MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#1

PRESEK LETNIK 47 (2019/2020) ŠTEVILKA 1

PRESEK

→ SEDEŽNI RED V NEKEM GLEDALIŠČU
→ NAREDIMO GALILEJEV TERMOSKOP
→ POIMENUJMO EKSOPLANET
→ GAUSSOVA ELIMINACIJA

ISSN 0351-6652

Revolucija v panogi

Kdaj ste nazadnje plačali zamudnino za film, ki ste si ga ogledali doma? Sploh razumete to vprašanje?

Prve izposoje filmov so potekale tako, da smo si videokasete izposodili v videotekah in jih morali, podobno kot knjige v knjižnicah, v določenem roku vrniti. Tako je bilo, dokler se ni v Združenih državah Amerike (ZDA) pojavilo podjetje, ki je z ukinitvijo zamudnin naredilo pravo revolucijo v panogi. Ideja sama prihaja iz naloge na podiplomskem študiju matematike, z naslovom Kolikšna je nosilnost in kakšna je cena železniškega vagona, ki prevaža videokasete. Rešitev problema je pokazala, da je mogoče kasete poceni dostavljati s pošto in tako odpraviti obiske videotek ter tudi zamudnine, če le ni naenkrat izposojenih preveč kaset. Poštna dostava videokaset je bila v ZDA zelo priljubljena in je dobro delovala, dokler se ni bistveno povečala hitrost interneta.

Danes se skoraj vsi filmi prenašajo sproti in znano podjetje, ki filme predvaja prek spleta, ima milijone naročnikov. Matematika pa je v tem podjetju še naprej izjemnega pomena. Pomemben del modela delovanja podjetja so namreč priporočila in nasveti uporabnikom, ki temeljijo na zbranih ocenah drugih uporabnikov. Ker pa je ocenjenih manj kot odstotek ogledanih filmov, si moramo pri nasvetih pomagati z algoritmi, ki temeljijo na statistiki, teoriji grafov in trigonometriji (slednja da npr. oceno podobnosti in različnosti dveh filmov). Priporočila so tako pomembna, da je podjetje razpisalo nagrado v višini milijon dolarjev za algoritem, ki bi njihov sistem nasvetov izboljšal za vsaj deset odstotkov. Po treh letih se je končno pojavil zmagovalec, in to na prav filmski način: algoritma dveh ekip sta bila skoraj identično učinkovita z 10,6 % izboljšanjem, a je zmagovalna ekipa svoj algoritem poslala 20 minut prej!

Za več informacij si lahko preberete knjigo *The Power of Networks* iz leta 2017, ki sta jo napisala G. Brinton in M. Chiang.

×××

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 47, šolsko leto 2019/2020, številka 1

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2019/2020 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1300 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

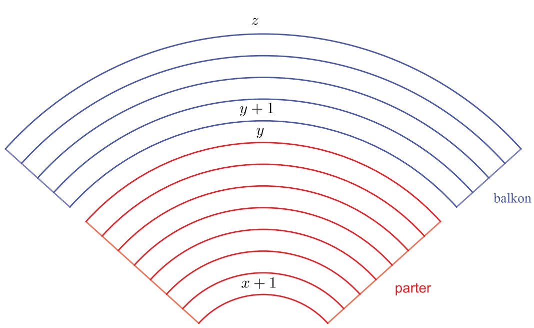
SLIKA NA NASLOVNICI: Nočna svetilka, ki jo obletava roj žuželk. Podrobneje je slika opisana v rubriki naravoslovna fotografija.

Sedežni red v nekem gledališču

Marko Razpet

Neko gledališče ima sedeže razporejene v krožnih lokih v parterju in na balkonu. Krožni loki predstavljajo vrste in so oštevilčene neprekinjeno od 1 naprej, ne glede na to, ali so v parterju ali na balkonu, v vsaki vrsti posebej pa je oštevilčen, tako kot je v navadi, še vsak sedež posebej.

Med počitnicami je direktor gledališča ukazal, naj se sedežni red preuredi tako, da bo v vsaki naslednji vrsti en sedež več, poleg tega pa mora biti število sedežev v parterju in na balkonu enako. Naša naloga je odgovoriti na vprašanje, kdaj in kako je to sploh mogoče.



SLIKA 1.
Parter in balkon v tlorisu

Vzemimo, da je v prvi vrsti parterja $x+1$ sedež, v drugi vrsti parterja $x+2$ sedeža in tako dalje, v zadnji vrsti parterja pa y sedežev. Število vseh sedežev v parterju označimo s P. Prav tako vzemimo, da je v prvi vrsti balkona $y+1$ sedež, v drugi vrsti balkona $y+2$ sedeža in tako dalje, v zadnji vrsti balkona pa z sedežev. Število vseh sedežev na balkonu označimo z B. Pri tem so x, y, z nenegativna cela števila in $x < y < z$. Potemtakem lahko zapišemo:

$$P = (x+1) + (x+2) + \ldots + y,$$
$$B = (y+1) + (y+2) + \ldots + z.$$

V vsoti za število P je $y - x$ zaporednih členov aritmetičnega zaporedja, v vsoti za B pa $z - y$. Vemo pa, kako se sešteje zaporedne člene aritmetičnega zaporedja. Njihova vsota je enaka produktu aritmetične sredine prvega in zadnjega člena s številom členov. V našem primeru dobimo

$$P = \frac{1}{2}(x+y+1)(y-x),$$
$$B = \frac{1}{2}(y+z+1)(z-y).$$

Naša zahteva je $P = B = N$, torej

$$(x+y+1)(y-x) = (y+z+1)(z-y) = 2N.$$

Iz prvega dela te relacije izpeljemo enačbo

$$(y^2 - x^2) + (y - x) = (z^2 - y^2) + (z - y).$$

Pomnožimo jo na obeh straneh s 4 in nato dobljeni rezultat predelamo v

$$(2x+1)^2 + (2z+1)^2 = 2(2y+1)^2.$$

Nato vpeljemo naravna števila

$$X = 2x + 1, \quad Y = 2y + 1, \quad Z = 2z + 1,$$

ki zadoščajo kvadratni diofantski enačbi

$$X^2 + Z^2 = 2Y^2.$$

Pri tem so X, Y, Z liha števila in zanje velja $X < Y < Z$. Z njimi izrazimo

$$x = \frac{1}{2}(X-1), \quad y = \frac{1}{2}(Y-1), \quad z = \frac{1}{2}(Z-1).$$

Ker lahko zapišemo

$$(Z-X)^2 + (Z+X)^2 = 2(X^2+Z^2) = 4Y^2 = (2Y)^2,$$

sestavljajo soda naravna števila $Z - X, Z + X$ in $2Y$ pitagorejsko trojico. To pomeni, da obstajata primitivna pitagorejska trojica (a, b, c), kjer je $a < b$, in naravno število μ, tako da veljajo enačbe

$$Z - X = 2\mu a, \quad Z + X = 2\mu b, \quad 2Y = 2\mu c,$$

iz katerih sledi

$$X = \mu(b-a), \quad Y = \mu c, \quad Z = \mu(a+b),$$

in nazadnje

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\mu(b-a)-1), \\ y &= \frac{1}{2}(\mu c - 1), \\ z &= \frac{1}{2}(\mu(b+a)-1). \end{aligned}$$

Število $2N$ nato brez večjih težav izrazimo takole:

$$\begin{aligned} 2N = (x+y+1)(y-x) &= \frac{1}{4}(Y^2 - X^2) \\ &= \frac{\mu^2}{4}(c^2 - (b-a)^2) = \frac{1}{2}\mu^2 ab. \end{aligned}$$

Nazadnje je pred nami preprosta formula

$$N = \frac{1}{4}\mu^2 ab.$$

Ponovimo (več o tem najdemo na primer v [1, 2]). V primitivni pitagorejski trojici (a, b, c) so števila a, b in c naravna, brez skupnega faktorja, in zanje velja zveza $a^2 + b^2 = c^2$. Trikotnik s stranicami a, b, c je pravokotni, a in b sta njegovi kateti, c pa hipotenuza. Brez škode za splošnost vzamemo, da je $a < b$. Eno od števil a in b je liho, eno sodo, število c pa je vedno liho. Primitivne pitagorejske trojice (a, b, c) generiramo z dvema naravnima številoma m in n s formulami

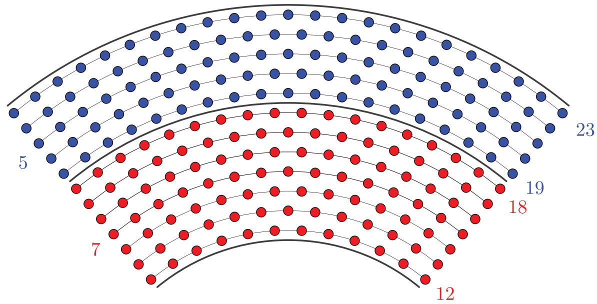
$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2,$$

kjer sta si m in n tuji števili različnih parnosti ter $m > n$. Če se zgodi, da je $a > b$, števili a in b za potrebe naše naloge med seboj zamenjamo. Vsaka pitagorejska trojica je produkt neke primitivne z nekim naravnim številom.

Za neko primitivno pitagorejsko trojico (a, b, c) in naravno število μ morajo biti x, y, z v naši nalogi naravna števila, zato mora biti faktor μ liho število. Za najmanjšo primitivno pitagorejsko trojico $(3, 4, 5)$ dobimo za $\mu = 1$ števila $x = 0, y = 2, z = 3$ in $N = 3$, ki nam dajo zelo majhen sedežni red s šestimi sedeži, tremi v parterju in tremi na balkonu.

μ	a	b	c	x	y	z	N
1	3	4	5	0	2	3	3
1	5	12	13	3	6	8	15
3	3	4	5	1	7	10	27
1	8	15	17	3	8	11	30
1	7	24	25	8	12	15	42
5	3	4	5	2	12	17	75
1	9	40	41	15	20	24	90
1	12	35	37	11	18	23	105
3	5	12	13	10	19	25	135
7	3	4	5	3	17	24	147
1	11	60	61	24	30	35	165
9	3	4	5	4	22	31	243
1	16	63	65	23	32	39	252
3	8	15	17	10	25	34	270

TABELA 1.
Nekaj rešitev naloge



SLIKA 2.
Parter in balkon s skupno $2N = 210$ sedeži

Večjega dobimo z isto trojico za $\mu = 3$, in sicer $x = 1, y = 7, z = 10$ in $N = 27$.

Za pitagorejsko trojico $(12, 35, 37)$ in $\mu = 1$ je $x = 11, y = 18, z = 23$ in $N = 105$. S tem smo našli sedežni red z 210-imi sedeži, 105-imi v parterju in 105-imi na balkonu (slika 2).

Takih zgledov je nešteto. V poštev pride vsaka primitivna pitagorejska trojica (a, b, c) in liho število μ. Nekaj primerov je zbranih v tabeli 1, ki je urejena glede na naraščajoče N in je lahko direktorju gledališča v pomoč pri načrtovanem sedežnem redu.

Naloga. Dokaži, da je število N v naši nalogi vedno deljivo s 3.

Literatura

[1] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA, Ljubljana 1984.

[2] I. Vidav, *Algebra*, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

× × ×

Srečanje

Ivan Lisac

Uvod

Skupina prijateljev živi vzdolž daljše lokalne ceste. Za skupna srečanja želijo izbrati tak kraj x, da bo skupna poraba oz. kar skupna prevožena razdalja čim manjša. Jim lahko pri izbiri tega kraja kako pomagamo?

Srečanje vzdolž premice

Zravnajmo v mislih cesto v premico in opremimo kraje ob tej cesti s koordinatami

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n. \tag{1}$$

Za poljuben realni x lahko izračunamo vsoto

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|, \tag{2}$$

ki nam pove vsoto razdalj točke x od točk a_i.

Primer. Vzemimo

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (2, 4, 7, 8, 13).$$

Potem je npr. $S(5) = 3 + 1 + 2 + 3 + 8 = 17$.

Poskusimo poenostaviti izraz za $S(x)$. Točke $a_1, \ldots, a_n$ nam razdelijo premico na (največ) $n + 1$ intervalov. Od teh sta prvi in zadnji neomejena. Vzemimo k med 1 in $n - 1$ in si oglejmo zožitev $S_k(x)$ funkcije $S(x)$ na interval $[a_k, a_{k+1}]$. Za x na tem intervalu velja $a_k \le x \le a_{k+1}$ in zato (upoštevamo še definicijo absolutne vrednosti)

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \sum_{i=1}^{k} (x - a_i) + \sum_{j=k+1}^{n} (a_j - x) \\ &= (k - (n-k))x - \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{j=k+1}^{n} a_j \\ &= (2k - n)x - S_k + (S_n - S_k) \\ &= (2k - n)x + (S_n - 2S_k), \end{aligned} \tag{3}$$

kjer smo označili še $S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$ in podobno $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Opazimo lahko, da je zožitev $S_k(x)$ pravzaprav linearna funkcija spremenljivke x s koeficientom $(2k - n)$ in stalnim členom $(S_n - 2S_k)$. Zgornja izpeljava velja tudi za oba neomejena intervala in zožitev $S_0(x)$ na intervalu $(-\infty, a_1]$ ter zožitev $S_n(x)$ na intervalu $[a_n, \infty)$.

