PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **30** (2002/2003)
Številka 6
Strani 347–351

Nada Razpet:

TRIKOTNIK, KVADRATI IN KROŽNICA

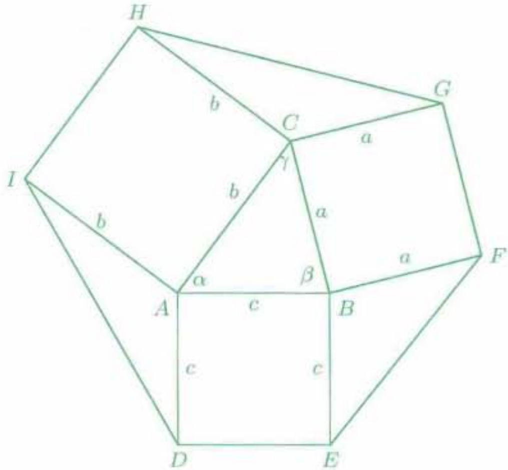
Ključne besede: matematika, geometrija, konstrukcijske naloge.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/30/1531-Razpet-Nada.pdf

TRIKOTNIK, KVADRATI IN KROŽNICA

Nekatere znane naloge lahko z dodajanjem zahtev postanejo kunstrukcijsko in računsko zanimive. Oglejmo si eno izmed njih.

Nad stranicami trikotnika ABC narišimo kvadrate. Izračunajmo ploščino šestkotnika $DEFGHI$ (slika 1).



Slika 1. Nad stranicami trikotnika narišemo kvadrate.

Iz slike razberemo kote:

$$\sphericalangle IAD = 180^\circ - \alpha, \qquad \sphericalangle EBF = 180^\circ - \beta, \qquad \sphericalangle HCG = 180^\circ - \gamma\,.$$

Upoštevajmo, da velja $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, in izračunajmo ploščine trikotnikov

$$p_{\triangle IAD} = \frac{1}{2}\, bc\sin\alpha, \qquad p_{\triangle EBF} = \frac{1}{2}\, ac\sin\beta, \qquad p_{\triangle HCG} = \frac{1}{2}\, ab\sin\gamma\,.$$

Ugotovimo, da je

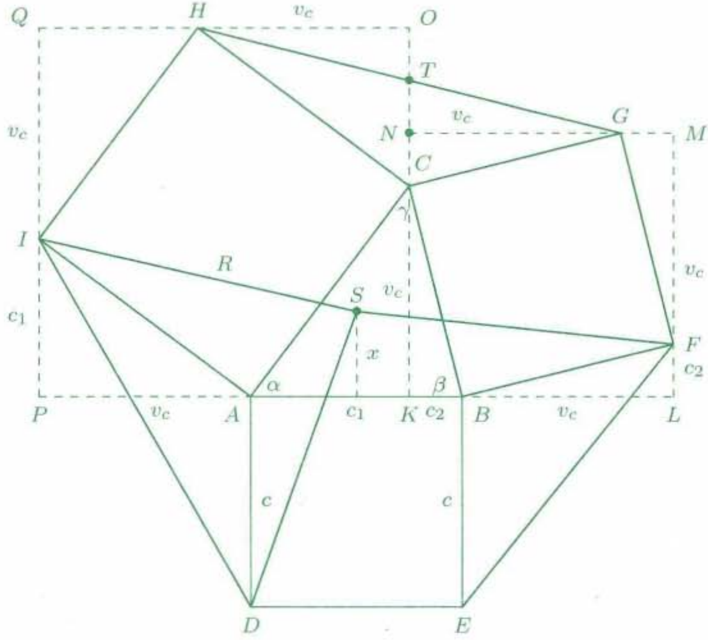
$$p_{\triangle IAD} = p_{\triangle EBF} = p_{\triangle HCG} = p_{\triangle ABC}\,.$$

Ploščina šestkotnika $DEFGHI$ je torej enaka

$$p = 2bc\sin\alpha + a^2 + b^2 + c^2 = 2cv_c + a^2 + b^2 + c^2\,.$$

To ploščino bi lahko izračunali tudi drugače. Kvadratoma nad stranicama a in b očrtajmo kvadrata tako, kot kaže slika 2.

Vzemimo, da sta kota α in β ostra, potem nožišče višine v_c na stranico c, to je točka N, leži na stranici AB. Označimo razdaljo $|AK| = c_1$ in $|KB| = c_2$, torej je $c = c_1 + c_2$. Razdalja središča očrtane krožnice S od stranic c naj bo x. Če bi bil kot $\alpha > 90°$, potem bi bilo nožišče višine na nosilki stranice c izven c in bi bil $|KA| = c_1$ ter $|KB| = c_2 = c + c_1$.



