z. B. 5, mit $\frac{3}{4}$ zu multiplicieren, so ist zu beachten, dass $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ ist, dass sonach $5 \times \frac{3}{4}$ sagt, man soll den vierten Theil von 5 dreimal nehmen. Der vierte Theil von 5 ist $\frac{5}{4}$, somit ist dreimal der vierte Theil $\frac{15}{4}$ oder

$$5 \times \tfrac{3}{4} = \tfrac{5}{4} \times 3 = \frac{5 \times 3}{4} = \tfrac{15}{4}.$$

Eine ganze Zahl wird demnach mit einem Bruche multipliciert, wenn man das Product aus der Zahl und dem Zähler durch den Nenner dividiert, oder das Product einer ganzen Zahl und eines Bruches ist ein Bruch, dessen Zähler das Product aus der ganzen Zahl und dem Zähler des Multiplicators, und dessen Nenner der Nenner des Multiplicators ist.

Ist ein Bruch mit einem Bruche zu multiplicieren, z. B. $\frac{7}{8} \times \frac{3}{5}$, so sagt dies nach der obigen Erklärung, der fünfte Theil von $\frac{7}{8}$ ist dreimal zu nehmen. Der fünfte Theil von $\frac{7}{8}$ ist (§. 56) $\frac{7}{8 \times 5}$, somit ist dreimal der fünfte Theil $\frac{7}{8 \times 5} \times 3 = \frac{7 \times 3}{8 \times 5} = \frac{21}{40}$.

Das Product zweier Brüche ist also ein Bruch, dessen Zähler das Product der Zähler und dessen Nenner das Product der Nenner der gegebenen Brüche ist.

**Aufgaben.**

1. a) $12 \times {}^1/_6 = ?$ b) $10 \times {}^2/_5 = ?$ c) $13 \times {}^3/_8 = ?$
   $25 \times {}^4/_5 = ?$ $27 \times {}^7/_9 = ?$ $15 \times {}^9/_{11} = ?$

2. a) $613 \times {}^5/_8$. Berechne ebenso: b) $938 \times {}^3/_8$.
   $306^1/_2 \,..\, {}^1/_2$ c) $159 \times {}^7/_{12}$.
   $76^5/_8 \,..\, {}^1/_8 = {}^1/_4$ von ${}^1/_2$ d) $207 \times {}^{11}/_{20}$.
   $383^1/_8$.

3. a) ${}^3/_8 \times {}^5/_7 = ?$ b) ${}^7/_{19} \times {}^5/_{12} = ?$ c) ${}^9/_{10} \times {}^3/_5 = ?$

4. $\frac{8}{15} \times \frac{7}{12} = \frac{56}{180} = \frac{14}{45}$; oder $\frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{15} \times \frac{7}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{14}{45}$.

Wenn der Zähler des einen und der Nenner des andern Bruches ein gemeinsames Maß haben, so kürzt man sie noch vor der Multiplication ab.

**5.** a) $\frac{3}{8} \times \frac{18}{25} = ?$ b) $\frac{15}{34} \times \frac{4}{9} = ?$ c) $\frac{35}{48} \times \frac{20}{21} = ?$

**6.** $3^1/_2 \times 6^2/_3 = {}^7/_2 \times {}^{20}/_3 = {}^{70}/_3 = 23^1/_3$.

**7.** a) $7 \times 6^4/_5 = ?$ b) $15 \times 9^3/_8 = ?$

**8.** a) $4^3/_4 \times {}^4/_5 = ?$ b) $8^3/_5 \times {}^8/_9 = ?$

**9.** a) $7^2/_5 \times 3^1/_4 = ?$ b) $19^2/_3 \times 9^5/_8 = ?$

b) $18 \times 7^7/_9 = ?$

c) $25^1/_2 \times {}^7/_{10} = ?$

d) $21^3/_4 \times 12^3/_9 = ?$

**10.** Multipliciere 209 mit $8^3/_4$.

Wegen $8^3/_4 = 8 + {}^1/_2 + {}^1/_4$ oder $8^3/_4 = 9 - {}^1/_4$ hat man

$$\begin{array}{r} 209 \times 8^3/_4 \\ \hline 1672 \ldots . 8 \\ 104^1/_2 \ldots {}^1/_2 \\ 52^1/_4 \ldots {}^1/_4 \\ \hline 1828^3/_4 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r} 209 \times 8^3/_4 \\ \hline 1881 \ldots . 9 \\ \text{ab} \quad 52^1/_4 \ldots {}^1/_4 \\ \hline 1828^3/_4 \end{array}$$

**11.** a) $905 \times 9^7/_8 = ?$ b) $315 \times 24^3/_8 = ?$

c) $1234 \times 17^{11}/_{12} = ?$

**12.** a) $357^5/_6 \times 57^{13}/_{15} = ?$ b) $835\frac{37}{50} \times 198\frac{25}{72} = ?$

**13.** a) $3\frac{1}{2} \times \frac{7}{10} \times 2\frac{4}{5} = ?$ b) $2\frac{11}{20} \times \frac{12}{25} \times \frac{10}{27} \times \frac{14}{16} = ?$

**14.** Um wie viel ist das Product der Brüche $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$ und $^4/_5$ kleiner als ihre Summe?

**15.** Wie viel kosten $^4/_5$ *kg*, wenn 1 *kg* $1^9/_{20}$ *K* kostet?

**16.** Der Umfang eines Kreises ist $3\frac{1}{7}$mal, genauer $\frac{355}{113}$mal so groß als der Durchmesser; a) wie groß ist für jede dieser Angaben der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser 4 *m* 7 *dm* beträgt? b) wie groß ist der Unterschied beider Resultate?

**17.** Drei Personen sollen eine Summe von $385^1/_5$ *K* so theilen, dass A $^3/_{10}$ davon, B $^1/_4$ und C den Rest bekommt; wie viel erhält jede Person?

**18.** B hat $2^1/_2$mal so viel Geld als A, C $1^1/_3$mal so viel als B, D $^3/_8$mal so viel als C; wenn nun A $45^3/_5$ *K* hat, wie viel hat a) jeder der übrigen, b) wie viel haben alle zusammen?

## §. 58.

### Division durch einen Bruch.

Werden in einer als Bruch dargestellten Zahl Zähler und Nenner vertauscht, so heißt die neue Zahl der reciproke Wert der gegebenen. So ist

$^5/_4$ der reciproke Wert von $^4/_5$,

5 " " " " $^1/_5$.

Gib die reciproken Werte folgender Zahlen an:

$$^2/_3,\ ^5/_2,\ ^1/_4,\ 6,\ 2^1/_2,\ 3^5/_8.$$

Jede Zahl gibt mit ihrem reciproken Werte multipliciert 1 zum Producte; z. B.

$$^4/_5 \cdot {}^5/_4 = 1, \qquad ^1/_5 \cdot 5 = 1.$$

Es sei nun 7 durch $^1/_5$ zu dividieren. Der Quotient ist diejenige Zahl, welche mit dem Divisor $^1/_5$ multipliciert den Dividend 7 gibt, d. i. von welcher der 5te Theil 7 ist. Die Zahl nun, deren 5ter Theil 7 ist, ist das 5fache von 7; somit

$$7 : {}^1/_5 = 7 \times 5.$$

Entwickle durch ähnliche Schlüsse, dass

$$7 : {}^1/_2 = 7 \times 2, \qquad 7 : {}^1/_3 = 7 \times 3 \text{ ist.}$$

Um also eine Zahl durch $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_5$ zu dividieren, multipliciert man sie mit dem reciproken Werte 2, 3, 5.

Es sei ferner 7 durch $^4/_5$ zu dividieren. Hier soll die Zahl gefunden werden, welche mit $^4/_5$ multipliciert, d. i. von welcher der 5te Theil 4mal genommen, 7 gibt. Die Zahl, welche 4mal genommen 7 gibt, ist der 4te Theil von 7; die Zahl aber, von welcher schon der 5te Theil 4mal genommen 7 gibt, ist 5mal so groß, also 5mal der 4te Theil von 7, d. i. $7 \times {}^5/_4$; somit ist

$$7 : {}^4/_5 = 7 \times {}^5/_4.$$

Begründe auf gleiche Weise die Richtigkeit folgender Quotienten:

$$7 : {}^2/_3 = 7 \times {}^3/_2, \qquad 7 : {}^3/_4 = 7 \times {}^4/_3.$$

Hieraus ergibt sich der Satz:

Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie mit dem reciproken Werte desselben multipliciert.

Auf diesen Satz wird man auch durch die Lösung angewandter Aufgaben geleitet. Z. B. $^4/_5$ *hl* kosten 7 fl.; wie viel kostet 1 *hl*? Wenn 4 *hl* 7 fl. kosteten, so würde 1 *hl* den 4ten Theil von 7 fl. kosten, man müsste also 7 fl. durch 4 dividieren; kosten nun $^4/_5$ *hl* 7 fl., so wird man, um den Preis für 1 *hl* zu erhalten, 7 fl. durch $^4/_5$ dividieren, 1 *hl* kostet demnach 7 fl. : $^4/_5$. Was diese Division bedeutet, ergibt sich sogleich, wenn man die Aufgabe durch gewöhnliche Schlüsse auflöst.

Kosten $^4/_5$ *hl* 7 fl., so kostet

$^1/_5$ *hl* den 4ten Theil von 7 fl.;

1 *hl* kostet dann 5mal so viel, somit 5mal den 4ten Theil von 7 fl.

Man muss also 7 fl. fortschreitend durch 4 dividieren und mit 5 multiplicieren, d. i.

$$7 \text{ fl.} : {}^4/_5 = 7 \text{ fl.} \times {}^5/_4.$$

Häufig treten die Multiplication und die Division der Brüche mit einander in Verbindung.

Es sei z. B. $^7/_{10} \times {^3/_8}$ durch $^{11}/_{15}$ zu dividieren. Man hat

$$\frac{^7/_{10} \times {^3/_8}}{^{11}/_{15}} = \frac{7 \times 3 \times \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \times 8 \times 11} = {^{63}/_{176}}.$$

Der Quotient wird nicht geändert, wenn man den Dividend und den Divisor mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert. Multipliciert man hier Dividend und Divisor mit 10, so fällt 10 als Nenner im Dividend weg, kommt dagegen als Factor in den Divisor. Ebenso wird durch die Multiplication mit 8 der Nenner 8 des Dividends als Factor in den Divisor, und durch die Multiplication mit 15 der Nenner 15 des Divisors als Factor in den Dividend gebracht. Der dadurch entstandene Bruch wird sodann durch 5 (wodurch 10 und 15 theilbar sind) abgekürzt.

Wenn gemischte Zahlen vorkommen, so werden sie in unechte Brüche verwandelt. Z. B.

$$\frac{2^1/_2 \times 3^3/_5}{1^3/_4} = \frac{^5/_2 \times {^{18}/_5}}{^7/_4} = \frac{\cancel{5} \times 18 \times \overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2} \times \cancel{5} \times 7} = {^{36}/_7} = 5^1/_7.$$

**Aufgaben.**

Berechne:

1. a) $12 : {^1/_3}$. b) $42 : {^7/_{10}}$. c) $504 : {^5/_8}$.
   $15 : {^3/_4}$. $36 : {^4/_5}$. $5 : 3^2/_3$.
2. a) $^1/_2 : {^3/_8}$. b) $^5/_6 : {^1/_9}$. c) $^7/_{12} : {^9/_{16}}$.
3. a) $^3/_{10} : 3^2/_5$. b) $^{11}/_{12} : 2^3/_4$. c) $5^1/_4 : {^7/_{10}}$.
4. a) $^7/_{10} : {^3/_8}$. b) $3^4/_5 : {^5/_6}$. c) $9^1/_2 : {^8/_{15}}$.
5. a) $17\frac{16}{21} : \frac{11}{12}$. b) $18\frac{7}{15} : 3\frac{3}{10}$. c) $7\frac{3}{8} : 3\frac{11}{20}$.
6. a) $92^1/_3 : 2^6/_7$. b) $702 : 12^2/_3$. c) $25^7/_9 : 15^1/_{18}$.
7. a) $258\frac{23}{50} : \frac{127}{130}$. b) $728\frac{325}{628} : 51\frac{137}{250}$.
8. a) $^5/_8 \times {^3/_4} : {^{10}/_{13}}$. b) $3^1/_2 \times 9 : 5^3/_4$.
9. a) $\dfrac{2^7/_{10} \cdot 35^1/_2 \cdot {^2/_3}}{37^1/_5 \cdot {^3/_4}}$. b) $\dfrac{5^1/_2 \cdot {^3/_4} \cdot 3^5/_6 \cdot 6^1/_4}{2^3/_4 \cdot 4^1/_5 \cdot 34}$.
10. Von welcher Zahl betragen $^3/_8$ um $36^3/_{10}$ weniger als $^9/_{10}$ von $128^2/_3$?
11. Wie theuer kommt 1 *m* zu stehen, wenn $^3/_4$ *m* 72 *h* kosten?
12. Ein Kaufmann gewann beim Verkaufe einer Ware $25^3/_4$ *K*, und zwar an jedem *kg* $^1/_{10}$ *K*; wie viele *kg* hat er verkauft?
13. Ein Bote legte in einer Stunde $4^3/_8$ *km* zurück; in welcher Zeit legt er 210 *km* zurück?
14. Ein Acker, welcher $2^1/_4$ *ha* enthält, wird um 2520 fl. verkauft; wie hoch kommt 1 *ha* zu stehen?

15. Jemand kauft um $57\frac{3}{5}$ *K* Zucker und Kaffee, und zwar von jedem um die Hälfte des Betrages; wenn nun 1 *kg* Zucker $\frac{18}{25}$ *K* und 1 *kg* Kaffee $3\frac{1}{5}$ *K* kostet, wie viel bekommt er Zucker und wie viel Kaffee?

16. In ein Fass, welches 56 *l* fasst, fließt durch zwei Röhren Wasser; die erste allein füllt das Fass in 16 Minuten, die andere in 12 Minuten; a) wie viel Wasser liefert jede Röhre in 1 Minute? b) in wie viel Minuten wird das Fass voll sein, wenn sich beide Röhren zugleich in dasselbe ergießen?

## Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche und umgekehrt.

### §. 59.

### Die Decimalzahlen als Brüche.

Die Decimalzahlen lassen eine zweifache Auffassungsweise zu. Man kann dieselben als eine Erweiterung des dekadischen Zahlensystems über die Einer hinaus darstellen und dann mit ihnen nach den Gesetzen der dekadischen Zahlen rechnen, wie dies hier im I. Abschnitte geschehen ist. Man kann aber die Decimalzahlen auch als Brüche, deren Nenner eine höhere Rangzahl 10, 100, 1000.. ist, betrachten und in diesem Falle mit Anschreibung des Nenners auch in der Form von gemeinen Brüchen darstellen. So ist

$$0\cdot1 = \tfrac{1}{10}, \quad 0\cdot01 = \tfrac{1}{100}, \quad 0\cdot001 = \tfrac{1}{1000},$$
$$0\cdot7 = \tfrac{7}{10}, \quad 0\cdot53 = \tfrac{53}{100}, \quad 0\cdot029 = \tfrac{29}{1000},$$
$$2\cdot3 = \tfrac{23}{10}, \quad 5\cdot41 = \tfrac{541}{100}, \quad 0\cdot627 = \tfrac{627}{1000}; \text{ u. s. w.}$$

Werden die Decimalzahlen in der Form von Brüchen dargestellt, so können auf sie auch die für das Rechnen mit gemeinen Brüchen entwickelten Gesetze angewendet werden. Z. B.

$$0\cdot534 \times 2\cdot67 = \tfrac{534}{1000} \times \tfrac{267}{100} = \tfrac{142578}{100000} = 1\cdot42578.$$

### §. 60.

### Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch.

Um einen gemeinen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, darf man nur den Zähler durch den Nenner dividieren.

Z. B. $\tfrac{7}{8} = 7_0 : 8 = 0\cdot875$, $\tfrac{113}{25} = 113 : 25 = 4\cdot52.$

| | |
|---|---|
| 60 | 130 |
| 40 | 50 |
| 0 | 0. |

Schließt die Division ohne Rest ab, so heißt der erhaltene Decimalbruch ein endlicher. Dieser Fall tritt nur ein, wenn der Nenner des gemeinen Bruches 2 oder 5, oder ein Product ist, das keinen von 2 und 5 verschiedenen Factor enthält, da man nur in diesem Falle den Bruch derart erweitern kann, dass sein neuer Nenner eine höhere Rangzahl wird. In jedem andern Falle geht die Division nicht ohne Rest auf und heißt dann der Decimalbruch ein unendlicher. Z. B.

$$\frac{8}{11} = 8_0 : 11 = 0\cdot7272.., \qquad \frac{97}{15} = 97 : 15 = 6\cdot466..$$

| | |
|---|---|
| 30 | 70 |
| 80 | 100 |
| 30 | 100 |
| 8 | 10. |

Wenn die Division nicht ohne Rest aufgeht, so muss bei fortgesetzter Rechnung, da der Rest stets kleiner sein muss, als der Divisor, einer der schon einmal übrig gebliebenen Reste nothwendig wieder erscheinen und es werden daher auch im Quotienten Ziffern, die schon einmal dagewesen sind, in derselben Reihenfolge wiederkehren. Ein Decimalbruch, in welchem eine Ziffer oder eine Reihe von Ziffern immer wiederkehrt, heißt ein periodischer, und die Reihe der Ziffern, welche sich wiederholen, die Periode.

Jeder unendliche Decimalbruch, der aus einem gemeinen Bruch entsteht, ist ein periodischer.

Man pflegt die Periode nur einmal anzuschreiben, jedoch die erste und die letzte Ziffer derselben mit je einem darüber gesetzten Punkte zu bezeichnen. Es ist demnach:

$$\frac{8}{11} = 0\cdot\dot{7}\dot{2}; \qquad \frac{97}{15} = 6\cdot4\dot{6}.$$

Je nachdem die Periode mit der ersten Decimalstelle oder erst mit einer späteren Stelle anfängt, heißt der periodische Decimalbruch reinperiodisch oder gemischtperiodisch.

Ein reinperiodischer Decimalbruch entsteht aus einem gemeinen Bruche, dessen Nenner weder 2 noch 5 als Factor enthält; ein gemischtperiodischer aus einem gemeinen Bruche, dessen Nenner 2 oder 5 und auch andere Primfactoren enthält.

**Aufgaben.**

Verwandle folgende gemeine Brüche in Decimalbrüche:

1. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{19}{25}$, $\frac{25}{8}$, $\frac{101}{125}$, $\frac{29}{16}$, $\frac{73}{625}$, $\frac{37}{64}$.
2. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{40}{33}$, $\frac{20}{27}$, $\frac{31}{37}$, $\frac{602}{111}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{13}$.
3. $\frac{5}{6}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{25}{12}$, $\frac{217}{330}$, $\frac{49}{54}$, $\frac{25}{36}$, $\frac{216}{275}$, $\frac{51}{88}$, $\frac{197}{296}$.
4. Ein Zwanzig-Kronenstück wiegt $6\frac{286}{369}\,g$; verwandle den gemeinen Bruch in einen Decimalbruch.

## §. 61.

### Verwandlung eines Decimalbruches in einen gemeinen Bruch.

1. Um einen endlichen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, stellt man ihn mit Aufschreibung seines Nenners dar. Z. B.

$$0\cdot75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}; \qquad 0\cdot048 = \frac{48}{1000} = \frac{6}{125}.$$

2. Es sei der reinperiodische Decimalbruch $0\cdot\dot{3}\dot{7}$ in einen gemeinen Bruch zu verwandeln. Die Periode hat zwei Ziffern. Multipliciert man daher den ohne Ende fortlaufenden Decimalbruch $0\cdot373737..$ mit 100 und subtrahiert davon den gegebenen Bruch, so fallen in der Differenz die Decimalen weg; man hat

$$\left.\begin{array}{r} 100\text{facher Bruch} = 37\cdot3737.. \\ 1\text{facher Bruch} = \phantom{3}0\cdot3737.. \end{array}\right\}\text{ subtrahiert}$$
$$\overline{99\text{facher Bruch} = 37,}$$

daher der Bruch selbst $= \frac{37}{99}$; somit

$$0\cdot\dot{3}\dot{7} = \frac{37}{99}.$$

Nach demselben Vorgange erhält man:

$$0\cdot\dot{6} = \frac{6}{9}, \qquad 0\cdot\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}, \qquad 0\cdot\dot{4}0\dot{1} = \frac{401}{999}.$$

Welches Gesetz herrscht in den erhaltenen gemeinen Brüchen?

3. Ist ein gemischtperiodischer Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, so multipliciert man ihn, je nachdem der Periode 1, 2, 3,.. Decimalzahlen vorangehen, mit 10, 100, 1000.., wodurch man einen reinperiodischen Decimalbruch erhält; man darf dann nur diesen in einen gemeinen Bruch verwandeln und den letzteren noch bezüglich durch 10, 100, 1000,.. dividieren. Z. B.

$$0\cdot5\dot{2} = 5\cdot\dot{2} : 10 = 5\tfrac{2}{9} : 10 = \frac{47}{90}.$$
$$0\cdot06\dot{7} = 6\cdot\dot{7} : 100 = 6\tfrac{7}{9} : 100 = \frac{61}{900}.$$
$$0\cdot81\dot{2}\dot{6} = 81\cdot\dot{2}\dot{6} : 100 = 81\tfrac{26}{99} : 100 = \frac{8045}{9900}.$$

**Aufgaben.**

Verwandle folgende Decimalbrüche in gemeine Brüche.

**1.** $0\cdot4$, $0\cdot63$, $6\cdot48$, $0\cdot15$, $0\cdot025$, $0\cdot064$, $3\cdot1225$.

**2.** $0\cdot\dot{5}$, $0\cdot\dot{3}$, $0\cdot\dot{7}\dot{2}$, $3\cdot\dot{4}\dot{2}$, $0\cdot\dot{0}\dot{6}$, $8\cdot\dot{9}\dot{8}$, $0\cdot\dot{5}0\dot{4}$.

**3.** $0\cdot\dot{4}2\dot{8}$, $2\cdot\dot{9}3\dot{6}$, $0\cdot\dot{4}2\dot{3}$, $0\cdot\dot{8}43\dot{9}$, $7\cdot\dot{5}23\dot{0}$.

**4.** $0\cdot5\dot{8}$, $0\cdot8\dot{3}$, $2\cdot4\dot{8}$, $0\cdot08\dot{3}$, $0\cdot42\dot{6}$, $9\cdot82\dot{6}$.

**5.** $0\cdot1\dot{9}\dot{6}$, $0\cdot3\dot{0}\dot{6}$, $0\cdot57\dot{2}\dot{7}$, $5\cdot52\dot{2}\dot{6}$, $0\cdot152\dot{9}\dot{6}$.

# VIII. Verhältnisse und Proportionen.

## 1. Verhältnisse.

§. 62.

Durch die Division zweier Zahlen im Sinne des Messens (§. 22) wird untersucht, wie oft die zweite Zahl in der ersten enthalten ist. Der Quotient der beiden Zahlen heißt in diesem Falle auch das Verhältnis der ersten Zahl zur zweiten. Ist z. B. 15 durch 5 im Sinne des Messens zu dividieren, d. i. zu bestimmen, wie oft 5 in 15 enthalten ist, so drückt der Quotient 15 : 5 das Verhältnis von 15 zu 5 aus und wird als solches gelesen: 15 verhält sich zu 5, oder kürzer: 15 zu 5. Der Dividend 15 heißt das Vorderglied, der Divisor 5 das Hinterglied, und der ausgerechnete Quotient 3 der Exponent des Verhältnisses.

Die Glieder eines Verhältnisses sind beide unbenannt oder beide benannt; im zweiten Falle müssen sie gleichartig sein, also gleichnamig gemacht werden können. Ein Verhältnis, dessen Glieder unbenannte Zahlen sind, heißt ein Zahlenverhältnis; ein Verhältnis, dessen Glieder benannte Zahlen sind, ein Größenverhältnis.

Aus den vorstehenden Erklärungen folgt:

1. Der Exponent eines Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede dividiert durch das Hinterglied.

2. Das Vorderglied eines Verhältnisses ist gleich dem Hintergliede multipliciert mit dem Exponenten.

3. Das Hinterglied eines Verhältnisses ist gleich dem Vordergliede dividiert durch den Exponenten.

§. 63.

Verhältnisse, welche denselben Exponenten haben, heißen gleich.

Jedes Größenverhältnis läßt sich als ein Zahlenverhältnis darstellen. So ist das Verhältnis 10 fl. : 5 fl. gleichbedeutend mit dem Verhältnisse 10 : 5, weil beide den Exponenten 2 haben.

Ein Verhältnis bleibt so lange unverändert, als der Exponent desselben sich nicht ändert.

Ein Verhältnis wird daher nicht geändert, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliciert oder durch dieselbe Zahl dividiert, weil in beiden Fällen der Exponent unverändert bleibt.

19 · 16
114
304



Die Formveränderung eines Verhältnisses durch die Multiplication seiner Glieder dient dazu, um ein Verhältnis, dessen Glieder Brüche enthalten, durch ganze Zahlen darzustellen. Z. B.

$$5 : \tfrac{2}{3} = 5.3 : \tfrac{2}{3}.3 = 15 : 2,$$
$$\tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{5} = \tfrac{2}{3}.15 : \tfrac{3}{5}.15 = 10 : 9,$$
$$2\tfrac{1}{3} : 1\tfrac{5}{6} = \tfrac{7}{3}.6 : \tfrac{11}{6}.6 = 14 : 11.$$

Mittelst der Formveränderung eines Verhältnisses durch die Division kann man jedes Verhältnis, dessen Glieder durch dieselbe Zahl theilbar sind, abkürzen. Z. B.

$$20 : 8 = 5 : 2,\quad 12 : 6 = 2 : 1,\quad 100 : 48 = 25 : 12.$$

**Aufgaben.**

1. Suche die Exponenten folgender Verhältnisse:
   18 : 12, 12 : 18, 35 : 28, 28 : 35, 140 : 360, 1024 : 36.
2. Bestimme das Vorderglied eines Verhältnisses, dessen Hinterglied a) 3, b) 8, c) $5^1/_2$, und dessen Exponent 3 ist.
3. Suche das Hinterglied eines Verhältnisses, dessen Vorderglied a) 10, b) 22, c) $8^3/_4$, und dessen Exponent 5 ist.
4. Stelle folgende Verhältnisse mit ganzen Zahlen dar:
   $^1/_2 : {}^3/_5$, $2^3/_4 : 3^5/_6$, $7^1/_8 : 2^3/_{10}$, $19^5/_{16} : 27^7/_{12}$.
5. Wie verhalten sich zwei Brüche von gleichen Nennern?
6. Kürze folgende Verhältnisse ab:
   16 : 36, 57 : 18, 50 : 65, 72 : 56, 375 : 90.
7. Folgende Verhältnisse sollen auf die einfache Form gebracht, d. i. in ganzen Zahlen dargestellt und dann, wenn es angeht, abgekürzt werden:

| a) | b) | c) |
|---|---|---|
| $4 : 6^2/_3$ | $17^7/_9 : 8^4/_7$ | $^{15}/_{16} : 3^3/_4$ |
| $5^1/_5 : 7^1/_9$ | $11^3/_5 : 2^4/_5$ | $12{\cdot}5 : 6{\cdot}5$ |
| $3^3/_8 : 8^2/_5$ | $1^7/_8 : {}^6/_7$ | $8{\cdot}25 : 7{\cdot}5$ |

8. Wie verhalten sich 5 *m* zu 2 *dm*?
9. Wie verhält sich die Geschwindigkeit des Minutenzeigers einer Uhr zu der des Stundenzeigers?
10. Eine Kanonenkugel legt in einer Secunde 228 *m* zurück, der Schall 333 *m*; wie verhalten sich diese Geschwindigkeiten zu einander?
11. Von zwei Locomotiven legt die eine in jeder Minute 500 *m*, die andere 550 *m* zurück; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?
12. Von zwei Locomotiven legt die eine den Weg von 1 *km* in 2 Minuten, die andere in $2^1/_2$ Minuten zurück; wie verhält sich die Geschwindigkeit der ersten Locomotive zu jener der zweiten?
13. A geht in 3 Stunden so weit als B in 4 Stunden; wie verhalten sich ihre Geschwindigkeiten?