Funkcija $S(x)$ je torej *odsekoma* linearna. Sosednje zožitve $S_k(x)$ in $S_{k+1}(x)$ imajo v točki a_{k+1} *enako* vrednost, saj je razlika vrednosti enaka

$$\begin{aligned} & S_{k+1}(a_{k+1}) - S_k(a_{k+1}) \\ &= (2(k+1) - n)a_{k+1} + S_n - 2S_{k+1} \\ &\quad - (2k - n)a_{k+1} - S_n + 2S_k \\ &= 2a_{k+1} - 2S_{k+1} + 2S_k = 2a_{k+1} - 2a_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Iz enakosti (3) razberemo tudi, da funkcija $S_k(x)$ pada na intervalu $[a_k, a_{k+1}]$ za $k \le n/2$, saj je tam koeficient $2k - n$ ustrezne linearne funkcije negativen ali pa kvečjemu 0. Podobno $S_k(x)$ narašča na intervalih $[a_k, a_{k+1}]$ za $k \ge n/2$, saj je tam koeficient $2k - n$ pozitiven ali pa enak 0. Meja pa je ravno pri $k = n/2$ (ko je n sodo število).

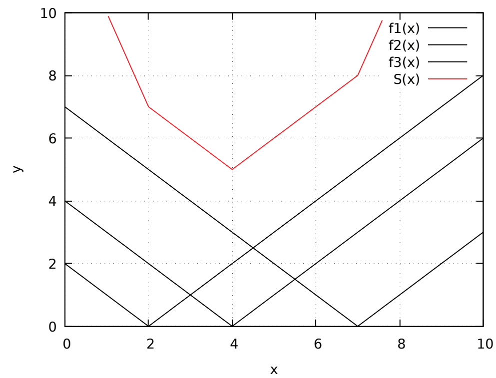
Funkcija $S(x)$ torej na nekaj levih intervalih pada, saj so zožitve $S_k(x)$ tam padajoče *in* nosijo sosednje zožitve v skupni točki *enako* vrednost. Na ostalih desnih intervalih pa funkcija $S(x)$ narašča (podoben razlog). Velja torej:

- Če je n liho število, potem funkcija $S(x)$ doseže minimum v točki $a_{(n+1)/2}$.
- Če je n sodo število, potem funkcija $S(x)$ doseže minimum na intervalu $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$.

Primer take funkcije $S(x) = |x-2|+|x-4|+|x-7|$ kaže slika 1. Na njej je razviden minimum v točki $x = 4$ in $S(4) = 2 + 0 + 3 = 5$. Zanimivo je, da je za lihi n optimalna točka odvisna samo od srednje vrednosti $a_{(n+1)/2}$, nič pa od ostalih vrednosti. Za sodi n pa je optimalna točka poljubna na intervalu med dvema srednjima točkama $[a_{n/2}, a_{n/2+1}]$.

Srečanje prijateljev krajanov

Vzemimo sedaj, da živi v kraju s koordinato a_i kar $p_i \in \mathbb{N}$ prijateljev. Skupaj je torej $p = \sum_{i=1}^{n} p_i$ vseh prijateljev, ki bi se radi srečali. Kako rešimo tak problem? Vzemimo npr. $(a_1, a_2, a_3) = (2, 4, 7)$ in



SLIKA 1.
$S(x) = |x-2| + |x-4| + |x-7|$

$(p_1, p_2, p_3) = (3, 1, 5)$. Problem prevedemo na prejšnjega tako, da prijatelje iz istega kraja navedemo večkrat: za prvi kraj trikrat, za drugi kraj enkrat, za tretji kraj petkrat. Tako dobimo zaporedje $b = (2, 2, 2, 4, 7, 7, 7, 7, 7)$ z rešitvijo $b_5 = 7$ in $S(7) = 3 \times 5 + 1 \times 3 + 5 \times 0 = 18$. Tako vidimo, da kraji z večjim številom prijateljev vlečejo optimalno točko x k sebi.

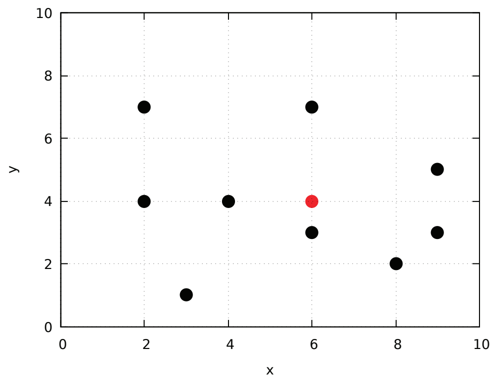
Kam postaviti šolo?

Vzemimo sedaj blokovsko naselje, po katerem se gibljemo zgolj v vodoravni in navpični smeri (slika 2 - tloris). V nekaterih točkah živijo dijaki, ki bodo obiskovali šolo. Kam jo postaviti, da bo skupna vsota razdalj do šole čim manjša? Tu ima vsaka točka dve koordinati, recimo (a_1, b_1). Razdalja do točke (a_2, b_2) je tu definirana kot $|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|$. Pravimo ji tudi *Manhattan metrika*.

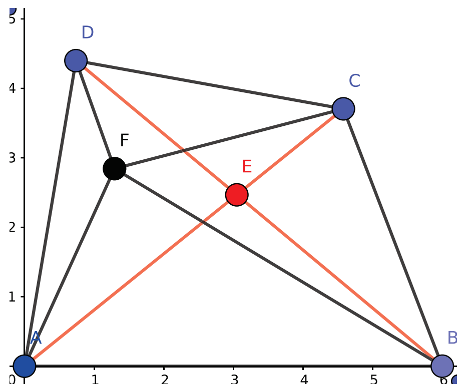
Kako poiščemo optimalno točko sedaj? Funkcija $S(x, y)$ ima sedaj dva argumenta in velja

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} (|x - a_k| + |y - b_k|) = \qquad (4) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |x - a_k| + \sum_{k=1}^{n} |y - b_k| = \\ &= S_a(x) + S_b(y) \end{aligned}$$

kjer smo z $S_a(x)$ in $S_b(y)$ označili ustrezni dve vsoti. Vidimo, da dvorazsežni problem razpade na dva, med seboj neodvisna enorazsežna problema, ki



SLIKA 2.
Šola v blokovskem naselju



SLIKA 3.
Štirje prijatelji

ju že znamo rešiti od prej. Primer na sliki 2 ima devet (črnih) točk, katerih urejene a koordinate tvorijo zaporedje $(2, 2, 3, 4, \mathbf{6}, 6, 8, 9, 9)$, urejene b koordinate pa tvorijo zaporedje $(1, 2, 3, 3, \mathbf{4}, 4, 5, 7, 7)$. Optimalna (rdeča) točka za šolo nosi torej koordinati $(\mathbf{6}, \mathbf{4})$, funkcija $S(6, 4)$ pa ima vrednost $S_a(6) + S_b(4) = 21 + 14 = 35$. Podobno kot prej lahko razširimo problem optimalne točke na kraje, v katerih je po več dijakov hkrati.

Štirje prijatelji

Štirje skavti so se na obsežni ravnini oddaljili drug od drugega. Sedaj se želijo srečati tako, da bo njihova skupna hoja čim krajša. Razdalja je tukaj običajna evklidska razdalja, tj. dolžina zveznice dveh točk, ki jo izračunamo po Pitagorovem izreku. Privzemimo, da njihovi položaji A, B, C in D tvorijo oglišča konveksnega štirikotnika. Naj bo točka E presečišče diagonal AC in BD, F pa poljubna druga točka v notranjosti štirikotnika. Oglejmo si sliko 3.

Ker je točka E presečišče diagonal, gre najkrajša pot od točke A do točke C preko točke E. Poljubna druga pot od točke A preko točke F do točke C je daljša od prve (trikotniška neenakost). Podobno ugotovimo, da je pot od točke B preko točke E do točke D krajša kot pot od točke B preko točke F do točke D. Res je torej E iskana optimalna točka. Natančni bralec lahko premisli robni primer, ko je točka F na eni od diagonal. Primer nekonveksnega štirikotnika tu opustimo.

Trije prijatelji

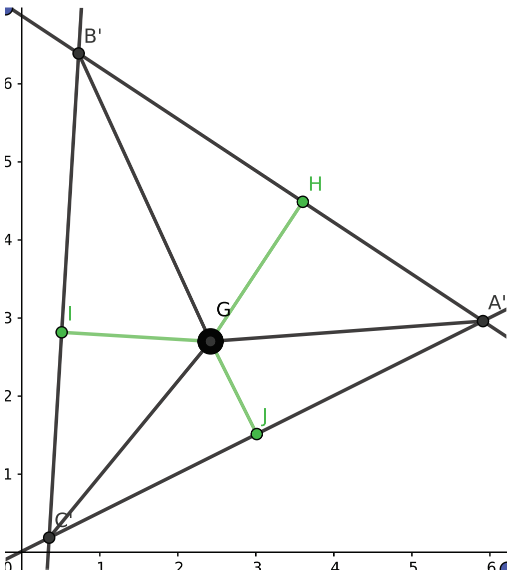
Poglejmo si še primer treh prijateljev. Ta bo težji od predhodnega. Denimo, da so se trije skavti oddaljili drug od drugega v točke A, B in C. Iščemo takšno optimalno točko F, da bo vsota razdalj $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC}$ minimalna. Povejmo vnaprej:

- Iz optimalne točke F vidimo stranice trikotnika $\triangle ABC$ pod koti $120°$.

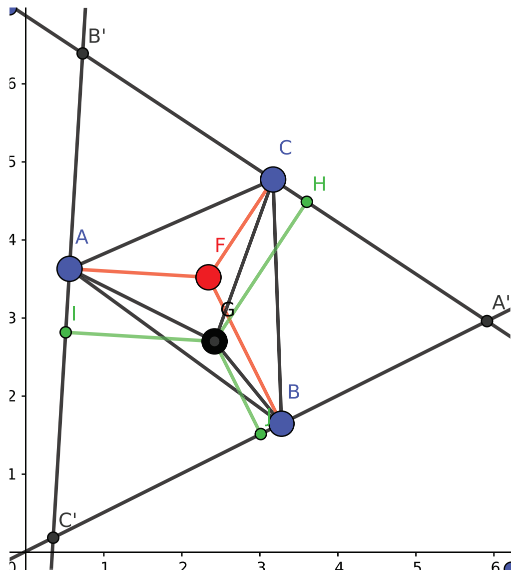
Oglejmo si najprej pomožni Vivianijev izrek. Vzemimo poljuben *enakostranični* trikotnik $\triangle A'B'C'$ in poljubno notranjo točko G.

- Vsota razdalj od točke G do stranic enakostraničnega trikotnika $\triangle A'B'C'$ je neodvisna od izbire točke G.

Res. Točka G porodi tri trikotnike $\triangle A'B'G$, $\triangle B'C'G$ in $\triangle C'A'G$, katerih vsota ploščin je očitno enaka ploščini enakostraničnega trikotnika $\triangle A'B'C'$ (slika 4). Višine teh treh trikotnikov zadoščajo enačbi $av_a + av_b + av_c = 2P$, kjer je a stranica trikotnika $\triangle A'B'C'$, P pa njegova ploščina. Enakost delimo z a ter preberemo: vsota višin je $2P/a$, kar je neodvisno od izbire točke G. Dokazano.



SLIKA 4.
Vivianijev izrek



SLIKA 5.
Fermat-Toricellijeva točka F

Poglejmo sedaj še sliko 5. Na njej je osnovni trikotnik $\triangle ABC$ ter točka F, iz katere že vidimo stranice trikotnika pod koti 120°.

Trikotniku $\triangle ABC$ priredimo pomožni trikotnik $\triangle A'B'C'$ tako, da načrtamo v točkah A, B in C pravokotnice na daljice FA, FB in FC. Presečišča teh pravokotnic med sabo poimenujmo A', B' in C'. Kot pri točki A' je četrti kot v štirikotniku $A'CFB$ in meri $360° - 120° - 2 \times 90° = 60°$. Podobno ugotovimo za kota pri točkah B' in C'. Torej je $\triangle A'B'C'$ *enakostranični* trikotnik.

Opazimo, da so tri rdeče daljice s krajiščem F razdalje do oglišč A, B in C v trikotniku $\triangle ABC$, hkrati pa tudi razdalje do stranic trikotnika $\triangle A'B'C'$. Vzemimo sedaj še poljubno drugo točko G in iz nje potegnimo zelene daljice GH, GI in GJ pravokotno na stranice $A'B'$, $B'C'$ in $C'A'$.

Tri zelene daljice pa so prav tako razdalje do stranic trikotnika $\triangle A'B'C'$, zato po Vivianijevem izreku velja $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} = \overline{GH} + \overline{GI} + \overline{GJ}$. Zelene razdalje $\overline{GH}, \overline{GI}, \overline{GJ}$ pa so krajše od črnih razdalj $\overline{GC}, \overline{GA}, \overline{GB}$, saj je npr. $\overline{GI}$ pravokotna na $B'C'$, $\overline{GA}$ pa ne. Torej je $\overline{FA} + \overline{FB} + \overline{FC} < \overline{GC} + \overline{GA} + \overline{GB}$, pri čemer je bila G poljubna druga notranja točka. Res je torej F optimalna točka. Pravimo ji tudi *Fermat-Toricellijeva* točka.

Opomba. Ta razmislek velja za trikotnike, ki imajo vse kote največ 120°. Ostale primere tudi tu opustimo. Enostavno konstrukcijo točke F in nekaj dodatne analize najde bralec v viru [2].

Literatura

[1] D. R. Davis, *Modern college geometry*, Cambridge, Massachusetts: Addison-Wesley Press, Inc., 1949.

[2] *Fermat point*, dostopno na Wikipedia, `en.wikipedia.org/wiki/Fermat_point`, ogled 24. 7. 2019.

