

Celoletne priprave za mednarodna matematična tekmovanja v letu 2023/24



LUKA HORJAK

→ V letošnjem šolskem letu se slovenski dijaki in dijakinje v organizaciji DMFA Slovenije udeležujejo treh mednarodnih matematičnih tekmovanj – to so Mednarodna matematična olimpijada (MMO), Evropska dekliška matematična olimpijada (EDMO) in Srednjeevropska matematična olimpijada (SMO). Proces za uvrstitev v katerokoli izmed teh ekip je zelo zahteven in poteka že od samega začetka šolskega leta. Za uspešen nastop na takem tekmovanju namreč ne zadošča samo znanje matematike, ki ga pridobimo v šoli. Naloge na olimpijadah so zahtevnejše, od tekmovalcev zahtevajo veliko mero iznajdljivosti, poleg tega pa tudi znanje izrekov in strategij, ki niso del učnega načrta za gimnazije. Vsako leto tako izvajamo celoletne priprave, ki služijo tako dopolnitvi znanja tekmovalcev kot tudi grajenju intuicije za reševanje zapletenih problemov.

Tako kot v prejšnjih letih smo priprave tudi letos v glavnem vodili študenti, ki smo tudi sami v svojih srednješolskih letih sodelovali na zgoraj omenjenih tekmovanjih. Priprave so večinoma potekale v živo na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, zainteresirani pa so lahko predavanja spremljali tudi na daljavo preko spleta. Teme 4-urnih predavanj na osnovni oziroma višji ravni (označene z *) so bile naslednje:

- KOMBINATORIKA (13.10.2023): *Preštevanja, načelo vključitev in izključitev, Dirichletov princip* (Jaka



SLIKA 1.

Med reševanjem 3. izbirnega testa na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani.

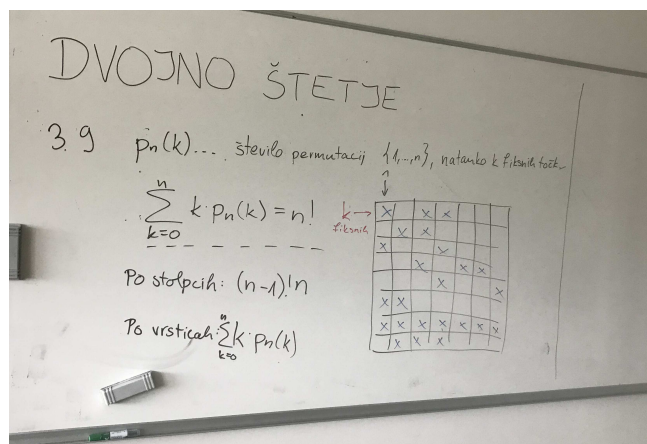
- Vrhovnik), **Teorija grafov* (Luka Horjak)
- GEOMETRIJA (27.10.2023): *Usmerjeni koti* (Kaja Rajter), **Inverzija* (Matija Skrt)
- TEORIJA ŠTEVIL (10.11.2023): *Modularna aritmetika* (Katarina Grilj), **Lema o dvigu eksponenta* (Hugo Trebše)
- INDUKCIJA / GEOMETRIJA (24.11.2023): *Indukcija* (Luka Peruš), **Projektivna geometrija* (Matija Skrt)
- ALGEBRA (8.12.2023): *Funkcijske enačbe* (Luka Horjak), **Funkcijske enačbe* (Lovro Drofenik)
- GEOMETRIJA (12.1.2024): *Potenca točke na krožnico* (Luka Horjak), **Sučni razteg* (Matija Skrt)
- ALGEBRA (26.1.2024): *Polinomi* (Jan Pantner), **Rodovne funkcije* (Luka Horjak)
- KOMBINATORIKA (7.2.2024): *Kombinatorne igre, rekurzija in bijekcije* (Jaka Vrhovnik), **Uporaba linearne algebre v kombinatoriki* (Marko Čmrlec)
- TEORIJA ŠTEVIL (20.3.2024) *Diofantske enačbe* (Hugo Trebše), **Kvadratni ostanki, Vietovi skoki* (Marko Čmrlec)