27 · 12
54

14. Eine Straße erhebt sich auf 1 *m* um 3 *cm*; wie groß ist das Verhältnis der Steigung?
15. 100 geogr. Meilen = 742 *km*; wie verhält sich 1 geogr. Meile zu 1 *km*?
16. Ein $dm^3$ Gold wiegt $19^8/_{25}$ *kg*, ein $dm^3$ Silber $10^1/_2$ *kg*; wie verhalten sich diese Gewichte zu einander?
17. 1 *kg* Gold wird zu 3280 Kronen, 1 *kg* Silber zu 180 Kronen gerechnet; wie verhält sich der Wert des Goldes zu dem des Silbers?
18. Ein Kreis, dessen Durchmesser 1 *m* ist, hat $3^1/_7$ *m* Umfang; welches Verhältnis findet zwischen dem Durchmesser und dem Umfange statt?
19. Ein Vater ist 36, sein Sohn 9 Jahre alt. Wie verhält sich das Alter des Vaters zu dem des Sohnes; in welchem Verhältnisse stand es vor 6 Jahren?
20. Ein *hl* Weizen kostet 13 *K* 20 *h*; ein *hl* Gerste 9 *K* 60 *h*; wie verhält sich der Preis des Weizens zu dem der Gerste?
21. Die Summe von 350 fl. wurde unter zwei Personen so getheilt, dass A 210 fl., B den Rest erhielt; nach welchem Verhältnisse fand die Theilung statt?
22. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden, und zwar durch die erste in 2 Stunden 24 Minuten, durch die zweite in 3 Stunden 18 Minuten; wie verhalten sich die Wassermengen, welche in derselben Zeit aus jeder der beiden Röhren fließen?
23. Ein frei fallender Körper legt in einer Secunde 4·9 *m*, in zwei Secunden 19·6 *m*, in drei Secunden 44·1 *m* zurück; wie verhält sich die erste dieser Strecken zur zweiten, und wie zur dritten?

## 2. Proportionen.

### §. 64.

Die Gleichstellung zweier gleicher Verhältnisse heißt eine Proportion. Z. B. 10 : 5 = 12 : 6 ist eine Proportion, und wird gelesen: 10 verhält sich zu 5, so wie sich 12 zu 6 verhält, oder kürzer: 10 zu 5 wie 12 zu 6; 10 ist das erste, 5 das zweite, 12 das dritte und 6 das vierte Glied der Proportion. Das erste und vierte Glied nennt man die äußeren, das zweite und dritte die inneren Glieder.

Eine Proportion, in welcher das zweite und dritte Glied gleich sind, heißt eine stetige Proportion, und jedes der inneren Glieder die mittlere geometrische Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen den beiden äußeren. Z. B. $24 : 12 = 12 : 6$ ist eine stetige Proportion, 12 das geometrische Mittel zwischen 24 und 6.

In einer Proportion können auch benannte Zahlen vorkommen, nur müssen die beiden Glieder eines jeden Verhältnisses gleichnamig sein; z. B. $12\,m : 4\,m = 30\,K : 10\,K$. Eine solche Proportion heißt eine **Größenproportion**, zum Unterschiede von einer **Zahlenproportion**, deren Glieder unbenannte Zahlen sind. Arithmetische Mitt

So wie jedes Größenverhältnis als Zahlenverhältnis, kann auch jede Größenproportion als Zahlenproportion dargestellt werden.

Zur leichteren Übersicht der hier abzuleitenden Grundgesetze der Proportionen soll das erste Glied mit a, das zweite mit b, das dritte mit c, das vierte mit d und der Exponent der beiden gleichen Verhältnisse mit e bezeichnet werden, so dass $a : b = c : d$ eine Proportion darstellt, in welcher $a : b = e$ und $c : d = e$ ist.

## §. 65.

1. Da $a = b \times e$ und $d = \frac{c}{e}$ ist, so erhält man durch Multiplication

$$a \times d = b \times e \times \frac{c}{e}, \text{ oder } a \times d = b \times c, \text{ d. h.}$$

**In jeder Zahlenproportion ist das Product der äußeren Glieder gleich dem Producte der inneren Glieder.**

$$10 : 5 = 12 : 6; \qquad 10 \times 6 = 5 \times 12.$$

In einer stetigen Proportion $9 : 6 = 6 : 4$ muss hiernach das geometrische Mittel mit sich selbst multipliciert das Product der beiden anderen Zahlen geben, also $6 \times 6 = 9 \times 4$ sein.

Das **arithmetische Mittel** zweier Zahlen (§. 24, Aufg. 4) muss zu sich selbst addiert die Summe dieser Zahlen geben.

2. Umgekehrt. **Aus zwei gleichen Producten, deren jedes zwei Factoren enthält, kann man immer eine Proportion bilden, indem man die Factoren des einen Productes zu äußeren, die des anderen Productes zu inneren Gliedern macht.**

Ist $a \times d = b \times c$, so ergibt sich, wenn man auf beiden Seiten durch $d \times b$ dividiert,

$$\frac{a \times d}{d \times b} = \frac{b \times c}{d \times b}, \text{ also } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ oder}$$

$$a : b = c : d.$$

Aus $12 \times 4 = 6 \times 8$ folgt die Proportion $12 : 6 = 8 : 4$.

**Das Kennzeichen für die Richtigkeit einer Proportion** ist demnach nicht nur die Gleichheit der Exponenten beider Verhältnisse, sondern auch die Gleichheit der Producte aus den äußeren und aus den inneren Gliedern.

3. Aus $a \times d = b \times c$ erhält man, wenn auf beiden Seiten einmal durch d, dann durch a dividiert wird,

$$a = \frac{b \times c}{d}, \quad d = \frac{b \times c}{a}; \text{ d. h.}$$

Jedes äußere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der inneren Glieder dividiert durch das andere äußere Glied.

Z. B. In einer Proportion $10 : 15 = 2 : 3$ ist

$$10 = \frac{15 \times 2}{3}, \quad 3 = \frac{15 \times 2}{10}.$$

4. Aus $b \times c = a \times d$ ergibt sich, wenn man auf beiden Seiten zuerst durch c, dann durch b dividiert,

$$b = \frac{a \times d}{c}, \quad c = \frac{a \times d}{b}; \text{ d. h.}$$

Jedes innere Glied einer Proportion ist gleich dem Producte der äußeren Glieder dividiert durch das andere innere Glied.

Z. B. In der Proportion $6 : 2 = 15 : 5$ ist

$$2 = \frac{6 \times 5}{15}, \quad 15 = \frac{6 \times 5}{2}.$$

## §. 66.

Eine Proportion kann verschiedenen Formveränderungen unterworfen werden, ohne dass sie aufhört richtig zu sein, wenn nur bei diesen Veränderungen der Exponent der beiden Verhältnisse ungeändert oder das Product der äußeren Glieder dem Producte der inneren Glieder gleich bleibt. Hieraus folgt:

1. Wenn man in einer Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen 1. die äußeren Glieder untereinander, oder 2. die inneren Glieder untereinander, oder 3. die äußeren Glieder mit den inneren Gliedern verwechselt, so erhält man durch jede solche Verwechslung wieder eine Proportion.

Aus der Proportion 1) $a : b = c : d$ ergeben sich demnach die Proportionen:

2) $a : c = b : d$, 5) $b : a = d : c$,
3) $d : b = c : a$, 6) $c : a = d : b$,
4) $d : c = b : a$, 7) $b : d = a : c$,
8) $c : d = a : b$.

Die Vertauschung der äußeren Glieder mit den inneren ist allgemein für jede Proportion zulässig.

2. Wenn man in irgend einer Proportion ein äußeres und ein inneres Glied mit derselben Zahl multipliciert, so erhält man wieder eine Proportion.

Mit Hilfe der Multiplication eines äußeren und eines inneren Gliedes kann man jede Proportion, in welcher Brüche vorkommen, mit ganzen Zahlen darstellen; mit Hilfe der Division kann jede Proportion, in welcher ein inneres und ein äußeres Glied ein gemeinsames Maß haben, durch dieses abgekürzt werden.

3. Multipliciert man in zwei Zahlenproportionen die gleichstelligen Glieder mit einander, so bilden die Producte wieder eine Proportion.

Ist $A : B = C : D$, und $a : b = c : d$, so kann man statt dessen auch $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ und $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ setzen. Dann ist aber auch $\frac{A \times a}{B \times b} = \frac{C \times c}{D \times d}$ oder $A \times a : B \times b = C \times c : D \times d$, da Gleiches mit Gleichem multipliciert, Gleiches geben muß.

Man sagt, die letzte Proportion ist aus den gegebenen zwei Proportionen zusammengesetzt.

So geben die Proportionen $6 : 3 = 8 : 4$
und $2 : 5 = 6 : 15$

die zusammengesetzte Proportion $6 \times 2 : 3 \times 5 = 8 \times 6 : 4 \times 15$,
oder $12 : 15 = 48 : 60$.

4. Ist $a : b = c : d$ eine Proportion mit dem Exponenten e, so ist b in a emal, in $a + b$ also $(e + 1)$mal enthalten. Es ist somit

$$(a + b) : b = (c + d) : d,$$

oder wenn man die inneren Glieder vertauscht,

$$(a + b) : (c + d) = b : d.$$

Aus $a : b = c : d$ folgt aber $a : c = b : d$; somit ist auch

$$(a + b) : (c + d) = a : c.$$

In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Summe der zwei ersten Glieder zur Summe der zwei letzten Glieder, wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweite zum vierten.

Z. B. Aus der Proportion $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch
$(24 + 8) : (18 + 6) = 24 : 18$ und $= 8 : 6$.

5. Durch ähnliche Schlüsse ergibt sich der Satz:

In jeder Proportion gleichartiger oder unbenannter Zahlen verhält sich die Differenz der zwei ersten Glieder zur Differenz der zwei letzten Glieder, wie das erste Glied zum dritten, oder wie das zweite zum vierten.

Z. B. Aus der Proportion $24 : 8 = 18 : 6$ folgt auch

$$(24 - 8) : (18 - 6) = 24 : 18 \text{ und } = 8 : 6.$$

§. 67.

Aus einer Proportion, in welcher drei Glieder bekannt sind, das unbekannte Glied finden, heißt die Proportion auflösen. Das unbekannte Glied wird mit einem der Buchstaben x, y, z bezeichnet.

Eine Proportion wird aufgelöst, indem man a) den Exponenten des bekannten Verhältnisses sucht und mittelst desselben das unbekannte Glied des andern Verhältnisses bestimmt, oder bei Zahlenproportionen noch einfacher b) nach den Sätzen 3. und 4. im §. 65.

Z. B. Für die Proportion $x : 3 = 30 : 5$ findet man:

a) $30 : 5 = 6, \quad x = 3 \times 6 = 18$; oder

b) $x = \dfrac{3 \times 30}{5} = 18$; daher ist

$18 : 3 = 30 : 5$ die vollständige Proportion.

Am besten erscheint es hier, aus der Proportion, ohne sie früher auf eine einfachere Form zu bringen, unmittelbar das unbekannte Glied zu suchen.

**Aufgaben.**

Aus den folgenden gleichen Producten sollen Proportionen gebildet und aus diesen durch Vertauschung der Glieder neue Proportionen abgeleitet werden.

**1.** a) $12 \times 4 = 6 \times 8$. b) $10 \times \frac{2}{3} = 5 \times 1\frac{1}{3}$.

**2.** a) $4\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{3} = 3 \times 2$. b) $3\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = 4\frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$.

Drücke folgende Proportionen durch die kleinsten ganzen Zahlen aus:

**3.** a) $x : 18 = 24 : 21$. b) $x : 15 = 8 : 6$.

**4.** a) $5\frac{1}{5} : 6\frac{2}{9} = 18 : x$. b) $\frac{1}{4} : \frac{2}{3} = \frac{5}{8} : x$.

**5.** a) $x : 13\frac{13}{48} = 27\frac{9}{14} : \frac{33}{84}$. b) $1\frac{1}{16} : x = 4\frac{1}{8} : 5\frac{1}{5}$.

Löse folgende Proportionen auf:

**6.** a) $3 : 4 = 5 : x$. b) $3 : x = 6 : 36$.

**7.** a) $63 : 21 = 45 : x$. b) $77 : 56 = x : 15$.

**8.** a) $88 : x = 72 : 63$. b) $x : 15 = 165 : 66$.

**9.** $7\frac{4}{5} : 2\frac{1}{6} = x : 5\frac{5}{8}$.

$$x = \frac{7\frac{4}{5} \times 5\frac{5}{8}}{2\frac{1}{6}} = \frac{39 . 45 . 6}{5 . 8 . 13} = 20\frac{1}{4}.$$

**10.** a) $5\frac{1}{3} : 7\frac{3}{4} = x : 2\frac{1}{2}$. b) $x : \frac{7}{9} = 3\frac{1}{3} : 5$.

**11.** a) $14 : 4\frac{3}{8} = x : 5\frac{1}{4}$. b) $x : 10\frac{1}{2} = 4\frac{2}{7} : 9\frac{1}{3}$.

**12.** a) $1\frac{5}{9} : x = 3\frac{23}{25} : 4\frac{4}{5}$. b) $17\frac{1}{7} : 12\frac{2}{41} = 14\frac{2}{9} : x$.

**13.** a) $10\frac{11}{12} : x = 13\frac{14}{15} : 18\frac{19}{20}$. b) $9\frac{17}{18} : 10\frac{1}{9} = 27\frac{3}{8} : x$.
**14.** a) $243\frac{5}{32} : 317\frac{11}{24} = x : 55\frac{29}{60}$. b) $4 \cdot 35 : x = 3 \cdot 18 : 2 \cdot 31$.
**15.** a) $2 \cdot 5 : 0 \cdot 5 = x : 0 \cdot 4$. b) $x : 0 \cdot 45 = 16 \cdot 625 : 9 \cdot 5$.