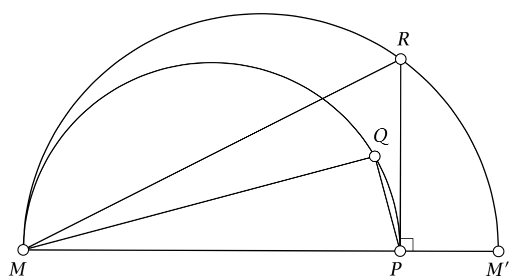
× × ×

Naloga

Aleksander Simonič

→ Ramanujan na 223. strani Druge beležke trdi naslednje (glej sliko 1):

Vzemimo daljico MM' in tako točko R na polkrožnici nad MM', da je $\angle M'MR < \pi/4$. Naj bo P presečišče pravokotnice na MM' v R z daljico MM'. Izberimo točko Q na polkrožnici nad MP, da bo $|PM'| = |PQ|$. Če P deli daljico MM' v razmerju zlatega reza, potem premici MQ in MR sovpadata.



SLIKA 1.

Spomnimo, da P deli daljico MM' v razmerju zlatega reza natanko tedaj, ko je $|MP|/|PM'| = |MM'|/|MP|$.

- Dokaži Ramanujanovo trditev. Dokaži tudi, da se to zgodi natanko tedaj, ko velja $|MP| = |M'R|$.
- Uvedimo oznake $\varphi_1 = \angle M'MQ$, $\varphi_2 = \angle M'MR$ in $\lambda = |MM'|/|MP|$. Dokaži, da je $\sin\varphi_1 = \lambda - 1$ in

$$\sin(2\varphi_2) = \frac{2\sqrt{\lambda-1}}{\lambda}.$$

Ramanujan je ti zvezi uporabil pri ugotovitvi, da je razmerje nihajnih časov nitnih nihal z odmikoma $4\varphi_2$ in $2\varphi_1$ od ravnovesne lege ravno λ.

Rešitev. Pogoj $\angle M'MR < \pi/4$ zagotavlja, da je $|MP| > \frac{1}{2}|MM'|$. To pomeni, da točka Q obstaja. Naj bo D presečišče daljice MR s polkrožnico nad MP. Po Talesovem izreku o obodnih kotih je $\angle MDP = \angle MRM' = \pi/2$, zato sta premici PD in $M'R$ vzporedni, ter $\angle PDR = \angle M'PR$. Sledi $\angle RPD = \angle PRM'$, zato sta trikotnika $\triangle RDP$ in $\triangle M'PR$ podobna. Od tod dobimo $|PR|^2 = |M'R| \cdot |DP|$. Po drugi strani pa nam Evklidov višinski izrek za $\triangle MM'R$ zagotavlja $|PR|^2 = |MP| \cdot |PM'|$. Torej je

$$\frac{|M'R|}{|MP|} = \frac{|PM'|}{|DP|}. \tag{1}$$

Trikotnika $\triangle MPD$ in $\triangle MM'R$ sta tudi podobna, zato $|MM'|/|MP| = |M'R|/|DP|$. Sledi

$$\frac{|MM'|}{|MP|} = \frac{|MP|}{|PM'|}\left(\frac{|PM'|}{|DP|}\right)^2. \tag{2}$$

Torej točka P deli daljico MM' v razmerju zlatega reza natanko tedaj, ko je $|PM'| = |DP|$. Enakost (1) nam tudi pove, da se to zgodi natanko tedaj, ko je $|MP| = |M'R|$. Po konstrukciji točke Q pa se to zgodi natanko tedaj, ko Q in D sovpadata, kar je ekvivalentno trditvi, da premici MQ in MR sovpadata. S tem je Ramanujanova trditev dokazana.

Ker je $|MP|\sin\varphi_1 = |PQ| = |PM'|$ in $|PM'| = |MM'| - |MP|$, imamo $\sin\varphi_1 = \lambda - 1$. Ker pa je še $|MP|\sin\varphi_2 = |DP|$, iz (2) dobimo $\sin^2\varphi_2 = (\lambda-1)/\lambda$. Torej je

$$\sin^2(2\varphi_2) = 4\sin^2\varphi_2\left(1 - \sin^2\varphi_2\right) = \frac{4(\lambda-1)}{\lambda^2}.$$

To pa že dokazuje zahtevano enakost, saj je $2\varphi_2 < \pi$.

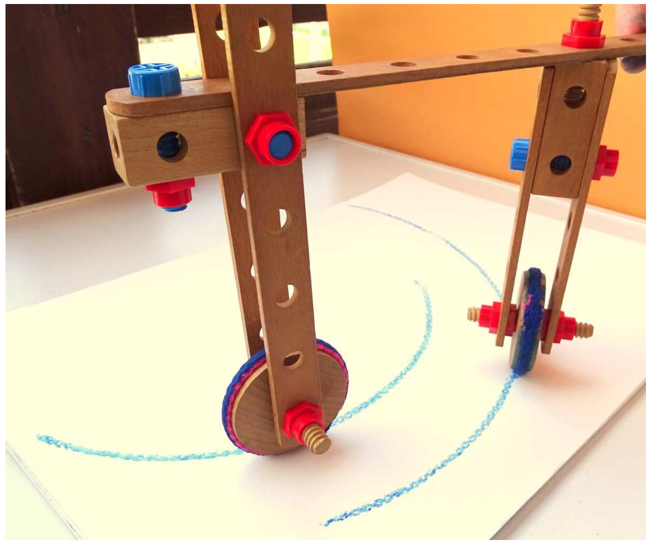
× × ×

Kdaj postane (motorno) kolo dvosledno vozilo

Ferdinand Grešovnik

Ko s kolesom z mokrega dela kolesarske steze zapeljemo na suhi del, se za njim pojavi sled. Navadno se sledi sprednjega in zadnjega kolesa vsaj delno, če ne v celoti prekrivata, če vozimo naravnost. Kaj pa, če zapeljemo v ovinek? Takrat imamo krmilo zasukano za kot ϕ; sledi sprednjega in zadnjega kolesa se ne prekrivata. Poglejmo, pri kolikšnem najmanjšem kotu zasuka se sledi ločita.

Najprej naredimo poskus z modelom kolesa. Kolesi smo namazali s tempera barvico, krmilo zasukali za kot ϕ in se zapeljali po svetlem papirju. Kolesi sta na papirju pustili sledi (slika 1). Če je zasuk krmila ves čas enak, sta sledi koncentrična krožna loka.



SLIKA 1.
Naredili smo model kolesa. Krmilo smo zasukali za kot ϕ in ga držali ves čas v isti legi. Sprednje in zadnje kolo naredita sledi, ki sta koncentrična krožna loka.

Zasuk krmila je konstanten

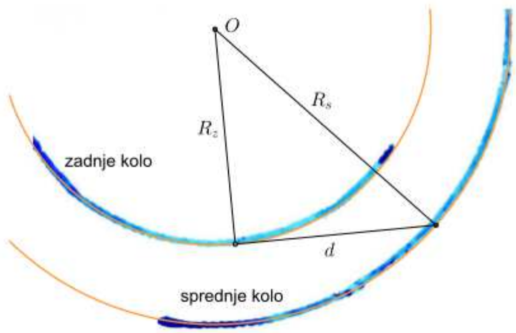
Obravnavajmo primer, ko je zasuk krmila konstanten in kolesi ne drsita. Papir s sledjo smo fotografirali in fotografijo vstavili na risalno površino programa GeoGebra. Na fotografirani sledi smo poiskali tri točke in narisali krožnico. Potem smo poiskali središče te krožnice in narisali še krožnico skozi izbrano točko na drugi sledi. Krožnici se lepo ujemata s sledema (slika 2). Po sledeh lahko tudi sklepamo, v kateri smeri se je premikalo kolo. Ker se sled zadnjega kolesa začne prej kot sprednjega, vemo, da se je kolo gibalo v nasprotni smeri urinega kazalca, torej v pozitivni smeri.

Narišimo še skico (slika 3). Točko dotika zadnjega kolesa s podlago označimo z Z, sprednjega pa z S. Koordinatno izhodišče je v točki O. Vzemimo, da imata sprednje in zadnje kolo enaka polmera in da je medosna razdalja med kolesoma konstantna, označimo jo z d. Če kolesi nista enako veliki, vzamemo za d projekcijo daljice, ki povezuje osi koles na vodoravnico. Smer sprednjega kolesa je označena s kotom α, smer zadnjega pa s kotom β, merjeno glede na os x.

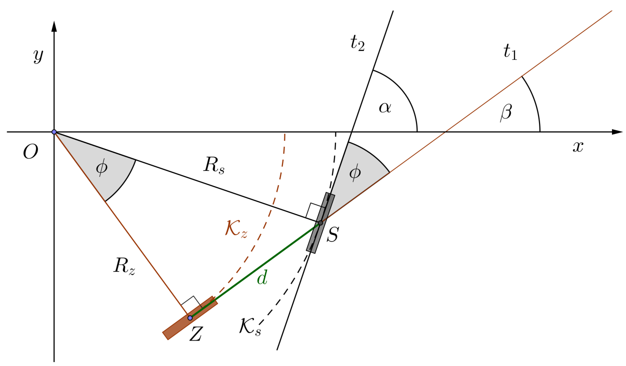
Če se stična točka prednjega kolesa S giblje po krožnici in je zasuk krmila, to je kot ϕ, stalen, se ohranja tudi kot med sprednjim in zadnjim kolesom. Ker se S giblje po krožnici $\mathcal{K}_s$, se tudi zadnje kolo giblje po krožnici, ki ima manjši polmer, to je po $\mathcal{K}_z$. Trikotnik OZS je pravokotni trikotnik s pravim kotom v Z, hipotenuza je polmer kroga $\mathcal{K}_s$, to je R_s, kateti pa polmer krožnice, po kateri se giblje zadnje kolo, to je R_z, in medosna razdalja med kolesi, to je d.

Iz slike razberemo, da velja

$$R_s = \frac{d}{\sin\phi} \qquad R_z = \frac{d}{\tan\phi}.$$



SLIKA 2.
Na sledi zadnjega kolesa smo izbrali tri točke in narisali krožnico. Potem smo na drugi sledi izbrali točko in narisali koncentrično krožnico. Krožnici se lepo ujemata s sledema.



SLIKA 3.
Stična točka sprednjega kolesa je S, zadnjega pa Z. Krmilo zasukamo za kot ϕ. Sprednje kolo se giblje po krožnici $\mathcal{K}_s$, zadnje pa po krožnici $\mathcal{K}_z$.

V obeh izrazih zasledimo povezavo med medosno razdaljo d in kotom zasuka krmila ϕ, kar pomeni, da je medosna razdalja zelo pomembna pri obvladovanju ostrih zavojev, ko je ϕ velik in sta radija krožnic majhna. Zato je zaradi varnosti kot ϕ pri motornih kolesih omejen na kot, ki je precej manjši od 90°. Pri kolesu sicer krmilo lahko zasukamo tudi za več kot pravi kot, ampak bolje je, da tega ne poskušate, če niste zelo spretni, pa še to raje ne delajte med vožnjo.

In kdaj sta sledi ločeni? Polmera krožnic se morata razlikovati vsaj za polovično vsoto skupne sledi koles. Naj bo debelina sledi sprednjega kolesa d_s, zadnjega pa d_z, potem mora veljati

- $$R_s - R_z > \frac{d_s + d_z}{2}.$$

Razliko polmerov izrazimo s kotom ϕ in dobimo

- $$R_s - R_z = \frac{d}{\sin\phi} - \frac{d\cos\phi}{\sin\phi} = \frac{d(1-\cos\phi)}{\sin\phi}.$$

Če upoštevamo še povezave med celimi in polovičnimi koti, je

- $$R_s - R_z = \frac{2d\sin^2(\frac{\phi}{2})}{2\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}} = d\tan\frac{\phi}{2}$$

in končno

- $$d\tan\frac{\phi}{2} > \frac{d_s + d_z}{2}.$$

O ločenosti sledi torej odločata kot zasuka in medosna razdalja koles.

Za konec smo se poigrali še s cikcakasto vožnjo. Da smo ločili sledi sprednjega in zadnjega kolesa, smo zadnje kolo obarvali z rdečo tempera. Sledi sta na sliki 4.

SLIKA 4.
Zasuk krmila smo med vožnjo po papirju spreminjali. Sled zadnjega kolesa je rdečkasta, sled sprednjega pa modra.

Pri vožnji s kolesom pa le poglejte, kakšni sledi puščata kolesi. In seveda vozite z ustrezno opremljenim kolesom, čelado in po pameti!

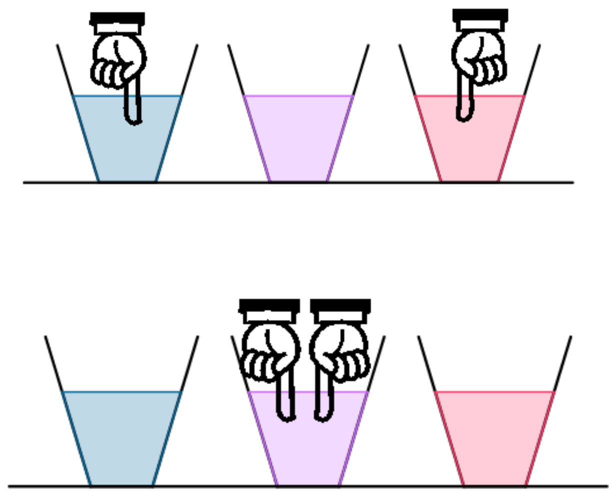
× × ×

Naredimo Galilejev termoskop

Nada Razpet

→ **Danes imamo na voljo digitalne, infra rdeče in alkoholne termometre. Z njimi si merimo telesno temperaturo, preverjamo temperaturo pri pečenju in serviranju hrane ali pa ugotavljamo, kolikšno temperaturo imamo v stanovanju ali zunaj njega. Včasih pa ni bilo tako (glej [1]), saj ljudje niso imeli na voljo ustreznih merilnikov temperature in so se morali zanašati na občutke.**

Spomnimo se poskusa, ko v tri kozarce nalijemo hladno, mlačno in toplo vodo (slika 1). Temperature vode v kozarcih so po vrsti $T_1 < T_2 < T_3$. Temperatura tople vode ne sme presegati 40 °C, saj bi občutljive osebe pri poskušanju lahko dobile opekline. Najprej kazalec ene roke pomočimo v hladno, kazalec druge roke pa v toplo vodo in počakamo kakšno minuto. Nato oba kazalca hkrati pomočimo v kozarec z mlačno vodo. S kazalcem, ki je bil prej v topli vodi, občutimo, da je voda hladna, s kazalcem, ki je bil v hladni vodi pa, da je topla. Ampak oba kazalca sta vendar v istem kozarcu in merita isto temperaturo. Zakaj ne občutimo enako?



