PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 6
Strani 348–351

Michael Ecker, prevedel in priredil Damjan Osredkar:

POZOR, ČRNE LUKNJE!

Ključne besede: matematika, razvedrilna matematika, teorija števil, Sizifov niz, narcisna števila, Kaprekarjeva konstanta, Collatzova domneva.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/23/1278-Ecker-Osredkar.pdf

© 1996 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

POZOR, ČRNE LUKNJE!

Sizifov niz

V grškem mitu se je Sizifu ne glede na to, kako močno se je trudil, težka skala, ki jo je moral valiti na hrib, pod vrhom vedno izmuznila in se skotalila po hribu navzdol. Podobno se lahko zgodi tudi v matematiki: Začnite s katerim koli pozitivnim celim številom, zapisanim z nizom števk – na primer z 9288759. Preštejte število sodih števk, število lihih števk in število vseh števk v tem nizu. V danem primeru so 3 sode števke, 4 lihe števke, vseh števk pa je 7. Iz teh števil sestavite niz, 347. Če ponovite postopek s številom 347, dobite 1, 2 in 3. In če postopek ponovite s številom 123, zopet dobite število 123. V vesolju števil je število 123, glede na ta postopek, črna luknja!

Ali res vsako število konča v matematični črni luknji, številu 123? Vzemite zelo veliko število, na primer

$$122333444455555666666777777788888888999999999.$$

Če zapored zapišete število sodih števk (20), lihih števk (25) in vseh števk (45), dobite število 202545. Ponovitev postopka z 202545 dá 4, 2 in 6, naslednji korak z 462 dá 303 in zadnji s številom 303, dá 123.

Glavni lastnosti te črne luknje sta dve: prva – ko se enkrat znajdete pri številu 123, ne pridete več iz črne luknje – in, druga – vsak element, ki ga črna luknja privlači (vsako pozitivno celo število), potegne le-ta vase. Če le dovoljkrat ponovite postopek z nekim številom, pridete v končni fazi do števila 123. Druga lastnost potiska v črno luknjo, prva pa zagotovi, da se vanjo ujamete.

Kako deluje Sizifov niz? V primeru črne luknje 123 lahko sklepamo takole: če je začetno število večje od 999, potem je število, ki ga sestavimo s štetjem števk, manjše od začetnega števila. Če začnete s 1000 ali več, vas postopek prej ali slej privede pod 1000.

Z računalnikom se da enostavno preveriti, da vsako število, ki je manjše od 1000, vodi do 123, vendar je dokaz s "papirjem in svinčnikom" hitrejši in enostavnejši. Trimestno število ima naslednje možnosti za število sodih števk, število lihih števk in število vseh števk: $(0,3,3)$, $(1,2,3)$, $(2,1,3)$ in $(3,0,3)$. S katerim koli trimestnim številom začnete, dobite po enem koraku eno od teh štirih trojic. Uporabite pravilo za vsako teh trojic in videli boste, da vedno dobite $(1,2,3)$ – Sizifovo število 123.

Besede v številke

Vzemite katero koli celo število in zapišite njeno ime v angleščini, recimo "five" za 5. Preštejte črke v imenu, v tem primeru so 4. Ponovite postopek s 4: ime števila "four" ima štiri črke, s čimer ste se ujeli v črno luknjo 4.

Poizkusite z drugim številom, recimo 163. Da se izognete nepreglednosti, vključite v štetje še presledke in pomišljaje: tako ima 163, z imenom "one hundred and sixty-three", seštevek 27. Ta dá 12, potem dobimo zapored 6, 3, 5 in končno 4. Jasno je, da je ta črna luknja odvisna od angleščine, vendar je možno, da imajo tudi drugi jeziki podobno lastnost. Ni pa nujno, da je črna luknja ravno število 4. Tudi slovenščina ima takšno črno luknjo, število 3. Preverite!

Narcisna števila

Edina cela števila, poleg 0 in 1, ki so enaka vsoti kubov svojih števk so 153, 370, 371 in 407. Ustvarimo si lahko lasten svet, v katerem eno teh števil postavimo za črno luknjo. Da postane število 153 črna luknja, začnete s katerim koli pozitivnim celim številom, ki je večkratnik števila 3. Vsako števko kubirate in seštejete kube, da dobite novo število. Začnete, na primer, s številom 432...

$$\begin{aligned} 4^3+3^3+2^3 &= 99 \\ 9^3+9^3 &= 1458 \\ 1^3+4^3+5^3+8^3 &= 702 \\ 7^3+0^3+2^3 &= 351 \\ 3^3+5^3+1^3 &= 153 \\ 1^3+5^3+3^3 &= 153 \end{aligned}$$

...in padete v črno luknjo! To deluje, ker se dovolj velika števila med postopkom manjšajo, po drugi strani pa na vsakem koraku dobimo število, ki je tudi večratnik števila 3 (zakaj?), in se tako ognemo ostalim črnim luknjam, ki niso večkratniki števila 3.