---

## 3. Einfache Regeldetri.

§. 68.

Zwei Größen heißen von einander **abhängig**, wenn eine Änderung der einen Größe auch eine Änderung der andern zur Folge hat.

1. Hängen zwei Arten von Zahlen so von einander ab, dass einer 2-, 3-, 4mal so großen Zahl der einen Art auch immer eine 2-, 3-, 4mal so große Zahl der andern Art entspricht, so sagt man: die beiden Arten von Zahlen sind **gerade proportioniert**, oder sie stehen in einem **geraden Verhältnisse**.

So sind Ware und Preis gerade proportioniert; denn 2mal so viel von derselben Ware kostet auch 2mal so viel Geld, 3mal so viel Ware kostet auch 3mal so viel Geld, 4mal so viel Ware kostet 4mal so viel Geld.

In einem geraden Verhältnisse stehen auch: die Zeit der Arbeit und der Lohn, der Lohn und die Zahl der Arbeiter; die Zeit und der zurückgelegte Weg bei einer gleichförmigen Bewegung; Capital und Zins, Zeit und Zins; Einlage bei einer Unternehmung und Gewinn; u. dgl. m.

Kostet z. B. 1 *kg* einer Ware 7 *K*, so kosten 6 *kg* derselben Ware 42 *K* und 4 *kg* 28 *K* und es ist das Verhältnis der Warenbeträge: 6 *kg* : 4 *kg* = 3 : 2 und das Verhältnis der diesen entsprechenden Preise: 42 *K* : 28 *K* = 3 : 2, also auch: 6 *kg* : 4 *kg* = 42 *K* : 28 *K*.

**Sind zwei Arten von Zahlen gerade proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art in derselben Ordnung genommen.**

2. Sind zwei Arten von Zahlen so von einander abhängig, dass einer 2-, 3-, 4mal so großen Zahl der einen Art nur der 2te, 3te, 4te Theil von der Zahl der andern Art entspricht, so sagt man: die beiden Arten von Zahlen sind **verkehrt proportioniert**, oder sie stehen in einem **umgekehrten Verhältnisse**.

So sind die Anzahl der Arbeiter und die Dauer der Arbeitszeit verkehrt proportioniert; denn 2mal so viel Arbeiter brauchen für dieselbe Arbeit nur die Hälfte der Zeit, 3mal so viel Arbeiter brauchen den dritten Theil der Zeit, 4mal so viel Arbeiter nur den vierten Theil der Zeit.

In einem umgekehrten Verhältnisse stehen auch: die Zahl der Personen und die Zeit, für welche ein Vorrath ausreicht; die Länge und die Breite eines Stoffes bei gleichem Inhalte; Capital und Zeit bei gleichen Zinsen; Zeit und Geschwindigkeit, u. dgl. m.

Brauchen z. B. 12 Arbeiter zu einer Arbeit 8 Tage, so müssen 24 Arbeiter, bei gleicher Leistungsfähigkeit derselben, diese Arbeit in 4 Tagen ausführen können. Es ist dann das Verhältnis der Arbeiter: 12 Arb. : 24 Arb. = 1·2, das Verhältnis der in umgekehrter Ordnung genommenen zugehörigen Arbeitszeiten: 4 Tage : 8 Tagen = 1 : 2; daher erhält man: 12 Arb. : 24 Arb. = 4 Tage : 8 Tagen.

Sind zwei Arten von Zahlen verkehrt proportioniert, so ist das Verhältnis zwischen je zwei Zahlen der einen Art gleich dem Verhältnisse zwischen den zwei zugehörigen Zahlen der andern Art, jedoch in umgekehrter Ordnung genommen.

## §. 69.

Wenn zwei Arten von Größen gerade oder verkehrt proportioniert sind, und es sind zwei Zahlen der einen Art gegeben, von den beiden zugehörigen Zahlen der andern Art aber die eine unbekannt, so heißt das Rechnungsverfahren, durch welches diese unbekannte Zahl gefunden wird, die einfache Regeldetri.

Z. B. 3 *m* Tuch kosten 24 *K*; wie viel *K* kosten 9 *m*? — ist eine Regeldetri-Aufgabe.

Bei jeder solchen Aufgabe sind zwei Theile zu unterscheiden, der Bedingungs- und der Fragesatz.

Bedingungssatz: 3 *m* kosten 24 *K*
Fragesatz: 9 *m* „ x *K*.

Hängt eine Größe von mehreren anderen zugleich ab und kommt in einer Regeldetri-Aufgabe nur eine dieser Größen vor, so wird immer stillschweigend vorausgesetzt, dass die übrigen unverändert bleiben.

Eine Regeldetri-Aufgabe kann durch ganz einfache Schlüsse oder mit Hilfe einer Proportion aufgelöst werden.

## §. 70.

### Auflösung durch Schlüsse (Schlussrechnung).

1. Das allgemeine Verfahren bei der Lösung von Regeldetri-Aufgaben durch die Schlussrechnung besteht darin, dass man von dem gegebenen Werte einer Mehrheit auf den Wert der Einheit, und von diesem auf den Wert einer andern Mehrheit schließt. (Schluss von einer Mehrheit mittelst der Einheit auf eine andere Mehrheit.)

Einfachere Aufgaben werden im Kopfe aufgelöst. Z. B.

a) 8 *m* kosten 48 *K*; wie viel kosten 11 *m*?

8 *m* kosten 48 *K*;
1 *m* kostet den 8ten Theil, also 6 *K*;
11 *m* kosten 11mal so viel, also 66 *K*.

b) 6 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 20 Tage; wie viel Tage brauchen 5 Arbeiter?

6 Arbeiter brauchen 20 Tage.
1 „ braucht 6mal so viel Zeit, also 120 Tage;
5 „ brauchen den 5ten Theil, somit 24 Tage.

Sind größere Zahlen oder Brüche gegeben, so bildet man dieselben Schlüsse, führt jedoch die Rechnung schriftlich durch. Es ist gut, dabei während der Schlussfolgerungen die Multiplicationen und Divisionen nur anzuzeigen und die wirkliche Ausrechnung erst in dem letzten Resultate, nachdem man dasselbe gehörig vereinfacht hat, vorzunehmen. Z. B.

$6^3/_4$ *kg* kosten $4^1/_2$ *K*; wie viel kosten $3^3/_5$ *kg*?

$6^3/_4$ *kg* $4^1/_2$ *K*

1 „ $\frac{4^1/_2}{6^3/_4}$ „

$3^3/_5$ „ $\frac{4^1/_2 \times 3^3/_5}{6^3/_4} = \frac{9.18.4}{2.5.27} = 2^2/_5$ *K*.

2. Ganz einfach gestaltet sich die Auflösung, wenn die Mehrheit des Fragesatzes ein Vielfaches oder ein Maß der Mehrheit des Bedingungssatzes ist. (Schluss von einer Mehrheit auf ein Vielfaches oder ein Maß derselben.) Z. B.

a) 5 *hl* kosten 21 *K* 15 *h*; wie hoch kommen 30 *hl*?

5 *hl* kosten 21 *K* 15 *h*;
30 „ „ 6mal so viel, also 126 *K* 90 *h*;

b) 100 *K* Capital geben jährlich 5 *K* Zins; wie viel Zins geben jährlich 25 *K* Capital?

100 *K* Capital geben 5 *K* Zins;
25 „ „ „ den 4ten Theil, mithin 1 *K* 25 *h*.

3. Eine Vereinfachung der Rechnung tritt auch dann ein, wenn die Mehrheiten des Frage- und Bedingungssatzes ein gemeinsames Maß haben. In diesem Falle enthält die Schlussrechnung die Verbindung der in 2. angewendeten Schlüsse. (Schluss von einer Mehrheit auf eine andere mittelst eines gemeinsamen Maßes.) Z. B.

a) 20 *kg* kosten 32 *K*; wie viel kosten 15 *kg*?

20 *kg* kosten 32 *K*;
5 „ „ den 4ten Theil, also 8 *K*;
15 „ „ 3mal so viel, somit 24 *K*.

b) Aus einer bestimmten Menge Garn kann der Weber 84 *m* Leinwand, welche 75 *cm* breit ist, weben; wie viel Meter 80 *cm* breiter Leinwand kann er daraus erzeugen?

Bei 75 *cm* Breite erhält man 84 *m*;
„ 5 *cm* „ „ „ 15mal so viel Länge = 84 . 15 *m*;
„ 80 *cm* „ „ „ nur den 16ten Theil $= \frac{84 . 15}{16} = 78^3/_4$ *m*.

4. Manchmal kann bei der Lösung von Regeldetri-Aufgaben auch eine passende Zerfällung der Mehrheit des Fragesatzes mit Vortheil angewendet werden. (Schluss durch Zerfällung.) Z. B.

a) 14 *kg* kosten 43 *K* 82 *h*; wie viel kosten 30 *kg*?

| | |
|---|---|
| 14 *kg*................ | 43 *K* 82 *h* |
| 28 *kg* = 2mal 14 *kg*... | 87 *K* 64 *h* |
| 2 „ = $1/7$ von 14 *kg*. | 6 „ 26 „ |
| | 93 *K* 90 *h* |

b) Ein Capital bringt in 1 Jahre 74 *K* 40 *h* Zinsen; wie viel in 5 Monaten 18 Tagen?

| | |
|---|---|
| 1 Jahr........................... | 74·40 *K* |
| 4 Mon. = $1/3$ v. 1 Jahr.......... | 24·80 *K* |
| 1 „ = $1/4$ v. 4 Mon.......... | 6·20 „ |
| 15 Tage = $1/2$ v. 1 Mon.......... | 3·10 „ |
| 3 „ = $1/5$ v. 15 Tagen....... | 0·62 „ |
| | 34·72 *K* |

**Aufgaben.**

(Großentheils Kopfrechnungen).

**1.** 9 *m* kosten 54 *K*; wie viel kosten 7 *m*?
**2.** 7 *hl* „ 217 *K*; „ „ „ 20 *hl*?
**3.** 8 *m* „ 44 fl.; „ „ „ 11 *m*?
**4.** Wenn 9 *l* 4·32 *K* kosten, wie hoch kommt 1 *hl*?
**5.** 6 *hl* kosten 114 *K*; wie viel *hl* erhält man für 551 *K*?
**6.** Für 86 *K* erhält man 20 *m* Tuch; wie viel für 301 *K*?
**7.** Man kauft 23 *hl* Wein für 1863 *K*; wie viel kosten 100 *hl*?
**8.** Ein Rad macht in 76 Minuten 1007 Umdrehungen; wie viel Umdrehungen macht es in 56 Minuten?
**9.** Eine gleichmäßig ansteigende Straße steigt auf $2^1/_4$ *km* um 38 *m*; wie groß ist die Steigung auf $^2/_5$ *km*?
**10.** Werden die Bäume einer Allee in einer Entfernung von 4 *m* gesetzt, so braucht man 840 Stück; wie viel Stück sind erforderlich, wenn sie 5 *m* von einander abstehen sollen?
**11.** 7 *hl* kosten 105 *K*; wie viel kosten 35 *hl*?
**12.** 4 *kg* „ 3 *K*; „ „ „ 8, 20, 36 *kg*?
**13.** 5 *m* „ 17 fl.; „ „ „ 10, 25, 40 *m*?
**14.** Ein Arbeiter macht in 5 Tagen 320 Ziegel; wie viel in 30 Tagen?
**15.** 15 *kg* kosten 9 *K* 30 *h*; wie viel kosten 3 *kg*?
**16.** 24 *m* „ 66, 82 *K*; „ „ „ 6 *m*?
**17.** Ein Capital trägt in einem Jahre 376 *K* 44 *h* Zinsen; wie viel in 6, 4, 3, 2 Monaten?

18. Wenn eine Geldsumme unter 48 Personen getheilt wird, kommt auf jede 3 *K*; wie viel erhält jede Person, wenn dieselbe Summe unter 16 Personen getheilt wird?
19. 24 *m* kosten 52 *K*; wie viel kosten 30 *m*?
20. 16 *kg* „ 6 *K* 40 *h*; „ „ „ 28 *kg*?
21. 48 *m* „ 60 fl. 72 kr.; „ „ „ 36 *m*?
22. Wenn 36 *kg* mit 28 *K* bezahlt werden; wie viel *kg* erhält man für 42 *K*?
23. 10 Stück einer Ware kosten 24 *K*; wie viel Stück bekommt man für 60 *K*?
24. Aus einer Röhre fließen in 18 Minuten 396 *l* Wasser; wie viel *l* fließen aus derselben Röhre in 30 Minuten?
25. Wenn jemand täglich 42 *km* zurücklegt, so erreicht er sein Ziel in 12 Tagen; wie viel Tage braucht er, wenn er täglich 56 *km* zurücklegt?
26. Wenn ein bestimmter Vorrath für 600 Mann auf 10 Monate reicht, wie lange werden damit 400 Mann auskommen?
27. 100 *kg* kosten 16 *K* 40 *h*; wie viel kosten 60 *kg*?
28. Wie viel kosten $16\frac{1}{2}$ *a* Gartengrund, wenn 4 *a* $148\frac{4}{5}$ *K* kosten?
29. 5 *hl* Wein kosten 184 *K*; wie hoch kommen 19 *hl*?
30. Ein Capital von 100 *K* gibt jährlich 5 *K* Zins; wie viel Zins geben 350 *K*, 620 *K*, 560 *K*, 835 *K*, 975 *K*?
31. Ein Capital trägt in einem Jahre 2310 *K* Zinsen; wie viel in 8 Monaten?
32. Ein *hl* Wein kostet 64 *K*; wie hoch kommen 10 *l*?
33. Eine Wiese kann von 12 Mähern in 6 Tagen abgemäht werden; wie viel Mäher muss man aufnehmen, wenn die Wiese in 4 Tagen abgemäht werden soll?
34. 15 *l* kosten 6 fl. 84 kr.; wie viel kosten 35 *l*?
35. 100 *K* Capital geben $4\frac{1}{2}$ *K* Zinsen; wie viel Zinsen geben 300, 800, 1500 *K* Capital?
36. 32 Arbeiter verdienen wöchentlich 336 fl.; wie viel fl. verdienen in derselben Zeit 56 Arbeiter?
37. 35 *m* kosten 65 *K*; wie viel kosten 49 *m*?
38. Wenn eine Lampenflamme täglich 6 Stunden brennt, reicht ein Ölvorrath 15 Tage aus; wie viel Tage reicht derselbe, wenn die Flamme täglich nur 5 Stunden brennt?
39. A und B sollen 1280 *K* so theilen, dass A 5 und B 3 ebenso große Theile erhält; wie viel erhält jeder?
40. 30 *m* kosten 84 *K*; wie viel kosten 25 *m*?