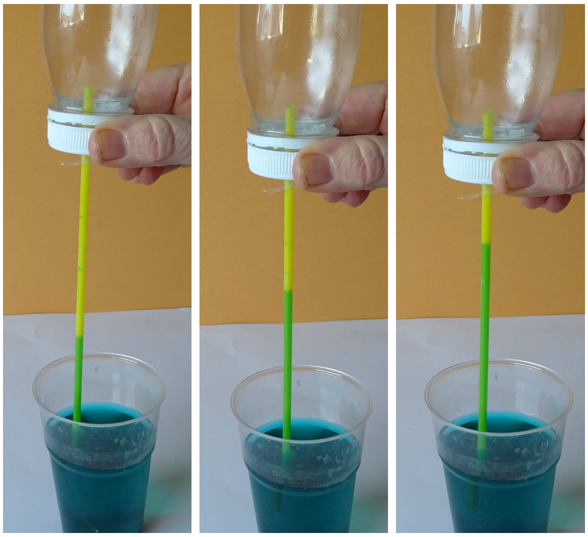
SLIKA 1.
Temperature vode v kozarcih so po vrsti z leve na desno $T_1 < T_2 < T_3$. Najprej pomočimo kazalca v hladno in toplo vodo, nato pa oba v mlačno vodo.

Naši občutki so odvisni od temperature okolice, v kateri smo imeli kazalce pred zadnjim merjenjem. S prsti torej ne moremo objektivno meriti temperature tekočin, pa še v vsako tekočino ne smemo pomakati rok.

Med prvimi, ki so poskušali narediti pripomoček za merjenje temperature, je bil Galileo Galilei (1564–1642). Ta je okoli leta 1592 naredil termoskop. To je bila steklena okrogla posoda z dolgo cevko. Z roko je stekleno posodo segrel in cevko potopil v posodo z vodo. Ko se je zrak v okrogli stekleni posodi in cevki ohlajal, se je po cevki voda dvigala. Čim večja je bila razlika med prej segretim zrakom v stekleni krogli in seveda tudi v cevki, ter okolico, tem višje se je dvignila voda. Zdaj je lahko Galileo primerjal temperaturi dveh snovi in ni bil več odvisen od občutkov. Pripomnimo še, da se lahko voda v cevki dviga ali spušča tudi zaradi spreminjanja zračnega tlaka v prostoru, kjer merimo temperaturo.

Beseda termoskop (termo-skop) izhaja iz dveh grških besed: ϑερμός, kar pomeni vroč, topel, in iz σκοπέω, kar pomeni gledam, opazujem.

Na začetku termoskop ni imel merilne skale, dodal mu jo je kasneje zdravnik Santorio Santorini (1561–1636). Nekateri celo menijo, da je Santorini izdelal prvi termoskop. Kako določimo skalo? Za določanje skale je potrebno določiti temperaturi dveh stanj. Včasih so za eno izmed njih vzeli normalno telesno



SLIKA 2.
Zrak v posodi in cevki se ohlaja, stolpec vode se dviga.

temperaturo, to je okoli 37 °C, za drugo pa ledišče ali vrelišče vode. Potem so vmesno razdaljo razdelili na enake dele. Vsak proizvajalec je stanji in število razdelitev določil po svoje, zato so bile skale različne.

Naredimo termoskop

Preprostega termoskopa ni težko narediti. Vzamemo manjšo plastenko, v pokrovčku naredimo luknjo in vanjo vtaknemo slamico. Morebitne reže zapremo s silikonom ali kakšnim tekočim lepilom. Mi smo uporabili kar lepilo UHU. Plastenko segrejemo z roko in cevko potopimo v kozarec z vodo. Vodo smo zaradi boljše vidljivosti obarvali (glej sliko 2). Plastenko nato držimo za pokrovček, da ne segrevamo ali ohlajamo zraka v plastenki in cevki, ter opazujemo, kako se voda dviga in na kateri višini se dviganje ustavi. Če imamo na voljo še infrardeči termometer, lahko spremljamo spreminjanje odvisnosti višine vode v slamici od temperature zraka v plastenki in cevki. Če plastenko ne segrevamo z roko, ampak nad radiatorjem, hitro opazimo, da je navadna slamica za pitje sokov prekratka; takrat je treba vzeti daljšo cevko. Tudi če je prostor zelo hladen, navadna slamica ni dovolj dolga. Ko plastenko in posodo z vodo prenesemo v drug prostor, se stolpec vode dvigne, če je prostor hladnejši, in spusti, če je prostor toplejši. Zakaj? Če je prostor toplejši, se zrak v plastenki segreva, tlak zraka narašča in poriva stolpec vode navzdol, če pa je hladnejši, tlak v plastenki pada in vodni stolpec se dviga. Pri alkoholnih termometrih je drugače. Tam je alkohol v zaprti cevki. Nad alkoholnim stolpcem je zelo nizek tlak, skoraj vakuum, in alkoholni stolpec se dviga ali spušča zaradi raztezanja ali krčenja pri segrevanju ali ohlajanju. Tudi steklena cevka, v kateri je alkohol, se krči ali razteza, vendar je ta raztezek/skrček majhen v primerjavi z raztezkom/skrčkom alkohola. Stolpec alkohola v cevki se torej dvigne, če je temperatura prostora višja, in spusti, če je temperatura prostora nižja. Za boljšo vidljivost je navadno alkohol obarvan rdeče. Pri alkoholnem termometru je dvig stolpca povezan z višjo temperaturo, pri termoskopu pa z nižjo temperaturo, lahko bi rekli, da ima termoskop negativno skalo.

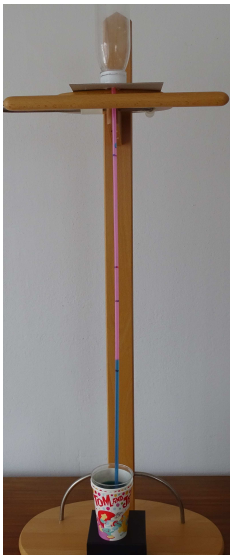
Določimo skalo termoskopa

Po nekaj začetnih meritvah smo hitro ugotovili, da mora biti temperatura vode v kozarcu ves čas meritev približno enaka. Zato smo kozarec izolirali z dvojnim papirnatim kozarcem in nanj postavili pokrovček. Prav tako mora biti tudi višina potopljenega dela cevke ves čas enaka, saj se z globino tlak veča, zato smo plastenko s cevjo in kozarcem pritrdili na stojalo, kot kaže slika 3.

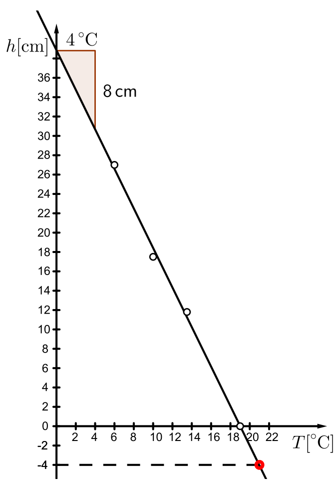
Določanje skale

Najprej smo plastenko segreli z roko, jo postavili v stojalo tako, da je bila cev skoraj do dna potopljena v kozarec z vodo. Ko se je vodni stolpec ustalil, smo označili nivo vode. Temperatura v prostoru je bila 19 °C. To je bila naša začetna točka. Nato smo termoskop s stojalom prenesli na stopnišče, v neogrevano sobo in na balkon. Temperature in višino stolpca smo zapisali v preglednico in narisali graf odvisnosti višine vodnega stolpca od temperature zraka v prostoru.

T[°C]	19	13,5	10	6
h[cm]	0	11,8	17,5	27

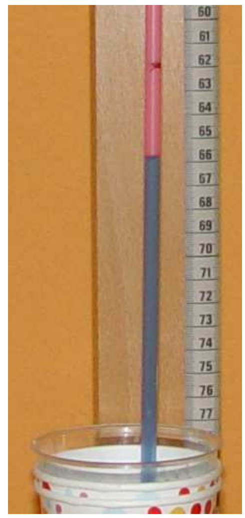


SLIKA 3.
Plastenko s cevjo smo obesili na stojalo in cev potopili v kozarec z obarvano vodo. Tudi kozarec smo pritrdili na podstavek stojala.



SLIKA 4.
Graf odvisnosti višine vodnega stolpca od temperature zraka. Rdeča točka je meritev po prenosu termoskopa v prostor s temperaturo 21 °C.

Ker smo graf risali z GeoGebro, je program sam narisal premico, ki se najbolj prilega meritvam. Iz grafa na sliki 4 razberemo, da se pri razliki temperatur za 4 °C vodni stolpec dvigne ali spusti za 8 cm, odvisno, ali se temperatura zniža ali zviša. Višina stolpca se torej spremeni za 2 cm, če se temperatura spremeni za 1 °C. Za kontrolo smo po meritvi na balkonu termoskop prenesli v sobo, kjer je bila temperatura 21 °C. Zadnja meritev je prikazana na sliki 5. Stolpec vode se je ustalil 4 cm niže kot pri začetnem merjenju pri 19 °C. Torej je skala dobro umerjena. Termoskop je po določitvi skale postal termometer.



SLIKA 5.
Višina vodnega stolpca pri 21 °C se je znižala za 4 cm glede na višino pri 19 °C, ki jo kaže rdeča črtica na cevki.

Termoskopa ne smemo dolgo zadrževati na mestih, kjer so nizke temperature, saj se lahko voda v kozarcu kljub izolaciji preveč ohladi, tlak v plastenki se močno zniža in plastenka se začne deformirati. Takrat se sliši pok in stolpec vode se hitro zniža.

V dobi digitalne tehnike je dobro vedeti, kako so osnovne merilne težave premagovali nekdaj. Pri ponovitvah starih poskusov pa si pridobimo tudi nekaj eksperimentalnih izkušenj. Uspešno merjenje vam želimo.

Literatura

[1] J. Strnad, *O merjenju temperature in termometrih: Iz zgodovine fizike*, Presek **11** (1983/1984), 1, 34–39.

× × ×

Nagradna križanka

SISTEM ZNAKOV, KI OMOGOČA SLEPIM BRANJE IN PISANJE
MAŠA ZADUŠNICA
ADAMOVA ŽENA
ŠPANSKI BAROČNI SLIKAR IN GRAFIK (JUSEPE DE)
SLIKARSKA GALERIJA V MILANU
5
LOVSKI ALI RUDARSKI OKOLIŠ
EDINO JORDANSKO PRISTANIŠČE
GLASBENIK JOHN
NEKD ŠVED. TENISAČ (STEFAN)
IVAN VIDAV
NEMŠKA VESLAČICA (JULIJA)
3
ENOTA ZA DOZO SEVANJA
JURČEK
AVTOBUSNA POSTAJA
PLENJENJE DIVJADI
STARO JORUBSKO MESTO V NIGERIJI
VEDA O PRAVILNEM SKLEPANJU
POKOJNI RAČUNALNIKAR ZAKRAJŠEK
ENAKOSTR. ŠTIRIKOTNIK
AMERIŠKA BOŽIČNA PESEM
NEMŠKI SKLADAT. (WERNER)
MESTO V ŠPANIJI
NEVARNA AFRIŠKA MRZLICA
NAVIDEZNI PREMIK OPAZOVANEGA OBJEKTA ZARADI SPREMEMBE POLOŽAJA OPAZOVALCA
DEŽEMER, KI BELEŽI KOLIČINO PADAVIN
GRAND PRIX (VELIKA NAGRADA)
PODROČJE MATEMATIKE
GLAS KONJA
BRITANSKA PEVKA ORA
SLAVILNA PESEM
OBRED SLOVESA OD POKOJNIKA
2
TIRNO VOZILO, DEL VLAKA
6
VSEBINSKO ZAKLJUČEN DEL PROZNEGA DELA
SIVI PINOT
OPLOV ELEKTRIČNI AVTOMOBIL
RIMSKA BOGINJA, ŽENA BOGA SATURNA
LJUBLJANSKO POKOPALIŠČE
IGRALKA BERGMAN
ITALIJAN. DIRIGENT (ALBERTO)
DLAKE POD NOSOM
MANJŠANJE OBSEGA ALI DOLŽINE
RUBIDIJ
PRODUKT
TELESNA VAJA ZA ZBRANOST PRI JOGI
GLAVNO MESTO ZAMBIJE
LUTECIJ
7
FRANCOSKI ASTRONOM, FIZIK IN MATEMATIK (DOMINIQUE)
VZPOREDNICA
FRANCOSKA IGRALKA (SABINE)
STOPNJA SORODSTVA
HUMORISTKA PUTRIH
ORJAŠKI SEVERNI JELEN
NAŠ NEKD. KANUIST (SREČKO)
IGRALEC BOGARDE
13
NAŠ POKOJ. NOGOMETAŠ (ZORAN)
MENIČNO JAMSTVO
NAŠ NEKD. NOGOMETAŠ (MILENKO)
VEDA
KRIŽIŠČE KARAVANSKIH POTI V OSRED. NIGRU
17
RUSJANOVO LETALO
IZBOČINA IN VBOČINA NA VODI
ISTOVETENJE
GLASBENIK (KAREL) SOSS
OMEJEVANJE PRAVIC ALI SVOBOŠČIN
PISATELJ FLISAR
ASTRONOMICAL JOURNAL
INDIJSKI ŠAHIST (VIŠVANATAN)
TANTAL
ESTONSKI OTOK, ČETRTI NAJVEČJI V BALTIKU
4
ŠPORTNIK TEKAČ, SKAKALEC ALI METALEC
VELIK MEHIŠKI POLOTOK
ATRIJSKA FIBRILACIJA
OSREDNJA FIGURA PRI ŠAHU
HRIB NAD SEVNICO
UMETNI PREHOD ZA DIVJAD PREK AVTOCESTE