- GEOMETRIJA (3.4.2024): *Menelajev, Cevov in Pascalov izrek, homotetija* (Lovro Drofenik), **Splošne strategije reševanja nalog* (Luka Horjak)
- KOMBINATORIKA (8.5.2024): *Invariante in dvojno štetje* (Kaja Rajter)

Na pripravih so lahko tako novi tekmovalci spoznali vse temeljne koncepte, ki se pogosto pojavljajo v rešitvah olimpijskih nalog, izkušeni tekmovalci in tekmovalke pa so lahko svoje znanje še poglobili z zahtevnejšimi temami. Svoje znanje so oboji utrjevali še z reševanjem domačih nalog, ki so bile prav tako eden izmed pogojev za uvrstitev v slovensko ekipo za katero od mednarodnih tekmovanj.



SLIKA 2.

Reševanje naloge z Mednarodne matematične olimpijade z uporabo dvojnega štetja.

Ekipe, ki zastopajo Slovenijo na mednarodnih tekmovanjih, določamo na podlagi treh izbirnih testov skupaj z državnim tekmovanjem srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja. Na izbirnih testih je letos sodelovalo 44 dijakov srednjih šol. Največ prijavljenih je dijakov ljubljanskih srednjih šol, sledijo pa Maribor, Celje in Škofja Loka. Od tega je približno tretjina deklet, vendar se v zadnjih letih v ekipi za MMO in SMO uvrščajo pretežno fantje. To ne velja samo za naš izbirni proces – v zadnjih letih je med tekmovalci na Mednarodni matematični olimpijadi le okoli 10 % deklet, poprej pa je bil ta delež še manjši.

Prav s tem namenom sodelujemo na Evropski dekliški matematični olimpijadi, saj ta k sodelovanju na tovrstnih tekmovanjih posebej spodbuja dekleta. Letošnja EDMO je kot običajno potekala aprila, zato smo za uvrstitev v ekipo upoštevali le dva izmed izbirnih testov, slovenske tekmovalke pa so dosegle najboljše rezultate doslej. Več o tem ste lahko prebrali v prejšnji številki Preseka. Med poletnimi počitnicami pa bosta potekali še Mednarodna matematična olimpijada in Srednjeevropska matematična olimpijada. V času pisanja tega prispevka rezultati 3. izbirnega testa in končnega izbora še niso bili znani, obe ekipi pa poleti pred potovanjem čakajo še intenzivne priprave. Posebej naj izpostavim, da bomo v tednu pred Mednarodno matematično olimpijado v Portorožu gostili švicarsko ekipo, s katero imamo že dolgoletno tradicijo skupnih priprav na tekmovanje.

Za konec si oglejmo še dve nalogi iz letošnjega 2. izbirnega testa.

Naloga 1. Naj bosta n in k naravni števili, pri čemer velja $n \geq k$. Podanih je n kroglic in k škatel. Ana in Bor igrata naslednjo igro. Najprej Ana razdeli vse kroglice v škatle, pri čemer nobene ne pusti prazne. Nato izmenično izbereta neprazno škatlo in iz nje odstranita eno kroglico, pri čemer začne Ana. Če igralec vzame zadnjo kroglico iz škatle, dobi eno točko. Določi največje število K , za katerega lahko Ana dobi K točk ne glede na Borove poteze.

Rešitev 1. naloge Igralcema je skupaj na voljo toliko točk, kot je škatlic, torej k . Pri reševanju naloge moramo biti pozorni, da je naloga sestavljena iz dveh delov – določiti moramo K , za katerega lahko Ana dobi K točk, poleg tega pa dokazati, da Ana ne more dobiti $K + 1$ (ali več) točk.

Z obravnavo majhnih primerov vidimo, da je smiselno ločiti dva primera. Naj bo število kroglic n sodo. Tedaj lahko z začetno porazdelitvijo, v kateri je v $k - 1$ škatlah po ena kroglica, v zadnji pa preostale kroglice, Ana dobi $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ točk, in sicer tako, da na vsaki potezi (dokler lahko) izbere škatlo z eno kroglico.

To je tudi iskan maksimum. Vzemimo namreč poljubno porazdelitev kroglic v škatle. Če ima na Borovi potezi katera izmed škatel natanko eno kroglico,



SLIKA 3.

Optimalna porazdelitev za $n = 6$ in $k = 4$.