Slika 2. Kvadratoma očrtamo kvadrata.

Iz slike razberemo iskane ploščine:

$$p_{\triangle EBF} = \frac{|EB| \cdot |BL|}{2} = \frac{1}{2}\, c v_c\,, \qquad p_{\triangle IDA} = \frac{|DA| \cdot |AP|}{2} = \frac{1}{2}\, c v_c\,.$$

Ploščino trikotnika HCG lahko nadomestimo s ploščinama trikotnikov HCO in NCG, saj sta trikotnika $\triangle HOT$ in $\triangle GNT$ skladna:

$$\begin{aligned} p_{\triangle HCG} &= \frac{|CO| \cdot |OH|}{2} + \frac{|CN| \cdot |NG|}{2} = \frac{1}{2}\, c_1 v_c + \frac{1}{2}\, c_2 v_c = \\ &= \frac{1}{2}\,(c_1 + c_2) v = \frac{1}{2}\, c v_c\,. \end{aligned}$$

Poglejmo še, kdaj lahko tako nastalemu šestkotniku očrtamo krožnico. Središče krožnice, ki je očrtana šestkotniku, je v središču trikotniku ABC očrtane krožnice, v točki S, saj so simetrale stranic IH, GF in DE hkrati tudi simetrale stranic trikotnika. Izračunajmo razdalji $|IS|$ in $|SF|$:

$$|IS|^2 = \left(v_c + \frac{c}{2}\right)^2 + (c_1 - x)^2 , \qquad |SF|^2 = \left(\frac{c}{2} + v_c\right)^2 + (x - c_2)^2 .$$

Razdalji morata biti enaki, saj točki I in F ležita na krožnici s središčem S. Iz enakosti sledi

$$c_1 - x = x - c_2 \qquad \text{in} \quad c_1 - x = c_2 - x .$$

Iz prve enačbe dobimo

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2} = \frac{c}{2} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 45^\circ$$

in iz druge

$$c_1 = c_2 \quad \Longrightarrow \quad a = b .$$

Če bi bil kot $\alpha > 90^\circ$, potem bi dobili iz $|IS|^2 = |SF|^2$

$$\left(v_c + \frac{c}{2}\right)^2 + (c_1 + x)^2 = \left(\frac{c}{2} + v_c\right)^2 + (c_2 - x)^2$$

in od tod

$$x = \frac{c}{2} \quad \text{in} \quad c_1 = -c_2 .$$

Ker dolžine ne moreje biti negativne, takoj vidimo, da je v tem primeru edina rešitev $x = c/2$ in s tem kot $\gamma = 45^\circ$. Pri tem smo upoštevali, da je $c_2 = c + c_1$. Pogoji so torej v primeru topega kota še ostrejši.

V trikotniku nobena od stranic ni odlikovana, zato lahko zapišemo pogoje še za primer, ko narišemo višino na stranico b. Označimo razdaljo središča trikotniku očrtane krožnice od stranice b z y. Iz pogoja $|SD| =$ $= |SG| = R$ dobimo

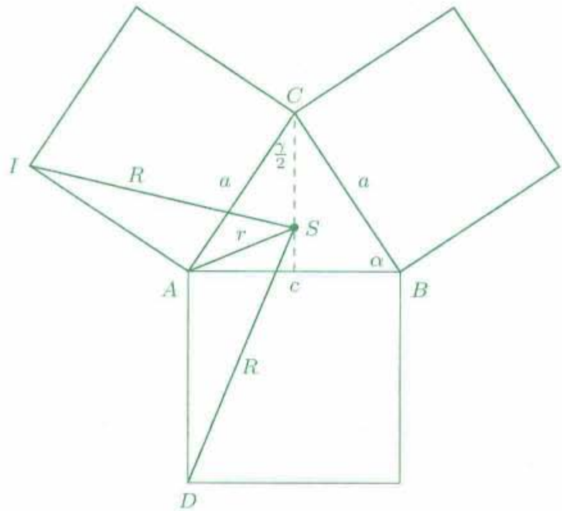
$$b_1 = b_2 \quad \text{ali} \quad y = \frac{b}{2} \Longrightarrow \beta = 45^\circ .$$

Zapišimo pogoje, ki smo jih dobili pri delitvi stranice c in stranice b, z znaki matematične logike:

$$(a = b \vee \gamma = 45^\circ) \wedge (a = c \vee \beta = 45^\circ) .$$

Iz pregleda vseh pogojev sklenemo, da mora biti trikotnik ali enakokrak pravokotni trikotnik (dva kota 45°) ali pa enakostranični trikotnik.