ZNAMKA MOTORNIH OLJ | AVTOR MARKO BOKALIČ | NAŠA NESTRUPENA KAČA | NAŠA IGRALKA (NINA) | MAKEDON. PLES V OBLIKI KOLA | ČAS OMEJITVE UŽIVANJA HRANE | SPLETNA DOMENA SLOVAŠKE | SEVERNOAMERIŠKI INDIJANEC | VELIK MORSKI RAK | OČE

PREISKAVA TKIVA, VZETEGA IZ ŽIVEGA TELESA

1

POLITIK ALI URADNIK TELESA EVROPSKE UNIJE

AZIJSKA DRŽAVA

SLOVENSKA PARTIZANSKA KAPA

ČEBELI PODOBNA ŽUŽELKA

ANTIČNI OGLEJ

RITMIČNA ENOTA

NEMŠKI OPTIK (CARL)

PRIPRAVA ZA SEJANJE

ČIL. REŽISER (RAUL)

HERCEGOV. GORA NAD TREBINJEM

ANTIČNO IME GRŠKEGA OTOKA KEA

14

NOTRANJI IMPULZ, GIBALO

LITRSKA STEKLENICA

POKOJNI PEVEC ROBIČ | LJUDSTVO V SREDNJI AZIJI | PIVO STARIH SLOVANOV | IZLOČANJE SEČA, URINIRANJE | NAJVIŠJI NORDIJSKI BOGOVI | NIZOZEMSKI FIZIK NOBELOVEC, KI JE RAZVIL FAZNI MIKROSKOP (FRITS)

11

GLAVNI PRITOK BALHAŠK. JEZERA V KAZAHST.

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ

PISARNIŠKI DELAVEC (SLABŠAL.)

FR. FIZIK (FELIX)

9

NAŠA PEVKA (EVA)

REKA V SZ. ŠPANIJI

ENAKA SAMOGLASNIKA

16

DRUŽBENI RED

SRBSKI IGRALEC (ZORAN)

JUDOVSKA KRALJICA

SLABŠALNI NAZIV ZA AMERIČANA

AZIJSKI VELETOK

PREDSTOJNIK SAMOSTANA

NEKD. MAK. DRŽAVNIK GLIGOROV

KOŠARKAR MURIĆ

8

ČLOVEK TEMNE POLTI

NIK ŠKRLEC

MOČNO SINTETIČNO MAMILO

JELEN S ŠTIRIMI ODRASTKI NA VSAKEM ROGU

OPEČEN OBLOŽENI KRUHEK

STAROGRŠKI MATEMATIK

15

LJUBITELJ MIRNEGA, HARMONIČNEGA ŽIVLJENJA

POZITIVNA ELEKTRODA

UVAJALEC DAJNČICE (PETER)

KROŽNA AFRIŠKA VAS

SLADKOR V RNK

12

KRAJ V GORIŠKIH BRDIH

TEKSTILNI IZDELEK

10

GRŠKA ČRKA

SREDIŠČE BENEŠKIH SLOVENCEV

AMERIŠKI REŽISER (MARTIN)

NAČIN SPOJITVE

OLIMPIJSKE IGRE

NAŠ TENISAČ BEDENE

JEMENSKO PRISTANIŠČE

OTROŠKI MEDVEDEK

REDKA KRVNA SKUPINA

PLIN ACETILEN

MLADENIČ SVOBODNEGA RODU PRI STARIH GRKIH

19

AVSTRIJ. IGRALKA (MARISA)

OBČINA PRI LJUBLJANI

18

RAZKRITJE NEZNANEGA

PRISLOV KRAJA

20

ŽIVALSKI KROG

NEKDANJA DO RAMEN SEGAJOČA SLOVESNA LASULJA

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra 2019**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

Magneti 1

Mojca Čepič

Prejšnji teden sem v trgovini naletela na magnete, na takšne, lepe, majhne, primerne in verjetno tudi namenjene za izdelavo okraskov za na hladilnik, samozapirajočih se škatel in še česa podobnega.

Neodimski magneti, ki jih na sliki 1 vidite pritrjene na kovinski ploščici, so precej »močni«. Dva magnetka se na razdalji debeline prsta še vedno dovolj privlačita, da magnet na spodnji strani prsta ostane »prilepljen« nanj (slika 2). Zato je treba še posebej paziti nanje v prisotnosti majhnih otrok – nikakor jih ne smejo pojesti. Če otrok poje en sam magnet, ga bo brez posebnih problemov izločil. A če poje dva, in to ne ravno hkrati, da bi se že v želodcu sprijela, lahko v črevesju pride do hudih težav, ki jih je mogoče rešiti le z operacijo. Majhnih otrok enostavno ne pustite v bližino neodimskih magnetov!

Neodimski magneti so tudi krhki, zato je treba z njimi postopati pazljivo. Posebej ob udarcih se lahko zlomijo ali obkrušijo, a tudi okruški so še vedno precej »močni« magneti, ki jih je treba čimprej odstraniti. Najbolje jih je skriti v pločevinko z dovolj primesmi železa, da ta privlači magnete in se okruški prilepijo nanjo.

Spomnimo se na nekaj lastnosti magnetov.

Ljudje pogosto mislijo, da magneti privlačijo vse kovine, a še tako močan magnet ne bo s tal dvignil zlatega, srebrnega ali aluminijastega prstana. Ne glede na takšne izkušnje pa v fiziki vemo, da imajo vse snovi magnetne lastnosti. Ene snovi magneti privlačijo, druge odbijajo, a te interakcije so tako šibke, da jih v vsakdanjem življenju ne moremo opaziti, razen pri feromagnetnih snoveh. Tem snovem se v bližini magnetov, kjer je magnetno polje, spremenijo lastnosti tako, da jih magneti privlačijo. Najbolj znana takšna snov je železo.

Kadar magnetnega polja ni, se predmeti iz teh snovi obnašajo enako kot drugi predmeti. Dve železni sponki za papir se sami od sebe ne privlačita.

Magneti so narejeni iz feromagnetnih snovi. Če predmet iz feromagnetne snovi postavimo v magnetno polje, se struktura na ravni atomov, kemiki ji pravijo »submikroskopska« struktura, tako spremeni, da se predmet začne obnašati kot magnet. Kaj to pomeni? Magneti imajo vedno dva pola, severnega in južnega. Enaki poli se med seboj odbijajo, nasprotni privlačijo. Okoli magnetov je magnetno polje. Magnetno polje je vedno usmerjeno proč od severnega pola magneta ter proti južnemu polu istega ali drugih magnetov v bližini. V učbenikih in na spletu lahko najdete ponazoritve magnetnega polja različnih magnetov. Če se le lahko, se magnet v

SLIKA 1.
Neodimski magneti, kot jih najdemo v trgovini za izdelavo različnih okraskov in podobnega.

SLIKA 2.
Magneta se skozi prst dovolj privlačita, da ne padeta z njega.

magnetnem polju zasuče s severnim polom v smeri magnetnega polja. Z neodimskimi magneti iz zbirke na sliki 1 raziščimo njihovo obnašanje.

Potrebščine:

- štiri neodimski magneti (iz zbirke na sliki 1),
- digitalna kuhinjska tehtnica (slika 3),
- selotejp,
- sukanec,
- ravnilo ali trikotnik, že želite tudi meriti,
- alkoholni flomaster, če želite magnete tudi označevati.

Najprej ugotovimo, kje sta pola magnetov.

Postavite dva magneta na razdaljo 10 cm plosko na mizo. Če želite razdalje, kjer postane dogajanje zanimivo, tudi meriti, postavite ob magneta še ravnilo. Na magneta pritisnite s kazalcema. Enega od magnetov počasi potiskajte proti drugemu. Kaj se zgodi? Nato magnet, ki ste ga premikali, postavite na izhodiščno mesto, obrnite ga za 180° tako, da je stran, ki je bila prej obrnjena proti vam, sedaj obrnjena proti mizi, in poskus ponovite. Kaj se zgodi tokrat? Kako se rezultata poskusov razlikujeta?

Sedaj postavite na vsakega od magnetov še en magnet tako, da se magneta sprimeta in nastane trden nizek stolpec iz dveh magnetov. Ponovite prejšnja poskusa. Kako se rezultati poskusov razlikujejo? V čem so si enaki?

Ali lahko iz teh poskusov sklepate, da sta pola na robovih med magnetoma vedno enaka ali nasprotna? Kako bi svoj sklep preverili?

Raziskujmo dalje. Na narobe obrnjeno stekleno čašo z ravnim dnom položite stolpič iz dveh magnetov, kot kaže slika 4a. Iz bližine čaše odstranite vse magnete, ki jih pri poskusu ne potrebujete. Premaknite jih vsaj pol metra proč. Se je z magnetoma kaj zgodilo, ko ste ju spustili? Počasi sučite čašo okoli navpične osi. Kaj se dogaja s stolpičem? Ali vam ta poskus omogoča določiti pola magnetnega stolpiča? Kako? Kaj še morate poznati, da lahko določite pola?

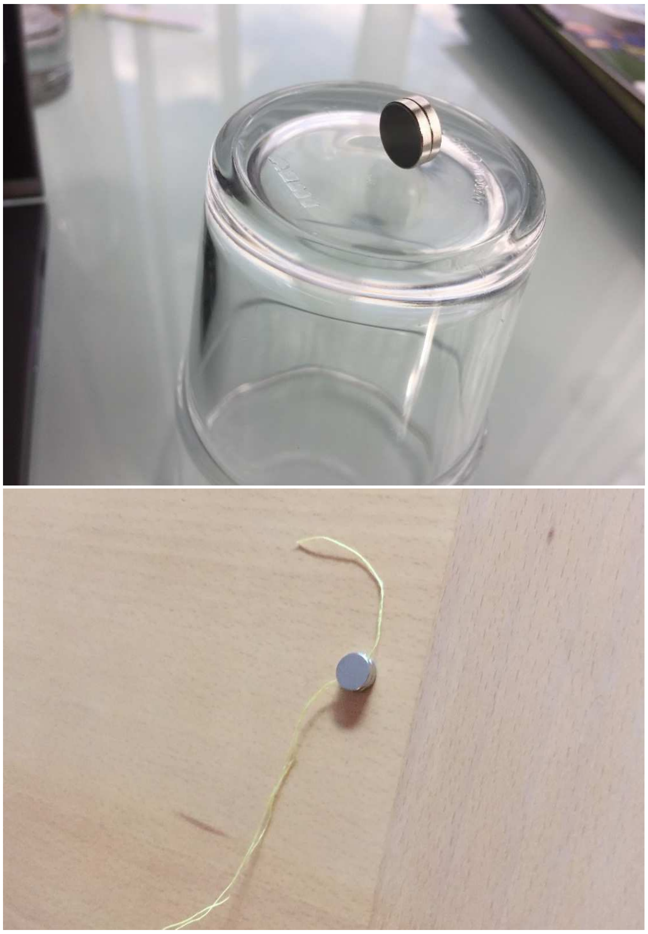
Če nimate čaše z ravnim dnom, lahko uporabite keramični krožnik ali drugo gladko podlago. Lahko pa magneta tudi obesite na sukanec, kot kaže slika 4b.

Nazadnje naredimo še naslednja poskusa. Na kuhinjsko tehtnico postavimo plosko en magnet, kot je postavljen magnet na sliki 3. Če tehnica ni iz feromagnetne snovi, se magnet nanjo ne bo pritrdil. Tedaj ga pritrdite s selotejpom. A običajno so površine tehtnic feromagnetne. Taro postavite na 0 g. Če poskusite odtrgati magnet, tehtnica pokaže negativen rezultat. Če z roko pritisnete na magnet, tehtnica pokaže silo roke, izraženo v gramih. Tehtnica namreč vedno meri sile, s katerimi je obremenjena plošča. Gramska utež pritiska na ploščo tehntnice s silo 0,01 N.

SLIKA 3.
Kuhinjska tehtnica, ki meri na gram natančno.

Sedaj lahko merite sile med dvema magnetoma ter njihovo odvisnost od razdalje med njima. V roko vzemite drug magnet in ga zasučite tako, da sta ploskvi magnetov vzporedni. Počasi ga približujte tehtnici in opazujte, kaj tehtnica kaže. Nato magnet zasučite za 180° okoli vodoravnice in poskus ponovite. Poskusa lahko ponovite tudi z dvojicama magnetov ali z enim magnetom na tehtnici in z dvojico v roki in obratno.