Bor izbere to škatlo, sicer pa izbere poljubno škatlo z lihim številom kroglic (ki gotovo obstaja zaradi predpostavke, da je n sodo število). Če Ana na katerikoli potezi (razen prvi) dobi točko, to pomeni, da je v eni izmed škatel bila le ena kroglica. To zaradi Borove strategije pomeni, da Bor svoje kroglice ni vzel iz te škatle. To pa pomeni, da jo je vzel iz neke druge škatle, v kateri je prav tako bila le ena kroglica, in tako dobil točko. Ker je dobil tudi zadnjo točko, je torej dobil vsaj polovico točk. Sledi, da je res $K = \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$.

Sedaj si oglejmo še lihe n . Če je $n \geq 2k - 1$, lahko Ana v vse razen ene škatle da 2 kroglici. Na vsaki potezi nato izbere škatlo, ki vsebuje liho število kroglic. Ker bo Bor na svoji potezi vedno moral izbrati škatlo s sodim številom kroglic, ne bo dobil nobene točke in je tako $K = k$ (več kot k točk Ana očitno ne more dobiti).



SLIKA 4.

Optimalna porazdelitev za $n = 9$ in $k = 4$.

Preostane še možnost, ko je $n < 2k - 1$. Pokažimo, da v tem primeru velja $K = \frac{n+1}{2}$. To Ana doseže tako, da v vsako škatlo da kvečjemu 2 kroglici, in v vsaki potezi izbere škatlo z natanko eno kroglico (to lahko stori, saj vedno obstaja škatla z lihim številom kroglic). Tako na vsaki potezi dobi točko, teh pa naredi natanko $\frac{n+1}{2}$. Jasno je, da več točk ne more dobiti.

Naloga 2. Naj bo $Q(x) = a_{2024}x^{2024} + a_{2023}x^{2023} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinom s celoštevilskimi ko-

eficienti. Za vsako praštevilo $p > 2$ označimo

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad Q_p(x) &= a_{2024}^{p-2}x^{2024} + a_{2023}^{p-2}x^{2023} + \dots + \\ &\quad + a_1^{p-2}x + a_0^{p-2}. \end{aligned}$$

Denimo, da za neskončno praštevil $p > 2$ velja, da

$$\blacksquare \quad p \mid Q_p(x) - Q(x)$$

za vsa cela števila x . Določi največjo možno vrednost $Q(2024)$.

Rešitev 2. naloge Predpostavimo, da Q ni ničelni polinom. Oglejmo si praštevila p , ki ne delijo nobenega izmed neničelnih a_i . Deljivost lahko v tem primeru z uporabo malega Fermatovega izreka zapišemo kot

$$\blacksquare \quad p \mid \sum_{a_i \neq 0} (a_i - a_i^{-1}) x^i,$$

kjer so a_i^{-1} multiplikativni inverzi po modulu p . Da odpravimo inverze, celotno deljivost pomnožimo z najmanjšim skupnim večkratnikom L števil a_i . Tako dobimo

$$\blacksquare \quad p \mid \sum_{a_i \neq 0} \left(a_i \cdot L - \frac{L}{a_i} \right) x^i.$$

Sedaj označimo

$$\blacksquare \quad P(x) = \sum_{a_i \neq 0} \left(a_i \cdot L - \frac{L}{a_i} \right) x^i.$$

To je seveda polinom, ki pa ima po definiciji L celoštevilske koeficiente. Vzemimo poljuben $x \in \mathbb{Z}$. Ker za neskončno praštevil p velja, da $p \mid P(x)$, sledi $P(x) = 0$. Tako dobimo, da je P kar ničelni polinom. Za vsak a_i torej velja $a_i = 0$ ali $a_i - \frac{1}{a_i} = 0$ oziroma $a_i \in \{-1, 0, 1\}$. Vsi taki polinomi zadoščajo pogoju, saj v tem primeru velja $a_i^{p-2} = a_i$ oziroma $Q_p(x) = Q(x)$.

Vrednost števila $Q(2024)$ bo tako največja, ko bo veljalo $a_i = 1$ za vsak i . Tako dobimo

$$\blacksquare \quad Q(2024) = \sum_{i=0}^{2024} 2024^i = \frac{2024^{2025} - 1}{2023}.$$

× × ×