**41.** Wenn 16 Maurer täglich 12 Stunden arbeiten, so wird eine Mauer in 15 Tagen fertig; in welcher Zeit wird die Mauer fertig, wenn dieselben Maurer täglich nur 10 Stunden arbeiten?

**42.** Das vordere Rad an einem Wagen macht 80 Umdrehungen, während das hintere 64 macht; wie viel macht das vordere, wenn das hintere 1320 Umdrehungen macht?

**43.** Ein Fußgänger, der in jeder Secunde $1^1/_5$ *m* fortschreitet, legt eine Strecke in $1^1/_3$ Stunden zurück; wie viel Zeit braucht dazu ein Eisenbahnzug, der in jeder Secunde 8 *m* zurücklegt?

## §. 71.
## Auflösung mittelst der Proportion.

Jede Regeldetri-Aufgabe kann mit Hilfe einer Proportion aufgelöst werden. Man darf nur das Verhältnis zwischen zwei Zahlen der einen Art dem Verhältnisse der zugehörigen Zahlen der andern Art, in derselben oder in umgekehrter Ordnung genommen, gleich setzen, je nachdem die beiden Arten gerade oder verkehrt proportioniert sind, und die so angesetzte Proportion auflösen. Z. B.

a) 45 *m* Tuch kosten 288 *K*, wie viel kosten 18 *m* von demselben Tuch?

Da 2-, 3-, 4mal so viel *m* auch 2-, 3-, 4mal so viel Kronen kosten, somit die beiden Arten von Zahlen gerade proportioniert sind, so ergibt sich folgende Rechnung:

Bedingungssatz: 45 *m* 288 *K* $\quad x : 288 = 18 : 45$

Fragesatz: 18 *m* x *K* $\quad x = \frac{288 \times 18}{45} = 115^1/_5 K.$

b) 16 Maurer können eine Mauer in 20 Tagen aufführen; in wie viel Tagen würde dieselbe Mauer von 10 Maurern aufgeführt werden?

Die beiden Arten von Zahlen sind hier verkehrt proportioniert, da 2-, 3-, 4mal so viele Maurer zur Aufführung derselben Mauer nur die Hälfte, den dritten, vierten Theil der Zeit brauchen; man hat daher

Bedingungssatz: 16 Maurer 20 Tage $\quad x : 20 = 16 : 10$

Fragesatz: 10 „ x „ $\quad x = \frac{20 \times 16}{10} = 32$ Tage.

**Aufgaben.**

Die nachstehenden Aufgaben sollen theils nach der Schlussrechnung, theils mit Hilfe der Proportionen, und, wo die Einfachheit der Zahlen es zuläßt, auch im Kopfe gelöst werden.

**1.** 8 *m* Tuch kosten 84 *K*; wie hoch kommen 12 *m*?

**2.** 9 *ha* Wald kosten 1035 fl.; wie viel *ha* erhält man für 690 fl.?

3. Wenn 8 Arbeiter 136 *K* verdienen, wie viel verdienen in derselben Zeit 20 Arbeiter?
4. Wenn 12 Arbeiter 180 *K* verdienen, wie viel Arbeiter verdienen in derselben Zeit 105 *K*?
5. 54 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 16 Tagen; wie viele Tage brauchen dazu 72 Arbeiter?
6. Aus einer Röhre fließen in 11 Minuten 308 *l* Wasser; in wie viel Minuten fließen aus derselben Röhre 980 *l*?
7. Zu einem Buche sind 24 Bogen erforderlich, wenn auf jede Seite 50 Zeilen gedruckt werden; a) wie viel Bogen sind erforderlich, wenn auf jede Seite nur 40 Zeilen kommen; b) wie viele Zeilen müssen auf jede Seite kommen, damit das Buch 25 Bogen erhalte?
8. Ein Mühlgang mahlt in 16 Stunden 28 *hl* Korn, a) wie viel *hl* in 8 Stunden; b) in wie viel Stunden 21 *hl*?
9. Ein Kaufmann, der für 2832 *K* Waren verkauft hat, erzielte einen Gewinn von 354 *K*; für wie viel *K* muss er Waren verkaufen, um 295 *K* zu gewinnen?
10. Aus einer gewissen Menge Garn können 55 *m* Leinwand, die 84 *cm* breit ist, gewebt werden; a) wie viel *m* einer 70 *cm* breiten Leinwand können daraus gewebt werden, b) wie breit wird die Leinwand, wenn aus demselben Garn 60 *m* gewebt werden sollen?
11. In einer Familie braucht man alle 12 Tage 1 *kg* Kaffee; a) wie viel *kg* braucht man in 365 Tagen, b) wie viele Tage wird man mit 18 *kg* ausreichen?
12. Wenn ein Rad in 27 Minuten 2295 Umdrehungen macht, a) wie viele Umdrehungen macht es in 10 Minuten, b) in wie viel Minuten macht es 3655 Umdrehungen?

---

13. 20 *m* kosten 83 *K* 40 *h*; wie viel *m* erhält man für 62 *K* 55 *h*?
14. Jemand hat durch 35 Tage gearbeitet und erhält für je 6 Tage $10\frac{1}{5}$ fl. Lohn; wie viel erhält er im ganzen?
15. Ein Arbeiter verdient in 7 Tagen so viel wie ein anderer in 9 Tagen; der erste verdient in einer bestimmten Zeit 35·1 *K*, wie viel verdient der zweite in derselben Zeit?
16. Auf welche Länge erreicht das Ansteigen einer Eisenbahn $1\frac{1}{4}$ *m* Höhe, wenn dieselbe auf je 50 *m* Länge um $\frac{1}{4}$ *m* ansteigt?
17. 10 Maurer können eine Mauer in 25 Tagen aufführen; wie viele Maurer muss man aufnehmen, damit dieselbe in 10 Tagen fertig werde?

25 :- 10; 5 = 10'2

**18.** Zu beiden Seiten einer Straße sind 2800 Stück Bäumchen nöthig, wenn dieselben $3^1/_4$ *m* von einander gepflanzt werden; in welcher Entfernung von einander müssen die Bäumchen gesetzt werden, wenn nur 2100 Stück verwendet werden sollen?

**19.** Um die Wände eines Saales zu tapezieren, braucht man 704 *m* Tapeten von 42 *cm* Breite; wie viel *m* Tapeten braucht man, wenn diese 64 *cm* breit sind?

**20.** Ein senkrecht in die Erde gesenkter Stab von $1^2/_5$ *m* Länge wirft einen $2^7/_{10}$ *m* langen Schatten; wie hoch ist ein Thurm, welcher zu derselben Zeit einen Schatten von $30^1/_4$ *m* Länge wirft?

**21.** Auf einer Landkarte, welche nach dem Maßstabe 1 : 50000 gezeichnet ist, beträgt die Entfernung zweier Orte 45 *mm*; wie groß ist die Entfernung dieser Orte in der Wirklichkeit?

**22.** Die Achse unserer Erde beträgt 6356 *km*; der Durchmesser des Äquators 6377 *km*; wenn man nun bei einem Erdglobus die Erdachse 395 *mm* lang annimmt, wie groß muss dabei der Durchmesser des Äquators angenommen werden?

**23.** Ein Acker von $6^2/_5$ *ha* gibt einen Ertrag von $96^2/_5$ *hl* Weizen; auf wie viel *ha* erhält man $36^3/_{20}$ *hl* Weizen?

**24.** Ein Land von 15806 $km^2$ zählt 688564 Einwohner; wie viele Einwohner entfallen bei gleicher Dichte der Bevölkerung auf 3750 $km^2$?

42

42

162

---

**25.** Zwei Strecken verhalten sich wie 2 : 5; wenn nun die erste 184 *m* misst, wie groß ist die zweite?

**26.** Die Geschwindigkeiten zweier Eisenbahnzüge A und B verhalten sich wie 5 : 6; wie viel Stunden braucht A zu einer Strecke, welche B in 13 Stunden zurücklegt?

**27.** Die Halbmesser der Erde und des Mondes verhalten sich wie 11 : 3; wenn nun der mittlere Halbmesser der Erde 6368·9 *km* beträgt, wie groß ist der Halbmesser des Mondes?

**28.** A erhielt bei der Vertheilung eines Gewinnes 890 *K*; wie viel wird B erhalten, wenn sich der Antheil des A zu dem des B wie $3^1/_2 : 5^3/_5$ verhalten soll?

**29.** In den neuen Landes-Goldmünzen verhält sich das Gewicht des Goldes zum ganzen Gewichte wie 9 : 10; wie viel Gold enthält ein Zwanzig-Kronenstück, da es 6·775 *g* wiegt?

**30.** 1 *kg* Münzgold enthält $^9/_{10}$ *kg* feinen Goldes; wenn nun aus 1 *kg* feinen Goldes 164 Zwanzig-Kronenstücke geprägt werden, wie viel solche Stücke gehen auf 1 *kg* Münzgold?

**31.** 328 Stücke zu 10 Kronen, und ebenso 290·494 Ducaten, enthalten 1 *kg* Feingold; wie viel in Kronen ist 1 Ducaten wert?

**32.** Jemand hat von seiner Goldrente halbjährig 240 fl. Zinsen zu beziehen; wie viel beträgt dies in Kronenwährung, da 42 Goldgulden = 100 Kronen gerechnet werden?

**33.** Die neuen Silbermünzen enthalten $^{835}/_{1000}$ Silber; wie viel Silber enthalten 500 Ein-Kronenstücke, da ihr ganzes Gewicht 2·5 *kg* beträgt?

**34.** Wie viel *kg* wiegt ein Silberbarren, der 12·324 *kg* Feinsilber enthält und $^{9}/_{10}$ fein ist?

**35.** Ein Wiener Kaufmann stellt auf Hamburg einen Wechsel*) von 3408 Mark aus; wie viel Gulden ö. W. wird er dafür beziehen, wenn der Curs auf Hamburg 58·55 ist (100 Mark gleich 58·55 fl. ö. W.)?

**36.** Ein Handlungshaus in Marseille hat von einem Wiener 5682·5 Franken zu fordern, wie groß ist diese Forderung in ö. W., wenn 100 Franken gleich 47·35 fl. ö. W. gerechnet werden?

**37.** Ein Kaufmann erhielt in drei Säcken $108^{3}/_{4}$ *kg*, $120^{1}/_{2}$ *kg*, $96^{1}/_{2}$ *kg* Reis, worüber die Rechnung auf 104 fl. 24 kr. lautete; wie hoch berechnen sich 100 *kg*?

**38.** Jemand kauft zwei Fässer Wein von gleicher Güte, zusammen 26 *hl* 26 *l*; das erste Fass enthält 15 *hl* 66 *l* und kostet 783 *K*; wie viel kostet der im zweiten Fasse enthaltene Wein?

**39.** Zwei Kaufleute kaufen zusammen 2385 *kg* Öl; A nimmt davon 1845 *kg* und bezahlt $2656^{4}/_{5}$ *K*; wie viel Öl bleibt für B und wie viel muss er dafür bezahlen?

**40.** Eine Fuhre Heu kostete $32^{9}/_{10}$ fl. und wog mit dem Wagen 1455 *kg*, wenn nun der Wagen für sich 139 *kg* wog, wie hoch kommen 100 *kg* Heu?

**41.** 24 Maurer können eine Mauer in 20 Tagen aufführen; in wie viel Tagen wird die Mauer fertig, wenn nach 5 Tagen noch 6 Maurer aufgenommen werden?

Nach 5 Tagen wären 24 Maurer noch 15 Tage beschäftigt gewesen, nach dieser Zeit steigt aber die Zahl der Maurer auf 30; in wie viel Tagen werden nun 30 Maurer dieselbe Leistung vollbringen, welche 24 Arbeiter in 15 Tagen vollbracht hätten?

---

*) Ein Wechsel ist eine Urkunde, durch welche sich der Aussteller unter wechselrechtlicher Haftung verpflichtet, eine Summe Geldes an eine bestimmte Person und zu einer bestimmten Zeit entweder selbst zu zahlen oder von seinem Dritten zahlen zu lassen.

**42.** Um einen Graben herzustellen, werden 32 Arbeiter aufgenommen, welche die Arbeit in 25 Tagen vollenden würden; nach 7 Tagen werden jedoch 8 Arbeiter entlassen; wie lange werden die übrigen noch zu arbeiten haben?

**43.** 48 Arbeiter sind an einer Arbeit beschäftigt, die sie in 12 Tagen beenden würden; nachdem sie 2 Tage gearbeitet haben, wird gefordert, dass die Arbeit nun in 8 Tagen fertig sein soll; wie viele Arbeiter muss man dann noch aufnehmen?

**44.** Eine Straße kann von 30 Mann in 12 Wochen hergestellt werden; anfangs haben 45 Mann 6 Wochen daran gearbeitet; wie viel Mann muss man dann aufstellen, damit sie den noch übrigen Theil der Straße in $4\frac{1}{2}$ Wochen vollenden?