Trik s kartami

Ta primer je na prvi pogled precej drugačen od prejšnjih, vendar izpolnjuje zahtevi, ki sta značilni za črne luknje. Gre za klasični trik s kartami. Vzemite 21 kart in jih uredite s podobami navzgor v sedem vodoravnih vrst, da dobite tri navpične stolpce. Prosite prijatelja naj si v mislih izbere karto, vendar naj vam ne pove, katero si je izbral. Pove naj le, v katerem stolpcu leži izbrana karta. Stolpce nato zberite v tri kupčke, pri čemer se vrstni red kart posameznega stolpca ne sme zmešati. Kupček kart, ki vsebuje izbrano karto, položite med preostala dva in karte znova razvrstite v sedem vrstic po tri karte. Ponovite proces – vprašajte, v katerem stolpcu je karta, zberite stoplce, postavite stolpec z izbrano karto med ostala dva in razvrstite karte. Nato ponovite proces še enkrat, zadnjič.

Izbrana karta bo od tod naprej vedno v sredini, karta v četrti vrstici v drugem stoplcu. Vsaj dve poti sta, s katerima to lahko dokažete, najlažje pa to storite tako, da si narišete diagram, ki prikazuje, na katerem mestu izbrana karta vsakič konča.

Kaprekarjeva konstanta

Kakorkoli že, v večino črnih lukenj so vpletena števila. Vzemite katero koli štirimestno število, da le nima vseh štirih števk enakih. Preuredite števke izbranega števila tako, da dobite največje in najmanjše število, ki ju iz teh števk lahko sestavite. Potem izračunajte razliko teh dveh števil. Postopek ponovite z razliko, ki ste jo pravkar izračunali.

Začnite na primer s številom 8028. Največje število, ki ga iz njegovih števk lahko sestavite, je 8820, najmanjše pa 0288. Njuna razlika je 8532. Ponovite postopek z 8532 in izračunate razliko: $8532 - 2358 = 6174$. V kakem drugem primeru boste morda potrebovali več korakov, vendar boste vedno v največ sedmih korakih prišli do Kaprekarjeve črne luknje – števila 6174.

Nerešeni problemi

Celo klasični nerešeni matematični problemi imajo opravka s števili, ki so črne luknje, ali pa se za njih domneva da so. Primer je Collatzova domneva. Izvira iz leta 1930 in je še vedno odprto vprašanje.

Proces je takšen: začnite z naravnim številom. Če je liho, ga potrojite in prištejte ena. Če je rezultat sodo število, ali če ste začeli s sodim številom, ga razpolovite. Nato postopek ponavljajte. Če začnete s 5, dobite 16, nato 8, 4, 2 in nazadnje 1, potem pa 4, 2, 1 in spet 4, 2, 1. Vsi poskusi kažejo, da vedno končate v ciklu 4, 2, 1 ne glede na to, s čim začnete – vendar to še nikoli ni bilo z dokazom potrjeno ali ovrženo.

Kakorkoli že, to je cikel z dolžino tri, nas pa zanimajo črne luknje, ki so cikli z dolžino ena. Do takega cikla pridete tako, da začetno število razstavite na prafaktorje. Na primer, $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$. Potem vzamete največji lihi faktor izbranega števila, v tem primeru je to $3 \cdot 7 = 21$. Potrojite ta največji lihi faktor in prištejte 1. Rezultat je začetno število za naslednji korak. Če postopek preizkusite z nekaj števili, boste ugotovili, da vedno pridete do števila 4. Ko pa enkrat pridete do števila 4, pri njem tudi ostanete, kajti največji lihi faktor števila 4 je 1, $3 \cdot 1 + 1$ pa je 4. Kdorkoli dokaže Collatzovo domnevo, bo hkrati dokazal, da je tudi ta varianta črna luknja. Vesel lov na črne luknje!

Po članku Michaela Eckerja v New Scientistu
prevedel in priredil Damjan Osredkar