Kakšen je predznak »mase« na tehtnici, če se magneta privlačita? Kakšen, če se odbijata? Kako se spreminja sila v odvisnosti od oddaljenosti med magnetoma? V odvisnosti od števila magnetov?



SLIKA 4.
Zgoraj: Magneta na steklu obrnjenega kozarca. Spodaj: Magnetno nihalo – med magneta je napeljan sukanec. Če magnet pustimo viseti na 10 cm do 20 cm dolgem sukancu, se obnaša podobno kot magnet na kozarcu.

V naslednjih poizkuševalnicah bomo o magnetih spoznali še marsikaj.

Navdih za predloge poskusov v tem prispevku so bile delavnice, ki jih je na Pedagoški fakulteti v letih 2017 in 2018 in na konferenci GIREP v Dublinu 2017 izvedel prof. Leoš Dvořák iz Karlove univerze v Pragi [1, 2, 3].

Literatura

[1] Dvořák L., *O magnetu, magnetických tělesech a velikém magnetu Zemi*, In: Dílny Heuréky 2016/Heureka Workshops 2016. Sborník konference projektu Heuréka. E.: V. Koudelková. Matfyzpress Praha 2017. ISBN 978-80-7378-338-9 (PDF, v češčini), str. 7–23. Dostopno na `kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky_2017.pdf`, ogled 6. 8. 2019. Pripomba: Naslov je mogoče prevesti v angleščino kot *On the Magnet, Magnetic Bodies, and the Great Magnet the Earth* kar spominja na znamenito knjigo W. Gilberta.)

[2] Dvořák L., *Magnets and magnetic field around them: what can we learn from simple experiments*, sprejeto v objavo v zbornik konference GIREP v Dublinu 2017.

[3] Dvořák L., *O magnetech II* (On magnets II) In: Dílny Heuréky 2017/Heureka Workshops 2017. Sborník konference projektu Heuréka. Ed.: V. Koudelková. MatfyzPress, Praha, 2018, ISBN 978-80-7378-359-4 (PDF, v češčini) str. 7–21. Dostopno na `kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureky_2017.pdf`, ogled 6. 8. 2019.

× × ×

Poimenujmo eksoplanet

Prvo javno zbiranje predlogov za poimenovanje planeta in njegove zvezde v Sloveniji

Andrej Guštin, Dunja Fabjan

IAU100
PoimenujmoPlanet

Ob 100 letnici Mednarodne astronomske zveze (IAU) po vsem svetu potekajo pod geslom 100 let pod skupnim nebom številne pobude za popularizacijo astronomije. PoimenujmoPlanet je ena največjih mednarodno koordiniranih akcij. Mednarodna astronomska zveza IAU je vsaki državi dodelila en planetarni sistem, za katerega je mogoče javno zbiranje predlogov za ime. Ti eksoplaneti in njihove zvezde bodo po koncu natečaja nosili uradna imena, ki jih bodo izbrali v posameznih državah. S tem natečajem želimo spodbuditi zavedanje o našem položaju v vesolju in razmislek o tem, kako bi obstoj Zemlje zaznala morebitna civilizacija na nekem drugem planetu.

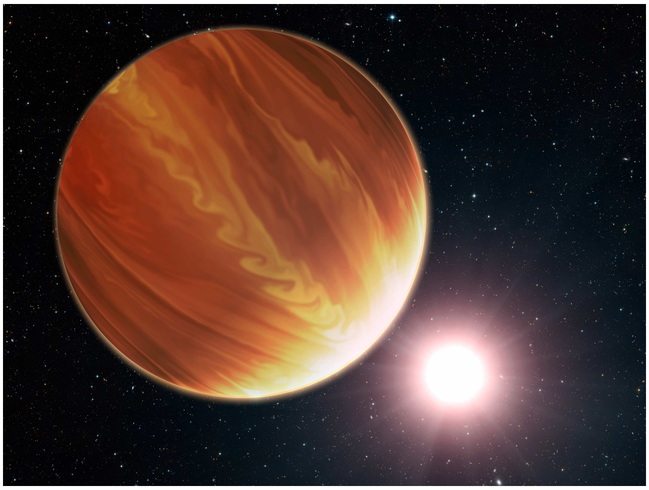
Pobuda NameExoWorlds – PoimenujmoPlanet drugod po svetu

Pri pobudi PoimenujmoPlanet sodeluje več kot 70 držav. Mednarodna astronomska zveza, ki je odgovorna za uradno poimenovanje nebesnih teles, je prvič leta 2015 sprožila iniciativo NameExoWorlds za poimenovanje 19 eksoplanetov. Tokratni natečaj je nekoliko drugačen, ker geslo letošnje obletnice 100 let pod skupnim nebom poudarja mednarodno povezanost in skupni trud za spoznavanje vesolja. Zato so se pri IAU odločili, da vsaki sodelujoči državi dodelijo planetarni sistem, eksoplanet in matično zvezdo. Vsaka izmed dodeljenih zvezd je vidna iz države in dovolj svetla, da jo lahko opazujemo že z manjšim teleskopom.

Izbor imen bo v posamičnih državah potekal od junija do novembra 2019 skladno po pravilih natečaja, končna imena bo potrdil Upravni odbor natečaja IAU100 NameExoWorlds, rezultati pa bodo uradno razglašeni decembra 2019. Izbrana imena se bodo lahko uporabljala poleg že prisotnega znanstvenega imena, pri tem pa se bo navedlo tudi predlagatelje.

O izbranih zvezdah in planetih

Za natečaj PoimenujmoPlanet so bili izbrani planetarni sistemi, ki jih lahko opazujemo z manjšim teleskopom iz geografske širine glavnega mesta vsake sodelujoče države. Poleg možnosti opazovanja je sistem v več primerih povezan z državo tudi zaradi teleskopa, s katerim so planet odkrili, ali pa zaradi državljanstva znanstvenika/ce, ki je sodeloval/a pri odkritju planeta. Izbrani eksoplaneti so bili odkriti v prvih dveh desetletjih opazovanj planetov v drugih osončjih, torej je bila večina odkritij narejena pred letom 2012. Obstoj planeta je zato v splošnem priznan, saj gre za sisteme, ki jih je bilo možno dlje časa opazovati in tako potrditi njihov obstoj. Vizualna magnituda sistemov se giblje med 6. in 12. magnitudo. Planete so odkrili s spektroskopskimi opazovanji Dopplerjevega pojava (meritev radialnih hitrosti) ali metodo tranzita, vsi pa so bili odkriti z zemeljskimi teleskopi. Izbrani planeti so najverjetneje plinasti velikani, podobni Jupitru in Saturnu, z masami med 10 % in 500 % Jupitrove mase. Matična zvezda ne pripada večzvezdnemu sistemu, znan je pa samo en planet v orbiti okrog nje. Obstaja seveda možnost, da bodo opazovanja v prihodnosti odkrila okrog iste zvezde še druge planete, ali pa celo, da je zvezda del večzvezdnega sistema.



SLIKA 1.
Tako naj bi bil od blizu videti eksoplanet tipa Vroči jupiter (ilustracije: NASA, ESA in G. Bacon (STScI)).

Slovenski eksoplanet

Slovenski eksoplanet je 446 svetlobnih let oddaljeni WASP-38 b. Njegova materinska zvezda je WASP-38 oz. HD 146389 z navidezno magnitudo 9,4. Nahajata se v ozvezdju Herkula.

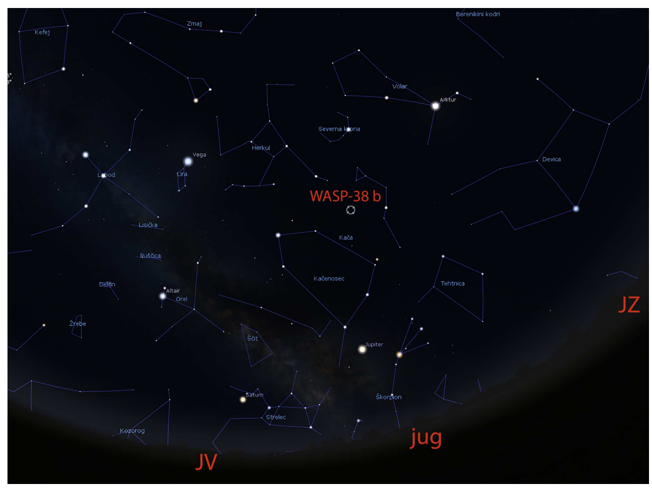
Osebni izkaznici eksoplaneta in materinske zvezde

Eksoplanet WASP-38 b   Podatki:

- `exoplanet.eu/catalog/wasp-38_b`
- Leto odkritja: 2010
- Metoda odkritja: prehod pred zvezdo
- Tip planeta: Vroči jupiter
- Masa: 2,712 ± 0,065 mase Jupitra
- Polmer: 1,079 ± 0,044 polmera Jupitra
- Temperatura: pribl. 1400 °C
- Velika polos tira: 0,07551 ± 0,00085 astronomske enote; 11,3 milijona km
- Obhodna doba: 6,871815 ± 0,000042 dneva; 6 dni 20 ur 55 minut 25 sekund
- Ekscentričnost orbite: 0,0321 ± 0,0044

Zvezda WASP-38/HD 146389   Podatki:

- `simbad.u-strasbg.fr/simbad/sim-id?Ident=WASP-38`
- Lega: Herkul
- rektascenzija (J2000,0): 16:15:50,0
  deklinacija (J2000,0): +10:01:57
- Oddaljenost: 446 svetlobnih let
- Spektralni tip: F8
- Navidezna magnituda V: 9,39 ± 0,02
- Masa: 1,216 ± 0,041 mase Sonca
- Efektivna temperatura: 6150,0 ± 80,0 K
- Polmer: 1,365 ± 0,041 polmera Sonca



SLIKA 2.
Lega zvezde WASP 38 na nebu (Ilustracija: Stellarium, Andrej Guštin)

Zbiranje predlogov

Do konca oktobra 2019 bomo na spletnem naslovu `www.portalvvesolje.si` zbirali predloge za imeni planeta in zvezde. Končni izbor imena bo komisija razglasila do sredine novembra 2019.

SLIKA 3.
Z mobilnim telefonom se lahko tu neposredno povežete s spletno stranjo za oddajo predlogov imen.

Kratka navodila za izbiro imena

- Predloga za imeni EKSOPLANETA in ZVEZDE naj bosta SMISELNO POVEZANA.
- Dolžina imena naj bo od 4 do 16 črk latinske abecede.
- Ime ne sme vsebovati šumnikov, številk ali drugih znakov, ki niso črke.
- Zaželena je ena beseda.
- Ime ne sme biti enako že obstoječim imenom vesoljskih teles, ne sme biti žaljivo.
- Planet ali zvezda ne smeta biti imenovana po živečih ljudeh oz. ljudeh, ki so umrli pred manj kot sto leti.
- Niso dovoljena imena političnih, vojaških in verskih organizaciji ter podjetij, domačih ljubljenčkov.

Kaj je Mednarodna astronomska zveza (IAU)

Mednarodna astronomska zveza (IAU) je organizacija, ki združuje več kot 13500 profesionalnih astronomov iz več kot 100 držav širom po svetu. Njena naloga je spodbujanje astronomije v vseh njenih vidikih, vključno z raziskavami, komunikacijo, izobraževanjem in razvojem, s pomočjo mednarodnega sodelovanja. IAU je tudi mednarodno priznan organ, ki dodeljuje oznake nebesnim objektom in površinskim značilnostim na njih. Ustanovljena je bila leta 1919 in je največja svetovna profesionalna zveza astronomov.

Spletne povezave

Portal v vesolje – `www.portalvvesolje.si`

Slovenska astronomska revija Spika – `http://astronomska-revija-spika.si`

DMFA Slovenije – `www.dmfa.si`

Spletna stran mednarodnega projekta: `http://nameexoworlds.iau.org/`

IAU 100 – `https://www.iau-100.org/`

× × ×

Najdaljši čas trajanja Luninega zakritja zvezde

Marijan Prosen

→ **Pri svojem gibanju na nebu lahko Luna zakrije (okultira) zvezde, planete, planetoide, glave kometov, zvezdne kopice, radijske vire. To pomeni, da so vsa ta vesoljska telesa od nas bolj oddaljena kot Luna.**

Pri zakritju zvezda v hipu zaide za vzhodni Lunin rob, v hipu tudi vzide izza zahodnega. Lunino zakritje zvezde se zgodi v nekaj stotinkah sekunde. Pojav lahko posnamemo. Natančni pregledi teh posnetkov kažejo, da Luno vendarle obkroža skrajno redka atmosfera, tako zelo redka, da bi lahko rekli, da je sploh nima. Pri izredno natančnem opazovanju sij zvezde dve do tri sekunde, preden zvezda izgine za Lunin rob, narahlo pade, zvezda nekako šibko zamigota oziroma obledi.

Iz Luninega zakritja zvezd je mogoče izmeriti skrajno majhne zorne kote zvezd (npr. 0,04" za zvezdo Antares) in nato pri njihovi znani oddaljenosti izračunati njihove radije.

Z Luninimi zakritji zvezd ugotovijo tudi natančno lego Lune, za katero vemo, da ji je zaradi zamotanega gibanja zelo težko določiti, jo pa v raznih izračunih pogosto potrebujemo. In Lunino zakritje zvezd je način, ki nam to omogoča. Zakrite zvezde imajo namreč natančno izmerjeno ali izračunano nebesno lego. Natančna lega središča Lune pa je od natančne lege zvezde ob zakritju oddaljena samo za zorni kot 0,25° polmera kroga (okrogle ploskvice), ki jo na nebu zavzema Luna.