**45.** Ein Canal kann von 24 Mann in 10 Wochen hergestellt werden; nachdem durch 4 Wochen 30 Mann daran gearbeitet haben, entlässt man 10 Mann; in wie viel Wochen wird dann der noch übrige Theil des Canals fertig gebracht werden?

**46.** Aus einer Partie Garn sollen 20 Stück Zeug, jedes 36·8 *m* lang, gefertigt werden; als jedoch bereits 11 Stück fertig waren, wurde angeordnet, dass aus dem Reste noch 12 Stück hergestellt werden sollen; wie lang wird nun jedes dieser Stücke werden?

---

# IX. Procentrechnung.

## §. 72.

Unter Procent versteht man die Zahl, welche angibt, wie viele Einheiten einer bestimmten Art von 100 Einheiten derselben Art zu nehmen sind. Die Angabe 5 Procent (5%) drückt z. B. aus, dass von 100 Einheiten einer bestimmten Art 5 Einheiten zu nehmen sind, also von 100 fl. 5 fl., oder von 100 *kg* 5 *kg*. Man kann hiernach auch sagen: 1% ist der 100ste Theil einer Zahl; 2%, 3%, 4%... sind $^2/_{100}$, $^3/_{100}$, $^4/_{100}$.. dieser Zahl.

Bei jeder Procentrechnung kommen drei Größen vor: 1. das Procent, d. i. der Antheil, der sich auf 100 bezieht; 2. der Grundwert, von welchem die Procente berechnet werden; 3. der auf diesen Grundwert entfallende Procentantheil. Sind von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann aus denselben die dritte bestimmt werden.

Weitere Aufgaben ergeben sich noch, wenn die Summe oder die Differenz aus dem Grundwerte und dem Procentantheile gegeben ist.

Die zur Procentrechnung gehörigen Aufgaben werden am einfachsten durch die Schlussrechnung ausgeführt, können aber auch mit Hilfe der Proportion gelöst werden.

## Berechnung des Procentantheiles.

### §. 73.

Wie groß ist der Procentantheil von 4567 zu 5%?

4567 gibt zu 1% den 100sten Theil von 4567 = 45·67,

„ 5% 5mal so viel, also 45·67 × 5 = 228·35.

$$\text{Procentantheil} = \frac{\text{Grundwert}}{100} \times \text{Procent}.$$

Mit Hilfe der Proportion hätte man:

| | | |
|---|---|---|
| 100 Grundwert | 5 Antheil | $x : 5 = 4567 : 100$ |
| 4567 „ | x „ | $x = \dfrac{4567 \times 5}{100}$ |

**Aufgaben.**

1. Wie viel ist 1% von folgenden Zahlen:
   200, 300, 800, 1700, 650, 1280, 2542, 392·8?
2. Berechne 2%, 3%, 5%, 8%, 12% von:
   400, 1200, 560, 956, 1584, 27·44, 730·8.
3. Wie viel betragen
   a) 4% von 750? b) $7\frac{1}{5}$% von 2565?
   $6\frac{1}{2}$% „ 1280? 13 % 591·5?
4. Berechne
   a) 5% von 976 *K*, b) 13% von 2090 *kg*,
   $4\frac{1}{2}$% „ 2680 *K*, $2\frac{2}{5}$% „ 835 *m*.
5. Welche Zahl ist
   a) um 6% größer als 200, als 900, 1560, 867·5?
   b) um $5\frac{1}{2}$% kleiner als 340, als 750, 2148, 39·36?
6. Eine Stadt zählt 6360 Einwohner; wie viel sind 15% davon?
7. Jemand hat ein jährliches Einkommen von 1842 *K*, wovon 4% Einkommensteuer zu zahlen sind; wie viel beträgt diese Steuer?
8. Jemand soll 345 *K* Steuer zahlen, wobei ihm 3% Nachlass bewilligt werden; wie viel hat er zu entrichten?
9. Wie viel muss man für 516 fl. Steuer sammt einem Zuschlage von 23% zahlen?

**10.** Ein Arbeiter verdiente täglich 2 $K$ 50 $h$; wie groß wird der Taglohn, wenn der Arbeiter täglich 8% mehr verdient?

**11.** Zu einem Baue hat man 64800 Ziegelsteine nöthig; wie viel Stück müssen geliefert werden, wenn man für Bruch und Verlust $8^1/_2$% dazu rechnet?

**12.** Eine Straßenstrecke von 6350 $m$ hat eine Steigung von 1·8%; wie viel $m$ beträgt die Steigung?

**13.** Von 410 35jährigen Menschen sterben 40% bis zum 60sten Jahre; wie viel erreichen demnach das 60ste Jahr?

**14.** Ein Capital von 2060 $K$ trägt jährlich 5% Zinsen; wie viel $K$ betragen die Zinsen?

**15.** Welchen reinen Zinsertrag wirft ein Haus im Werte von 24800 $K$ ab, wenn es $4^1/_2$% trägt?

**16.** Ein Schuldner vergleicht sich mit seinem Gläubiger dahin, dass er dessen Forderung von 2680 fl. mit 78% bezahlen wolle; wie viel wird dieser erhalten?

**17.** Jemand kauft um 928 $K$ Waren ein und gewinnt bei deren Verkaufe 12%, d. h. er nimmt für je 100 $K$, die er beim Einkaufe auslegt, beim Verkaufe 112 $K$ ein; wie viel beträgt a) der ganze Gewinn, b) die Verkaufssumme?

**18.** Wie theuer wurde eine Ware bei 6% Gewinn verkauft, wenn der Einkaufspreis 795 $K$ betrug?

**19.** Wenn das $m$ Tuch im Einkaufe 3 fl. 20 kr. kostet, wie hoch muss es im Verkaufspreise gesetzt werden, wenn man 12% gewinnen will?

**20.** Jemand kauft das $m$ Tuch zu 8 $K$ 50 $h$ und sieht sich genöthigt, das Tuch mit 4% Verlust zu verkaufen; wie theuer verkauft er 1 $m$?

**21.** Ein Getreidehändler kaufte um 2430 $K$ Gerste und verkaufte bei 12% Gewinn das $hl$ zu $10^2/_{25}$ $K$; wie viel $hl$ hatte er gekauft?

**22.** Wie groß ist der Gewinn à 16% bei einer für 1860 $K$ verkauften Ware?

Für 100 $K$ Einkaufspreis ist bei 16% Gewinn 116 $K$ der Verkaufspreis, d. i. auf 116 $K$ Verkaufspreis sind 16 $K$ Gewinn zu rechnen; auf 1860 $K$ Verkaufswert entfallen also sovielmal 16 $K$ Gewinn, wie oft 116 in 1860 enthalten ist, somit

$$\frac{1860}{116} \times 16 = 256 \cdot 55\ K \text{ Gewinn.}$$

**23.** Eine Ware kommt mit 12% Spesen auf 3500 $K$ zu stehen; wie viel betragen die Spesen?

**24.** Für eine mit 3% Verlust verkaufte Ware werden 1040 $K$ gelöst; wie groß ist der Einkaufspreis?

$$\frac{1040}{97} \times 100 = 1072 \cdot 16\ K \text{ Einkaufspreis.}$$

**25.** Ein Kaufmann kann das *kg* Kaffee für 1 fl. 60 kr. verkaufen; wie theuer darf er das *kg* einkaufen, wenn er beim Verkaufe 15% gewinnen will?

**26.** Den Arbeitern einer Fabrik wurde eine Lohnerhöhung von 16% zugestanden; dann erhielten 80 Arbeiter zusammen täglich 269 *K* 12 *h*. Wie groß war der tägliche Lohn eines Arbeiters vor der Lohnerhöhung?

**27.** Die Bevölkerung einer Stadt, welche im Jahre 1837 15860 Einwohner zählte, hat bis zum Jahre 1890 um 25% zugenommen; wie groß war die Bevölkerung dieser Stadt im Jahre 1890?

**28.** Das Bruttogewicht einer Ware beträgt 2350 *kg*, die Tara 8%; wie groß ist a) die Tara, b) das Nettogewicht?*)

a) $23\cdot50 \times 8$
188 *kg* Tara

| b) | | |
|---|---|---|
| Bruttogew. | 2350 *kg* |
| Tara 8% | 188 |
| Nettogewicht | 2162 *kg* |

**29.** Wie viel beträgt die Tara von 4500 *kg* à 2%, 5%, 8%, 10%?

**30.** Eine Ware wiegt Brutto 3780 *kg*; wie groß ist das Nettogewicht bei 3%, $5^1/_2$%, 8%, 12%, 20% Tara?

**31.** Berechne das Nettogewicht
a) von 3420 *kg* Brutto bei 7% Tara;
b) „ 885 *kg* „ „ 12% „ ;
c) „ 2019 *kg* „ „ 9% „ .

**32.** Wie viel kosten 6 Ballen Baumwolle Brutto 1180 *kg*, Tara 7%, zu $207^3/_4$ *K* per Centner Netto?

**33.** Eine Sendung Feigen wiegt Brutto 735 *kg*; wie viel kosten die Feigen zu 66 *K* per Centner Netto, wenn die Tara zu 13% gerechnet wird?

**34.** Eine Ware, welche 4192 *kg* Brutto wog, wurde mit 880 *K* bezahlt; wie theuer kommt der Centner Netto, wenn man $16^2/_3$% Tara rechnet?

**35.** Wie viel beträgt die Provision zu 2% von einem Warenbetrage von 500 fl.?**)

---

*) Das Gewicht einer Ware mit Inbegriff der Umhüllung oder des Behältnisses, worin sie verpackt ist, nennt man das Bruttogewicht, das Gewicht der Ware allein das Nettogewicht. Das Gewicht des Behältnisses, oder vielmehr der Abzug, der wegen dieses Gewichtes vom Bruttogewichte gemacht wird, heißt Tara.

**) Wenn jemand die Vollziehung eines Geschäftes, z. B. den Einkauf oder Verkauf von Waren, einem andern aufträgt, so heißt die Person, welche diesen Auftrag erhält und vollzieht, der Commissionär, die Vergütung aber, welche der Commissionär für seine Bemühung erhält, Provision.

**36.** Wie viel beträgt die Provision von 8037·36 fl. zu $^1/_3\%$, $^5/_8\%$, $1^3/_4\%$, $2\%$, $2^1/_2\%$?

**37.** Für eine um 348 *K* gekaufte Ware wird die Provision zu $1^1/_2\%$ gerechnet; wie viel kostet die Ware?

**38.** Jemand besorgt den Verkauf einer Ware im Betrage von 2085 fl. 25 kr.; wie viel verblieb dem Verkäufer nach Abschlag der Provision à $1^3/_4\%$?

**39.** Für einen Prager Kaufmann werden um 2813·78 *K* Waren verkauft, die Spesen betragen 68·37 *K*, die Provision 2%; wie groß ist der reine Ertrag?

**40.** Eine Ware kommt sammt 2% Einkaufs-Provision auf 3207 *K* 90 *h*; a) wie viel beträgt die Provision? b) wie groß ist der reine Warenpreis?

**41.** Wie viel beträgt die Sensarie bei einem Warenbetrage von 2640 *K* à $^1/_2\%$?*)

**42.** Wie groß ist die Sensarie à $^1/_2\%$
a) von 618 *K*? b) von 506 *K* 58 *h*? c) von 2068 fl.?

**43.** Ein Warensensal unterhandelt eine Partie Waren im Betrage von 2181 fl. 7 kr. und berechnet die Sensarie, welche zur Hälfte vom Verkäufer, zur Hälfte vom Käufer gezahlt wird, zu $1^1/_4\%$; a) wie viel hat der Käufer für die Ware zu bezahlen, b) wie viel erhält der Verkäufer?

**44.** Ein Kaufmann besorgt den Verkauf einer Ware im Betrage von 3518 *K*, zahlt dem Sensalen $^1/_2\%$ und berechnet für sich $1^3/_4\%$ Provision; wie viel erhält der Verkäufer?

**45.** Wie groß ist die Versicherungsprämie von 5380 *K* à 2%?**)

**46.** Wie groß ist die Versicherungsprämie für einen Wert von 5388 *K* a) zu 2%, b) zu $1^3/_4\%$, c) zu $^1/_2\%$, d) zu $^1/_8\%$?

**47.** Bei einer Feuer-Assecuranz-Gesellschaft wird ein auf 17800 fl. geschätztes Haus zu $^1/_{10}\%$ versichert; wie viel beträgt die Assecuranzprämie?

---

*) Zur Abschließung von Geschäften zwischen Kaufleuten desselben Ortes gibt es beeidete Personen, welche Sensale oder Mäkler heißen. Die Vergütung für ihre Mühe wird Sensarie genannt.

**) Gesellschaften, welche gegen eine bestimmte Gebür den Schadenersatz für Unfälle und Verluste übernehmen, die durch den natürlichen Lauf der Dinge oder durch außerordentliche Ereignisse herbeigeführt werden, nennt man Assecuranz-Gesellschaften; die Gebür aber, welche ihnen für die Übernahme der Schadenvergütung vorausbezahlt wird, heißt die Versicherungsprämie.

48. Jemand versichert seine Möbel auf 3600 *K*; wie viel hat er an Prämie zu $^1/_{10}$% zu zahlen?

## Berechnung des Grundwertes.

§. 74.

5% einer Zahl betragen 634; welches ist die Zahl?