Iz pogojev, da mora biti trikotnik enakokrak, lahko dobimo obe omenjeni rešitvi še z računom. Narišimo novo skico in upoštevajmo, da je trikotnik enakokrak.



Slika 3. Nad stranicami enakokrakega trikotnika narišemo kvadrate.

Preglejmo kote, ki jih potrebujemo:

$$\gamma = 180^\circ - 2\alpha, \qquad \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \alpha, \qquad \sphericalangle DAS = 90^\circ + (\alpha - \frac{\gamma}{2}) = 2\alpha\,.$$

Iz trikotnikov $\triangle IAS$ in $\triangle ADS$ izrazimo stranici $|IS|$ in $|DS|$, ki sta hkrati polmera R iskane krožnice:

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos(90^\circ + \frac{\gamma}{2}) = a^2 + r^2 - 2ar\cos(180^\circ - \alpha)\,,$$
$$R^2 = c^2 + r^2 - 2cr\cos(90^\circ + \alpha - \frac{\gamma}{2}) = c^2 + r^2 - 2cr\cos 2\alpha\,.$$

Upoštevamo, da v trikotniku velja

$$a = 2r\sin\alpha, \qquad c = 2r\sin\gamma = 2r\sin(180^\circ - 2\alpha) = 2r\sin 2\alpha\,.$$

Desni strani izrazov za R^2 izenačimo:

$$4r^2(\sin\alpha)^2 + r^2 + 4r^2\sin\alpha\cos\alpha = 4r^2(\sin 2\alpha)^2 + r^2 - 4r^2\sin(2\alpha)\cos 2\alpha\,.$$

Kotne funkcije dvojnih kotov pretvorimo v funkcije enojnih kotov, upoštevamo povezavo $(\cos\alpha)^2 = 1 - (\sin\alpha)^2$ in enačbo uredimo. Ker mora biti kot α ostri kot (da je vsota kotov v trikotniku 180°) in seveda $\alpha \neq 0$, lahko enačbo delimo še s $4r^2\sin\alpha$. Dobimo

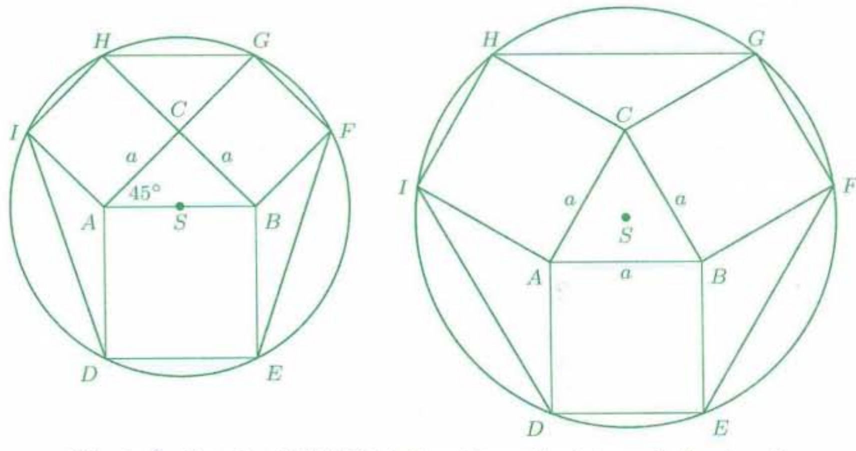
$$\begin{aligned} 3\sin\alpha - 3\cos\alpha - 4(\sin\alpha)^3 + 4(\sin\alpha)^2\cos\alpha &= 0\,, \\ (\sin\alpha - \cos\alpha)(3 - 4(\sin\alpha)^2) &= 0\,, \end{aligned}$$

od tod pa

$$\begin{aligned} \sin\alpha = \cos\alpha &\Longrightarrow \alpha = 45^\circ\,, \\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Longrightarrow \alpha = 60^\circ\,. \end{aligned}$$

Ugotovili smo, da mora biti trikotnik ABC ali enakokrak pravokotni trikotnik ali pa enakostranični trikotnik, da lahko nastalemu šestkotniku očrtamo krožnico.

Grafično lahko nalogo rešimo z enim od programov za dinamično geometrijo. Tako še pred računskim reševanjem ugotovimo, kakšen mora biti trikotnik ABC, zato lahko nalogo brez računanja rešijo tudi osnovnošolci.



Slika 4. Šestkotniku $DEFGHI$ lahko očrtamo krožnico v dveh primerih.

Nada Razpet