Za Lunina zakritja je značilno Lunino mesečno gibanje na nebu, ki poteka v nasprotni smeri od dnevnega. Poteka od zahoda proti vzhodu (v levo, če gledamo proti jugu) in zvezda zaide (izgine) za Luninim vzhodnim robom in vzide (se pojavi) izza njenega zahodnega.

Izračunajmo najdaljši čas trajanja središčnega Luninega zakritja zvezde, tj., da Luna zakrije zvezdo natanko vzdolž svojega zornega kota (navideznega premera), ki meri 0,5°. Deklinacijo zvezde in Lune zanemarimo, kotna hitrost navideznega vrtenja nebesne krogle (s katero se ta kratek čas navidezno giblje Luna) pa je $\omega = 360°/24\ \mathrm{h} = 15°/\mathrm{h}$.

Zvezda glede na Luno miruje. V času t opisanega zakritja Luna na nebu preide kot $\alpha = \omega t = 0{,}5°$ proti vzhodu, potuje pa čas $t = \alpha/\omega = 2$ min, kar lahko izračunamo na pamet.

Ugotovili smo, da je maksimalni čas trajanja Luninega zakritja zvezde enak dve minuti, če je zakritje središčno, vsa druga (tj. nesrediščna) Lunina zakritja zvezd so seveda krajša.

SLIKA 1.
Spika, 30. 11. 1994 zjutraj, tik pred Luninim zakritjem zvezde (levo zgoraj). Ko se Luna giblje po nebu, včasih pride pred kakšno zvezdo. Tako jo zakrije in nam začasno prepreči, da bi jo opazovali. Ker Luna skoraj nima atmosfere, ki bi počasi slabila zvezdino svetlobo, zvezda v hipu zaide (izgine za Luno – zakritje) ali v hipu vzide (se pojavi izza Lune – odkritje). Lunino mesečno gibanje glede na zvezde poteka v vzhodni smeri. Zato se zaid (izginotje) zvezde dogodi na vzhodnem Luninem robu (na sliki levo), vzid (pojav) zvezde pa na zahodnem. Povzeto s svetovnega spleta.

× × ×

Za vajo izračunajte čas trajanja Luninega zakritja zvezde, ko Luna zakrije zvezdo vzporedno vzdolž svojega zornega kota tako, da se Luninovo navidezno središče najbolj približa legi zvezde na razdaljo 0,25°/2. Nariši skico. [$\sqrt{3}$ min]

Gaussova eliminacija

Katarina Šipec

Gaussov postopek oziroma Gaussova eliminacija je postopek za reševanje sistemov linearnih enačb.

Kako bi rešili spodnji sistem?

$$2x + 4y = 10$$
$$x - y = 2$$

V šoli nas učijo preprostega in logičnega postopka; najprej prvo spremenljivko iz prve enačbe izrazimo z drugo (npr. $x = 5-2y$), jo vstavimo v drugo enačbo ($(5-2y)-y = 2$), rešimo dobljeno enačbo ($y = 1$) in rešitev vstavimo v prvo enačbo ($x = 5-2y = 5-2 = 3$). Tako je v našem primeru dobljena rešitev $x = 3$, $y = 1$. Ta postopek vedno deluje, a je precej zamuden. Lahko bi ga uporabili tudi za sistem osmih linearnih enačb z osmimi neznankami ali (v splošnem) za sistem m enačb z n neznankami. A koliko časa bi nam to vzelo? Obstaja preprostejši in hitrejši način.

Drugi način je, da eno enačbo (npr. drugo) pomnožimo s takšnim številom, da je koeficient pred eno neznanko enak v obeh enačbah (npr. s številom 2, da dobimo 2 pred x). Tako dobimo nov sistem

$$2x + 4y = 10$$
$$2x - 2y = 4$$

in dobljeni enačbi odštejemo. S tem se znebimo spremenljivke x in ostane nam le ena enačba in ena neznanka ($6y = 6$), kar pa je precej lažje rešiti. Ta postopek se že približa ideji Gaussove eliminacije, le da bomo to počeli na bolj sistematičen in preglednejši način.

Matrike kot sistemi linearnih enačb

Geometrijski pomen sistema linearnih enačb

Ob besedni zvezi *linearna enačba* dobimo asociacijo na premico. Res je v ravnini množica rešitev linearne enačbe $ax + by = c$ premica. Ko rešujemo sistem linearnih enačb z dvema neznankama (torej v ravnini), iščemo točke v preseku premic, ki jih predstavljajo naše enačbe. Koliko je lahko takih točk?

Denimo, da imamo dve premici v ravnini. Lahko sta vzporedni (sistem nima rešitve; slika 1), lahko se sekata v eni točki (rešitev sistema je ena sama; slika 2) ali pa sovpadata (enačbi predstavljata isto premico; slika 3). V zadnjem primeru je množica rešitev cela premica.

V tridimenzionalnem prostoru linearna enačba predstavlja ravnino. Sistem dveh linearnih enačb s tremi spremenljivkami torej predstavlja presek dveh ravnin. Ta je podobno kot v zgornjem primeru lahko prazen, lahko je premica ali pa ravnina (enačbi predstavljata isto ravnino). Če imamo sistem treh enačb s tremi neznankami, nas zanima presek treh ravnin, ki je lahko prazen, točka, premica ali ravnina.

Nas bodo zanimali sistemi s poljubnim številom enačb in poljubnim številom neznank. Reševali bomo torej sisteme m enačb z n neznankami. Ker si n-dimenzionalne prostore težje predstavljamo kot ravnino ali prostor, bomo sisteme predstavili v drugačni obliki.

Matrika sistema

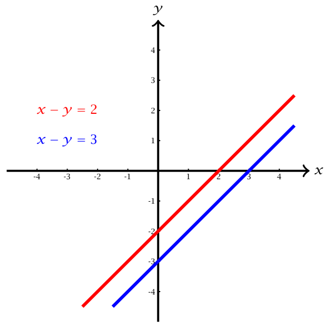
Najprej se spomnimo, da je linearna enačba enačba z več neznankami, pri čemer so potence vsake neznanke enake 1 ali 0 (če neznanka v enačbi ne nastopa). Vsaka linearna enačba n neznank je oblike

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = d,$$

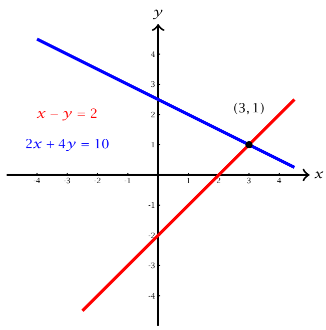
kjer $x_1, x_2, \ldots, x_n$ predstavljajo n različnih spremenljivk, $a_1, a_2 \ldots, a_n$ pa koeficiente pred njimi. Za $n \leq 4$ bomo spremenljivke pisali kot x, y, z in w.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami bomo predstavili z matriko. *Matrika* je le matematično ime za tabelo, v katero vpisujemo števila, da so podatki bolje urejeni. Če ima matrika m vrstic in n stolpcev, pravimo, da je velikosti $m \times n$.

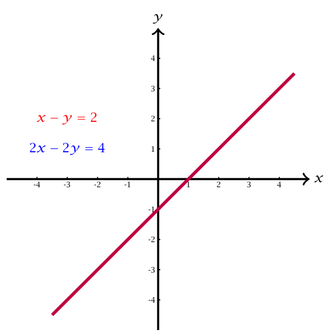
V našem primeru je matrika le drugačen, bolj kompakten zapis sistema linearnih enačb, ki ga tudi lažje shranimo v računalnik. V matriko velikosti



SLIKA 1.



SLIKA 2.



SLIKA 3.

$m \times (n+1)$ zapišemo koeficiente pred neznankami. Vsaka vrstica naj predstavlja eno enačbo iz sistema, pri tem pa moramo biti pozorni, da je vrstni red spremenljivk v vseh enačbah enak. Če v i-ti ($i \leq m$) enačbi spremenljivka x_j ($j \leq n$) ne nastopa, vzamemo $a_{ij} = 0$.

Tako sistem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= d_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n &= d_m \end{aligned}$$

predstavlja matrika

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & d_m \end{array}\right].$$

Enačaje predstavlja črtkana črta, ki nas dodatno spomni, da gre za sistem enačb.

Primer. Zgornji sistem $2x + 4y = 10$ in $x - y = 2$ predstavlja matrika

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Rekli bomo, da sta si matriki A in B *podobni*, če sta rešitvi sistemov, ki jih predstavljata, enaki. To bomo označevali z vijugico, kot npr. $A \sim B$.

Množico rešitev bomo zapisali kot urejen par, trojico oz. v splošnem n-terico, kjer j-to mesto predstavlja vrednost x_j. Rešitev $x = 3$ in $y = 1$ bi tako zapisali kot $(3, 1)$.

Gaussova eliminacija

Končno se lahko posvetimo reševanju sistema. Z Gaussovo eliminacijo bomo sistem le poenostavili do hitro rešljivega sistema. Prvih nekaj, recimo j, spremenljivk bomo izrazili z zadnjimi. Tako bomo dobili rešitev oblike

$$(f_1(x_{j+1}, \ldots, x_n), f_2(x_{j+1}, \ldots, x_n), \ldots, \\ f_j(x_{j+1}, \ldots, x_n), x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots x_n),$$

torej n-terice, ki imajo morda nekaj prostih spremenljivk, namesto katerih lahko vstavimo poljubno realno število (to so naše zadnje spremenljivke x_{j+1} do x_n), pa še vedno dobimo rešitev. V zgornjem primeru funkcije f_k zgolj ponazarjajo, da so prve spremenljivke izražene s kasnejšimi.

Če razmislimo, kako bi izgledala matrika takega sistema, ugotovimo, da ima naslednjo strukturo:

$$j\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right.\left[\begin{array}{ccc|ccc:c} \overbrace{1 \quad 0 \quad 0}^{j} & & & \blacklozenge & \cdots & & \blacklozenge \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \blacklozenge & \cdots & & \blacklozenge \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{array}\right]$$

Na mestih $\blacklozenge$ so poljubna realna števila, na mestu $\star$ pa 0 ali 1. V vsaki enačbi nad vodoravno črto nastopa nekaj izmed zadnjih $n-j$ spremenljivk in natanko ena izmed prvih j spremenljivk. Prva enačba nam npr. predstavlja enačbo

$$x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_j + a_{j+1}x_{j+1} + \ldots + a_n x_n = d,$$

torej

$$x_1 + a_{j+1}x_{j+1} + \ldots + a_n x_n = d,$$

v kateri ni spremenljivk $x_2, x_3, \ldots, x_j$.

V matriki imamo pod črto ničelne vrstice (razen morda prve). Število teh nam pove, koliko enačb (seveda ne poljubnih) je v sistemu odveč, torej koliko bi jih lahko izbrisali, pa bi rešitev še ostala ista. Npr., če enačbi predstavljata isto premico, lahko eno brez zadržkov odmislimo.

Naš j izračunamo takole:

$$j = \text{število enačb}(m) - \text{število ničelnih vrstic v želeni matriki.}$$

Pri izračunu j kot ničelno vrstico upoštevamo tudi vrstico z $\star$, četudi je $\star = 1$.

Zvezdica nam pove, ali je sistem rešljiv ali ne. Če je na mestu $\star$ enica, ta vrstica predstavlja enačbo $0 = 1$, kar pa seveda ne drži, in sistem ni rešljiv. Če je $\star = 0$, tudi ta vrstica predstavlja enačbo $0 = 0$, pri čemer ni nič spornega, tako nam je prvih j spremenljivk uspelo izraziti z zadnjimi $n-j$ spremenljivkami.

Tako bi izgledale želene matrike za nerešljiv sistem (A), sistem z natanko eno rešitvijo (B) in sistem z rešitvijo z eno prosto spremenljivko (C):

$$A = \left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$
$$C = \left[\begin{array}{cc|c:c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Kako dobimo takšno matriko? Katere so dovoljene poteze, torej katere so poteze, ki ne spremenijo rešitve sistema? Seveda lahko vsako enačbo pomnožimo z neničelnim številom in rešitev ostane ista, ali pa enačbi med seboj zamenjamo. Kaj pa še lahko storimo? Pri Gaussovi eliminaciji uporabljamo tri poteze, ki jih označimo z $V1$, $V2$ in $V3$:

V1– menjava vrstic.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 10 \end{array}\right].$$

V matriki lahko med seboj zamenjamo poljubni vrstici. S tem pravzaprav zamenjamo dve enačbi, vrstni red enačb v sistemu pa ni pomemben.

V2– množenje vrstice z neničelnim številom.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right].$$

Če enačbo pomnožimo z neničelnim številom, se množica rešitev ne spremeni. V primeru smo drugo vrstico množili z $\frac{1}{2}$, torej delili z 2. Z manjšimi števili je pač lažje računati.

V3– prištevanje večkratnika ene vrstice k drugi vrstici.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 10 \\ 1+(-\frac{2}{2}) & -1+(-\frac{4}{2}) & 2+(-\frac{10}{2}) \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 4 & 10 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right].$$

Če neka n-terica reši prvo in drugo enačbo, bo rešila tudi njuno vsoto. Pred tem pa po točki V2 →

lahko eno izmed vrstic tudi pomnožimo s kakšnim številom. V primeru smo drugi vrstici prišteli $(-\frac{1}{2})$-kratnik prve. Tako smo se v zadnji vrstici znebili prve spremenljivke in si že nekoliko poenostavili sistem.

Opomba. Dovoljena je tudi menjava stolpcev ($S1$), a moramo biti pri tem pozorni na spremenjen vrstni red spremenljivk v enačbah, kajti menjava stolpcev ustreza preimenovanju spremenljivk.

Najprej en krajši primer.