1%, d. i. $^1/_{100}$ der Zahl beträgt $\frac{634}{5}$,

also ist die Zahl selbst 100mal so groß, somit $\frac{634}{5} \times 100 = 12680$.

$$\text{Grundwert} = \frac{\text{Procentantheil}}{\text{Procent}} \times 100.$$

**Aufgaben.**

1. Der Procentantheil einer Zahl zu 8% ist 31·2; wie groß ist die Zahl?
2. Bestimme den Grundwert, dessen Procentantheil a) zu 4% 78, b) zu $5^1/_2$% 63·84, c) zu 12% 169·2 ist.
3. Ein Haus trägt jährlich rein 948 *K*; wie groß ist der Wert desselben, wenn es sich zu 5% verzinset?
4. Wie groß ist die Bevölkerung eines Ortes, wenn 22% derselben 572 betragen?
5. Die Bevölkerung einer Stadt hat während eines bestimmten Zeitraumes um 8%, d. i. um 1716 zugenommen; wie groß war die Bevölkerung am Anfange dieses Zeitraumes?
6. Man nimmt an, dass aus Runkelrüben 5% Rohzucker gewonnen wird; wie viel *kg* Runkelrüben sind erforderlich, um daraus 4720 *kg* Rohzucker zu gewinnen?
7. Ein Geschäft führt einen Verlust von 24% herbei; mit welcher Summe war derjenige betheiligt, der dabei 528 fl. verliert?
8. Beim Verkaufe einer Ware beträgt der 15%ige Gewinn 36 *K*; wie theuer war die Ware a) im Einkaufe, b) im Verkaufe?
9. Wenn der bei einem Verkaufe erlittene Verlust à 8% 188 *K* beträgt, wie groß ist die Einkaufssumme?
10. Ein Haus wurde 6% unter dem Einkaufspreise verkauft; wie groß war dieser, wenn der Verlust 1470 *K* beträgt?
11. Bei einer Ware betragen die 3%igen Spesen 69 *K* 12 *h*; wie groß ist der Einkaufspreis?

12. Der Mietzins für eine Wohnung wurde um 16% gesteigert und beträgt jetzt 406 $K$; wie viel zahlte man früher?

$$\frac{406}{116} \times 100 = 350\ K \text{ früherer Mietzins.}$$

13. Der Weizen ist um 15% im Preise gefallen und kostet jetzt 17 $K$ 68 $h$ pr. $q$; wie theuer war er früher?

$$\frac{17\cdot68}{85} \times 100 = 20\cdot8\ K \text{ früherer Preis.}$$

14. Für eine Steuer sammt 32% Umlage werden 125 $K$ 40 $h$ gezahlt; wie groß ist die ursprüngliche Steuer?

15. Wenn man eine Ware für 150 $K$ verkauft, so verliert man 10%; wie theuer muss man sie verkaufen, um 5% zu gewinnen?

## Berechnung des Procentes.

§. 75.

Wie viel % von 2480 ist 111·6?

1% von 2480 ist $\frac{2480}{100}$; somit ist 111·6 so viel % von 2480, wie oft $\frac{2480}{100}$ in 111·6 enthalten ist, also

$$111\cdot6 : \frac{2480}{100} = \frac{111\cdot6 \times 100}{2480} = 4\tfrac{1}{2}\%.$$

Mit Hilfe der Proportion hätte man

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2480 | Grundwert | 111·6 | Procentantheil | $x : 111\cdot6 = 100 : 2480$ |
| 100 | „ | x | „ | $x = \frac{111\cdot6 \times 100}{2480}$. |

$$\text{Procent} = \frac{\text{Procentantheil} \times 100}{\text{Grundwert}}.$$

**Aufgaben.**

1. Wie viel % von 100 sind folgende Zahlen:
25, 50, 20, 10, 5, 15, 60, 45, 70, $12\tfrac{1}{2}$, $16\tfrac{2}{3}$, $33\tfrac{1}{3}$?
2. Zur Deckung der Landesbedürfnisse werden auf jede Steuerkrone 34 $h$ umgelegt; wie viel % beträgt diese Umlage?
3. Wie viel % sind
a) 40 $h$ von 5 $K$? b) $4\tfrac{1}{5}$ $K$ von 105 $K$?
75 $K$ von 1250 $K$? 39 fl. 27 kr. von 748 fl.?
4. An einem Gymnasium, welches 348 Schüler zählt, haben 261 Schüler einen guten Fortgang gemacht; wie viel % sind es?
5. Von 523 Menschen, welche 12 Jahre alt sind, erreichen im Durchschnitt 471 das 24ste Lebensjahr; wie viel % sterben hiernach im Alter von 12 bis 24 Jahren?

6. Von 160 *kg* Kalkstein erhält man $81\frac{1}{5}$ *kg* gebrannten Kalk; wie viel % beträgt der Verlust?
7. Bei einem Concurse erhält jemand für seine Forderung von 1152 fl. nur 768 fl.; wie viel % beträgt der Verlust?
8. Die Einnahmen einer Eisenbahn betragen im Monate Mai 80368 *K*, im Monate Juni 107435 *K*, um wie viel % im letzteren mehr?
9. Böhmen zählte im Jahre 1780 2561794, im Jahre 1890 6607816 Einwohner; um wie viel % hat die Bevölkerung Böhmens in dieser Zeit zugenommen?
10. Steiermark hat einen Flächenraum von 22354·75 $km^2$, Mähren einen Flächenraum von 22323·85 $km^2$; a) um wie viel % ist Steiermark größer als Mähren, b) um wie viel % ist Mähren kleiner als Steiermark?
11. Eine Ware wurde um 4250 *K* eingekauft und mit einem Gewinne von 340 *K* verkauft; wie viel % betrug der Gewinn?
12. Wie viel % werden gewonnen
    a) bei 136 *K* Einkaufspreis und 170 *K* Verkaufspreis?
    b) „ 275 „ „ „ 308 „ „
    c) „ 1224 „ „ „ 1444 „ 32 *h* „
13. Jemand kaufte 168 *m* Tuch um 630 fl. und verkaufte das *m* zu $4\frac{7}{20}$ fl.; wie viel gewann er a) im ganzen, b) nach Procenten?
14. Ein Kaufmann hat zwei Stück Tuch von verschiedener Güte eingekauft, 36 *m* à 7·5 *K* und 30 *m* à 8·4 *K*; beim Verkaufe des ersten Stückes gewinnt er 16%; wie viel % gewinnt er an dem zweiten Stücke, wenn er beim Verkaufe beider Stücke zusammen 603 *K* einnimmt?
15. Wie viel % beträgt die Tara, wenn man
    a) von 1625 *kg* Brutto 1565 *kg* Netto
    b) „ 2160 „ „ 1836 „ „
    c) „ 948 „ „ 900·4 „ „ rechnet?
16. Ein Commissionär erhält 22 *K* 74 *h* als Provision für besorgte Ware im Betrage von 936 *K*; wie viel % beträgt die Provision?
17. Von einem Warenbetrage von 1480 fl. zahlte man dem Sensal 9 fl. 25 kr.; zu wie viel % wurde die Sensarie berechnet?
18. Der Verkaufspreis einer Ware von 1590 *K* enthält einen Gewinn von 90 *K*; wie viel % beträgt dieser?
19. Beim Verkauf einer Ware zu 462 *K* gewinnt man $16\frac{2}{3}$%; wie viel % gewinnt man, wenn sie für 420 *K* verkauft wird?

# X. Einfache Zinsrechnung.

§. 76.

Eine Geldsumme, welche man jemandem unter der Bedingung leiht, dass er für die Benützung einen bestimmten Geldbetrag entrichtet, endlich aber die Geldsumme zurückzuzahlen verpflichtet ist, wird Capital genannt. Das Geld, welches für die Benützung des Capitals entrichtet wird, heißt Zins oder Interesse; es wird nach Procenten bestimmt, welche sich, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, auf ein Jahr beziehen; z. B. ein Capital ist zu 5% angelegt, heißt: von je 100 *K* Capital erhält man in einem Jahre 5 *K* Zins.

Die Zinsrechnung ist demnach eine Procentrechnung, in welcher außer den bei dieser zusammentretenden Größen noch eine weitere Größe, die Zeit, in Berücksichtigung kommt. Das Jahr wird dabei im allgemeinen zu 360 Tagen, der Monat zu 30 Tagen angenommen.

Sind von den vier Größen Capital, Zeit, Procent und Zinsen drei gegeben, so kann aus denselben die vierte bestimmt werden.

Bleibt das Capital während der ganzen Verzinsungszeit unverändert, so heißen die davon entfallenden Zinsen einfache Zinsen; werden aber am Ende eines jeden Jahres oder Halbjahres die Zinsen zum Capitale geschlagen und selbst wieder verzinst, so heißen die Zinsen zusammengesetzte oder Zinseszinsen.

Hier soll nur von den einfachen Zinsen die Rede sein.

## Berechnung der Zinsen.

§. 77.

Ein Capital von 3457 *K* ist zu 5% angelegt; wie viel Zinsen trägt es in 3 Jahren?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 3457 *K* Capital geben | | |
| zu 1% in 1 Jahre | den 100sten Theil . . | 34·57 | *K* Zins. |
| „ 5% „ 1 „ | 5mal so viel . . . . . . | 34·57 × 5 | „ „ |
| „ 5% „ 3 Jahren | 3mal so viel . . . . . | 34·57 × 5 × 3 | |
| | | = 518·55 | „ „ |

Durch Anwendung derselben Schlüsse werden auch die unten folgenden Aufgaben gelöst. Es ergibt sich dabei allgemein:

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Capital}}{100} \times \text{Procent} \times \text{Zeit in Jahren.}$$

Ist die Zeit als mehrnamige Zahl gegeben, so geschieht die Auflösung am einfachsten mittelst Zerfällung, indem man nämlich die Monate in passende Theile eines Jahres und die Tage in passende Theile eines Monates zerlegt und als solche berechnet.

## Aufgaben.

(Nach der Schlussrechnung aufzulösen.)

**1.** Berechne die einjährigen Zinsen

a) von 3124 *K* zu 5%<br>
zu 1%...31·24 *K*<br>
„ 5%..156·20 *K*.

b) von 4181 *K* zu 4%<br>
167·24 *K*

**2.** Wie viel Zinsen erhält man jährlich
a) von 300 *K*, 500 *K*, 800 *K*, 1200 *K* zu 5%?
b) von 200 *K*, 700 *K*, 1000 *K*, 2500 *K* zu 4%?

**3.** Wie viel betragen die jährlichen Zinsen
a) von 1834 *K* à 5%   b) von 3307 *K* à 6%?
c) von 2095 *K* 50 *h* à $5^1/_2$%?   d) von 9126 *K* à $4^3/_4$%?

**4.** Wie viel Zins geben a) 2183 *K* zu 4% in 3 Jahren? b) 14788 *K* zu $4^1/_5$% in 2 Jahren? c) 7350 *K* zu $5^1/_2$% in 4 Jahren?

**5.** Wie viel Zins geben 1948 fl. in $2^1/_2$ Jahren zu a) $4^3/_4$% b) 5%, c) 6%?

**6.** Wie viel Zinsen geben 3888 *K* Capital zu $4^1/_2$% in 3 Jahren 7 Monaten 10 Tagen?

| | |
|---|---|
| 3888 *K* | Capital |
| 155·52 *K* | à 4% |
| 19·44 „ | „ $^1/_2$% |
| 174·96 *K* | in 1 Jahr |
| 524·88 *K* | „ 3 Jahren |
| 87·48 „ | „ 6 Mon. = $^1/_2$ Jahr |
| 14·58 „ | „ 1 „ = $^1/_6$ von 6 Mon. |
| 4·86 „ | „ 10 Tagen = $^1/_3$ Mon. |
| 631·80 *K* | Zins. |

**7.** Wie viel Zins geben 2848 *K* zu 5% in 3 Jahren und 4 Monaten?

**8.** Ein Capital von 8425 fl. 18 kr. liegt durch 4 Jahre 11 Monate zu $4^1/_2$% an; wie viel Zinsen bringt es?

9. Wie groß sind die Zinsen von 5244 *K* 55 *h* zu $5^1/_4\%$ in 3 Jahren 5 Monaten 20 Tagen?

10. Wie viel Zinsen geben

a) 9006 *K* Capital zu 5% in 10 Monaten?
b) 2514 *K* zu 6% in 4 Jahren 9 Mon. 20 Tagen?
c) 950·4 *K* zu $4^1/_2\%$ in 3 Jahren 7 Mon. 18 Tagen?
d) 4392·6 *K* zu $5^1/_4\%$ in 2 Jahren 5 Mon. 12 Tagen?

## §. 78.

Häufig sind die Zinsen eines Capitals bloß für eine **bestimmte Anzahl von Tagen** zu berechnen. In diesem Falle kann man zuerst die Zinsen zu 4% suchen und daraus mittelst Zerfällung die Zinsen für das gegebene Procent ableiten.

Es seien die Zinsen von 3546 *K* Capital zu 4% für 139 Tage zu berechnen.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 100 *K* | geben in | 360 Tagen | 4 *K* Zins |
| „ „ | „ „ | 1 Tage | $\frac{4}{360} = \frac{1}{90}$ „ „ |
| „ „ | „ „ | 139 Tagen | $\frac{139}{90}$ „ „ |
| 1 „ | gibt „ | „ „ | $\frac{139}{9000}$ „ „ |
| 3546 „ | geben „ | „ „ | $\frac{3546 \times 139}{9000}$ „ „ |

$$\text{Zinsen zu } 4\% = \frac{\text{Capital} \times \text{Tage}}{9000}.$$

**Aufgaben.**

1. Wie viel Zinsen geben 2790 *K* zu 4% in 85 Tagen?

2. Wie viel betragen die Zinsen zu 4%

a) von 925 *K* in 48 Tagen? b) von 1019 *K* in 153 Tagen?
c) von 1512 *K* in 260 Tagen? d) von 2349·25 *K* in 186 Tagen?

3. Wie viel Zinsen geben 758 *K* zu 4% vom 13. April bis letzten December?

| | |
|---|---|
| Vom 13. April bis 13. Dec. sind 8 Mon. = | 240 Tage |
| „ 13. Dec. „ 30. „ | 17 „ |
| Zusammen | 257 Tage. |

4. Wie viel Zinsen à 4% geben

a) 750 *K* vom 1. August bis 27. October?
b) 2370 *K* vom 18. März bis 30. Juni?

5. Wie viel Zinsen geben 1242 *K* zu 5% in 216 Tagen?

100 *K* in 360 Tagen 5 *K*
" " " 1 Tage $\frac{5}{360} = \frac{1}{72}$ "
" " " 216 Tagen $\frac{216}{72}$ "
1 " " " " $\frac{216}{7200}$ "
1242 " " " " $\frac{1242 \times 216}{7200}$ "
$= 37 \cdot 26$ *K*

oder:

$$\begin{array}{r}
1242 \times 216 \\
\hline
2484 \\
1242 \\
7452 \\
\hline
268272 : 9000 \\
\hline
29 \cdot 808 \; K \text{ à } 4\% \\
7 \cdot 452 \; \text{"} \text{ à } 1\% \\
\hline
37 \cdot 26 \; K \text{ à } 5\%.
\end{array}$$

6. Wie viel Zinsen geben 9110 *K* zu $4^1/_2\%$ vom 2. Mai bis 15. October?
7. Wie viel Zinsen erhält man von 9217 fl. zu 3% in 174 Tagen?
8. Wie viel Zinsen geben 4856·5 fl. zu $5^1/_2\%$ in 72 Tagen?
9. Jemand hat zu beziehen:
die Zinsen von 3045 *K* zu 4 % für 233 Tage,
" " " 2813 " " 5 % vom 17. April bis 22. Sept.,
" " " 4008 " " $4^3/_4\%$ " 24. Mai " 7. August;
wie groß ist der ganze Zinsenbetrag?
10. Jemand kauft am 27. April 2000 fl. Staatspapiere zum Curse 96 (d. i. 100 fl. Nominalwert zu 96 fl. Bezahlung); wie viel muss er dafür bezahlen, wenn die Zinsen à $4^1/_5\%$ seit 1. Jänner zu vergüten sind?

| | |
|---|---|
| 2000 fl. à 96 . . . . . . . | 1920 fl. |
| $4^1/_5\%$ Zinsen für 117 Tage . . | 27·3 " |
| | 1947·3 fl. |

11. Jemand verkauft am 15. Mai 2500 fl. Pfandbriefe zum Curse 100·80; wie viel nimmt er dafür ein? (Zinsen à $4^1/_2\%$ seit 1. März.)

## Berechnung des Capitals.

### §. 79.

Welches Capital gibt zu 4% in 3 Jahren $154^1/_5$ *K* Zinsen?

Die Zinsen für 1 Jahr zu 4%, d. i.

$\frac{4}{100}$ des Capitals ........ $\frac{154^1/_5}{3}$ *K*, also

$\frac{1}{100}$ " " ........ $\frac{154^1/_5}{4 \times 3}$ *K*, somit

das Capital selbst ........ $\frac{154^1/_5 \times 100}{4 \times 3}$ *K* = 1285 *K*.

Man kann auch so schließen:

Das Capital enthält so vielmal 100 *K*, als die Zinsen von 100 *K* in den gegebenen Zinsen enthalten sind.

100 *K* geben zu 4% in 3 Jahren $4 \times 3$ *K* Zinsen; also

$$\text{Capital} = 100\ K \times \frac{154^1/_5}{4 \times 3}, \text{ wie oben.}$$

$$\text{Capital} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Procent} \times \text{Zeit in Jahren}}.$$

**Aufgaben.**

1. Wie groß ist das Capital, welches zu $5^1/_2$% jährlich 202 *K* 40 *h* Zinsen abwirft?
2. Ein Haus gibt im Durchschnitte jährlich 1172 *K* reinen Ertrag; welchen Kaufpreis wird man dafür ansetzen, wenn man es zu 5% verkaufen, d. i. für jede 5 *K* Reinertrag 100 *K* Kaufschilling oder Capital haben will?
3. Jemand bezieht in 3 Jahren 558 fl. Zinsen; wie groß ist das Capital bei 6% Verzinsung?
4. Wie groß muss ein Capital sein, damit es zu $4^1/_5$% in $2^1/_2$ Jahren 735 *K* Zins bringt?
5. Welches Capital gibt
   a) zu 4% in $2^3/_4$ Jahren 213·4 *K* Zins?
   b) zu $4^1/_2$% in 1 Jahr 8 Mon. 417 *K* Zins?
   c) zu $4^3/_4$% in 2 Jahren 6 Mon. 15 Tagen 579·5 *K* Zins?
6. Welches Capital gibt zu 4% in 108 Tagen 108 fl. Zins?
7. Ein Capital bringt zu $4^1/_2$% jährlich 18 *K* Zins; wie viel jährlichen Zins bringt ein um 300 *K* größeres Capital zu 5%?
8. Zwei Capitalien bringen jährlich 250 *K* Zinsen; das eine beträgt 2400 *K* und ist zu $4^1/_2$% angelegt, das andere ist zu 5% ausgeliehen; wie groß ist das letztere?
9. Welches Capital bringt zu 6% in 4 Jahren ebenso viel Zinsen wie ein Capital von 4560 *K* zu 5% in $2^1/_2$ Jahren?

### Berechnung der Zeit.

§. 80.

Wie lange ist ein Capital von 2480 *K* zu 4% angelegt, damit es 496 *K* Zinsen einbringt?

Man schließt: Das Capital ist so viele Jahre angelegt, wie oft die jährlichen Zinsen in den gegebenen Zinsen enthalten sind.

Die Zinsen von 2480 $K$ zu 4% für 1 Jahr betragen $\frac{2480 \times 4}{100}$ $K$; also ist

$$\text{Anzahl Jahre} = 496 : \frac{2480 \times 4}{100} = \frac{496 \times 100}{2480 \times 4} = 5.$$

$$\text{Anzahl Jahre} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Capital} \times \text{Procent}}.$$

**Aufgaben.**

1. In wie viel Jahren geben 225 $K$ Capital zu 4% 45 $K$ Zinsen?
2. 900 fl. Capital gaben zu 5% 112 $K$ 50 $h$ Zinsen; wie lange sind dieselben ausgeliehen worden?
3. In wie viel Zeit geben 3855 $K$ zu 4% 424·05 $K$ Zins?
4. In welcher Zeit erhält man von 9420 $K$ zu $4\frac{1}{2}$% 1413 $K$ Zinsen?
5. In wie viel Zeit geben
   a) 4715 $K$ Capital zu 4% 377·2 $K$ Zins?
   b) 5210 $K$ Capital zu $5\frac{1}{2}$% 916 $K$ 96 $h$ Zins?
   c) $9822\frac{3}{4}$ $K$ Capital zu $5\frac{3}{4}$% 1129·62 $K$ Zins?
6. Wie lange muss ein Capital von 2800 fl. zu $5\frac{1}{2}$% ausstehen, damit es mit Einrechnung der Zinsen auf 3185 fl. anwachse?
7. Wie lange muss ein Capital angelegt bleiben, damit die Zinsen a) zu 4%, b) zu 5%, c) zu 6% ebenso viel betragen, als das Capital?
8. Am 1. Mai wurden 1550 $K$ zu 4% ausgeliehen; als die Rückerstattung erfolgte, betrug das Capital mit den Zinsen $1588\frac{3}{4}$ $K$; wann ist das Capital zurückgezahlt worden?
9. Wie lange muss ein Capital von 1863 $K$ zu 5% anliegen, damit es so viel Zins bringe wie 8280 $K$ zu $4\frac{1}{2}$% in 9 Monaten?

## Berechnung der Procente.

### §. 81.

Zu wie viel Procent muss ein Capital von 3445 $K$ angelegt werden, um in 4 Jahren 689 $K$ Zinsen zu geben?

Hier ist zu bestimmen, wie viel Zins 100 $K$ Capital in 1 Jahre geben. Man schließt:

$$1\ K\ \text{Cap. gibt in 4 Jahren}\ \frac{689}{3445}\ K\ \text{Zinsen}$$

$$1\ „\ „\ „\ „\ 1\ \text{Jahre}\ \frac{689}{3445 \times 4}\ K\ \text{Zinsen}$$

$$100\ „\ „\ \text{geben}\ „\ 1\ „\ \frac{689 \times 100}{3445 \times 4} = 5\ K\ \text{Zinsen.}$$

Das Capital ist also zu 5% angelegt.

$$\text{Procent} = \frac{\text{Zinsen} \times 100}{\text{Capital} \times \text{Zeit in Jahren}}.$$

**Aufgaben.**

1. 800 *K* Capital bringen in 1 Jahre 32 *K* Zinsen; zu wie viel % ist das Capital ausgeliehen?
2. Ein Capital von 5500 *K* gibt jährlich 330 *K* Zins; zu wie viel % verzinset es sich?
3. Jemand leihet 16000 *K* aus; wie viel % muss er verlangen, um davon ein jährliches Einkommen von 900 *K* zu genießen?
4. Ein Kaufmann hat in seinem Geschäfte ein Capital von 18356 *K*; am Schlusse des Jahres stellt sich ein reiner Gewinn von 1376 *K* 70 *h* heraus; wie viel % hat ihm das Capital eingebracht?
5. Ein Capital, das bei 4% jährlich 218 fl. Zinsen trägt, soll künftighin jährlich um $81\frac{3}{4}$ fl. Zinsen mehr tragen; wie groß ist das Capital und zu wie viel % muss es angelegt werden?
6. Zu wie viel % geben
   a) 1648 *K* Cap. in $2\frac{1}{2}$ Jahren 185·4 *K* Zinsen?
   b) 1080 *K* Cap. in 3 Jahren 4 Mon. 144 *K* Zinsen?
   c) 3150 *K* Cap. in 8 Monaten $73\frac{1}{2}$ *K* Zinsen?
7. Zu wie viel % muss man 9110 *K* anlegen, damit sie vom 2. Mai bis 15. October 206 *K* 24 *h* Zins bringen?
8. Jemand kauft Staatspapiere, welche $4\frac{1}{5}$% Zins tragen, zum Curse 96, d. i. er kauft je 100 fl. des Papieres für 96 fl.; zu wie viel % verzinset sich das Capital?
9. Jemand lieh 460 *K* auf ein Jahr zu 5%, musste sich aber die Zinsen gleich beim Empfang des Capitals abziehen lassen; um wie viel wurde er dabei übervortheilt und wie viel % wurden eigentlich gerechnet?
10. Ein Capital bringt in 3 Jahren zu $4\frac{1}{2}$% $60\frac{3}{4}$ *K* Zins, ein um 150 *K* größeres Capital bringt in derselben Zeit 90 *K* Zins; zu wie viel % ist das letztere verzinst?

11. Ein Haus wurde für 28500 fl. gekauft; der jährliche Mietzinsertrag ist 1980 fl.; zu wie viel % verzinset sich das Capital, wenn für Reparaturen 147 fl. in Abschlag gebracht werden und wenn die Hauszinssteuer sammt Zuschlägen 35% beträgt?

12. Bei wie viel % würde man von einem Capitale in 5 Jahren 1022 *K* Zinsen erhalten, wenn dasselbe Capital bei 5% in 4 Jahren $985\frac{1}{2}$ *K* Zinsen bringt?

## Berechnung des Endwertes eines Capitals.

### §. 82.

Der Wert, zu welchem ein Capital nach einer bestimmten Zeit mit Zurechnung der Zinsen anwächst, heißt der **Endwert** des Capitals im Gegensatze zu dem **Anfangswerte**, d. i. dem Werte desselben im Anfange dieser Zeit.

Um den **Endwert** eines Capitals nach einer bestimmten Zeit zu berechnen, darf man nur zu dem Anfangscapitale die Zinsen für diese Zeit addieren. Z. B.

Ein Capital von 3640 *K* ist zu 5% angelegt; wie groß ist dessen Endwert nach $2\frac{1}{2}$ Jahren?

| | |
|---|---|
| Anfangswert | 3640 *K* |
| Zinsen à 5% für $2\frac{1}{2}$ Jahr | 455 „ |
| Endwert | 4095 *K* |

Die Lösung könnte auch unmittelbar so geschehen:

100 *K* wachsen mit den Zinsen zu 5% nach $2\frac{1}{2}$ Jahren auf 112·5 *K* an, somit ist

Endwert von 1 *K* . . . . . . . 1·125 *K*, also

„ „ 3640 „ $3640 \times 1{\cdot}125 = 4095$ *K*.

**Der Endwert eines Capitals ist demnach gleich dem Producte aus dem Anfangswerte desselben und dem Endwerte einer Krone.**

### Aufgaben.

1. Jemand nimmt 2480 *K* zu 5% auf 3 Jahre auf; wie viel wird er nach dieser Zeit an Capital und Zinsen zu zahlen haben?
2. Jemand hat 750 *K* nach 6 Monaten sammt den Zinsen zu 4% zu berichtigen; wie viel hat er zu zahlen?
3. Für eine nach 3 Jahren fällige Schuld werden sogleich 360 *K* gezahlt; wie groß war dieselbe, wenn die Zinsen mit 5% in Abzug gebracht wurden?

4. Wenn 3050 fl. durch 2 Jahre 4 Monate zu $5^1/_2$% ausstanden, wie viel muss nach dieser Zeit an Capital und Zins zurückgezahlt werden?

5. Ein Capital von 4840 *K* ist zu $4^1/_2$% angelegt; wie groß ist sein Endwert nach $2^1/_2$ Jahren?

6. Welchen Endwert haben
   a) 3216 *K* bei $4^3/_4$% Zins nach 4 Jahren?
   b) 3580 *K* „ $5^1/_4$% „ „ 2 Jahren 8 Mon.?
   c) 4050 *K* „ 6% „ „ 3 Jahren 9 Mon. 15 Tagen?

7. Für ein Haus bietet A 19500 *K* bar, B 19540 *K* nach 9 Monaten zahlbar; wenn nun der Verkäufer das Geld zu 5% ausleihen kann, welches Anbot ist für ihn vortheilhafter?

8. Jemand ist seit 6. März 1547 *K* schuldig, die er zu $5^1/_2$% verzinset; wie viel beträgt seine Schuld am 30. Juni?

9. Jemand nimmt 2345 *K* auf 42 Tage zu 7% auf Zins; wie viel wird er nach Verlauf dieser Zeit zurückzuzahlen haben?

10. Ein Kaufmann, der am 18. Sept. 3550 *K* und am 5. Nov. 1749 *K* zu zahlen hat, bezahlt beide Beträge sammt 5% Zinsen am 31. Dec.; wie viel zahlt er da zusammen?

H. SCHEIBE WIEN