Primer. Rešitev sistema $2x + 4y = 10$ in $x - y = 2$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Zaporedje korakov je: $V2$ (prvo vrstico delimo z 2), $V3$ (od druge vrstice odštejemo prvo), $V2$ na drugi vrstici in $V3$ (prvi vrstici prištejemo (-2)-kratnik druge).

Dobimo nov sistem, ki ga preberemo iz zadnje matrike in se glasi $x = 3$ in $y = 1$. Naša rešitev je torej $(x, y) = (3, 1)$.

Splošni Gaussov postopek bomo razložili na sistemu štirih enačb s štirimi neznankami, s tega primera pa bralec lahko sklepa na reševanje splošnega sistema enačb.

Gaussov postopek na sistemu štirih enačb s štirimi neznankami

Imamo sistem:

$$\begin{aligned} 3y + 3z + 21w &= 36, \\ x + y - z - 2w &= -2, \\ -z - 5w &= -8, \\ x + y + 3w &= 6. \end{aligned}$$

Sistemu priredimo matriko

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

V prvem delu bomo ustvarili *zgornje trikotno* matriko, torej matriko, ki ima pod diagonalo same ničle (naša matrika bo imela na diagonali enice).

Poiščemo poljubno neničelno število $*$ v prvem stolpcu (ta vedno obstaja, saj spremenljivka x nastopa v vsaj eni enačbi). V našem primeru naj bo to druga vrstica. Z menjavo vrstic ($V1$) premaknemo to vrstico na prvo mesto in celotno vrstico delimo z $*$ ($V2$), da v levem zgornjem kotu dobimo enico (v našem primeru delimo z 1).

Z uporabo $V3$ vsaki od spodnjih vstic prištejemo ustrezen večkratnik prve vrstice, da dobimo v levem stolpcu pod enico same ničle. V naši matriki je potrebno prišteti (-1)-kratnik prve vrstice le zadnji.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right].$$

Postopek nadaljujemo na manjših *podmatrikah*.

$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 21 & 36 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Na ta način dobimo zgornje trikotno matriko. V našem primeru so v zadnji vrstici same ničle (torej tudi $\star$ iz zgoraj omenjene zelene matrike), zato je sistem rešljiv. Imamo štiri vrstice, od teh je ena ničelna. Na tem koraku že vidimo j naše želene matrike. Ta je enak $j = 4 - 1 = 3$.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\hphantom{1\quad 1\quad -1}}^{j=3} \\ j=3\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & \left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

V drugem delu bomo začeli spodaj desno in uničevali števila nad diagonalo.

Z $V3$ spremenimo j-ti stolpec v stolpec, v katerem je na j-tem mestu enica, nad njo pa same ničle tako, da vsaki od zgornjih $j-1$ vrstic prištejemo ustrezen večkratnik j-te vrstice. V našem primeru prvi vrstici prištejemo tretjo vrstico, drugi pa (-1)-kratnik tretje vrstice.

To ponovimo in od zgornjih $j-2$ vrstic odštejemo ustrezne večkratnike $(j-1)$-e vrstice. V našem primeru prvi vrstici odštejemo drugo. Postopek nadaljujemo, dokler gre.

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Prišli smo do želene oblike matrike, ki predstavlja sistem:

$$\begin{aligned} x + w &= 2 \\ y + 2w &= 4 \\ z + 5w &= 8 \\ 0 &= 0. \end{aligned}$$

Rešitev našega sistema je torej

$$(x, y, z, w) = (2 - w, 4 - 2w, 8 - 5w, w),$$

kjer je w poljubno realno število. Naredimo še preizkus z vstavljanjem rešitve v sistem.

$$\begin{aligned} &3 \cdot (4 - 2w) + 3 \cdot (8 - 5w) + 21w = \\ &\qquad 12 - 6w + 24 - 15w + 21w = 36 \\ &(2 - w) + (4 - 2w) - (8 - 5w) - 2w = \\ &\qquad 2 - w + 4 - 2w - 8 + 5w - 2w = -2 \\ &-(8 - 5w) - 5w = -8 + 5w - 5w = -8 \\ &(2 - w) + (4 - 2w) + 3w = \\ &\qquad 2 - w + 4 - 2w + 3w = 6. \end{aligned}$$

Oglejmo si primer nerešljivega sistema:

$$\begin{aligned} x + z &= 2 \\ y + 2z &= 4 \\ -2x + y &= 3. \end{aligned}$$

Sistemu priredimo matriko in jo preoblikujemo z Gaussovim postopkom:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

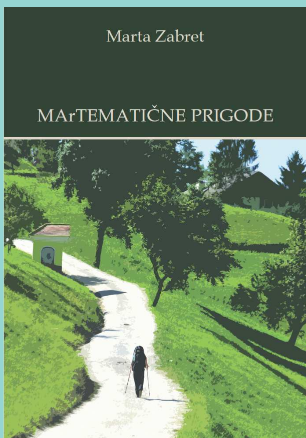
Na mestu $\star$ je enica, torej sistem ni rešljiv.

Omenimo še, da nam število prostih spremenljivk v rešitvi pove *dimenzijo* preseka. Če proste spremenljivke ni, je rešitev ena sama točka, torej 0-dimenzionalen prostor. Če imamo eno prosto spremenljivko, je v preseku premica, če sta dve, pa ravnina.

Na primeru sistema štirih enačb s štirimi neznankami smo se naučili postopka, ki ga brez težav lahko uporabimo na poljubnih sistemih. Nadobuden bralec je vabljen, da ga poskusi implementirati v splošnem.

× × ×

MaRtematične prigode



Marta Zabret

MArTEMATIČNE PRIGODE

146 strani

format 14 × 20 cm

12,50 EUR

Izšla je nova knjiga *MaRtematične prigode*. Avtorica Marta Zabret je profesorica matematike in specialistka matematičnega izobraževanja. Knjiga je množica kratkih zgodb, v katerih so strnjene mnoge izkušnje s področja poučevanja in spremljajočih aktivnosti na srednjih šolah.

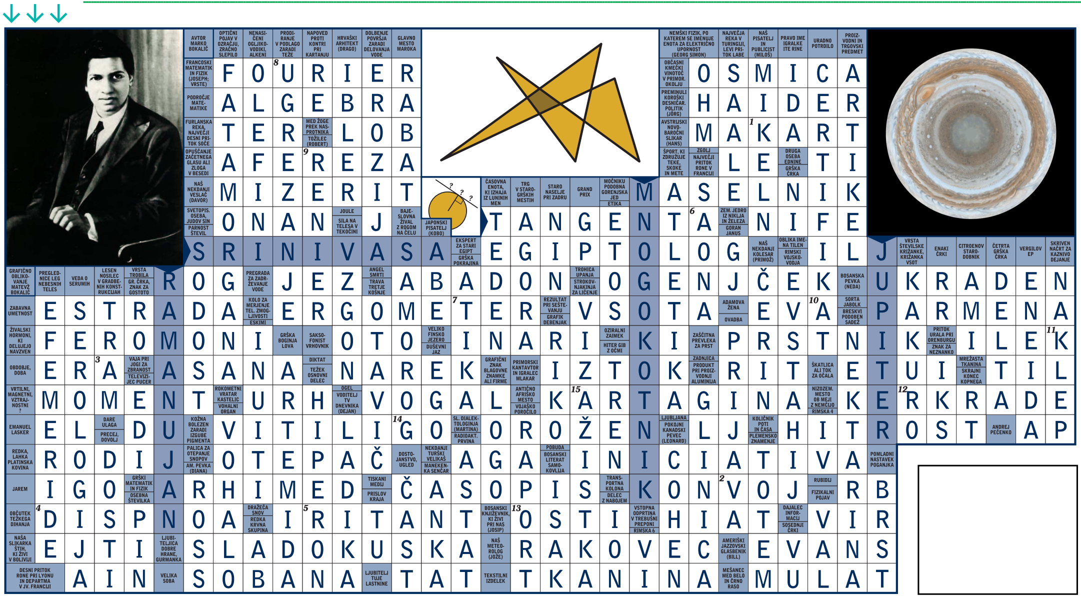
Jedro knjige so zanimivi zapisi o njenih dijakinjah in dijakih. Besedila so napisana lepo in strnjeno, v njih je tudi precej humorja. Zgodbe lahko beremo samostojno; nekatere so prav kratke. Knjiga ima tudi nekaj čisto matematične vsebine, denimo v obliki originalno predstavljenih problemov na srednješolskem nivoju.

Za lepo zunanjo in notranjo obliko knjige so poskrbele tri nekdanje Martine dijakinje: Neža Vavpetič, Ariana Godicelj in Ana Hafner.

Poleg omenjene lahko v naši ponudbi najdete še veliko drugih knjig. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko starejše knjige tudi naročite s popustom:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/cenik/`

Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.



REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 46/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke Preseka je **Kvadratura kroga**. Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Anže Mihelčič iz Kresnic, Tomaž Terčič iz Nove Gorice in Andraž Ziherl iz Maribora, ki bodo razpisane nagrade prejeli po pošti.

Tirnica

Aleš Mohorič

→ Tokratna naravoslovna fotografija na naslovnici kaže nočni posnetek močne ulične svetilke. Na fotografiji opazimo tudi množico svetlih krivulj. Te svetle krivulje ponazarjajo tirnice gibanja nočnih žuželk, ki v neurejenih vijačnicah in spiralah letajo okoli svetilke.

Posnetka ni bilo preprosto narediti. Zato, ker sem želel na fotografiji ujeti daljše sledi, sem moral nastaviti primerno dolg čas osvetlitve. Med tem časom mora biti kamera pri miru, najbolje jo je postaviti na stativ; meni je nekako uspelo tako, da sem jo naslonil na bližnjo ograjo. Čeprav je posnetek narejen ponoči, se lahko v dovolj dolgem času osvetlitve nabere toliko signala, da je fotografija nadosvetljena in je videti čisto bela. To lahko preprečimo tako, da zmanjšamo zenico objektiva kamere – pripremo zaslonko. Koliko je zaslonka zaprta, pove zaslonsko število, ki je enako količniku goriščne razdalje objektiva in premera vstopne zenice. Veliko zaslonsko število pomeni majhen premer zenice, priprto zaslonko. Drug način zmanjšanja osvetlitve, ki se je razširil z uporabo digitalnih kamer, je zmanjšanje občutljivosti kamere. Kamere s svetlomerom običajno dopuščajo spreminjanje ene od vrednosti (čas osvetlitve ali zaslonsko število), drugo pa nastavijo avtomatično, da je slika normalno osvetljena. Pri kamerah, kjer lahko sami spreminjamo katerokoli od treh količin, bomo fotografijo hitro nad ali podosvetlili. Pri kamerah, ki omogočajo nastavitev dveh vrednosti, tretja pa se prilagodi, nimamo vpliva na osvetljenost fotografije. Nekateri kameram lahko dopovemo, da želimo fotografijo, ki je preveč ali premalo osvetljena tako, da navedemo za koliko hočemo spremeniti vrednost osvetlitve (po angleško exposure value, kratica EV). Vrednost osvetlitve povečamo za ena, če bodisi podvojimo čas osvetlitve bodisi podvojimo občutljivost kamere bodisi podvojimo presek zenice (torej zaslonsko število zmanjšamo za koren iz dve), ostalo pa pustimo nespremenjeno.

Pri fotografiji na naslovnici je bilo pri normalni osvetlitvi videti le svetilko, sledi žužkov pa so bile prešibke. Zato sem povečal vrednost osvetlitve za 2 EV. Fotografija je nadosvetljena (steber blizu svetilke je čisto bel), vendar pa zdaj pridejo do izraza tirnice žužkov. Podatki za fotografijo so občutljivost ISO 50, čas osvetlitve 4 sekunde, zaslonsko število f/1,5, vrednost osvetlitve +2 EV. Take nastavitve lahko upravljamo le na nekoliko boljših kamerah.

Zanimivo podrobnost opazimo na povečavi fotografije – sledi niso enakomerne, ampak izmenično svetlejše in temnejše. Premislite, je to posledica utripanja svetilke ali česa drugega? Kako bi svojo idejo preverili?

SLIKA 1.

× × ×

Matematični kenguru

Osnovna naloga tekmovanja Kenguru je popularizacija matematike. Zanimiv, zabaven in igriv način zastavljanja matematičnih problemov je pripomogel, da se je tekmovanje kmalu razširilo po vsej Evropi, hkrati pa so se v tekmovanje vključevali tudi otroci in mladostniki iz drugih držav sveta. Tekmovanje je preseglo evropske okvire in postalo Mednarodni matematični kenguru. Leta 2016 se ga je udeležilo več kot 6 milijonov tekmovalcev iz več kot 60 držav sveta. V Sloveniji Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije organizira tekmovanje za učence od prvega razreda osnovne šole do četrtega letnika srednje šole. Poseben izbor je pripravljen za dijake srednjih tehniških in strokovnih šol, za dijake srednjih poklicnih šol ter za študente.

Naloge, zbrane v teh knjigah, so najboljše možno gradivo za pripravo na prihodnja tekmovanja. Predvsem zato, ker je vsaki nalogi dodana podrobno razložena rešitev, ki bralca vodi v logično mišljenje in spoznavanje novih strategij reševanja. Marsikatera naloga, ki je sprva na videz nerešljiva, postane tako dosegljiv iskriv matematični izziv.

18,74 EUR

14,50 EUR

23,00 EUR

Pri DMFA-založništvo je v Presekovi knjižnici izšlo že pet knjig Matematičnega kenguruja. Na zalogi so še:

- *Mednarodni matematični kenguru 2005–2008*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2009–2011*,
- *Mednarodni matematični kenguru 2012–2016*.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu starejših zbirk nalog pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga!