Geometrija

za

nižje gimnazije.

Spisal

dr. Fr. vitez Močnik.

Po devetnajstem natisku poslovenil

J. Celestina.

Prvi del.

V berilo vtisnenih je 126 slik.

V Ljubljani.

Natisnila in založila Ig. v. Kleinmayr & Fed. Bamberg.

1883.

Kazalo.

Osnovni pojmi o prostornih tvorih.

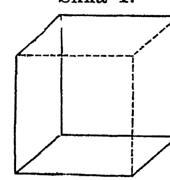
Planimetrija.

Osnovni pojmi o prostornih tvorih.

1. Ogledovanje kocke.*

§ 1. Kocka (*Würfel,* slika 1.) zavzima na vse strani omejen prostor. Na vse strani omejen prostor imenujemo telo *(Körper).* Kocka je telo.

Slika 1.



Kocka razprostira se v trojno mer: od desne na levo, od spredaj navzad, od spodaj navzgor. Razsežnost *(Ausdehnung)* od desne na levo imenujemo navadno dolžino *(Länge),* od spredaj navzad širino *(Breite)* in od spodaj navzgor višino *(Höhe).*

Vsako telo ima trojno razsežnost: dolžino, širino in višino (globočino, debelino).

Imenuj različna telesa in pokaži na njih vse tri razsežnosti. (Knjiga, ravnilo, omara, šolska soba, i. t. d.)

§ 2. Kocko omejuje šestero ploskev *(Flächen).* Te so: spodnja, zgornja, spredna, zadnja, desna in leva ploskev. Kocko meječe ploskve so ravne *(eben)* ploskve.

Pokaži ploskve, katere mejé šolsko sobo, knjigo, omaro, šolsko tablo.

Vsaka kockina ploskev razprostira se v dvojno mer, n. pr. sprednja ploskev od desne na levo in od spodaj navzgor.

Ploskev ima le dvojno razsežnost: dolžino in širino (višino).

Vse telo meječe ploskve skupaj imenujemo njega površje *(Oberfläche).*

§ 3. Vsako kockino ploskev omejujejo štirje robovi ali štiri robovne črte *(Kanten, Kantenlinien).* Robovna črta (robovnica) postane tam, kjer se stikata dve ploskvi.

---

* Kocka (od lesa, lepenke ali pločevine), katera se ogleduje, postavi naj se takó na mizo ali stojalo, da je jedna njena ploskev proti učencem obrnena.

Kocka ima vseh skupaj 12 robov: sprednji spodnji, sprednji zgornji, sprednji desni, i. t. d.

Kockini robovi so preme črte *(gerade Linien)*.

Vsak kockin rob razteza se le v jedno mer, v dolžino.

Črta ima le jedno razsežnost, dolžino.

Vse ploskev meječe črte skupaj imenujemo nje obseg *(Umfang)*.

Črte ni môči narisati, ker je le dolga. Poteze, s katerimi predočujemo črte na papirji ali na tabli, imajo razven dolžine zmerom tudi toliko širine in debeline, kolikor treba, da so vidne; te poteze tedaj niso črte, nego le njih znamenja.

§ 4. Vsak kockin rob omejuje dvoje oglišč *(Eckpunkte)*. Oglišče postane tam, kjer se stikajo tri ploskve.

Kocka ima vseh skupaj 8 oglišč. Ta so: sprednje doljnje desno, sprednje doljnje levo, sprednje zgornje desno, i. t. d.

Kockina oglišča se ne raztezajo v nobedno mer; ona niso niti dolga, niti široka, niti debela.

Točka nima nikakeršne razsežnosti.

Točke ne moremo narisati, ker nima nobedne razsežnosti; moremo si jo le misliti. Pike, s katerimi predočujemo točke na papirji, so le znamenja toček; te pike imajo, če jih naredimo še tako majhne in drobne, vender le zmerom nekoliko dolžine, širine in debeline, kajti sicer bi jih ne videli.

Takisto si ogledamo lahko

a) pokončno tristranično prizmo,

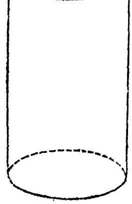
b) tetraeder,

c) pokončno četverostranično okrajšano piramido.

2. Ogledovanje cilindra.

§ 5. Cilinder ali valj (slika 2.) zavzima na vse strani omejen prostor, tedaj je telo. Razteza se v trojno mer, v dolžino, širino in višino; vender sta mu dolžina in širina jednaki.

Slika 2.



Cilinder omejujejo tri ploskve. Izmed teh sta dve ravni ploskvi, tretja pa je kriva *(krumm)* ploskev. Vsaka izmed obeh ravnih ploskev ima točko, katera je jednako oddaljena od vseh toček obsega. Tako ploskev imenujemo krožno ploskev ali krožnino *(Kreisfläche)*.

Cilinder ima le dva roba in le-ta sta krivi črti, kateri omejujeta krožnini; te krivi črti imenujemo (črti) krožnici *(Kreislinien)*.

Ogl i šč cilinder nima.

Takisto je môči ogledati

a) pokončen stožec,

b) pokončen okrajšan stožec,

c) kroglo.

3. Zveza med telesi, ploskvami, črtami in točkami.

§ 6. Meje telesu so ploskve. Ploskev ne nahajamo le zunaj na telesu, nego misliti si jih moremo tudi znotraj v njem; kajti vsako telo si mislimo lahko razdeljeno na dele, in skupna meja dveh sosednih delov je ploskev.

Meje ploskvi so črte. Črte niso le na vnanji strani ploskve; tudi znotraj v njej si jih moremo misliti, tvoreče skupno mejo dveh sosednih delov ploskve.

Meji črte sta točki. Točke niso le na koncéh črte, nego tudi znotraj v črti in tu tvorijo skupno mejo dveh sosednih delov črte.

Kjer je kaj omejenega, morajo biti tudi meje; kjer je tedaj telo, morajo biti tudi ploskve; kjer so ploskve, tam so tudi točke. Ploskve, črte in točke niso nikjer same zá-se, nego povsod le na telesih.

Telesa, ploskve, črte in točke imenujemo prostorne tvore *(Raumgebilde)*.

Telesa, ploskve in črte razprostirajo se v prostoru in zato jih imenujemo prostorne količine *(Raumgrössen)*.

Telo je prostorna količina trojne razsežnosti, ploskev prostorna količina dvojne razsežnosti, črta prostorna količina le jedne razsežnosti. Točka nima nikake razsežnosti, tedaj tudi ni prostorna količina.

§ 7. Deli telesa so zopet telesa, deli ploskve so ploskve in deli črte zopet črte.

Ploskev ni del telesa. Če položimo še toliko ploskev drugo na drugo, ne bomo dobili nikdar telesa, nego vselej le ploskev.

Ploskev, ki mejí vodo in na vodi plavajoče olje, ni ne od vode ne od olja, sploh od nikakeršne tvarine.

Črta ni ne del ploskve, ne del telesa. Ako položimo še toliko črt drugo poleg druge, ne dobimo ne ploskve ne telesa, nego vselej zopet le črto.

Črta, ki je meja med dvema ploskvama, izmed katerih je jedna rudeče, druga višnjevo pobarvana, ni ne rudeča ne višnjeva; ta črta sploh nima nikakeršne barve.

Točka ni del črte. Ako zložimo še toliko toček skupaj, ne dobimo nikdar črte, nego vselej le točko.

§ 8. Telesa, ploskve, črte in točke so med seboj v tesni zvezi ne le gledé omejitve, nego tudi gledé načina, kako postajajo. Pot, katero v prostoru premikajoča se točka za seboj pušča, je črta. Ako se črta v prostoru premika — toda prema črta ne v svojem podaljšku — napisuje ploskev. Telo pa postane, ako se premika ploskev v prostoru, toda ne samo v svojem razdaljšku.

Po zraku letečo iskro vidimo kot črto. Ako povaljamo ravno pobarvan drot po listku papirja, ima sled podobo ploskve. Potisnimo deščico z jedno njeno mejno ploskvijo v mehko ilovico, potem pa jo vzemimo zopet iz nje: globina, katero vidimo v ilovici, je dolga, široka in globoka; moramo jo tedaj za telo smatrati.

§ 9. Da zaznamenujemo točko, zapišemo zraven pike, ki jo predočuje, črko ali število. Takó pravimo n. pr. točka *a*, točka 1.

Da zaznamenujemo črto, zapišemo na vsako njeno krajišče črko ali število in potem izgovorimo te jedno za drugo; n. pr. črta *ab*.

Ako nam je zaznamenovati ploskev, imenujemo vse črte, ki jo mejé.

Telo pa zaznamenujemo, imenujoč vse ploskve, ki je mejé.

4. Preme in krive črte.

§ 10. Ako se točka vedno v isto mer v prostoru premika, nastane prema črta ali prema *(gerade Linie, Gerade)*. Ako pa premikajoča se točka svojo mer vedno izpremina, je črta, ki je takó postala, kriva črta *(krumme Linie)*.

Prosto padajoč kamen pada v premi črti na zemljo; če ga pa zaženeš napošev, napisuje krivo črto. Napeta nit nam predočuje premo črto.

Imenuj različna telesa, na katerih so *a)* preme, *b)* krive črte.

§ 11. 1.) Skozi jedno točko moremo brez števila premih črt potegniti, in sicer v vse mogoče meri.

2.) Ako je pa še druga točka dana, je izmed vseh prejšnjih merij preme le jedna sama, v kateri gre prema skozi obe dve točki. Dve točki določujeta premo črto po polnem.

3.) Prema črta je najkrajša črta med dvema točkama. Nje dolžino imenujemo razdaljo ali razstoj *(Entfernung, Abstand)* teh dveh toček.

Za geometrijsko risanje premih črt služi nam ravnilo.

1.) Načrtaj dve točki ter ji zveži z golo roko s premo črto.

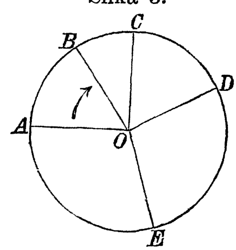
2.) Načrtaj tri točke, ki ne ležé v jedni premi ter zveži po dve točki s premo. Koliko prem je mogoče tu načrtati?

3.) Koliko premih črt je môči potegniti skoz 4, 5, 6 toček?

§ 12. Neomejeno premo deli vsaka v nji ležeča točka na dva dela; vsak tak del razteza se le v jedno mer neomejeno. Premo, katero jedna točka na pol omejuje, imenujemo trak *(Strahl)*, z dvema točkama po polnem omejeno premo pa daljico *(Strecke)*. Daljico meječi točki imenujemo nje krajišči *(Endpunkte)*.

§ 13. Med krivimi črtami je krožnica najjednostavnejša in najvažnejša. Ako zavrtimo v ravnini daljico AO (slika 3.) okoli nepremičnega krajišča O v isto mer toliko, da se povrne zopet v svojo prvo ležo, napiše drugo vrteče se krajišče A krivo črto; le-to imenujemo krožnico ali krog *(Kreislinie, Kreis)*.

Slika 3.



Iz tega, kakó je krožnica postala, izvajamo, da so vse njene točke jednako oddaljene od točke O, ki je znotraj nje. To točko imenujemo zatorej krogovo središče *(Mittelpunkt, Centrum)*.

Vso v sebe se povračujočo krožnico zovemo tudi periferijo ali obod *(Peripherie, Kreisumfang)*, in vsak njen del, kakor AB, lok *(Bogen)*.

Premo, katera veže središče s katero koli točko periferije, kakor OA, OB, OC, imenujemo polumer *(Halbmesser, Radius)*. Polumer kaže razdaljo točke v obodu od središča; ker so pa vse točke periferije od središča jednako oddaljene, morajo biti v istem krogu vsi polumeri jednaki.

Za geometrijsko risanje krožnice služi nam šestilo *(Cirkel)*.

Načrtaj

a) kakeršen koli krog;

b) z danega središča kakeršen koli krog;

c) z danim polumerom krog v kakeršni koli leži;

d) krog z danega središča z danim polumerom.

Kaj tedaj določuje ležo in veličino krogovo po polnem?

5. Ravne in krive ploskve.

§ 14. Ploskev, v kateri je môči na vse strani preme črte potezati, imenujemo ravno ploskev ali ravnino *(ebene Fläche, Ebene);* n. pr. ploskev na kocki, stena v sobi. Ploskev, v kateri se ne dadé na vse strani preme črte potezati, imenujemo krivo ploskev *(krumme Fläche);* n. pr. obstranska ploskev na cilindru, na kateri se morejo le v jedno mer, ploskev na krogli, na kateri ni môči v nobedno mer premih črt potegniti.

Na kockino ploskev dá se ravnilo na vse strani takó položiti, da ni nikjer prostora med ravnilom in ploskvijo; na krogli ni to mogoče v nobedno mer. — Kocka stoji lahko z jedno celo ploskvijo na mizi, krogla pa se mize dotika v jedni sami točki. Dve ravnini dasta se takó druga na drugo položiti, da se krijeta; nikdar pa ne more kriti ravnine kriva ploskev.

Povej več teles, na katerih so *a)* ravne, *b)* krive ploskve.

Kakó se preiskuje z ravnilom, je-li ploskev ravna?

§ 15. 1.) Skoz jedno samo točko môči je položiti brezštevilno ravnin v vseh ležah, ki se le misliti dadé.

2.) Tudi dve točki še ne določujeta leže ravnini. Mislimo si namreč skoz te dve točki premo črto potegneno in skoz le-to ravnino položeno; ta ravnina dá se vrteti okoli preme in pride na ta način še v brezštevilno lež, a v vsaki izmed teh lež gre vender še skoz dani dve točki.

3.) Ako pa vzamemo še tretjo zunaj one preme ležečo točko, ima ravnina med vsemi prejšnjimi ležami le jedno tako, da gre ne le skoz oni dve točki v premi, nego tudi skoz tretjo zunaj preme ležečo točko. Skoz tri točke, katere ne ležé v jedni premi črti, misliti si moremo tedaj le jedno ravnino položeno. Ravnino določujejo tedaj tri ne v jedni premi ležeče točke po polnem.

Paličica in listek papirja zadostujeta, da se to predoči.

§ 16. Neomejeno ravnino deli vsaka v nji ležeča prema na dva dela; vsak tak del razprostira se le na jedni strani te preme neomejeno in zarad tega ga imenujemo na pol omejeno ravnino. Ravnino, katero omejujejo črte po polnem, imenujemo raven lik *(ebene Figur).* Lik je premočrten *(gradlinig),* krivočrten *(krummlinig)* ali raznočrten *(gemischtlinig),* kadar ga mejé preme, krive ali preme in krive črte. Preme, ki mejé premočrten lik, imenujemo njega stranice *(Seiten).*

6. Oglata in okrogla telesa.

§ 17. Telo, katero mejé same ravnine, imenujemo oglato ali ravnoplosko telo *(eckiger, ebenflächiger Körper);* n. pr. kocka, omara. Telo, katero ne omejujejo same ravnine, imenujemo okroglo ali krivoplosko telo *(runder, krummflächiger Körper);* n. pr. cilinder, katerega omejujejo dve ravni in jedna kriva ploskev, krogla, katero mejí jedna sama kriva ploskev.

Imenuj več oglatih in tudi več okroglih teles.

7. Geometrija.

§ 18. Nauk o prostornih količinah imenujemo geometrijo. Geometrijo delimo na dva glavna dela: na planimetrijo in stereometrijo.

Planimetrija ali ravninomerstvo je nauk o svojstvih tistih prostornih količin, ki ležé v jedni in isti ravnini; stereometrija ali telesomerstvo pa se peča z onimi prostornimi količinami, katerih si ne moremo v jedni sami ravnini ležečih misliti, nego katere se še zunaj nje v prostoru raztezajo.

Planimetrija.

I. Preme črte.

1. Mer premih črt.

§ 19. 1.) Premo, katera ima mer svinčnice, t. j. prosto viseče niti, katero napenja svinčena krogla, imenujemo vertikalno ali navpično *(vertikal, lothrecht).*

Skoz jedno točko dá se potegniti le jedna vertikalna prema.

Ravnino, katero položimo skoz kako vertikalno premo, imenujemo vertikalno ravnino.

Na papirji ali tabli predočujemo vertikalno črto s premo, katero potegnemo od zgoraj navzdol ali pa obratno.

Potegni na svoji tablici premo od zgoraj navzdol in potem daj tablici tako ležo, da bode prema res vertikalna.

2.) Premo, katera ima mer paličice, plavajoče na mirni vodi ali mer prečke (gredelnice), ki je na obéh stranéh jednako obtežena, imenujemo horizontalno, vodoravno ali neprevesno *(horizontal, wasserrecht, wagrecht)*.

Skoz jedno točko je môči potegniti brezštevilno horizontalnih prem.

Ravnino, v kateri se dadé na vse strani horizontalne črte potezati, imenujemo horizontalno ravnino, n. pr. tla v sobi, površje mirno stoječe vode.

Na papirji ali tabli predočuje nam horizontalno črto prema, potegnena od leve proti desni ali obratno.

3.) Premo, katera ni ne vertikalna ne horizontalna, imenujemo poševno *(schief oder schräg)*.

Naloge.

1.) Katere robovne črte in ploskve so vertikalne, katere horizontalne na kocki, stoječi na horizontalni ravnini?

2.) Katero mer imajo robovi tetraedra, stoječega na horizontalni ravnini?

3.) Imenuj druge stvari, na katerih so *a)* vertikalne, *b)* horizontalne, *c)* poševne črte.

4.) Načrtaj več točk v *a)* vertikalni, *b)* horizontalni, *c)* poševni meri.

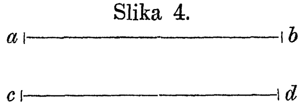
5.) Načrtaj v jednakih razdaljah štiri horizontalne črte.

6.) Takisto načrtaj štiri vertikalne črte.

7.) Prav tako načrtaj štiri poševne črte, in sicer *a)* od leve spodaj proti desni navzgor, *b)* od leve zgoraj proti desni navzdol.

§ 20. Dve premi, ležeči v isti ravnini, imata isto ali različno mer.

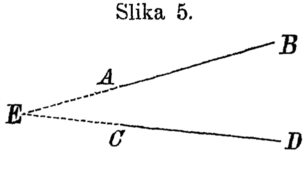
Slika 4.



Dve premi, kateri imata isto mer, kakor *ab* in *cd* (slika 4.), imenujemo vzporedni *(parallel)*; ker sta povsod druga od druge jednako oddaljeni, ne moreta se nikdar sniti, če bi ji še takó podaljšali. Da sta *ab* in *cd* vzporedni, zaznamenujemo takó-le: $ab \parallel cd$.

Dva vzporedna traka sta v isto mer ali v nasprotno mer obrnena, ali ona sta v istem ali pa v nasprotnem smislu vzporedna.

Slika 5.



Dve premi črti, ki nimata iste meri, kateri se tedaj na jedni strani druga drugi bližata, na drugi strani pa druga od druge oddaljujeta, kakor *AB* in *CD* (slika 5.), imenujemo nevzporedni *(nicht parallel)*; zadosti podaljšani morata se v jedni točki sniti. V tem slučaji pravimo, da se premi sečeta, ter imenujemo skupno točko njiju presečišče *(Durchschnittspunkt)*. Dve nevzporedni premi imenujemo na oni strani, kjer se druga drugi bližata, primični *(convergirend)*, na nasprotni strani pa odmični *(divergirend)*.

Takó sta BA in DC v mer proti E primični, AB in CD pa v nasprotno mer odmični.

Naloge.

1.) Moreta-li se dve nevzporedni premi sekati v dveh točkah? Zakaj ne? — Dve premi imata tedaj le jedno presečišče.

2.) Kateri robovi so na kocki vzporedni, kateri niso?

3.) Kakšno medsebojno ležo imajo robovi *a)* tetraedra, *b)* okrajšane piramide?

4.) Imenuj več stvarij, na katerih so *a)* vzporednice, *b)* nevzporednice.

5.) Ali sta dve vertikalni črti vzporedni? Zakaj nista? — Toda zemeljsko površje je od zemeljskega središča jako oddaljeno, zato se razločujeta za majhne daljice na zemlji meri dveh vertikalnih črt takó malo, da ji moremo kar za vzporedni smatrati.

6.) Imenuj vzporedne črte, ki so *a)* vertikalne, *b)* horizontalne, *c)* poševne.

7.) Načrtaj premo in potem v kakeršni koli razdalji vzporednico z njo.

8.) Načrtaj premo in v jednakih razdaljah štiri vzporednice z njo.

9.) Načrtaj vertikalno premo, zaznamenuj v nji 5 toček in skoz le-te potegni vzporednice.

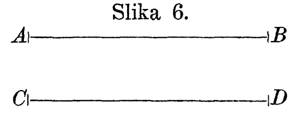
10.) Kakó se dadé s pomočjo ogelnikov *(Winkelbrett)* vzporednice potegniti?

2. O dolžini daljic.

§ 21. Z ozirom na dolžino sta dve daljici ali jednaki ali nejednaki.

Dve daljici sta jednaki, ako imata krajišči jedne isto razdaljo, kakor krajišči druge. Ako položimo izmed dveh jednakih daljic AB in CD (slika 6.) izhodišče *(Anfangspunkt)* C druge na izhodišče A prve in drugo v mer prve, potem mora tudi krajišče D na krajišče B pasti ter druga daljica prvo po polnem kriti.

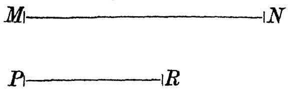
Slika 6.



Ako hočemo zaznamenovati, da sta daljici AB in CD jednaki, pišemo: $AB = CD$.

Dve daljici sta nejednaki, ako sta razdalji med njiju krajiščema nejednaki, in sicer je ona večja, pri kateri sta krajišči drugo od druzega bolj oddaljeni, druga pa je manjša. Dve nejednaki daljici, kakor MN in PR (slika 7.) se ne moreta kriti.

Slika 7.



Znamenje nejednakosti je $>$ ali $<$; $MN > PR$ čitaj: daljica MN je večja nego PR; in $PR < MN$ čitaj: daljica PR je manjša od MN.

Naloge.

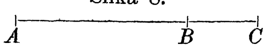
1.) Kakó bodeš s šestilom raziskaval, je-li sta dve daljici jednaki ali nejednaki?

2.) Načrtaj dve jednaki daljici, kateri sta *a)* horizontalni. *b)* vertikalni, *c)* poševni.

3.) Načrtaj tri, štiri take daljice.

§ 22. Z daljicami se prav takó lahko računa kakor s števili.

Slika 8.



Ako podaljšamo daljico AB (slika 8.) za daljico BC, je daljica AC tolika, kolikeršni sta daljici AB in BC skupaj, ali AC je vsota daljic AB in BC; tedaj

$$AC = AB + BC.$$

Obratno pa je AB razlika med AC in BC, namreč

$$AB = AC - BC.$$

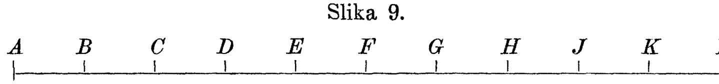
Naloge.

1.) Načrtaj dve nejednaki vzporednici ter določi njiju vsoto in razliko.

2.) Katero ležo je treba dvema daljicama dati, da ji je môči seštevati ali odštevati?

§ 23. Ako načrtamo na katero koli premo (slika 9.) jednake daljice AB, BC, CD, ..., KL, je

Slika 9.



AC 2krat tolika kakor AB, AD 3krat ..., AL 10krat tolika kakor AB; na ta način dobimo tedaj 2-, 3-, 4-, ..., 10kratno daljico AB. Zatorej je $AC = 2AB$, $AD = 3AB$, ..., $AL = 10AB$; dalje je $AE = 2AC$, $AL = 5AC$, $AL = 2AF$.

Obratno pa je AB polovica od AC, tretjina od AD, 4ti del od AE, 10ti del od AL; ali $AB = \frac{AC}{2}$, $AB = \frac{AD}{3}$, $AB = \frac{AE}{4}$, $AB = \frac{AL}{10}$; tudi je $AC = \frac{AG}{3}$, $AE = \frac{AJ}{2}$.

Naloge.

1.) Katera daljica je jednaka v sliki 9.:

a) vsoti $BD + DG$?
b) razliki $AE - AD$?
c) trojni daljici $AC + CD$?
d) četvrni daljici $AD - CD$?

2.) Načrtaj daljico, ki je 2-, 3-, 4krat tolika kakor druga dana daljica.

3.) Načrtaj daljico, katera je $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ dane daljice.

4.) Načrtaj 10 vzporednic, izmed katerih je druga dvakrat daljša od prve, tretja 3krat daljša od prve, i. t. d., deseta 10krat daljša od prve.

5.) Načrtaj daljico in razpolovi jo.

6.) Načrtaj štiri vzporednice, izmed katerih je vsaka naslednja le polovica prejšnje.

7.) Načrtaj več daljic in razdeli jih na oko mereč na 2, 4, 8, 3, 6, 12, 5, 10, 7, 9 jednakih delov.

Kakó se preme *geometrijsko* delé, pokazali bomo pozneje.

3. Kakó je meriti daljice.

§ 24. Kadar določujemo kakemu predmetu veličino, pravimo, da ga *merimo*.

Ako nam je meriti prostorno količino, treba, da vzamemo istovrstno prostorno količino za jednoto in potem moramo poiskati, kolikokrat ima dana količina v sebi ono količino, katero smatramo za jednoto. Vsako količino je môči meriti le z istovrstno količino, tedaj črto le s črto. Ako hočemo tedaj kako daljico *meriti*, t. j. nje dolžino določiti, vzeli bodemo katero koli znano daljico za *jednoto dolgostni meri* ter poiskali, kolikokrat ima le-to v sebi ona daljica, katero je treba meriti. Število, katero nam to pové, imenujemo *mersko število* (*Masszahl*) daljice.

V avstro-ogerski državi je *meter jednota novi dolgostni meri*.

Meter ($^{m}/$) delimo na 10 *decimetrov* ($^{d}/_{m}$) po 10 *centimetrov* ($^{c}/_{m}$) po 10 *milimetrov* ($^{m}/_{m}$).

Pojasni to na meterski palici.

1000 metrov je 1 *kilometer* ($^{K}/_{m}$), 10000 metrov je 1 *miriameter* ($\mathcal{M}y$).

Ako hočemo izmeriti kako daljico, n. pr. črto, katero smo po sobi po dolzem potegnili, poskusimo, kolikokrat je môči meter na to daljico položiti. Ako se dá n. pr. meter natanko 8krat nanjo položiti, je nje dolžina 8krat tolika kakor dolžina metra. V tem slučaji pravimo: daljica meri 8 metrov ali ona je 8 metrov dolga; 8 je mersko število daljice oziraje se na meter kot dolgostno jednoto.

N a l o g e.

1.) Izmed dveh daljic je prva 12 $^m/$ 5 $^d/_m$ 6 $^c/_m$, druga 7 $^m/$ 3 $^d/_m$ 9 $^c/_m$ dolga; kolika je njiju vsota?

2.) Ako je (slika 9.) $AB = 6 \cdot 63$ $^m/$, $BC = 2 \cdot 26$ $^m/$, kolika je AC?

3.) Izmed dveh drogov meri daljši 2 $^m/$ 3 $^d/_m$, krajši 1 $^m/$ 9 $^d/_m$; za koliko se razločita njiju dolžini?

4.) Izmed dveh drogov meri manjši 2 $^m/$ 18 $^c/_m$, razlika med obema pa znaša $0 \cdot 29$ $^m/$; kolik je večji drog in kolika dolžina obeh skupaj?

5.) Neka daljica meri 7 $^m/$ 4 $^d/_m$ 11 $^c/_m$, druga pa je 5krat takó dolga; kolika je dolžina drugi?

6.) 4 $^m/$ 3 $^d/_m$ 2 $^c/_m$ dolgo bruno treba je razžagati na štiri jednake kose; kakó dolg bo vsak kos?

7.) Kolika je daljica, ako znaša nje tretjina 1 $^m/$ 4 $^d/_m$ 7 $^c/_m$?

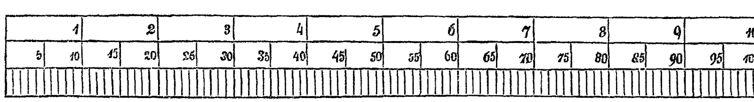
8.) Neke ceste, ki bo 9 $^K/_m$ 348 $^m/$ dolga, dodelan je šesti del; koliko ceste je treba še narediti?

§ 25. Ako treba daljše črte res meriti, služijo nam m e t e r s k e p a l i c e *(Meterstäbe)*, ali m e r s k e v r v i c e *(Messschnur)* ali m e r s k i l a n e c *(Messkette)*.

Za merjenje manjših dolžin rabijo nam m e r i l a *(Masstäbe)*; to so paličice od lesa ali od kovine, na katerih je zaznamenovana dolžina jedne ali več dolgostnih jednot in pa nižji razdelki.

V sliki 10. je načrtana dolžina decimetra in njega razdelitev na centimetre in milimetre.

Slika 10.



N a l o g e.

1.) Izmeri te-le razsežnosti: *a)* dolžino in širino šolske table; *b)* širino in višino vrat in oken; *c)* dolžino, širino in višino šolske sobe. Predno pa v resnici kako dolžino meriš, presodi jo vselej poprej na oko mereč, da oko uriš.

2.) Potegni daljico, povej nje dolžino v $^c/_m$ in $^m/_m$ na oko mereč, in o pravosti rezultata prepričaj se s pomočjo gornjega merila.

3.) Načrtaj dve nejednaki daljici ter določi prav takó njiju dolžino.

4.) Zveži tri dane točke *A, B, C,* katere ne ležé v jedni premi, z daljicami *AB, AC, BC,* potem pa določi le-tem dolžino.

5.) Načrtaj s pomočjo merila daljico, katera meri *a)* 7 $^c/_m$, *b)* 3 $^c/_m$ 5 $^m/_m$, *c)* 63 $^m/_m$.

6.) Načrtaj daljico, katera meri 4 $^c/_m$ 7 $^m/_m$, in podaljšaj jo za 2 $^c/_m$ 1 $^m/_m$.

7.) Načrtaj daljico 58 $^{m}/_{m}$ in skrajšaj jo za 29 $^{m}/_{m}$.

8.) Načrtaj 1 $^{c}/_{m}$ 6 $^{m}/_{m}$ dolgo daljico, in potem 2-, 3-, 4-, 5krat toliko daljico.

9.) Načrtaj daljico, ki meri 6 $^{c}/_{m}$, in potem nje polovico, tretjino, četrtino, petino.

II. O kotih.

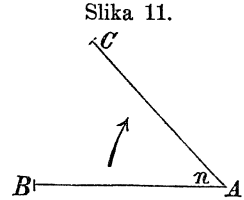
1. Kakó koti postajajo in kakó jih zaznamenujemo.

§ 26. Ako potegnemo od točke A (slika 11.) dva traka AB in AC, razločita se le-ta gledé meri drug od druzega. Veličino razlike med merima teh dveh trakov, stikajočih se v skupni točki, imenujemo kot *(Winkel)*. Znamenje za kot je ∢.

Misliti si moremo, da je kot na ta način postal, da se je vrtel trak AB v ravnini okoli svojega mejišča A, dokler ni prišel v drugo ležo AC; veličina tega vrteža določuje kot.

S šestilom lahko pokažemo, da koti res takó postajajo.

Slika 11.



Traka AB in AC, katera tvorita kot, imenujemo njega kraka *(Schenkel)*, točko A pa, v kateri se stikata, njega vrh *(Scheitel)*.

Kot zaznamenujemo ali s črko pri vrhu, ali z majhno črko, katero zapišemo blizo vrha med kraka, ali s tremi črkami, izmed katerih izgovarjamo in pišemo najprej črko pri jednem kraku, potem črko pri vrhu in na zadnje črko pri druzem kraku. Kot v sliki 11. imenujemo ali kot A, ali kot n, ali kot BAC ali CAB.

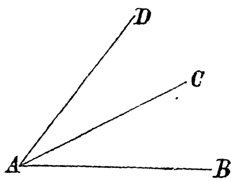
2. O velikosti kotov.

§ 27. Velikosti kotove ne določuje dolžina krakov, nego le veli̧kost vrteža, katerega je treba, da pride jeden krak v ležo druzega. Dva kota sta jednaka, ako je treba isto tolikega vrteža, da postane vsak izmed njiju.

Ako položimo dva jednaka kota takó jednega na druzega, da padeta vrh in jeden krak prvega na vrh in jeden krak druzega, padel bode tudi drugi krak prvega na drugi krak druzega; kota se tedaj krijeta.

Dva kota sta nejednaka, ako ne potrebujeta za svoj postanek isto tolikega vrteža. Kateri iz med dveh nejednakih kotov je večji, kateri manjši? Kako se prepričaš, kateri izmed dveh nejednakih kotov je večji, kateri manjši, ako položiš jednega na druzega?

Slika 12.



§ 28. Ako vrtimo v kotu BAC (slika 12.) krak AC od AB okoli vrha A, dokler ne pride v ležo AD, postane kot BAD, kateri je tolik, kolikeršna sta kota BAC in CAD skupaj; kot BAD je tedaj vsota kotov BAC in CAD, tedaj

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD.$$

Ako zavrtimo v kotu BAD krak AD za kot CAD proti AB, takó da pride v ležo AC, ostane nam še kot BAC. Ta kot je tedaj diferenca kotov BAD in CAD; zatorej

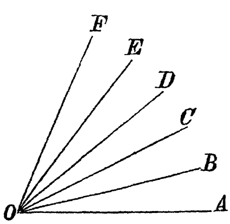
$$\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD - \sphericalangle CAD.$$

Koti se dadé tedaj kakor druge količine seštevati in odštevati.

Katero ležo treba dati vrhu in krakoma dveh kotov, ako ja načrtamo, da dobimo njiju vsoto, in katero ležo, da dobimo njiju diferenco?

§ 29. Ako so koti AOB, BOC, COD, DOE, EOF (slika 13.) jednaki, je $\sphericalangle AOC$ 2krat tolik kakor $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOD$ 3krat tolik, $\sphericalangle AOE$ 4krat tolik, $\sphericalangle AOF$ 5krat tolik kakor $\sphericalangle AOB$, ali $\sphericalangle AOC = 2 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOD = 3 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOE = 4 \sphericalangle AOB$, $\sphericalangle AOF = 5 \sphericalangle AOB$.

Slika 13.



Obratno pa je kot AOB polovica od AOC, tretjina od AOD, četrti del od AOE in peti del od AOF; ali $\sphericalangle AOB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \frac{1}{3} \sphericalangle AOD = \frac{1}{4} \sphericalangle AOE = \frac{1}{5} \sphericalangle AOF$.

Naloge.

1.) Imenuj v sliki 13. vse jednostavne in vse sestavljene kote, in tudi dele, s katerih so poslednji sestavljeni.

2.) Kateri kot je jednak:

a) vsoti $\sphericalangle BOC + \sphericalangle COE$?

b) diferenci $\sphericalangle AOF - \sphericalangle COF$?

3.) Načrtaj, na oko mereč, tri kote, izmed katerih je drugi 2krat, tretji 5krat tolik kakor prvi.

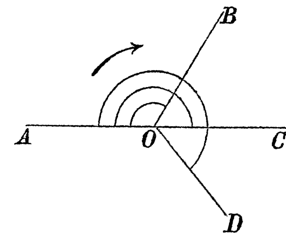
4.) Razdeli, tudi na oko mereč, kot na dva jednaka dela, na 3, 4, 5, 6 jednakih delov.

3. O iztegnenih, otlih in izbočenih kotih.

§ 30. Kot, kateremu ležita kraka z ozirom na vrh v nasprotno mer, katera tedaj tvorita premo črto, imenujemo iztegnen kot *(gestreckter oder gerader Winkel)*. Vsi iztegneni koti so jednaki.

Kot, ki je manjši od iztegnenega, imenujemo otel kot *(hohler Winkel)*; kot pa, ki je večji od iztegnenega, izbočen kot *(erhabener Winkel)*.

Slika 14.



V sliki 14. je AOC iztegnen, AOB otel in AOD izbočen kot.

Da postane iztegnen kot, treba je natanko polovice vrteža, za otel kot menj, in za izbočen kot več nego pol vrteža premičnega traka.

Pri vsakem otlem kotu je na drugi strani krakov tudi izbočen kot; sicer pa razumevamo zmerom otel kot, kadar govorimo o kotu dveh trakov, če izrekoma nasprotnega ne omenjamo.

Kot, kateri postane, ako se trak po polnem okoli zavrti, imenujemo poln kot *(voller Winkel)*. Poln kot je dvakrat tolik kakor iztegnen. Otel kot in oni izbočeni kot, kateri je na drugi strani krakov prvega, tvorita skupaj zmerom poln kot.

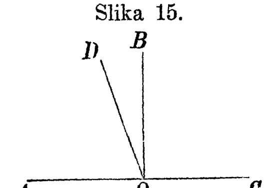
4. O pravih, ostrih in topih kotih.

§ 31. Otle kote delimo na prave, ostre in tope.

Prav kot *(rechter Winkel)* je polovica iztegnenega; da postane, treba, da se zavrti premični trak natanko za četrti del. Zaznamenujemo ga navadno s črko R.

Vsi pravi koti so jednaki.

Slika 15.



Kot, ki je manjši od pravega, imenunujemo oster *(spitz)*, in kot, ki je večji od pravega, a manjši od iztegnenega, top *(stumpf)* kot.

Ako je v sliki 15. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle BOC$, je vsak polovica iztegnenega kota AOC, tedaj vsak prav kot; AOD je oster, COD top kot.

Ostre in tope kote imenujemo nasproti pravim kotom tudi poševne kote *(schiefe Winkel)*.

Naloge.

1.) Kakšni koti so *a)* na kocki, *b)* na tetraedru?

2.) Poišči na predmetih v sobi pravih kotov.

3.) Ob kateri uri tvorita kazalca na uri prav kot, ob kateri uri iztegnen kot?

4.) Načrtaj prav kot z jednakima krakoma.

5.) Načrtaj prav kot, kateremu je jeden krak trikrat daljši od druzega.

§ 32. O dveh prav kot tvorečih premah pravimo: druga stoji na drugi pravokotno *(senkrecht)*, ter imenujemo vsako izmed njih z ozirom na drugo pravokotnico *(Senkrechte)*. O dveh poševen kot oklepajočih premah pa pravimo, da stoji druga na drugi poševno *(schief)*. V sliki 15. stoji BO pravokotno na AO, kar pišemo takó-le: $BO \perp AO$; DO pa stoji poševno na AO ali na CO.

Naloge.

1.) Kakó stojé drug na druzem robovi *a)* kocke, *b)* tetraedra?

2.) Pokaži na predmetih v šolski sobi preme, katere stojé druga na drugi *a)* pravokotno, *b)* poševno.

3.) Načrtaj premo ter potegni od raznih toček zunaj nje pravokotnice na njo.

4.) V čem se razločijo pravokotnice od vertikalnic?

5.) Katero mer ima prema, ki stoji pravokotno na *a)* vertikalni, *b)* horizontalni, *c)* poševni premi?

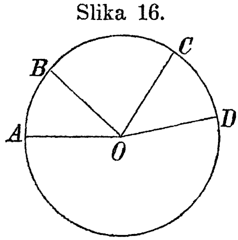
6.) Je-li izmed dveh pravokotnic jedna zmerom vertikalna, druga horizontalna? (Prečka in jeziček pri vagi.)

7.) Imenuj dve taki pravokotnici, izmed katerih je jedna horizontalna, druga vertikalna.

5. Kakó je meriti kote.

§ 33. Ako vrtimo daljico AO (slika 16.) v ravnini okoli krajišča O takó, da preide s časoma v leže BO, CO, DO, . . ., načrtuje drugo krajišče lok kroga, vrteča se daljica pa tvori v svoji vsakokratni leži s prvotno ležo kot; lok in kot sta tem večja, za čim več smo daljico zavrteli. Ako zavrtimo daljico okrog in okrog, dobimo največji lok, t. j. obod, in največji kot, ki je ob središči mogoč, t. j. poln kot.

Slika 16.



Ako sta kota AOB in COD jednaka, jednaka sta tudi pripadajoča loka AB in CD. Ako položimo namreč kot COD (v ta namen si ga izrežimo) takó na kot AOB, da pade vrh O na O, in krak CO na AO, pasti mora zarad jednakosti kotov tudi krak DO na BO; a potem se morata tudi loka CD in AB po polnem kriti, kajti vse njiju točke so od O jednako oddaljene.

Takisto lahko dokažemo, da morata kota AOB in COD jednaka biti, ako sta loka AB in CD jednaka.

Iz tega izvajamo:

1.) V vsakem krogu pripadajo jednakim kotom ob središči jednaki loki.

2.) V vsakem krogu pripadajo jednakim lokom jednaki koti ob središči.

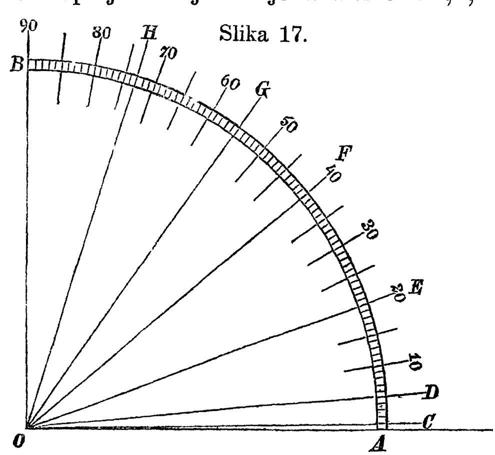
§ 34. S pomočjo poslednjih dveh izrekov nam je môči veličino kotov na jako jednostaven način določevati.

Jednota ločni meri je ločna stopinja *(Bogengrad)*, t. j. 360ti del oboda. Treba li nam meriti krogov lok, to preiskujemo, kolikokrat ima dani lok ločno jednoto v sebi. Da moremo tudi manjše loke meriti, delimo ločno stopinjo na 60 ločnih minut, in ločno minuto na 60 ločnih sekund. Ločne stopinje, minute in sekunde zaznamenujemo z ^{0}, $'$, $''$.

Razdelimo li krogov obod na 360 jednakih delov, takó da je vsak tak del ločna stopinja, ter potegnemo k vsakemu razdelišču pólumer, potem dobimo okoli središča 360 kotov; vsi ti koti znašajo poln kot, ter so med seboj jednaki, ker pripadajo jednakim lokom. Vsak tak kot, ki pripada ločni stopinji, imenujemo tudi stopinjo, in sicer kotno stopinjo *(Winkelgrad)*. Kotna stopinja, t. j. 360ti del polnega kota rabi nam kot jednota kotni meri; delimo jo na 60 kotnih minut, in vsako kotno minuto na 60 kotnih sekund. Kot meriti bi morali prav za prav preiskujoč, kolikokrat ima dani kot kotno jednoto v sebi. V resnici pa tega ne preiskujemo neposredno, nego kote merimo posredno s pripadajočimi krogovimi loki takó-le sklepajoč: Vsak kot ima prav toliko kotnih stopinj, kotnih minut in kotnih sekund, kolikor ima ločnih stopinj, ločnih minut in ločnih sekund lok, katerega z njegovega vrha načrtamo. Kotne stopinje, minute in sekunde zaznamenujemo prav takó kakor ločne stopinje in njih nižje razdelke z ^{0}, $'$, $''$.

Vzemimo, da je lok AB (slika 17.) četrti del krogovega oboda ter razdeljen na 90 jednakih delov. Ako si mislimo vsako razdelišče zvezano s središčem O, zaznamenuje število stopinj, katere ima vsak lok, ob jednem tudi število kotnih stopinj pripadajočega kota.

Slika 17.



Takó ima kot AOC jedno stopinjo, ali $\sphericalangle AOC = 1^0$, kot AOD 5 stopinj, ali $\sphericalangle AOD = 5^0$, $\sphericalangle AOE = 20^0$, $\sphericalangle AOF = 40^0$, $\sphericalangle AOG = 55^0$, $\sphericalangle AOH = 73^0$, $\sphericalangle AOB = 90^0$.

Poln kot ima tedaj 360^0, iztegnen 180^0, otel menj nego 180^0, izbočen več nego 180^0, dalje prav kot 90^0, oster menj nego 90^0, top več nego 90^0, a menj nego 180^0.

Naloge.

1.) Kolik kot napiše kazalec na uri v 1, v 2, 5, 12 urah?

2.) Kolik kot napiše minutni kazalec v 1 uri, v 1, 5, 10, 30 časovnih minutah?

3.) Kolik kot oklepata kazalca na uri ob 1., 2., 5., 6., 8., 9., 11. uri?

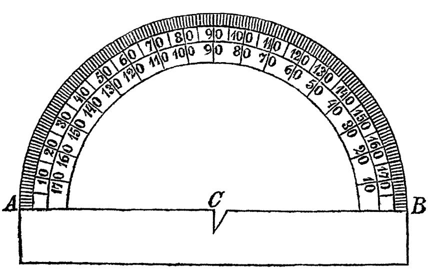
4.) Poišči vsoto tem-le kotom: $37^0\,48'\,35''$, $28^0\,39'$ in $78^0\,9'\,55''$.

5.) Kolika je diferenca kotov $128^0\,15'\,31''$ in $69^0\,42'\,18''$?

6.) Izračunaj 2-, 3-, 4-, 5kratnik od $18^0\,35'$, od $9^0\,12'\,48''$.

7.) Določi polovico, tretji, četrti, peti del od $72^0\,27'$, od $58^0\,20'$.

Slika 18.



§ 35. Kote merimo in načrtavamo, kadar ni treba posebne natančnosti, s pomočjo kotomera ali transportérja *(Transporteur)*. Transportér je na stopinje razdeljen polukrog (slika 18.), čegar premer je rob AB, zareza C pa središče.

Naloge.

1.) Kakó izmeriš s transportérjem kot na papirji?

2.) Načrtaj več kotov, presodi njih veličino, najprej na oko mereč, potem pa jih izmeri s transportérjem.

3.) Potegni z jedne točke v premi na jedni njeni strani več trakov, dobljene, drug poleg druzega ležeče kote izmeri in seštej. Kolika jim je vsota? Kolika mora biti prava vsota?

4.) Potegni s točke tri, štiri ali več trakov, kote okoli te točke izmeri in seštej.

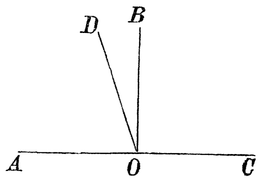
5.) Kako načrtaš s transportérjem kot, ki ima določeno število stopinj?

6.) Načrtaj kot, ki ima 20^0, 30^0, 50^0, 90^0, 15^0, 65^0, 24^0, 79^0, 81^0, 100^0, 150^0, 142^0, 180^0, 209^0, 270^0, 326^0.

6. O sokotih in sovršnih kotih.

§ 36. Dva kota, katera imata isti vrh in jeden skupen krak, druga njiju dva kraka po tvorita premo, in sicer v nasprotno mer, imenujemo sokota *(Nebenwinkel)*. Ako podaljšamo kotu jeden krak čez vrh, dobimo njega sokot. V sliki 19. je AOB sokot od BOC; takisto sta AOD in COD sokota.

Slika 19.



Dva sokota sta zmerom jednaka iztegnenemu kotu ali dvema pravima kotoma; vsota dveh sokotov je jednaka dvema pravima kotoma ali 180^0.

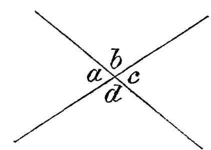
Sokot pravemu kotu je prav kot, ostremu kotu top in topemu oster.

1.) Kolik je sokot od 63^0? $180^0 - 63^0 = 117^0$.

2.) Izračunaj sokot od 10^0, 39^0, 85^0, 100^0, 134^0, $15^0\,48'$, $79^0\,13'\,52''$.

§ 37. Dva kota, katera tvorita dve premi na nasprotnih si straneh svojega presečišča, zovemo sovršna kota *(Scheitelwinkel)*. Ako podaljšamo kotu oba kraka čez vrh, dobimo njega sovršni kot. V sliki 20. sta a in c, b in d sovršna kota.

Slika 20.



Oba dva sovršna kota tvorita isti dve premi; te sta pa na jedni strani svojega presečišča druga od druge za toliko odklonjeni, za kolikor na drugi. Odtod izvajamo:

Vsaka dva sovršna kota sta jednaka.

Da je ta izrek resničen, razvidno je tudi iz zgoraj navedenega svojstva sokotov. Ker je namreč b sokot od a in c, velja

$$a + b = 2R,$$
$$b + c = 2R.$$

Ako sta pa dve količini jednaki tretji, jednaki sta tudi med seboj; tedaj

$$a + b = b + c.$$

Ako odštejemo $\underline{\quad b = b,}$ ostane

$$a = c;$$

ker jednako od jednacega odšteto, dá jednako.

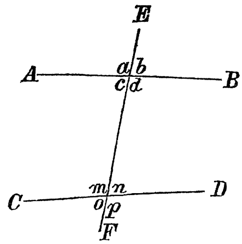
Pokaži na isti način, da je $b = d$.

Ako nam je znan izmed štirih kotov a, b, c, d jeden, môči nam je določiti druge tri. Vzemimo, da je n. pr. $a = 50^0$; kolik je c, kolika sta b in d?

7. O protikotih, izmeničnih kotih in prikotih.

§ 38. Dosedaj smo govorili le o kotih s skupnim vrhom; sedaj se hočemo pečati tudi s koti, ki so ob dveh različnih vrhih. Taki koti postanejo, kadar preseče dve premi tretja.

Slika 21.



Ako sta AB in CD (slika 21.) presekani premi, EF pa sekajoča prema ali prečnica *(Transversale)*, postane okoli obeh presečišč osem kotov; ti koti imajo zarad važnih svojih svojstev in odnošajev posebna imena.

Kote c, d, m in n, ki so med presekanima premama, imenujemo notranje kote, druge štiri, a, b, o, p pa vnanje kote. Jeden vnanji in jeden notranji kot ob različnih vrhih, pa na isti strani prečnice, zovemo protikota *(Gegenwinkel)*; protikota sta a in m, b in n, c in o, d in p.

Dva vnanja ali pa dva notranja kota, ležeča ob različnih vrhih in na nasprotni strani prečnice, imenujemo izmenična kota *(Wechselwinkel)*; izmenična kota sta a in p, b in o, c in n, d in m.

Dva vnanja ali pa notranja kota, ležeča ob različnih vrhih in na isti strani prečnice, imenujemo prikota *(Anwinkel)*. Takó sta a in o, b in p vnanja, c in m, d in n notranja prikota.

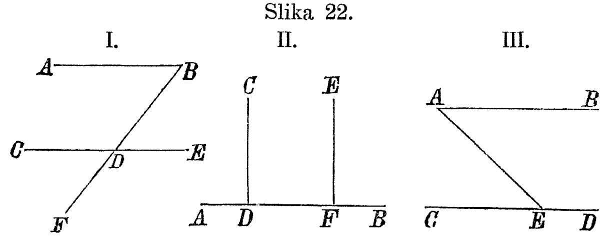
Naloge.

1.) Poišči v sliki 21. h kotu a sovršni kot, oba sokota, protikot, izmenični kot in prikot; prav takó h kotu b, k c, d, m, n, o, p.

2.) Recimo, da je kot $a = 98^0$ in $m = 110^0$; koliki so potem drugi koti?

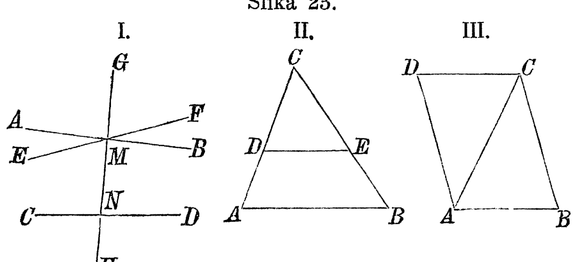
3.) Poišči protikote, izmenične kote in prikote v sliki 22., I., II. in III.

Slika 22.



4.) Povej dalje protikote, izmenične kote in prikote v sliki 23., I., in sicer vzemi najprej AB in CD, in potem EF in CD za presekani premi; v II. najprej oziraje se na prečnico AC in potem oziraje se na prečnico BC; v III. za vse tam mogoče slučaje.

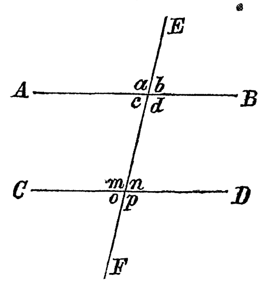
Slika 23.



§ 39. Posebno znameniti so odnošaji protikotov, izmeničnih kotov in prikotov, kadar sta presekani premi AB in CD (slika 24.) vzporedni.

Pomikamo li premo AB ob premi EF takó navzdol, da ostane vsikdar s svojo prvotno ležo vzporedna, potem tvori prva z drugo vsikdar iste štiri kote, kajti premikajoča se AB ne izpremina svoje meri gledé EF. Kadar pride tedaj AC v ležo CD, krijeta se po dva protikota, torej sta jednaka; vsaka dva izmenična kota izpremenita se v sovršna kota, sta torej tudi jednaka; po dva prikota postaneta sokota, njiju vsota je tedaj jednaka $2R$. Zarad tega je

Slika 24.



1.) $a = m,$ $\quad$ 2.) $a = p,$ $\quad$ 3.) $a + o = 2R,$

$b = n,$ $\quad$ $b = o,$ $\quad$ $b + p = 2R,$

$c = o,$ $\quad$ $c = n,$ $\quad$ $c + m = 2R,$

$d = p,$ $\quad$ $d = m,$ $\quad$ $d + n = 2R;$ t. j.:

Ako preseče dve vzporednici tretja prema, sta

1.) po dva protikota jednaka;

2.) po dva izmenična kota jednaka;

3.) po dva prikota skupaj jednaka dvema pravima kotoma.

Vzemimo, da je $a = 112^0$; kolik je vsak izmed ostalih sedmih kotov?

Iz ravnokar dokazanega izreka izvajamo:

Ako sta dva protikota ali dva izmenična kota nejednaka, ali ako znašata dva prikota več ali menj od $2R$, ne moreta biti presekani premi vzporedni; temveč stikati se morata zadosti podaljšani v točki, in sicer na oni strani, kjer je vsota notranjih prikotov manjša od $2R$.

§ 40. Dve premi, kateri seče tretja takó, da sta dva protikota jednaka, sta vzporedni.

Ako je (slika 24.) n. pr. $a = m$, mora biti $AB \parallel CD$. Kajti, ako pomikamo AB navzdol proti CD, ostaja kot a le tedaj jednak, kadar premikajoča se AB svoje meri ne izpremina, t. j. kadar ostaja AB s svojo prvotno ležo vzporedna; da je tedaj $a = m$, treba, da je tudi zadnja leža CD s prvotno vzporedna.

Izmed treh svojstev dveh prem, kateri seče tretja, namreč, da so protikoti jednaki, izmenični koti jednaki, in da znašata po dva prikota $2R$, ni nobedno samo zá-se mogoče, nego kjer je jedno, tam sta vsikdar tudi drugi dve. Zatorej izvajamo iz prejšnjega izreka še ta-le dva:

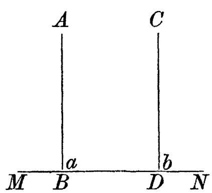
Dve premi, kateri seče tretja takó, da sta dva izmenična kota jednaka, sta vzporedni.

Dve premi, kateri seče tretja takó, da znašata dva prikota skupaj $2R$, sta vzporedni.

Ako tedaj vemo, da sta dva protikota ali dva izmenična kota jednaka, ali da znašata dva prikota skupaj $2R$, môči nam je vsikdar sklepati, da sta presekani premi vzporedni.

Iz tega je razvidna velika važnost, katero imajo protikoti, izmenični koti in prikoti. Da bi nam bilo môči za gotovo trditi, da sta dve premi vzporedni, morali bi pokazati, da se še takó podaljšani ne stikata. Takó podaljšati ji pa ne moremo; zatorej določujemo vzporedno ležo dveh prem kar s koti, katere dobimo, ako presečemo te dve premi s tretjo.

Slika 25.



§ 41. Vzemimo, da je (slika 25.) $AB \perp MN$ in $CD \perp MN$. Ker je $a = R$, $b = R$, tedaj $a = b$, morata biti premi AB in CD vzporedni, kajti oni tvorita s tretjo MN, katera ji seče, jednake protikote.

Iz tega izvajamo:

Dve premi, kateri stojita na tretji pravokotno, sta vzporedni.

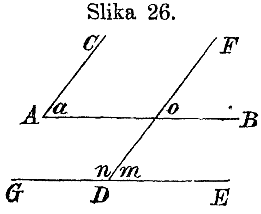
Obratno: Ako stoji jedna izmed dveh vzporednic pravokotno na kaki premi, stoji tudi druga pravokotno na nji.

Kajti: Ako je $AB \perp MN$ in $CD \parallel AB$, je $a = R$ in $b = a$ (ker sta protikota), torej mora biti tudi $b = R$, t. j. $CD \perp MN$.

Pravokotnica med dvema vzporednicama kaže njiju razdaljo ali razstoj. V sliki 25. je BD razdalja vzporednic AB in CD.

Potegni 2 vzporednici in med njima 6 pravokotnic v jednakih razdaljah.

Slika 26.



§ 42. Recimo, da je (slika 26.) $AB \parallel DE$ in $AC \parallel DF$. Kota m in a imata na isto stran obrnene ali v istem smislu vzporedne krake in sta jednaka, kajti oba sta jednaka skupnemu protikotu o; tedaj $m = a$. Kota n in a imata tudi paroma vzporedne krake, toda le dva vzporedna kraka sta na isto stran, druga dva pa sta na nasprotno stran obrnena. Ker je $n + m = 2R$ in $m = a$, je tudi $n + a = 2R$.

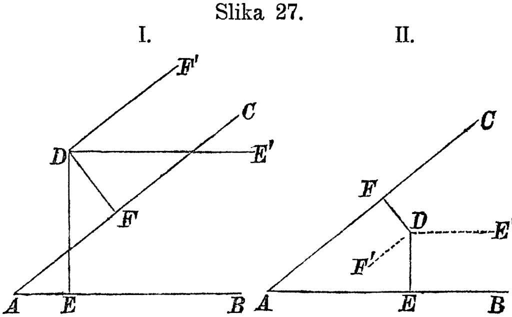
Odtod izvajamo:

Dva kota, katerih kraki so paroma v istem smislu vzporedni, sta jednaka; dva kota pa, katera imata le dva kraka v istem smislu, druga dva v nasprotnem smislu vzporedna, sta jednaka $2R$.

§ 43. Vzemimo, da je (slika 27.) $DE \perp AB$ in $DF \perp AC$. Mislimo si kraka DE in DF kota EDF trdno zvezana in zavrtimo ja okoli vrha D za 90^0, takó da prideta v leži DE' in DF'.

V I. so kraki kotov $E'DF'$ in BAC v istem smislu vzporedni; tedaj je $\sphericalangle E'DF' = \sphericalangle BAC$ ter tudi $\sphericalangle EDF = \sphericalangle BAC$.

Slika 27.



V II. so kraki kotov BAC in $E'DF'$ tudi paroma vzporedni, vender sta dva kraka v istem, druga dva pa v nasprotnem smislu vzporedna. Zatorej je $\sphericalangle E'DF' + \sphericalangle BAC = 2R$, tedaj tudi $\sphericalangle EDF + \sphericalangle BAC = 2R$.

Dva kota, katerih kraki stojé paroma pravokotno drug na druzem, sta ali jednaka, ali pa je njiju vsota jednaka $2R$.

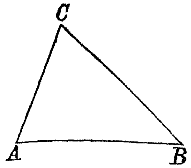
Kedaj velja prvo in kedaj drugo?

III. O trikotnikih.

1. Pojasnila.

§ 44. Vsako ravno ploskev, katero omejujejo tri daljice, zovemo trikotnik (*Dreieck*, △); te tri daljice imenujemo njega stranice (*Seiten*) in njih vsoto trikotnikov obseg (*Umfang*).

Slika 28.



Trikotnik ima šestero sestavin, tri stranice in tri kote. V trikotniku ABC (slika 28.) so AB, AC in BC stranice, A, B in C pa koti. Vsaka stranica ima dva priležna kota in jeden nasproten kot; n. pr. stranici AB sta kota A in B priležna, kot C pa ji je nasproten.

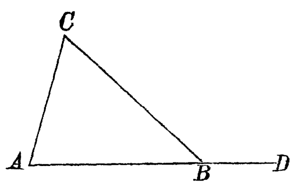
Katera dva kota sta priležna stranici AC, katera stranici BC? Katera kota sta tema dvema stranicama nasprotna?

Vsak kot, n. pr. A, oklepata dve stranici AB in AC, tretja BC pa mu je nasprotna.

Kateri dve stranici oklepata kot B, kateri kot C? Kateri stranici sta kotoma B in C nasprotni?

§ 45. Podaljšamo li v trikotniku jedno stranico, potem tvori ta podaljšek s stično trikotnikovo stranico kot, katerega imenujemo vnanji kot *(Aussenwinkel)* trikotnikov; kote v trikotniku pa zovemo njega notranje *(innere)* kote.

Slika 29.



V sliki 29. je CBD vnanji kot trikotnika ABC, njegov sokot ABC je njemu priležni, kota BAC in ACB pa sta njemu nasprotna notranja kota trikotnikova.

Podaljšaj vsako trikotnikovo stranico na obédve strani; koliko vnanjih kotov dobiš na ta način? Kakšna sta po dva izmed njih? Imenuj k vsacemu vnanjemu kotu njega notranji priležni in obadva njemu nasprotna kota.

2. O trikotnikovih stranicah.

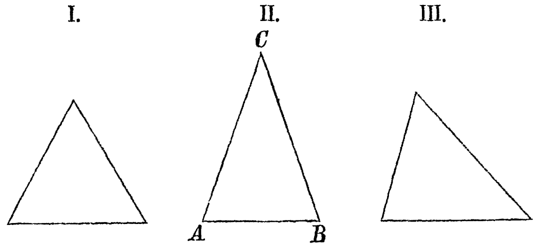
§ 46. V vsakem trikotniku je vsota dveh stranic večja od tretje.

Ta izrek je sam ob sebi jasen; kajti, če treba od A do B priti, je očividno ovinek čez AC in CB (slika 28.) daljši nego prema pot čez AB; tedaj $AC + BC > AB$.

Oziraje se na dolžino stranic delimo trikotnike na: jednakostranične *(gleichseitig)*, v katerih so vse tri stranice jednake; jednakokrake *(gleichschenklig)*, v katerih sta le dve stranici jednaki; in raznostranične *(ungleichseitig)*, v katerih ni nobedna stranica drugi jednaka.

V sliki 30. predočuje I. jednakostraničen, II. jednakokrak in III. raznostraničen trikotnik.

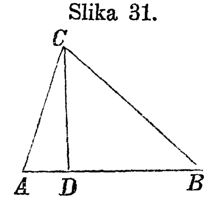
Slika 30.



Načrtaj *a)* jednakostraničen, *b)* jednakokrak, *c)* raznostraničen trikotnik.

§ 47. Trikotnik si moremo misliti na vsako stranico postavljen; to stranico zovemo potem osnovnico *(Grundlinie)*. Osnovnici nasprotno oglišče imenujemo vrh *(Scheitel)*, in pravokotnico, spuščeno z vrha na osnovnico, višino *(Höhe)* trikotnikovo. Ako si mislimo trikotnik ABC (slika 31.) na AB postavljen, je AB osnovnica, C vrh in CD njega višina.

Slika 31.



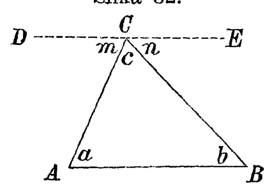
V jednakokrakem trikotniku jemljemo vsikdar nejednako stranico za osnovnico; jednaki stranici imenujemo trikotnikova kraka *(Schenkel)*.

Imenuj v sliki 30., II. osnovnico, vrh in kraka.

3. O trikotnikovih kotih.

§ 48. Da zvemo, kolika je vsota vsem kotom a, b, c kacega trikotnika ABC (slika 32.), načrtajmo jih vse okoli istega vrha C jednega poleg druzega. V ta namen potegnimo skoz C premo DE vzporedno z AB. Na ta način dobimo kota m in n; kot m pa je kakor izmenični kot jednak kotu a, in kot n kakor izmenični kot jednak kotu b. Vsota kotom a, b, c je tedaj tolika, kolikeršna je vsota kotom m, c, n. Vsota zadnjih treh kotov pa je jednaka iztegnenemu kotu ali dvema pravima; zatorej mora biti tudi vsota kotov a, b in c jednaka dvema pravima.

Slika 32.



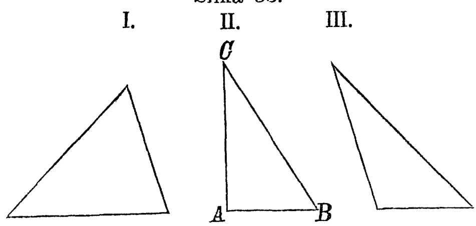
V vsakem trikotniku znaša vsota notranjih treh kotov dva prava ali 180°.

§ **49.** Iz tega važnega izreka izvajamo:

a) V vsakem trikotniku je vsota dveh kotov manjša od $2R$.

More li imeti trikotnik dva prava kota, ali dva topa kota, ali prav in top kot? V vsakem trikotniku morata biti tedaj najmenj dva kota ostra.

Slika 33.



Z ozirom na kote razločujemo ostrokotne *(spitzwinklig)*, pravokotne *(rechtwinklig)* in topokotne *(stumpfwinklig)* trikotnike.

V ostrokotnem trikotniku (slika 33., I.) so vsi koti ostri; pravokoten trikotnik (slika 33., II.) ima jeden prav in dva ostra kota in topokoten (slika 33., III.) jeden top in dva ostra kota. V pravokotnem trikotniku imenujemo pravemu kotu nasprotno stranico BC hipotenuzo, prav kot oklepajoči stranici AB in AC pa kateti.

b) Ako sta znana v trikotniku dva kota, najdemo tretji kot, odštevši znana dva kota od 180°.

c) Ako sta dva kota jednega trikotnika jednaka dvema kotoma druzega trikotnika, jednak je tudi tretji kot v prvem trikotniku tretjemu kotu v druzem trikotniku.

d) V pravokotnem trikotniku je vsota obeh dveh ostrih kotov jednaka pravemu kotu. Ako je tedaj jeden oster kot znan, môči je najti druzega.

Naloge.

1.) V trikotniku sta dva kota:

a) 37°	in 71°;	*d)* 45° 32′ 18″	in 62° 50′ 57″;
b) 82°	» 48°;	*e)* 64° 47′ 33″	» 77° 18′ 41″;
c) 50° 48′	» 17° 39′;	*f)* 108° 5′ 29″	» 38° 43′ 31″;

kolik je tretji kot?

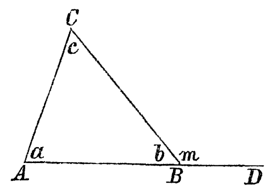
2.) V pravokotnem trikotniku je jeden oster kot

a) 63°, *b)* 37°, *c)* 27° 15′, *d)* 58° 12′ 48″;

kolik je drugi?

§ 50. Prištejemo li (slika 34.) h kotu b vnanji kot m, dobimo 180^0 za vsoto, ker sta ta dva kota sokota; isto vsoto, namreč 180^0, dobimo pa tudi, prištevši h kotu b kota a in c. Vnanji kot m mora tedaj tolik biti kakor a in c skupaj. Iz tega izvajamo:

Slika 34.



Vnanji kot trikotnikov je jednak vsoti obeh dveh notranjih njemu ne priležnih kotov.

Vnanji kot je torej vselej večji od jednega izmed notranjih njemu nasprotnih kotov.

Naloge.

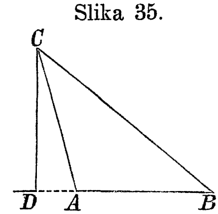
1.) V trikotniku sta dva notranja kota $38^0\ 35'\ 28''$ in $69^0\ 18'\ 46''$; kolik je nasprotni vnanji kot?

2.) V trikotniku znaša vnanji kot 86^0, in jeden izmed notranjih njemu nepriležnih kotov $57^0\ 48'$; kolik je vsak izmed druzih dveh trikotnikovih kotov?

3.) Načrtaj ob vsakem trikotnikovem oglišči vnanji kot; kolika je vsota vsem tem vnanjim kotom?

§ 51. Vzamemo li v topokotnem trikotniku ABC (slika 35.) jedno izmed stranic, oklepajočih topi kot, za osnovnico, n. pr. AB, potem ne more pasti pravokotnica, spuščena z vrha na osnovnico, notri v trikotnik; kajti sicer bi dobili trikotnik s topim in pravim kotom, kar pa ni mogoče. Višina CD je tedaj zunaj trikotnika, in osnovnico AB treba čez A podaljšati.

Slika 35.



Načrtaj ostrokoten, topokoten in pravokoten trikotnik in v vsakem vse mogoče višine ter povej potem, kakó v vsakem višina stoji.

4. O jednakosti, podobnosti in skladnosti.

§ 52. Dolžina krivi črti je lahko ista kakor kaki premi; krivočrtno omejen travnik ima lahko isto površje kakor četverokoten; četverorobovna posoda drži lahko toliko vode kakor okrogla. V vseh teh slučajih je veličina ista, oblika pa različna. Dve prostorni količini imata tedaj lahko isto veličino, če tudi nimata ob jednem iste oblike. Dve prostorni količini, imajoči isto veličino, imenujemo jednaki *(gleich)*.

Med dve jednaki količini stavimo jednačaj (=).

§ 53. Dve premi črti imata vsikdar isto obliko, da si tudi sta različne dolžine; prav takó imata tudi dva kroga, dve kocki isto obliko, če se tudi po veličini razločujeta. Prostorne količine morejo imeti tedaj isto obliko, da si tudi niso jednako velike. Dve prostorni količini, imajoči isto obliko, zovemo podobni *(ähnlich)*.

Med dve podobni prostorni količini stavimo znamenje $\sim$.

§ 54. Dve prostorni količini imenujemo skladni *(congruent)*, če imata isto veličino in isto obliko, če nista tedaj samo jednaki, nego tudi podobni. Dve skladni prostorni količini razločujeta se le po mestu, na katerem se nahajata; če položimo drugo na drugo, morata se v vseh svojih razsežnostih skladati, t. j. jedna mora drugo po polnem kriti.

Ker sta dve skladni prostorni količini jednaki in podobni, stavimo med nji znamenje $\cong$.

Kar smo tu navedli o jednakosti, podobnosti in skladnosti prostornih količin sploh, velja tudi za trikotnike.

5. O načrtovanji trikotnikov in njih skladnosti.

§ 55. Dva trikotnika sta skladna, t. j. imata isto veličino in isto obliko, če se, drug na druzega položena, po polnem krijeta.

Da je pa to mogoče, morata imeti trikotnika vseh šestero sestavin, namreč vse tri stranice in vse tri kote, paroma jednake.

V skladnih trikotnikih so jednakim stranicam jednaki koti nasprotni, jednakim kotom so pa jednake stranice nasprotne.

Dostikrat pa nam je môči iz menj nego šesterih sestavin sklepati, da sta dva trikotnika skladna; kajti veličina nekaterih stranic in kotov trikotnikovih določuje veličino druzih, n. pr. veličina dveh kotov določuje veličino tretjega kota.

Da spoznamo, koliko paroma jednakih sestavin je potrebnih, da sta dva trikotnika skladna, in katere so te sestavine, treba nam le preiskovati, s koliko in s katerimi sestavinami je môči načrtati trikotnik določene veličine in oblike; kajti vsi trikotniki, kateri imajo te sestavine paroma jednake, so potem skladni.

1.) Z jedno samo dano sestavino, bodi si kot, bodi si stranica, môči je načrtati brezštevilno različnih trikotnikov, imajočih ono sestavino. Jedna sestavina tedaj ne določuje veličine in oblike trikotniku.

2.) Tudi z dvema sestavinama: z dvema kotoma, z jedno stranico in jednim priležnim kotom, z jedno stranico in tej nasprotnim kotom, ali z dvema stranicama, nam je môči načrtati brezštevilno trikotnikov, v katerih sta dani sestavini jednaki, druge pa nejednake. Dve sestavini tedaj tudi ne določujeta veličine in oblike trikotniku.

3.) Ako so dane tri sestavine trikotnikove, morajo biti te:

a) vsi trije koti;

b) jedna stranica in dva kota (dva priležna ali jeden priležen in nasprotni kot);

c) dve stranici in kot, katerega le-te oklepata;

d) dve stranici in jeden izmed nasprotnih kotov;

e) vse tri stranice.

V trikotniku določujeta dva kota tretji kot; z dvema kotoma pa ni môči načrtati določenega trikotnika, zatorej tudi trije koti ne določujejo veličine in oblike trikotniku. Prvi izmed navedenih pet slučajev nam tedaj ne podaja toliko, da bi mogli določen trikotnik načrtati.

Treba nam tedaj le še zadnje štiri slučaje preiskati.

§ 56. **Načrtaj trikotnik, ako je dana jedna stranica in dva kota.**

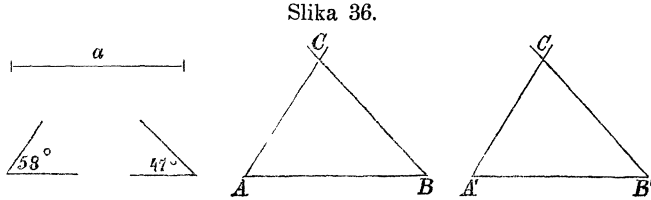
Kota sta ali dani stranici priležna, ali pa ji je jeden priležen, drugi nasproten.

a) Vzemimo, da je (slika 36.) a dana stranica, in da znašata kota 58^0 in 47^0 in sta ji priležna.

Potegni $AB = a$; s tem si določil dvoje trikotnikovih oglišč, A in B. Načrtaš li v A kot 58^0 in v B kot 47^0, določujeta ti premi AC in BC, kateri tvorita s stranico AB ta dva kota, mer druge in tretje trikotnikove stranice; tretje oglišče C more biti tedaj le presečišče teh dveh prem.

Dane tri sestavine dadé tedaj trikotnik ABC in ta ima po polnem določeno veličino in obliko.

Slika 36.



Ako načrtaš z istimi tremi sestavinami drug trikotnik $A'B'C'$, ima ta isto veličino in obliko kakor ABC. Položimo li ta dva trikotnika takó jednega na druzega, da padejo njiju jednake sestavine druga na drugo, kriti morata se po polnem; trikotnika sta tedaj skladna.

Iz tega izvajamo:

1.) Jedna stranica in nji priležna kota določujejo trikotnik po polnem.

2.) (**I. izrek o skladnosti.**) Dva trikotnika sta skladna, ako imata jedno stranico in tej priležna kota paroma jednake.

b) Ako so dani v trikotniku jedna stranica, jeden priležen in nasprotni kot, znan je tudi tretji kot; potem pa je dana jedna stranica in tej priležna kota. Ta slučaj izpremenimo tedaj lahko v prejšnji *a)* in potem velja v obče: Jedna stranica in dva kota določujejo trikotnik po polnem.

Naloge.

1.) Načrtaj s pomočjo merila in transportérja trikotnik s stranico 1 $^{c}/_{m}$ 9 $^{m}/_{m}$ in priležnima kotoma 69^0 in 41^0.

2.) Poskusi načrtati trikotnik s stranico 2 $^{c}/_{m}$ in kotoma 105^0 in 75^0. Kakšna morata biti priležna kota, da je môči trikotnik načrtati?

3.) Načrtaj trikotnik, v katerem meri jedna stranica 27 $^{m}/_{m}$, jeden izmed priležnih kotov 59^0 in nasprotni kot 72^0.

4.) Načrtaj pravokoten trikotnik, ako sta dana:

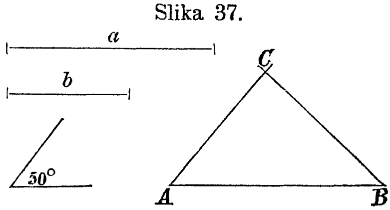
a) jedna kateta = 15 $^{m}/_{m}$ in priležni ostri kot = 57^0;

b) jedna kateta = 3 $^{c}/_{m}$ in nasprotni kot = 63^0;

c) hipotenuza = 2 $^{c}/_{m}$ in jeden izmed priležnih kotov = 42^0.

§ 57. Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici in kot, katerega le-te oklepata.

Slika 37.



Vzemimo, da sta a in b (slika 37.) dani stranici in da znaša kot, katerega oklepata, 50^0.

Da načrtaš s temi tremi sestavinami trikotnik, načrtaj najprej kot $A = 50^0$, potem pa na njega krakih dani stranici a in b. Na ta način si določil ležo ogliščema B in C, tedaj tudi tretjo stranico. ABC je potem oni trikotnik, kateri ima dane tri sestavine.

Ako načrtaš z istimi tremi sestavinami še drug trikotnik, imeti mora le-ta isto veličino in obliko kakor ABC.

Iz tega izvajamo:

1.) Dve stranici in kot, katerega te dve stranici oklepata, določujejo trikotnik po polnem.

2.) (II. izrek o skladnosti.) Dva trikotnika sta skladna, ako imata dve stranici in kot, katerega te dve stranici oklepata, paroma jednake.

Naloge.

1.) Načrtaj trikotnik s stranicama 2 c/m in 3 c/m, kateri oklepata kot 62°.

2.) Dve daljici merita 17 m/m in 12 m/m; načrtaj z njima trikotnik, v katerem znaša kot med njima 1.) 45°, 2.) 82°.

3.) Načrtaj jednakokrak trikotnik, čegar krak meri 38 m/m in kot pri vrhu 72°.

4.) Načrtaj pravokoten trikotnik, čegar kateti merita 2 c/m 2 m/m in 2 c/m 6 m/m.

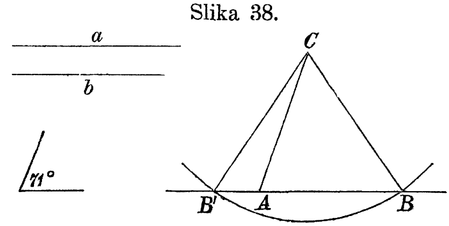
5.) Načrtaj jednakokrak pravokoten trikotnik, v katerem znaša kateta 2 c/m.

§ 58. Načrtaj trikotnik, ako sta dani dve stranici in kot, kateri je jedni izmed teh dveh stranic nasproten.

Dani kot je nasproten ali večji ali manjši izmed danih dveh stranic.

a) Vzemimo, da sta (slika 38.) a in b dani stranici, izmed katerih je $a > b$, in da znaša večji stranici nasprotni kot 71°.

Slika 38.



Načrtaš li kot 71° in na njega kraku AC manjšo stranico b, določil si dvoje trikotnikovih oglišč, A in C. Tretje oglišče B mora biti v drugem kraku AB, in sicer od oglišča C za daljico a oddaljeno; ono mora biti tedaj ob jednem tudi v krožnici, katero načrtaš s C s polumerom a. Kjer se tedaj sečeta krožnica in krak AB, tam je oglišče B. Krožnica pa seče krak AB v dveh točkah B in B' in zarad tega dobimo dva trikotnika ABC in $AB'C$. Izmed teh dveh pa ima le prvi trikotnik ABC dane tri sestavine; drugi $AB'C$ ima sicer tudi dani stranici, nima pa danega kota nego njegov sokot in zato ne zadostuje nalogi.

Drugi trikotnik, katerega načrtaš z istimi tremi sestavinami, imeti mora isto veličino in obliko kakor ABC.

Iz tega izvajamo:

1.) Dve stranici in kot, kateri je večji izmed teh dveh stranic nasproten, določujejo trikotnik po polnem.

2.) (III. izrek o skladnosti.) Dva trikotnika sta skladna, ako imata dve stranici in kot, kateri je večji izmed teh stranic nasproten, paroma jednake.

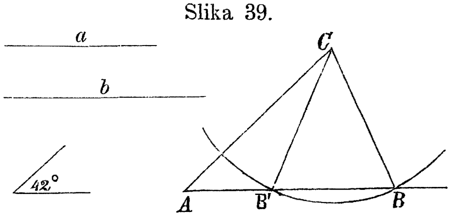
Naloge.

1.) Načrtaj trikotnik, čegar dve stranici znašata $1\,^{c}/_{m}$ in $1\,^{c}/_{m}$ $5\,^{m}/_{m}$, drugi iz med teh stranic nasprotni kot pa 76^{0}.

2.) Načrtaj pravokoten trikotnik, čegar hipotenuza meri $5\,^{c}/_{m}$, jedna kateta pa $3\,^{c}/_{m}$.

b) Recimo, da sta (slika 39.) a in b dani dve stranici, in sicer $a < b$, in da znaša manjši izmed teh stranic nasprotni kot 42^{0}.

Slika 39.

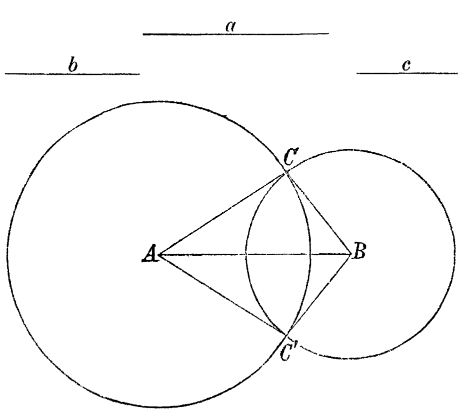


Na isti način kakor zgoraj pri *a)* dobimo dva trikotnika ABC in $AB'C$; obadva imata dane tri sestavine, a različno veličino in obliko. Dve stranici in kot, kateri je manjši izmed teh stranic nasproten, tedaj ne določujejo trikotnika.

§ **59.** Načrtaj trikotnik, ako so dane vse tri stranice.

Vzemimo, da so (slika 40.) a, b, c dolžine danih treh stranic. Ako načrtaš daljico $AB = a$, določiš dvoje trikotnikovih oglišč, A in B. Če je b dolžina drugi stranici AC, mora biti tretje oglišče C od A za daljico b oddaljeno; C mora tedaj biti v krožnici, katero napišeš z A s polumerom b. Da je c dolžina tretji stranici BC, treba, da je oglišče C tudi v krožnici, načrtani z B s polumerom c. Tretje oglišče C mora biti tam, kjer se sečeta te dve krožnici. Ker pa imata krožnici dvoje presečišč C in C', dobimo dva trikotnika ABC in ABC', imajoča dane tri stranice. Toda obadva trikotnika imata isto veličino in obliko; kajti, če zavrtimo trikotnik ABC' okoli AB in ga položimo na trikotnik ABC, krijeta se trikotnika popolnoma.

Slika 40.



Drugi trikotnik, katerega načrtamo z istimi tremi sestavinami, mora imeti isto veličino in obliko kakor ABC.

Odtod izvajamo:

1.) Tri stranice določujejo trikotnik popolnoma.

2.) (IV. izrek o skladnosti.) Dva trikotnika sta skladna, ako imata vse tri stranice paroma jednake.

Naloge.

1.) Načrtaj trikotnik s stranicami 8 $^m/_m$, 10 $^m/_m$, 11 $^m/_m$; takisto druzega s stranicami 2 $^c/_m$, 1 $^c/_m$ 6 $^m/_m$, 1 $^c/_m$ 1 $^m/_m$.

2.) Dolžina trem danim daljicam je 2 $^c/_m$, 3 $^c/_m$ in 1 $^c/_m$; poskušaj s temi tremi stranicami trikotnik načrtati.

3.) Načrtaj jednakokrak trikotnik, čegar osnovnica meri 24 $^m/_m$, krak pa 19 $^m/_m$.

4.) Načrtaj jednakostraničen trikotnik s stranico 1 $^c/_m$ 8 $^m/_m$.

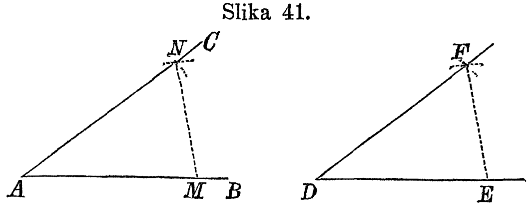
§ 60. Načrtaj trikotnik, kateri je z danim trikotnikom skladen.

Da to nalogo rešiš, vzemi tri take sestavine danega trikotnika, katere trikotnik popolnoma določujejo in s temi načrtaj novi trikotnik. Najpripravnejše so za načrtovanje vse tri stranice. Najprej načrtaj tedaj na kako premo jedno stranico danega trikotnika, potem pa načrtaj z nje krajišč z drugima dvema stranicama dva loka, katera se sečeta; to presečišče je tretje oglišče iskanega trikotnika.

Načrtaj razne trikotnike in k vsacemu skladen trikotnik.

§ 61. Načrtaj kot, kateri je jednak danemu kotu BAC (slika 41.)

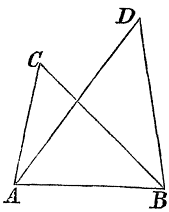
Slika 41.



Potegnivši DE načrtaj z A s kakeršnim koli polumerom lok, kateri seče kraka danega kota v M in N; z istim polumerom načrtaj tudi z D lok, sekajoč DE v E; dalje načrtaj z razdaljo MN z E lok, kateri seče z D načrtani lok v F. Ako potegneš sedaj DF, je $\measuredangle EDF = \measuredangle BAC$.

Kajti $\triangle DEF \cong \triangle AMN$ (po IV. izreku o skladnosti); tedaj morata jednakima stranicama EF in MN nasprotna kota EDF in MAN jednaka biti.

Slika 42.



§ 62. Vrtimo li narazen kraka kota ABC (slika 42.), ne izpremenivši jima dolžine, veča se ne le kot, nego tudi krajišči krakov oddaljujeta se bolj in bolj. Ako potegnemo tedaj AC in AD, imata trikotnika ABC in ABD dve stranici paroma jednaki, namreč $AB = AB$, $BC = BD$; tretja stranica AD pa je v $\triangle\ ABD$ večja od tretje stranice AC v $\triangle\ ABC$. Ob jednem je stranici AD nasprotni kot ABD v $\triangle\ ABD$ večji nego stranici AC nasprotni kot ABC v $\triangle\ ABC$.

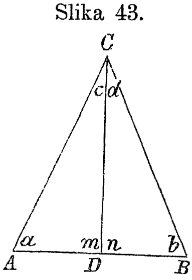
Iz tega izvajamo:

1.) Ako sta v dveh trikotnikih dve stranici paroma jednaki, kota med njima pa nejednaka, nasprotna je večjemu izmed teh kotov tudi večja stranica.

2.) Ako sta v dveh trikotnikih dve stranici paroma jednaki, tretji stranici pa nejednaki, nasproten je večji izmed teh stranic tudi večji kot.

6. O nekaterih glavnih svojstvih trikotnikovih in njih uporabi.

Slika 43.



§ 63. Vzemimo, da je (slika 43.) $CD \perp AB$. Zavrtimo li od CD trak okoli točke C v ležo CA, in potem drug trak za isto toliko na drugo stran v ležo CB, potem razločujeta se pravokotna trikotnika CDA in CDB, katera smo na ta način dobili, le po leži, veličina in oblika pa sta jima jednaki; če položimo tedaj jednega na druzega, krijeta se v vseh svojih sestavinah popolnoma. Zatorej so te-le daljice in ti-le koti jednaki:

1.) $AC = BC$. Trikotnik ABC je tedaj jednakokrak; AB je njega osnovnica, C pa vrh.

2.) $AD = BD$. V jednakokrakem trikotniku ABC razpolavlja tedaj prema CD osnovnico AB.

3.) $a = b$. V jednakokrakem trikotniku ABC sta kota na osnovnici jednaka.

4.) $c = d$. Prema CD razpolavlja torej v jednakokrakem trikotniku ABC kot pri vrhu ACB.

5.) $m = n$. To velja že po pogoji, ker je $CD \perp AB$.

Iz tega premišljevanja izvirajo ti-le izreki:

a) V vsakem jednakokrakem trikotniku sta kota na osnovnici jednaka; ali: Ako sta v trikotniku dve stranici jednaki, jednaka sta tudi njima nasprotna kota.

V jednakostraničnem trikotniku so vsi koti jednaki, vsak znaša torej 60°.

b) Ako sta jednaka v trikotniku dva kota, jednaki sta tudi nasprotni stranici.

c) Pravokotnica, katero spustimo v jednakokrakem trikotniku z vrha na osnovnico, razpolavlja osnovnico in kot pri vrhu.

Višina razpolavlja osnovnico ne le v jednakokrakem nego tudi v jednakostraničnem trikotniku.

d) Prema, katera veže v jednakokrakem trikotniku vrh s sredo osnovnice, stoji na osnovnici pravokotno ter razpolavlja kot pri vrhu.

e) Prema razpolavljajoča v jednakokrakem trikotniku kot pri vrhu, pravokotna je na osnovnici ter jo razpolavlja.

f) Pravokotnica, katero postavimo v jednokokrakem trikotniku v sredi osnovnice, gre skoz vrh ter razpolavlja kot pri vrhu.

Naloge.

1.) Kolik je v jednakokrakem trikotniku vsak kot na osnovnici, če je kot pri vrhu prav kot?

2.) V jednakokrakem trikotniku znaša kot pri vrhu *a)* 23° 35′, *b)* 65° 10′ 36″, *c)* 118° 48′ 29″; kolik je vsak kot na osnovnici?

3.) Kolik je v jednakokrakem trikotniku kot pri vrhu, ako znaša kot na osnovnici *a)* 15° 12′, *b)* 48° 5′ 49″, *c)* 73° 41′ 17″?

4.) V jednakokrakem trikotniku znaša vnanji kot pri vrhu *a)* 82° 13′ 55″, *b)* 113° 51′ 10″, *c)* 136° 17′ 32″; kolik je vsak kot trikotnikov?

5.) Vnanji kot, kateregа tvori v jednakokrakem trikotniku podaljšana osnovnica, znaša *a)* 120° 53′ 37″, *b)* 144° 31′ 29″, *c)* 151° 47′ 23″; kolik je vsak kot trikotnikov?

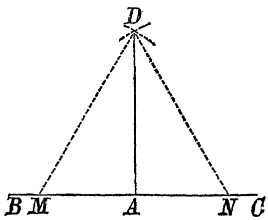
6.) Načrtaj jednakokrak trikotnik, ako sta dana:

a) osnovnica in priležen kot;
b) osnovnica in nasprotni kot;
c) krak in kot na osnovnici;
d) krak in kot pri vrhu.

§ 64. Postavi na premo BC v točki A (slika 44.) pravokotnico.

a) Prema, katera veže v jednakokrakem trikotniku sredo osnovnice z vrhom, stoji na osnovnici pravokotno (§ 63, *d)*. Da tedaj to nalogo rešiš, načrtaj jednakokrak trikotnik *MND* takó, da pade njega osnovnica v dano premo *BC,* in dana točka *A* v sredo osnovnice; točko *A* in vrh *D* zveži potem s premo.

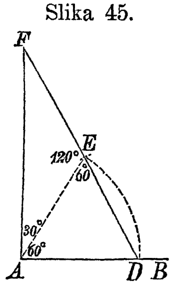
Slika 44.



Ako treba tedaj v dani točki na premo pravokotnico postaviti, odreži z one točke na obéh straněh na premi jednake kose, s presečišč načrtaj z istim polumerom dva loka, katera se sečeta v točki. Prema, katera veže to presečišče in dano točko, je zahtevana pravokotnica.

b) Vzemimo, da je dana točka *A* krajišče dani premi *AB,* kakor v sliki 45. V tem slučaji podaljšaj premo čez to krajišče in potem postopaj kakor prej. Če se pa prema čez to krajišče ne dá podaljšati, načrtaš zahtevano pravokotnico lahko takó-le: Z *A* načrtaj s kakeršnim koli polumerom lok, sekajoč *AB* v točki *D;* z istim polumerom presekaj z *D* prejšnji lok v *E,* potem pa napiši z *E* nov lok, kateri seče skoz *D* in *E* potegneno premo v *F*. Prema *AF* je potem pravokotna na *AB*.

Slika 45.



Lahko se prepričaš, da si nalogo prav razrešil. Iz načrtovanja je namreč razvidno, da je trikotnik *ADE* jednakostraničen, tedaj vsak njegov kot jednak 60^0. Trikotnik *AEF* je jednakokrak, torej sta kota na osnovnici *F* in *EAF* jednaka; ker je pa $\sphericalangle\ AEF =$ $= 120^0$, znašata obadva kota na osnovnici skupaj 60^0, tedaj kot $EAF = 30^0$. Zatorej $\sphericalangle\ DAF = \sphericalangle\ EAD + \sphericalangle\ EAF =$ $= 60^0 + 30^0 = 90^0$, in zarad tega $AF \perp AB$.

N a l o g e.

1.) Načrtaj jednakostraničen trikotnik, čegar višina meri 1 c/m.

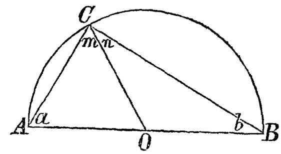
2.) Načrtaj jednakokrak trikotnik, ako sta dani:

a) osnovnica in višina;

b) ako sta dana krak in višina.

§ 65. Načrtaj nad dano daljico kakor hipotenuzo pravokoten trikotnik.

Slika 46.



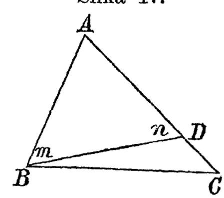
Vzemimo, da je (slika 46.) AB dana daljica in O nje sreda. Načrtaš li z O s polumerom AO polukrog ter potegneš s katere koli njegove točke C premi AC in BC, dobiš trikotnik ACB, kateri je pri C pravokoten.

Kajti, če potegneš CO, je v jednakokrakem trikotniku AOC kot $m = a$, prav takó v jednakokrakem trikotniku $BOCn = b$, tedaj tudi vsota $m + n$ jednaka vsoti $a + b$; koti m, n, b in a pa so koti trikotnika ACB, tedaj znaša njih vsota dva prava, zatorej $m + n$ ali kot ACB kakor polovica one vsote jeden prav kot.

Ker je točka C katera koli točka v polukrožnici, dobiš brezštevilno trikotnikov, zadostujočih nalogi, t. j. naloga je nedoločena.

§ **66.** Ako je (slika 47.) $AB = AD$, torej trikotnik ABD jednakokrak, sta kota na osnovnici m in n jednaka. Podaljšamo li AD do katere koli točke, n. pr. C, ter potegnemo BC, potem je kot ABC očividno večji nego m; ACB pa je prav za toliko manjši od n, kajti tretji trikotnikov kot A ostal je neizpremenjen.

Slika 47.



V trikotniku ABC je tedaj stranica $AC > AB$ in tudi kot $ABC > ACB$.

Iz tega izvajamo:

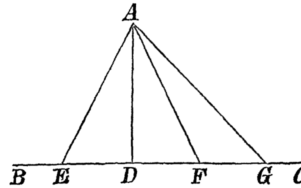
1.) V vsakem trikotniku je večji stranici večji kot nasproten; in obratno:

2.) V vsakem trikotniku je večjemu kotu večja stranica nasprotna.

V pravokotnem trikotniku je hipotenuza, v topokotnem trikotniku pa topemu kotu nasprotna stranica največja.

§ **67.** Potegnemo li od točke A (slika 48.) do preme BC pravokotnico AD in več poševnih daljic, AE, AF, AG, dobimo pravokotne trikotnike ADE, ADF, ADG, v katerih je AD kateta, AE, AF, AG pa so hipotenuze. Ker pa je v pravokotnem trikotniku hipotenuza večja od katete, je tudi vsaka izmed poševnih daljic AE, AF, AG večja nego pravokotnica AD.

Slika 48.



Iz tega izvira:

1.) Pravokotnica je najkrajša prema, katero je môči od kake točke do preme črte potegniti.

Pravokotnica služi tedaj tudi v to, da merimo razdaljo ali razstoj točke od preme.

Ako je v sliki 48. $DE = DF$, kriti morata se trikotnika ADE in ADF, drug na druzega položena, popolnoma; potem pa je tudi $AE = AF$, t. j.:

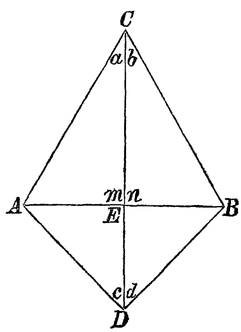
2.) Dve poševni daljici, kateri sta od podnožišča *(Fusspunkt)* pravokotnice jednako oddaljeni, sta jednaki.

V pravokotnem trikotniku ADF je kot AFD oster, torej njegov sokot AFG top, in zarad tega v trikotniku AFG stranica $AG > AF$, t. j.:

3.) Izmed dveh poševnih daljic je ona večja, katera je od podnožišča pravokotnice bolj oddaljena.

§ 68. Vzemimo, da sta trikotnika ABC in ABD (slika 49.), katera smo načrtali nad osnovnico AB, jednakokraka, da je tedaj $AC = BC$ in $AD = BD$.

Slika 49.



Potegnemo li skoz vrha C in D daljico CD, potem dobimo trikotnika ACD in BCD; ta dva sta skladna, ker imata vse tri stranice paroma jednake. Ako tedaj zavrtimo v mislih trikotnik ACD okoli daljice CD toliko, da pade na trikotnik BCD, krijeta se popolnoma ne le oba dva trikotnika, nego tudi daljici AE in BE. Koti, kateri se krijejo, morajo biti pa jednaki in prav takó tudi daljice. Tedaj je

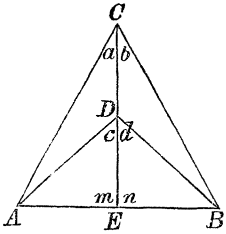
1.) $a = b$ in $c = d$,

2.) $AE = BE$,

3.) $m = n$, ali $CD \perp AB$.

Ako načrtamo tedaj nad skupno osnovnico dva jednakokraka trikotnika ter potegnemo skoz njiju vrha premo, razpolavlja ta 1.) kota pri vrhih, 2.) skupno osnovnico ter stoji 3.) pravokotno na tej osnovnici.

Slika 50.

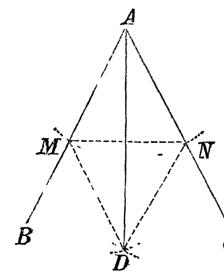


V prejšnji sliki sta jednakokraka trikotnika na nasprotnih stranéh skupne osnovnice. Prav takó lahko tudi sklepamo, če sta jednakokraka trikotnika na isti strani osnovnice kakor v sliki 50. Izrek, katerega smo tu dokazali, velja tedaj, bodi-si da sta jednakokraka trikotnika na isti, bodi-si da sta na nasprotnih stranéh osnovnice.

§ **69.** S pomočjo prejšnjega izreka razrešiš lahko več jako važnih nalog.

Razpolovi dani kot BAC (slika 51.)

Slika 51.



Da to nalogo razrešiš, treba najprej, da načrtaš jednakokrak trikotnik, v katerem je dani kot BAC kot pri vrhu; to pa dosežeš, ako zvežeš, odsekavši na krakih danega kota jednaka kosa, krajišči M in N. Potem načrtaj nad osnovnico MN še drug jednakokrak trikotnik MND ter potegni skoz vrha premo AD. Na ta način dobiš tó-le razrešitev:

Da razpoloviš dan kot, načrtaj z njegovega vrha lok, kateri mu preseče oba dva kraka; s teh presečišč načrtaj z istim polumerom zopet dva loka, katera se sečeta; prema, katera veže to zadnje presečišče s kotovim vrhom, razpolavlja kot.

Naloge.

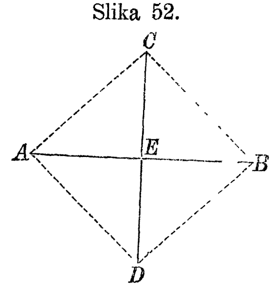
1.) Načrtaj različne kote in razpolovi jih.

2.) Razdeli kot na 4, na 8 jednakih delov.

3.) Potegni v trikotniku z vsakega oglišča premo, razpolavljajočo kot ob onem oglišči — kotno razpolovnico (Winkel-Halbierungslinie). — V koliko točkah sečejo se vse tri kotne razpolovnice?

§ 70. Razpolovi daljico AB (slika 52.)

Slika 52.



Tu treba načrtati nad AB dva jednakokraka trikotnika ter njiju vrha s premo CD zvezati. Razrešitev je tedaj ta-le:

Da razpoloviš dano daljico, načrtaj z njenih krajišč loke, izmed katerih se sečeta dva nad in dva pod daljico; prema, katero potegneš skoz te presečišči, razpolavlja dano daljico.

Naloge.

1.) Potegni več daljic in vsako razdeli, najprej mereč na oko in potem geometrijsko na dva jednaka dela.

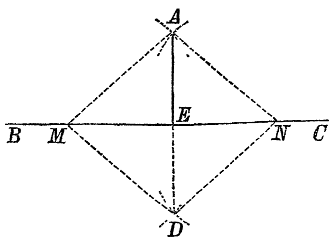
2.) Razdeli daljico na 4, na 8 jednakih delov.

3.) Razpolovi v trikotniku vse tri stranice ter zveži sredo vsake stranice z nasprotnim ogliščem s premo — središnico (Mittellinie). — V koliko točkah sečejo se te središnice?

4.) Razpolovi trikotniku vsako stranico, ter postavi v razpoloviščih pravokotnice — sredinske pravokotnice (Mittelsenkrechte). — V koliko točkah sečejo se vse tri pravokotnice?

§ 71. Spusti na premo *BC* (slika 53.) s točke *A* zunaj nje pravokotnico.

Slika 53.



Ker je prema, ki veže vrha dveh jednakokrakih trikotnikov, postavljenih nad isto osnovnico, pravokotna na tej osnovnici, treba tu najprej načrtati trikotnik, kateremu je dana točka *A* vrh, in čegar osnovnica pade v dano premo *BC;* tak trikotnik pa dobiš, ako načrtaš z *A* z dosti velikim polumerom lok, sekajoč dano premo v točkah *M* in *N;* te točki določujeta osnovnico *MN*. Ako načrtaš nad to osnovnico še drug jednakokrak trikotnik *MND* ter pogneš *AD,* stati mora *AD,* tedaj tudi *AE* pravokotno na *BC*.

Da sputiš tedaj s točke pravokotnico na premo, načrtaj z one točke z dosti velikim polumerom lok, sekajoč premo v dveh točkah; s teh toček načrtaj zopet z istim polumerom dva loka, katera se sečeta. Prema, ki gre skoz to zadnje presečišče in dano točko, je iskana pravokotnica.

1.) Načrtaj zunaj preme več toček ter spusti od vsake pravokotnico na premo.

2.) Načrtaj trikotnik ter spusti z vsakega oglišča pravokotnico na nasprotno stranico — višino. — V koliko točkah sečejo se vse tri višine?

§ 72. Kakó geometrijsko nekatere kote načrtavamo.

1.) Načrtaj kot *a)* 90^0, *b)* 45^0, *c)* 135^0.

a) Potegni dve premi, kateri stojita druga na drugi pravokotno (po § 64. ali § 71.)

b) Načrtaj kot 90^0 in le-tega razpolovi.

c) Načrtaj kot 45^0 in njegov sokot.

2.) Načrtaj kot *a)* 60^0, *b)* 30^0, *c)* 120^0, *d)* 150^0.

a) Načrtaj jednakostraničen trikotnik.

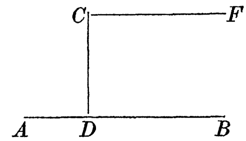
b) Razpolovi kot 60^0.

c) Načrtaj h kotu 60^0 sokot.

d) Načrtaj h kotu 30^0 sokot.

§ 73. Potegni skoz točko *C* (slika 54.) zunaj preme *AB* s to vzporednico.

Slika 54.

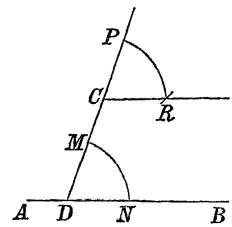


Spusti s C na AB pravokotnico CD, v C pa postavi na CD pravokotnico CF; CF in AB stojita pravokotno na CD, torej sta vzporedni.

Nalogo rešiš lahko tudi takó-le:

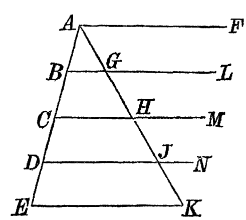
Skoz C (slika 55.) potegni premo, katera seče dano premo AB v D, v točki C pa načrtaj h kotu BDC jednak protikot. V ta namen načrtaj z D lok MN, potem s C z istim polumerom lok PR in slednjič s P z razstojem toček M in N lok, kateri seče lok PR v R. Ako potegneš skoz točki C in R premo, je $\sphericalangle PCR = \sphericalangle CDB$, tedaj $CR \parallel AB$.

Slika 55.



§ **74.** Pomika li se po kraku AE kota EAK (slika 56.) prema kakeršne koli dolžine, n. pr. AF vzporedno takó navzdol, da postanejo na onem kraku jednaki odseki AB, BC, CD, DE ter da pride premikajoča se prema zapored v leže BGL, CHM, DJN, EK, jednaki so med seboj tudi odseki AG, GH, HJ, JK, katere smo na ta način na drugem kraku AK dobili.

Slika 56.



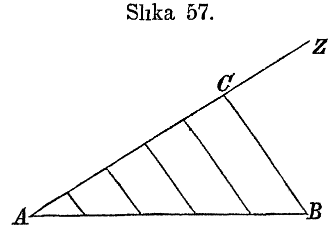
To izražujemo lahko takó-le:

Ako razdelimo v trikotniku jedno stranico na več jednakih delov ter potegnemo skoz vsako razdelišče vzporednico z drugo stranico, razdelimo s tem tudi tretjo stranico na prav toliko jednakih delov.

§ **75.** *Razdeli dano daljico* AB (slika 57.) *na več,* n. pr. *5 jednakih delov.*

Skoz krajišče A potegni trak AZ, kateri oklepa z dano daljico kateri koli kot; potem načrtaj na AZ 5 jednakih, sicer pa kolikor bodi dolzih daljic do C. Ako zvežeš C z drugim krajiščem B, dobiš trikotnik ACB, v katerem je razdeljena stranica AC na 5 jednakih delov; da razdeliš tudi AB na 5 jednakih delov, potegni skoz vsako razdelišče daljice AC vzporednico s CB.

Slika 57.



Razdeli daljico na 3, 6, 7, 9, 10, 12 jednakih delov.

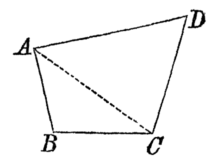
IV. Četverokotniki.

1. Pojasnila.

§ 76. Ravno ploskev, katero mejé štiri daljice, imenujemo četverokotnik *(Viereck)*.

Vsak četverokotnik $ABCD$ (slika 58.) ima štiri stranice in štiri kote. Vsoto vseh četverokotnikovih stranic imenujemo njega obseg. Daljico AC, vežočo dvoje nasprotnih oglišč četverokotnikovih, zovemo diagonalo (prekotnico).

Slika 58.



Na koliko trikotnikov raztvori diagonala četverokotnik?

Koliko diagonal je v četverokotniku mogočih?

2. O kotih četverokotnikovih.

§ 77. Ako potegnemo v četverokotniku $ABCD$ (slika 58.) diagonalo AC, raztvorimo četverokotnik na dva trikotnika in vsi štirje koti četverokotnikovi znašajo prav toliko, kolikor znaša vseh šest kotov v obeh dveh trikotnikih; koti v obeh dveh trikotnikih pa znašajo $4R$. Iz tega izvajamo:

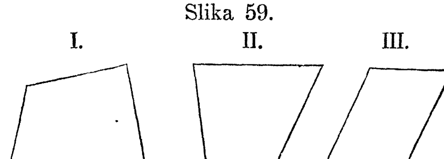
V vsakem četverokotniku je vsota vsem kotom jednaka štirim pravim ali 360°.

Kolik je v četverokotniku vsak kot, ako so vsi štirje koti jednaki?

3. Koliko je vrst četverokotnikov.

§ 78. Oziraje se na ležo nasprotnih stranic razločujemo troje četverokotnike.

Slika 59.

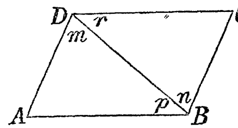


Četverokotnik, v katerem ni nijedna stranica s kako drugo vzporedna, imenujemo trapezoid (slika 59., I.) Četverokotnik, v katerem sta dve nasprotni stranici vzporedni, drugi dve pa ne, zovemo trapez (slika 59., II.) Četverokotnik pa, v katerem sta po dve nasprotni stranici vzporedni, imenujemo vzporednik ali paralelogram (slika 59., III.)

Trapez, v katerem sta nevzporedni stranici jednaki, imenujemo jednakokrak.

§ 79. Vzemimo, da je (slika 60.) $AB \parallel CD$ in $AD \parallel BC$, da je tedaj $ABCD$ paralelogram. Ako potegnemo diagonalo BD, sta izmenična kota m in n, in prav takó tudi izmenična kota p in r jednaka; zatorej je $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (po I. izreku o skladnosti), tedaj $AB = CD$ in $AD = BC$.

Slika 60.



Odtod izvajamo:

1.) Diagonala deli vsak paralelogram na dva skladna trikotnika.

2.) V vsakem paralelogramu sta po dve nasprotni stranici jednaki; ali:

Vzporednice med vzporednicami so jednake.

Iz druzega izreka izvira tudi:

Pravokotnice med vzporednicami so jednake.

V paralelogramu so jednake vse stranice, ako sta jednaki dve stikajoči se stranici.

Paralelograme delimo tedaj oziraje se na dolžino njih stranic na jednakostranične in raznostranične.

§ 80. Ker je (slika 60.) $p = r$ in $n = m$, je tudi $p + n = r + m$, ali $\sphericalangle B = \sphericalangle D$. Prav takó pokažeš lahko, da je $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.

V paralelogramu sta tedaj po dva in dva nasprotna kota jednaka.

Ako je v paralelogramu jeden kot prav kot, pravi so tudi vsi drugi; ako je jeden kot poševen, poševni so tudi vsi drugi.

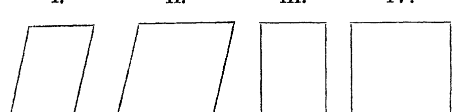
Oziraje se na veličino kotov razločujemo torej pravokotne in poševnokotne paralelograme.

V paralelogramu znaša jeden kot *a)* $48^0\ 18'$, *b)* $94^0\ 35'\ 40''$; kolik je vsak izmed ostalih treh kotov?

§ 81. Oziraje se na veličino kotov in stranic dobimo te-le štiri vrste paralelogramov: poševnokotni raznostranični paralelogram ali romboid (slika 61., I.);

Slika 61.

I. II. III. IV.



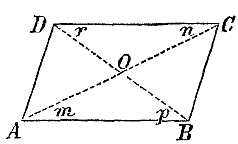
poševnokotni jednakostranični paralelogram ali romb (slika 61., II.); pravokotni raznostranični paralelogram ali pravokotnik *(Rechteck,* slika 61., III.); in pravokotni jednakostranični paralelogram ali kvadrat (slika 61., IV.)

V romboidu niso jednaki niti koti niti stranice, v rombu so stranice jednake, v pravokotniku so koti jednaki, v kvadratu so stranice in koti jednaki.

V rombu ima jeden kot *a)* $58^0\,12'\,43''$, *b)* $109^0\,28'\,15''$; kolik je vsak izmed druzih treh kotov?

Četverokotnik, v katerem sta po dve stranici jednaki, toda po dve stikajoči se in ne po dve nasprotni, kakor *ADBC* v sliki 49., imenujemo deltoid.

Slika 62.



§ 82. Potegnemo li v paralelogramu *ABCD* (slika 62.) diagonali *AC* in *BD,* potem je $\triangle\, AOB \cong \triangle\, COD$ (po I. izreku o skladnosti), ker je $AB = CD$, $m = n$, $p = r$; zatorej morajo biti jednakim kotom nasprotne stranice jednake, tedaj $AO = CO$, $BO = DO$.

Iz tega izvajamo:

V vsakem paralelogramu razpolavljata diagonali druga drugo.

Razven tega lahko dokažeš, uporabljujoč izreke o skladnosti trikotnikov, da imajo diagonale v paralelogramih še ta-le svojstva:

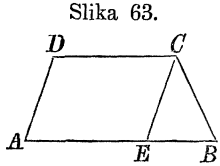
1.) V pravokotniku sta diagonali jednaki.

2.) V rombu stojita diagonali pravokotno druga na drugi.

3.) V kvadratu sta diagonali jednaki ter stojita pravokotno druga na drugi.

§ 83. Ako potegneš v trapezu *ABCD* (slika 63.) $CE \parallel DA$, razstaviš ga na paralelogram *AECD* in trikotnik *ECB;* le-temu so stranice obe nevzporedni stranici trapezovi in diferenca njega vzporednih stranic.

Slika 63.



Ako je trapez *ABCD* jednakokrak, jednakokrak je tudi trikotnik *EBC,* tedaj kot $B = CEB = A$. Prav takó je potem kot $BCD = D$.

Iz tega izvajamo:

1.) V jednakokrakem trapezu sta kota na vsaki vzporedni stranici jednaka.

2.) Obratno: Trapez je jednakokrak, ako sta kota na kateri koli vzporedni stranici jednaka.

§ 84. Paralelogram si mislimo lahko postavljen na katero koli stranico; le-to smatramo potem za osnovnico; pravokotnica, katero spustimo na osnovnico od nasprotne stranice, je potem njega višina.

V pravokotniku je jedna izmed dveh stikajočih se stranic osnovnica, druga pa višina.

V kvadratu smatramo lahko vsako stranico za osnovnico ali višino.

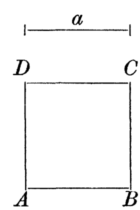
V trapezu je višina pravokotnica, katero spustimo od jedne izmed obeh vzporednic na drugo.

4. Kakó je načrtovati četverokotnike.

§ 85. Načrtaj z dano stranico a (slika 64.) kvadrat.

Načrtaj si najprej prav kot A, potem pa odreži na njega krakih $AD = AB = a$ ter načrtaj z B in D z istim polumerom a dva loka, katera se sečeta v C. Ako potegneš BC in CD, je $ABCD$ zahtevani kvadrat.

Slika 64.



Ako načrtaš z isto stranico a še drug kvadrat, imeti mora le-ta isto veličino in obliko kakor prvi, tedaj mora biti s prvim skladen.

Katere sestavine določujejo tedaj kvadrat po polnem?

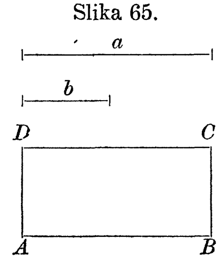
Naloge.

1.) Načrtaj kvadrat, čegar stranica meri 24 $^m/_m$.
2.) Načrtaj kvadrat, kateri ima 1 $^d/_m$ v obsegu.
3.) Načrtaj kvadrat, kateri ima isti obseg kakor dan pravokotnik.
4.) Načrtaj kvadrat, čegar diagonala meri 26 $^m/_m$.

§ 86. Načrtaj pravokotnik, ako sta dani dve stikajoči se stranici a in b (slika 65.)

Načrtaj prav kot A in $AB = a$, $AD = b$, potem pa napiši dva loka, in sicer z B s polumerom b in z D s polumerom a; presečišče C je četrto oglišče zahtevanega pravokotnika.

Slika 65.



Dva pravokotnika sta tedaj skladna, če imata dve stikajoči se stranici paroma jednaki.

Koliko in katere sestavine tedaj določujejo pravokotnik po polnem?

Naloge.

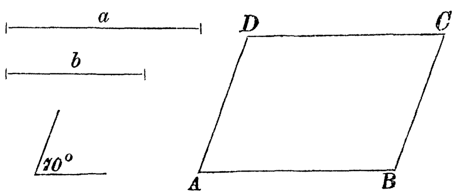
1.) Načrtaj pravokotnik s stranicama $26\,{}^{m}/_{m}$ in $18\,{}^{m}/_{m}$.

2.) Načrtaj pravokotnik, ako sta dani stranica $= 22\,{}^{m}/_{m}$ in diagonala $= 31\,{}^{m}/_{m}$.

3.) Načrtaj pravokotnik, čegar diagonala meri $32\,{}^{m}/_{m}$ in v katerem oklepata diagonali kot 60^0.

§ 87. Načrtaj paralelogram, ako sta dani dve stranici a in b in kot, n. pr. 70^0, katerega te dve stranici oklepata (slika 66.)

Slika 66.



Najprej načrtaj kot $A = 70^0$ ter naredi $AB = a$, $AD = b$, potem pa napiši z B in D s polumeroma a in b dva loka, katera se v C sečeta; $ABCD$ je zahtevani paralelogram.

Koliko in katere sestavine določujejo tedaj po polnem *a)* romb, *b)* romboid?

Naloge.

1.) Načrtaj romb,

a) ako sta dana stranica in jeden kot ($34\,{}^{m}/_{m}$, 30^0);

b) ako sta dani stranica in jedna diagonala ($24\,{}^{m}/_{m}$, $32\,{}^{m}/_{m}$);

c) ako sta dani obe dve diagonali ($18\,{}^{m}/_{m}$, $28\,{}^{m}/_{m}$).

2.) Načrtaj romboid,

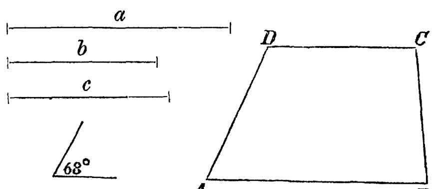
a) ako sta dani dve stranici ($25\,{}^{m}/_{m}$ in $33\,{}^{m}/_{m}$) in kot med njima (60^0);

b) ako sta dani dve stranici in jedna diagonala ($22\,{}^{m}/_{m}$, $29\,{}^{m}/_{m}$, $35\,{}^{m}/_{m}$);

c) ako sta dani obe dve diagonali in kot med njima ($36\,{}^{m}/_{m}$, $43\,{}^{m}/_{m}$, 60^0).

§ 88. Načrtaj trapez, ako je dana jedna vzporedna stranica a, obe nevzporedni stranici b in c in kot (68^0), katerega oklepata stranici a in c (slika 67.)

Slika 67.



Načrtaj kot $A = 68^0$ in naredi $AB = a$, $AD = c$. Skoz D potegni potem vzporednico z AB ter načrtaj z B s polumerom b lok, sekajoč ono vzporednico v C. Ako potegneš še BC, dobiš trapez $ABCD$, kateri ima vse štiri dane sestavine.

Koliko in katere sestavine določujejo po polnem *a)* trapez sploh, *b)* jednakokrak trapez?

Ako sta med danimi sestavinami obe vzporedni stranici, načrtaš trapez s pomočjo trikotnika, čegar osnovnica je jednaka diferenci obeh vzporednih stranic.

N a l o g e.

1.) Načrtaj trapez, čegar vzporedni stranici merita $28\,{}^{m}/_{m}$ in $22\,{}^{m}/_{m}$, jedna nevzporedna stranica pa $17\,{}^{m}/_{m}$, in v katerem oklepata le-ta in prva vzporedna stranica kot 60^{0}.

2.) Načrtaj trapez,

a) ako sta dani obe vzporedni stranici in kota, katera sta jedni izmed teh stranic priležna;

b) ako sta dani obe vzporedni stranici, jeden izmed priležnih kotov in višina;

c) ako sta dani obe vzporedni stranici, jedna nevzporedna stranica in jeden kot;

d) ako sta dani obe nevzporedni stranici, jedna vzporedna stranica in jeden kot.

3.) Načrtaj jednakokrak trapez,

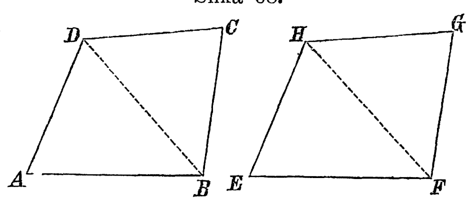
a) ako sta dani obe vzporedni stranici in višina ($28\,{}^{m}/_{m}$, $2\,{}^{c}/_{m}$, $16\,{}^{m}/_{m}$);

b) ako sta dani obe vzporedni stranici in jeden kot ($32\,{}^{m}/_{m}$, $24\,{}^{m}/_{m}$, 120^{0});

c) ako sta dani obe vzporedni stranici in jedna nevzporedna stranica ($26\,{}^{m}/_{m}$, $32\,{}^{m}/_{m}$, $18\,{}^{m}/_{m}$).

§ **89.** N a č r t a j č e t v e r o k o t n i k, k a t e r i j e s k l a d e n z d a n i m č e t v e r o k o t n i k o m $ABCD$ (slika 68.)

Slika 68.



Potegneš li diagonalo BD ter načrtaš $\triangle EFH \cong \triangle ABD$ in nad FH $\triangle FGH \cong \triangle BCD$, potem je četverokotnik $EFGH \cong ABCD$. Sicer pa ni treba diagonale BD res potegniti in trikotnikov po polnem načrtati, kajti glavna stvar je, da določiš novemu četverokotniku vsa štiri oglišča E, F, G, H; ta pa določiš z ozirom na prejšnje načrtovanje takó-le:

Načrtaj $EF = AB$, z E in F napiši potem s polumeroma AD in BD dva loka, katera se sečeta v H; dalje napiši s F in H s polumeroma BC in DC dva loka, katera se v G sečeta ter potegni EH, HG in GF.

V. Mnogokotniki.

1. Pojasnila.

§ 90. Vsako od več daljic omejeno ravno ploskev imenujemo mnogokotnik ali poligon *(Vieleck, Polygon)*.

Mnogokotnik ima prav toliko stranic, kolikor kotov; vsaki stranici sta dva kota priležna in vsak kot oklepata dve stranici.

Mnogokotnik ima tri, štiri, pet, šest, ... stranic in po tem ga imenujemo trikotnik, četverokotnik, peterokotnik, šesterokotnik, i. t. d.

Daljico, vežočo dvoje oglišč, ki nista v isti stranici, imenujemo diagonalo.

Ali je môči v trikotniku diagonalo potegniti?

Koliko diagonal moreš potegniti v četverokotniku od jednega oglišča, in na koliko trikotnikov raztvoriš na ta način četverokotnik?

Koliko diagonal moreš potegniti od jednega oglišča v peterokotniku, koliko v šestero-, deseterokotniku, in na koliko trikotnikov raztvoriš na ta način petero-, šestero-, deseterokotnik?

Število diagonal, katere je môči v mnogokotniku od jednega oglišča potegniti, je vsikdar za 3 manjše nego število stranic; število trikotnikov pa, katere na ta način dobimo, je za 2 manjše nego število stranic.

Koliko diagonal je môči sploh potegniti v četvero-, petero-, šestero-, deseterokotniku?

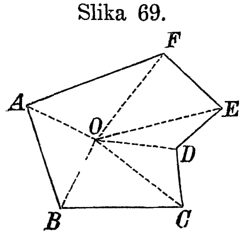
2. O kotih mnogokotnikovih.

§ 91. V mnogokotniku so koti lahko ostri, pravi, topi in tudi izbočeni.

Načrtaj mnogokotnik, kateri ima vse te vrste kotov.

V mnogokotniku znaša vsota vseh kotov dvakrat toliko pravih, kolikor ima mnogokotnik stranic, menj štiri prave.

Slika 69.



Ako potegneš od točke O, ki je znotraj v mnogokotniku $ABCDEF$ (slika 69.), do vseh oglišč preme črte, dobiš toliko trikotnikov, kolikor ima mnogokotnik stranic; v vsakem takem trikotniku znašajo koti dva prava, tedaj koti v vseh teh trikotnikih tolikokrat po 2 prava, kolikor ima mnogokotnik stranic. Med koti teh trikotnikov pa niso le vsi koti mnogokotnika, nego tudi koti okoli točke O, ki niso koti mnogokotnikovi; le-ti pa znašajo 4 prave. Da dobimo tedaj vsoto vseh mnogokotnikovih kotov, treba, da odštejemo od vsote kotov v vseh trikotnikih še 4 prave.

Kolika je vsota vsem kotom v petero-, šestero-, sedmero-, osmero-, devetero-, desetero-, dvanajsterokotniku?

3. Kolikovrstni so mnogokotniki.

§ 92. Mnogokotnik, v katerem so vse stranice jednake, imenujemo jednakostraničen; mnogokotnik, v katerem so vsi koti jednaki, jednakokoten; mnogokotnik, v katerem so vse stranice in vsi koti jednaki, pravilen *(regelmässig)*. Romb je n. pr. jednakostraničen, pravokotnik jednakokoten, kvadrat pravilen četverokotnik.

Ker so v pravilnem mnogokotniku vsi koti jednaki, izračunati nam je lahko veličino jednega izmed njih; v to treba nam le vsoto vseh kotov poiskati ter le-to s številom kotov deliti.

Takó znaša n. pr. vsak kot

v pravilnem trikotniku $\frac{180^0}{3} = 60^0$,

» » četverokotniku $\frac{360^0}{4} = 90^0$,

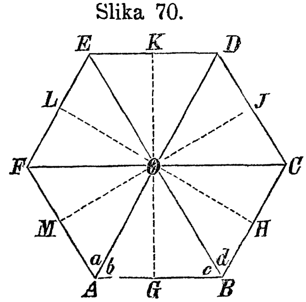
» » peterokotniku $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

» » šesterokotniku $\frac{720^0}{6} = 120^0$, i. t. d.

§ 93. V vsakem pravilnem mnogokotniku je neka točka, katera je od vseh stranic in od vseh oglišč jednako oddaljena. To točko imenujemo zarad tega središče *(Mittelpunkt)* pravilnega mnogokotnika.

Vzemimo, da je $ABCDEF$ (slika 70.) pravilen mnogokotnik in O njega središče, potem je $AO = BO = CO = DO = EO = FO$, in trikotniki AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOA so skladni.

Slika 70.



Ako potegnemo tedaj v pravilnem mnogokotniku preme črte od središča do vseh oglišč, raztvorimo mnogokotnik na toliko skladnih trikotnikov, kolikor ima mnogokotnik stranic.

Preme AO, BO, CO, . . . razpolavljajo mnogokotnikove kote A, B, C, . . ., kajti $a = b$, $c = d$, ...

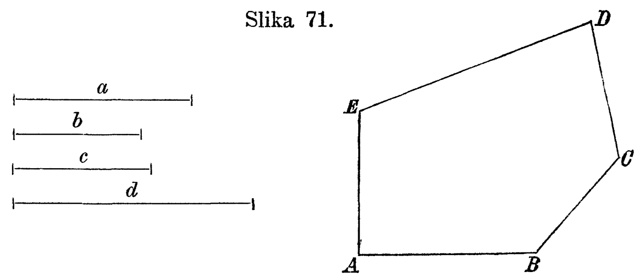
Ako nam je tedaj najti središče pravilnega mnogokotnika, treba le, da razpolovimo dva njegova kota; presečišče teh dveh razpolovnic je iskano središče.

Spustimo li s središča O na mnogokotnikove stranice pravokotnice OG, OH, OJ, . . ., jednake so le-te kot razdalje točke O od stranic AB, BC, CD, ...

4. Kakó je načrtovati mnogokotnike.

§ 94. Načrtaj peterokotnik, ako so dane stranice a, b, c, d, in koti med njimi 132^0, 125^0 in 84^0.

Slika 71.

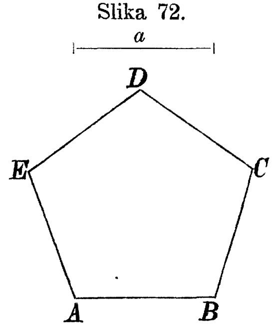


Načrtaj (slika 71.) $AB = a$ in v B kot 132^0; na novem kraku odreži $BC = b$, v C pa načrtaj kot 125^0; dalje naredi $CD = c$, v D pa načrtaj kot 84^0 ter odreži $DE = d$. Ako potegneš še AE, je $ABCDE$ zahtevani peterokotnik.

Načrtaj šesterokotnik, v katerem oklepajo stranice z dolžinami $22\,^{m}\!/_{m}$, $37\,^{m}\!/_{m}$, $18\,^{m}\!/_{m}$, $25\,^{m}\!/_{m}$, $29\,^{m}\!/_{m}$ po vrsti kote 90^0, 150^0, 60^0, 150^0.

§ 95. Načrtaj pravilen peterokotnik, ako je dana njega stranica a (slika 72.)

Slika 72.



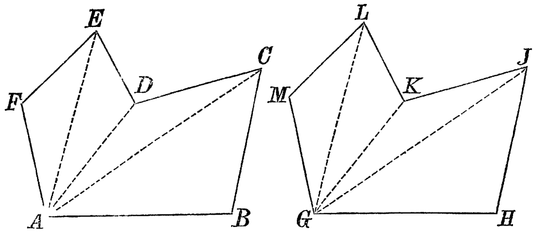
Ker znaša v pravilnem peterokotniku vsak kot 108^0, znani so vsi koti in vse stranice in načrtovanje izvršimo prav takó, kakor smo v § 94. učili.

Načrtaj pravilen šesterokotnik, čegar stranica znaša $2\,^{c}\!/_{m}$.

Kakó je načrtovati pravilne mnogokotnike, povedali bodemo obširneje pri nauku o krogu.

§ 96. Načrtaj mnogokotnik, kateri je skladen z danim mnogokotnikom $ABCDEF$ (slika 73.)

Slika 73.



Ako si mislimo mnogokotnik z diagonalami na trikotnike razdeljen, treba le, da načrtamo trikotnik $GHJ \cong ABC$, nad GJ trikotnik $GJK \cong ACD$, nad GK trikotnik $GKL \cong ADE$, in nad GL trikotnik $GLM \cong AEF$, potem je šesterokotnik $GHJKLM \cong ABCDEF$.

Sicer pa ni ravno treba, da si te trikotnike res načrtamo; vsakakor zadostuje, ako si točke G, H, J, K, L, M takó določimo, da si moremo one trikotnike med njimi misliti. V ta namen načrtamo $GH = AB$ ter napišemo z G in H s polumeroma AC in BC dva loka; njiju presečišče nam dá točko J; potem napišemo z G in J s polumeroma AD in CD dva loka, katera se sečeta v točki K, i. t. d.

Načrtaj petero-, osmero-, deseterokotnik in k vsakemu dotični skladni mnogokotnik.

VI. O veličini premočrtnih likov.

1. Obseg in ploščina.

§ 97. Vsak lik mejé črte. Vse lik meječe črte skupaj imenujemo njega **obseg**, ravno ploskev pa, katero mejé, njega **ploščinsko vsebino** ali **ploščino** *(Flächeninhalt)*.

Premočrtnemu liku določimo obseg, ako seštejemo dolžino vseh njegovih stranic. Ako je pa lik jednakostraničen, jednak je obseg dolžini jedne stranice, pomnoženi s številom stranic. Obseg premočrtnemu liku določiti ni tedaj nikakor težko.

§ 98. Ako nam je določiti **ploščino** kacemu liku, vzamemo katero koli znano ploskev za mersko jednoto ter preiskujemo, kolikokrat ima ploskev, katero nam je izmeriti, le-to jednoto v sebi; število, katero to pové, imenujemo **mersko število** ploskve.

Za **jednoto ploskovni meri** rabi nam sploh **kvadrat**, čegar stranica je jednaka dolgostni jednoti; da jo zaznamenujemo, postavimo pred ime dolgostne jednote še besedo kvadratni, tedaj kvadratni meter ($\square^{m}/$), kvadratni decimeter ($\square^{d}/_{m}$), . . .

Kaj pomenja tedaj $\square^{m}/$, $\square^{d}/_{m}$, i. t. d.?

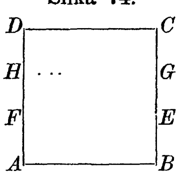
Ploščina lika nam je znana, ako vemo, koliko meri $\square^{m}/$, $\square^{d}/_{m}$, i. t. d. Ako bi tedaj hoteli izmeriti n. pr. mizno ploskev, položili bi nánjo kvadratni decimeter tolikokrat, kolikorkrat je to mogoče; ako bi dobili ostanek, ki je manjši od kvadratnega decimetra, položili bi nanj, kolikorkrat mogoče, kvadratni centimeter. Ali tako neposredno merjenje ploskev bi bilo prezamudno in dostikrat celó nemogoče. Zatorej določujemo ploščino likom navadno posredno; v ta namen merimo z dolgostno jednoto one daljice, od katerih je zavisna veličina likova ter potem iz merskih števil teh daljic s pomočjo prav jednostavnih sklepov ploščino izračunavamo.

Dva lika, imajoča isto ploščino, imenujemo ploščinsko jednaka *(flächengleich)*.

2. Ploščina kvadrata.

§ 99. Ako meri stranica kvadrata $ABCD$ (slika 74.) 3 $^{d}/_{m}$, môči nam je ob stranici AB 3 kvadratne decimetre položiti, pravokotnik $ABEF$ meri tedaj 3 $\square^{d}/_{m}$; prav takó meri pravokotnik $FEGH$ zopet 3 $\square^{d}/_{m}$ in pravokotnik $HGCD$ tudi 3 $\square^{d}/_{m}$. Imamo torej skupaj 3krat 3 = 9 $\square^{d}/_{m}$.

Slika 74.



Ako bi merila stranica kvadratova 3 $^{m}/$, znašala bi ploščina 9 $\square^{m}/$.

Načrtaj kvadrat, čegar stranica meri 4 $^{c}/_{m}$ ter poišči, koliko ima $\square^{c}/_{m}$, in sicer na ta način, da mu razdeliš stranice in zvežeš razdelišča, kakor treba.

Mersko število kvadratove ploščine tedaj najdemo, ako množimo mersko število njegove stranice samo s seboj.

Število samo s seboj množiti ali na drugo potenco povišati, pravi se zarad tega, tudi to število na kvadrat povišati ali kvadrovati.

Prejšnji izrek izražujemo navadno krajše takó-le:

Ploščina kvadratova je jednaka drugi potenci njegove stranice.

Ako pomenja p mersko število ploščine in s mersko število stranice kvadratove, je

$$p = s^2.$$

§ 100. Kvadrat, čegar stranica meri $10\,^{d}\!/_{m}$, ima $10 \times 10 =$ $= 100\,\square^{d}\!/_{m}$; tak kvadrat je pa $1\,\square^{m}\!/$; tedaj je

$$1\,\square^{m}\!/ = 100\,\square^{d}\!/_{m}.$$

Prav takó izvajamo:

$$1\,\square^{d}\!/_{m} = 100\,\square^{c}\!/_{m},$$
$$1\,\square^{c}\!/_{m} = 100\,\square^{m}\!/_{m}.$$

$100\,\square^{m}\!/$ imenujemo kakor mero za površino zemljišč **ar** ($^{a}\!/$), 100 arov ali $10000\,\square^{m}\!/$ pa **hektar** ($^{H}\!/_{a}$). $1\,\square My = 10000\,^{H}\!/_{a}$.

§ 101. Naloge.

1.) V kvadratu meri stranica *a)* $15\,^{m}\!/$, *b)* $3\,^{m}\!/\ 2\,^{d}\!/_{m}\ 8\,^{c}\!/_{m}$, *c)* $5\frac{1}{4}\,^{m}\!/$, *d)* $2 \cdot 195\,^{m}\!/$; kolik je njega obseg?

2.) Izračunaj ploščino kvadrata, čegar stranica meri *a)* $37\,^{m}\!/$, *b)* $1\,^{m}\!/\ 8\,^{d}\!/_{m}\ 7\,^{c}\!/_{m}$, *c)* $9\frac{2}{5}\,^{m}\!/$, *d)* $3 \cdot 82\,^{m}\!/$, *e)* $2\,^{m}\!/\ 5 \cdot 35\,^{d}\!/_{m}$.

3.) V kvadratu ima stranica *a)* $3 \cdot 714\,^{m}\!/$, *b)* $6\,^{d}\!/_{m}\ 4\,^{c}\!/_{m}\ 5\,^{m}\!/_{m}$; *m)* kolik mu je obseg, *n)* kolika ploščina?

4.) Kolika je stranica kvadrata, čegar obseg znaša $2 \cdot 58\,^{m}\!/$?

5.) Kvadrat ima v obsegu *a)* $2 \cdot 8\,^{m}\!/$, *b)* $4\,^{m}\!/\ 3\,^{d}\!/_{m}\ 8\,^{c}\!/_{m}$, *c)* $19 \cdot 356\,^{d}\!/_{m}$; kolika je *m)* stranica, *n)* ploščina?

6.) Kolika je *a)* vsota, *b)* diferenca kvadratoma dveh daljic, ako meri prva $5\,^{m}\!/\ 3\,^{d}\!/_{m}$, druga pa $8\,^{m}\!/\ 1\,^{d}\!/_{m}\ 5\,^{c}\!/_{m}$?

7.) Vrt ima obliko kvadrata, čegar vsaka stranica meri $22 \cdot 5\,^{m}\!/$; kolika je površina vrtu?

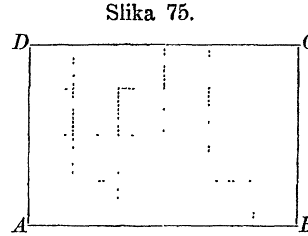
8.) Kvadratasto steno treba z deskami obiti; koliko stane le-ta oboj, ako meri kvadratova stranica $4 \cdot 2\,^{m}\!/$ in se plača za vsak kvadratni meter po $12\frac{1}{2}$ gl.?

9.) Koliko velja 12 kvadratastih steklenih plošč, ako meri stranica vsake plošče $4 \cdot 8\,^{d}\!/_{m}$ in se računa $\square^{m}\!/$ po 3 gl. 40 kr.?

3. Ploščina pravokotnika.

§ 102. Recimo, da nam je določiti ploščino pravokotnika *ABCD* (slika 75.), čegar osnovnica $AB = 6\,^{m}\!/$ in višina $AD = 4\,^{m}\!/$.

Slika 75.



Ako razdelimo osnovnico na 6 in višino na 4 jednake dele, takó tedaj, da je vsak tak del jednak $1\,^{m}\!/$, ter potegnemo skoz vsako razdelišče v višini vzporednico z osnovnico, raztvorili smo pravokotnik na ta način na jednake proge. Ako potegnemo potem tudi skoz vsako razdelišče v osnovnici vzporednico z višino, raztvorimo vsako progo na 6 kvadratov, izmed katerih ima vsak 1 $\square^m/$. Pravokotnik ima torej 4 proge po 6 $\square^m/$, tedaj skupaj $6 \times 4 = 24$ $\square^m/$.

Načrtaj pravokotnik, čegar osnovnica meri 5 $^c/_m$, višina pa 3 $^c/_m$, ter poišči njega ploščino prav takó, kakor smo ravnokar pokazali.

Načrtaj pravokotnik, čegar osnovnica meri $4\frac{1}{2}$ $^c/_m$ in višina $3\frac{1}{4}$ $^c/_m$ ter določi, primerno ga raztvorivši, njega ploščino.

Mersko število pravokotnikove ploščine najdemo, ako množimo mersko število osnovnice z merskim številom višine.

Ta izrek izražujemo krajše takó-le:

Pravokotnikova ploščina je jednaka produktu iz osnovnice in višine.

Ako zaznamenujemo v pravokotniku mersko število osnovnice z o, mersko število višine z v in mersko število ploščine s p, je

$$p = o \times v.$$

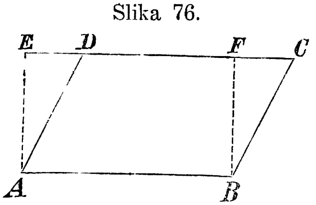
Ako delimo produkt dveh faktorjev z jednim izmed teh dveh faktorjev, dobimo drugi faktor. Tedaj je

$$o = \frac{p}{v},\ v = \frac{p}{o}.$$

Pri računanji morata se meriti osnovnica (dolžina) in višina (širina) z isto dolgostno jednoto; od te je zavisno potem tudi ime ploskovne jednote.

§ **103.** Pretvori poševnokotni paralelogram $ABCD$ (slika 76.) na pravokotnik.

Slika 76.



V točkah A in B postavi na osnovnico AB pravokotnici, kateri sečeta nasprotno stranico in nje podaljšek v točkah E in F. Pravokotna trikotnika BFC in AED sta skladna (po I. izreku o skladnosti). Zatorej dobimo prav toliko ploskev, če dodamo k četverokotniku $ABFD$ trikotnik BFC ali pa trikotnik AED. Ako prištejemo k $ABFD$ trikotnik BFC, dobimo poševnokotni paralelogram $ABCD$; če prištejemo pa k $ABFD$ trikotnik AED, dobimo pravokotnik $ABFE$. Poševnokotni paralelogram $ABCD$ in pravokotnik $ABFE$ sta tedaj ploščinsko jednaka.

Da to pretvorbo predočiš, izreži trapez $ABFD$ in trikotnik BFC z debelega papirja (lepenke) ter položi trikotnik takó k trapezu, da bode imel jedenkrat ležo

BFC, drugikrat pa ležo *AED*; v prvem slučaji dobiš poševnokotni paralelogram, v drugem pa pravokotnik; ploščina pa mora biti obema jednaka, ker sta obadva z istih sestavin sestavljena.

AB pa ni osnovnica le poševnokotnemu paralelogramu nego tudi pravokotnikova in prav takó je tudi *BF* višina obeh četverokotnikov; zatorej je razvidno, da nam je môči vsak poševnokoten paralelogram pretvoriti na pravokotnik, ki ima isto osnovnico in isto višino kakor paralelogram.

§ **104.** Ploščina pravokotnika *ABEF* (slika 76.) je jednaka merskemu števila osnovnice *AB*, pomnoženi z merskim številom višine *BF*; tedaj je tudi ploščina prav tolikega poševnokotnega paralelograma *ABCD* jednaka $AB \times BF$; t. j.:

Ploščina poševnokotnega paralelograma je jednaka produktu iz osnovnice in višine.

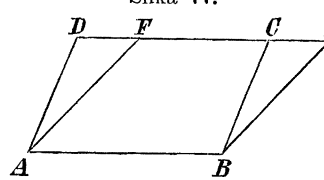
Ako je n. pr. osnovnica $AB = 8$ m/, višina $BF = 4$ m/, potem je $8 \times 4 = 32$ □m/ ploščina paralelograma *ABCD*.

Iz prejšnjega izvajamo: Dva paralelograma, katera imata isto osnovnico in isto višino, sta ploščinsko jednaka.

O tem se tudi neposredno lahko prepričamo, če načrtamo dva taka paralelograma *ABCD* in *ABEF* (slika 77.)

Trikotnika *ADF* in *BCE* sta skladna, kar lahko dokažemo. Ako vzamemo od paralelograma *ABCD* trikotnik *ADF* ter ga položimo na mesto trikotnika *BCE*, izpremení se oni paralelogram v paralelogram *ABEF*; obadva sta torej ploščinsko jednaka.

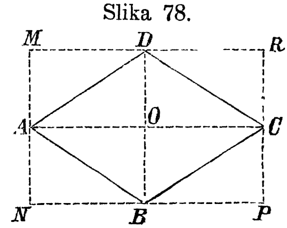
Slika 77.



Kakšno ležo moreta skupni osnovnici *AB* nasprotni stranici *CD* in *EF* tudi še imeti in kakó predočiš v teh slučajih, da sta paralelograma ploščinsko jednaka?

§ **105.** Vzemimo, da je *ABCD* (slika 78.) romb; potem stojita diagonali *AC* in *BD* pravokotno druga na drugi ter se razpolavljata v točki *O*. Potegnivši skoz oglišča preme, vzporedne z diagonalama, dobimo pravokotnik *MNPR*, čegar osnovnica in višina sta jednaki rombovima diagonalama. Romb pa je natanko polovica tega pravokotnika, tedaj velja izrek:

Slika 78.



Ploščina rombova je jednaka polovici produkta iz obeh dveh diagonal.

Prav takó lahko dokažeš:

Ploščina kvadratova je jednaka polovici druge potence njegove diagonale.

§ 106. Naloge.

1.) V pravokotniku meri osnovnica $3 \cdot 4\ ^{m}/$ in višina $2 \cdot 8\ ^{m}/$; kolik mu je obseg?

2.) V poševnokotnem paralelogramu merita dve stikajoči se stranici $3\ ^{m}/\ 8\ ^{d}/_{m}$ in $9\ ^{d}/_{m}\ 5\ ^{c}/_{m}$; kolik je paralelogramov obseg?

3.) V pravokotniku meri osnovnica $23\ ^{d}/_{m}$, višina pa $15\ ^{d}/_{m}$; kolika je ploščina?

4.) Izračunaj ploščino pravokotniku, ako meri

a) dolžina $= 7 \cdot 4\ ^{m}/$, širina $= 3 \cdot 5\ ^{m}/$;
b) » $= 3\ ^{m}/\ 1\ ^{d}/_{m}\ 2\ ^{c}/_{m}$, » $= 1\ ^{m}/\ 5\ ^{d}/_{m}\ 9\ ^{c}/_{m}$;
c) » $= 18\frac{1}{2}\ ^{d}/_{m}$, » $= 14\frac{3}{4}\ ^{d}/_{m}$;
d) » $= 5 \cdot 154\ ^{m}/$, » $= 2 \cdot 35\ ^{m}/$.

5.) Kolika je ploščina pravokotniku, čegar dolžina je $53 \cdot 2\ ^{m}/$, višina pa $\frac{3}{14}$ dolžine?

6.) V pravokotniku znaša *a)* osnovnica $6\ ^{m}/\ 5\ ^{d}/_{m}$, višina pa $2\ ^{m}/\ 7\ ^{d}/_{m}$; *b)* osnovnica $4\ ^{d}/_{m}\ 9\ ^{c}/_{m}$, višina $8\ ^{c}/_{m}$; kolik mu je obseg in kolika ploščina?

7.) V pravokotniku znaša obseg $24\ ^{m}/$, osnovnica pa $9 \cdot 2\ ^{m}/$; kolika je višina?

8.) Pravokotnik je $9\ ^{m}/\ 4\ ^{d}/_{m}$ širok in ima $86\ ^{m}/\ 2\ ^{d}/_{m}$ v obsegu; kolika je *a)* dolžina, *b)* ploščina tega pravokotnika?

9.) V pravokotniku znaša

a) ploščina $34\ \square\ ^{d}/_{m}$ in dolžina $4\ ^{d}/_{m}$;
b) ploščina $21\ \square\ ^{m}/\ 92\ \square\ ^{d}/_{m}\ 40\ \square\ ^{c}/_{m}$ in dolžina $6\ ^{m}/\ 3\ ^{d}/_{m}$;

kolika je širina?

10.) V drugem pravokotniku znaša

a) ploščina $6 \cdot 12\ \square\ ^{m}/$, širok pa je $1 \cdot 6\ ^{m}/$;
b) ploščina $16\ \square\ ^{m}/\ 19\ \square\ ^{d}/_{m}\ 80\ \square\ ^{c}/_{m}$, širok pa je $2\ ^{m}/\ 6\ ^{d}/_{m}\ 4\ ^{c}/_{m}$;

kolika je dolžina?

11.) V poševnokotnem paralelogramu meri osnovnica $3 \cdot 4\ ^{m}/$, višina pa $1 \cdot 5\ ^{m}/$; kolik je razstoj osnovnici priležnima stranicama, ako meri jedna $3\ ^{m}/$?

12.) V pravokotniku znaša obseg $200\ ^{m}/$, osnovnica pa je dvakrat tolika kakor višina; kolika je *a)* osnovnica, *b)* višina, *c)* ploščina?

13.) Pravokotnik je $7\ ^{d}/_{m}$ dolg in $6\ ^{d}/_{m}$ širok; kolikokrat se poveča njegova ploščina, ako mu dolžino in širino podvojimo?

14.) Za koliko se zmanjša ploščina pravokotniku, čegar dolžina meri $4 \cdot 56\ ^{m}/$ in širina $3 \cdot 45\ ^{m}/$, ako mu zmanjšamo vsako stranico za $0 \cdot 75\ ^{m}/$?

15.) Načrtaj 16 $^{d}\!/_{m}$ dolg in 4 $^{d}\!/_{m}$ širok pravokotnik; s tega naredi drug pravokotnik, imajoč za 1 $^{d}\!/_{m}$ manjšo osnovnico, a za 1 $^{d}\!/_{m}$ večjo širino, in takovo načrtovanje pravokotnikov nadaljuj toliko časa, da bosta dolžina in širina jednaki. Potem primerjaj v teh pravokotnikih zaporedoma obsege med seboj in ploščine med seboj. Kateri izmed njih ima največjo ploščino?

16.) V rombu meri stranica 12 $^{d}\!/_{m}$ in razstoj nasprotnih dveh stranic 8 $^{d}\!/_{m}$; kolik mu je obseg in kolika ploščina?

17.) Izračunaj ploščino romba, čegar diagonali sta *a)* 3 $^{m}\!/$ 5 $^{d}\!/_{m}$ in 5 $^{m}\!/$ 4 $^{d}\!/_{m}$, *b)* 1·04 $^{m}\!/$ in 0·85 $^{m}\!/$ dolgi.

18.) Kolika je ploščina kvadratu, čegar diagonala meri *a)* 2 $^{m}\!/$, *b)* 3·5 $^{m}\!/$, *c)* 1 $^{m}\!/$ 4 $^{d}\!/_{m}$ 8 $^{m}\!/_{m}$?

19.) Kvadrat ima isti obseg kakor pravokotnik, čegar stranici merita 48 $^{m}\!/$ in 32 $^{m}\!/$; za koliko je ploščina prvega večja od ploščine druzega?

20.) Romboid, čegar osnovnica meri 28 $^{c}\!/_{m}$ in višina 22 $^{c}\!/_{m}$, treba pretvoriti na ploščinsko jednak 16 $^{c}\!/_{m}$ visok pravokotnik; koliko bode merila pravokotnikova osnovnica?

21.) Koliko kvadratnih centimetrov je môči izrezati z 52 $^{c}\!/_{m}$ dolge in 40 $^{c}\!/_{m}$ široke pole papirja?

22.) Pravokotna steklena plošča je 0·4 $^{m}\!/$ dolga in 3 $^{d}\!/_{m}$ široka; kolika ji je ploščina?

23.) Neka njiva ima obliko paralelograma ter je na jedni strani 27 $^{m}\!/$ 4 $^{d}\!/_{m}$ dolga, dotična višina pa znaša 10 $^{m}\!/$ 2 $^{d}\!/_{m}$; kolika je nje ploščina?

24.) Zrcalo ima 18·8 $^{d}\!/_{m}$ v obsegu in 6·2 $^{d}\!/_{m}$ višine; kolika je njega širina?

25.) Kolika je ploskev 1 $^{m}\!/$ 8 $^{d}\!/_{m}$ dolgi in 1 $^{m}\!/$ 3 $^{d}\!/_{m}$ široki mizi?

26.) Kolika je ploskev, katero pokriva 4·5 $^{m}\!/$ dolga in 4 $^{d}\!/_{m}$ široka deska?

27.) Kmet kupi njivo, ki ima, kakor se mu je reklo, $1\frac{1}{2}$ orala = = 0·8632 $^{H}\!/_{a}$. Dá jo izmeriti ter najde, da je 284 $^{m}\!/$ dolga in 30 $^{m}\!/$ široka; je-li mu bila velikost njive prav povedana?

28.) Vrt ima obliko pravokotnika ter je 348·4 $^{m}\!/$ dolg, njega širina pa znaša $\frac{3}{4}$ dolžine; koliko hektarov meri ta vrt?

29.) Med dvema potoma ležeč travnik ima obliko romboida, čegar osnovnica znaša 396·4 $^{m}\!/$, dotična višina pa 167·5 $^{m}\!/$; koliko hektarov meri travnik?

30.) Njiva ima 7·174 $^{H}\!/_{a}$ ploščine in 168·5 $^{m}\!/$ višine; kolika je dolžina?

31.) Od 283 $^{m}\!/$ dolzega polja hočejo odločiti prav toliko dolg, 38·205 $^{a}\!/$ velik kos; koliko širino bode imel ta kos?

32.) Koliko dreves je môči nasaditi ob obsegu vrta, ki je 144 $^{m}\!/$ 2 $^{d}\!/_{m}$ dolg in 85 $^{m}\!/$ 5 $^{d}\!/_{m}$ širok, ako stojé drevesa po 4 $^{m}\!/$ 2 $^{d}\!/_{m}$ narazen?

33.) V sobi treba 64 $\square^{m}\!/$ stene s tapetami prevleči; vzemó se 38 $^{c}\!/_{m}$ široke tapete; koliko tapet se potrebuje, ako je vsaka $1\frac{1}{2}$ $^{m}\!/$ dolga?

34.) Koliko je vredno $1 \cdot 2\ ^m/$ dolgo in $64\ ^c/_m$ široko zrcalo, ako se računa kvadratni meter po 86 gl.?

35.) $270\ ^m/$ dolgo in $150\ ^m/$ široko njivo hočejo zamenjati za drugo prav takó rodovitno; dolžina le-tej znaša $\frac{5}{6}$ dolžine one njive; kolika bode morala biti širina drugi njivi?

36.) Pravokotna njiva je 5krat daljša nego široka ter ima $196\ ^m/$ v obsegu; koliko ima arov?

37.) Koliko sena dá $104 \cdot 8\ ^m/$ dolg in $47 \cdot 5\ ^m/$ širok travnik, ako se računa na 1 ar poprek 28 kilogramov sena?

38.) Njiva ima $25 \cdot 8173\ ^H/_a$ ploščine in $546 \cdot 4\ ^m/$ dolžine; *a)* kolika je širina, *b)* kolik obseg. *c)* kolika vrednost, ar po $12 \cdot 6$ gl.?

39.) Koliko stane zidališče, imajoče $25\ ^m/$ dolžine in $19\ ^m/$ širine, ako se plača kvadratni meter po $4\frac{2}{5}$ gl.?

40.) Za $32 \cdot 5\ ^m/$ dolgo in $15 \cdot 2\ ^m/$ široko zidališče plača se $3062\frac{4}{5}$ gl.; po čem je kvadratni meter?

41.) Koliko barvila je treba, da se z njim pobarvajo tla, ki so $9\ ^m/$ dolga in $6\ ^m/\ 4\ ^d/_m$ široka, ako se računa na vsak kvadratni meter 26 dekagramov barvila?

42.) Koliko velja 10 nakladov (furnirov) po $8\ ^d/_m$ dolzih in $2 \cdot 8\ ^d/_m$ širocih, ako se plača kvadratni decimeter po 18 kr.?

43.) $67 \cdot 5\ ^m/$ dolgo zemljišče se vzame za 46 gl. 98 kr. v najem; kolika mu je širina, ako se računa za kvadratni meter 3 kr. najemščine?

44.) $43 \cdot 5\ ^m/$ dolg in $18 \cdot 4\ ^m/$ širok vrt se je kupil za $400 \cdot 2$ gl.; po čem se je plačal kvadratni meter?

45.) $127\ ^m/$ dolga in $4 \cdot 3\ ^m/$ široka cesta se je pomostila; po čem se je računal kvadratni meter, ako stane vse delo 12 gl.?

46.) Zrcalo je $2\ ^m/\ 8\ ^d/_m$ visoko in $1\ ^m/\ 9\ ^d/_m$ široko; okvir pa je $4\ ^c/_m$ širok; kolika je ploščina vidne zrcalne ploskve?

47.) Nekdo dá v dveh sobah nov pod položiti; prva soba ima obliko kvadrata, čegar stranica meri $62\ ^d/_m$, druga pa je $85\ ^d/_m$ dolg in $63\ ^d/_m$ širok pravokotnik. Koliko stane vse delo, ako se plača kvadratni meter po 2 gl. 20 kr.?

48.) Njiva je $124\ ^m/$ dolga in $20\ ^m/$ široka; koliko pšenice je treba za setev, ako se je poseje na $1\ ^H/_a\ 3\frac{1}{10}\ ^H/_l$?

49.) Nekdo kupi dvojega jednako dobrega papirja; prvi je $42\ ^c/_m$ dolg in $33\ ^c/_m$ širok in knjiga velja 60 kr.; drugi je $60\ ^c/_m$ dolg in $40\ ^c/_m$ širok, knjiga pa velja 80 kr.; kateri papir je dražji?

50.) *A* ima kvadratast vrt, čegar stranica je $91\ ^m/$ dolga; *B* pa ima pravokoten vrt, čegar dolžina znaša $95\ ^m/$ in ploščina 76 arov; koliko metrov plotú mora jeden več vzdrževati nego drugi?

51.) *A* obzida kvadratast vrt, kateremu meri stranica $23\ ^m/$ *B* pa ploščinsko jednak pravokoten vrt, čegar dolžina znaša $48\ ^m/$ kateremu treba več obzidja napraviti?

52.) Sprednjo stràn 25 $^m/$ dolge in 12 $^m/$ visoke hiše treba namazati z oljnato barvo; koliko bo to stalo, ako se računa za kvadratni meter 85 kr. in je treba za vrata in okna deseti del odbiti?

53.) Sobo, v kateri so stene 23 $^m/$ dolge in 4 $^m/$ široke, treba s tapetami prevleči; koliko zvitkov 12 $^m/$ dolzih in $\frac{1}{2}$ $^m/$ širocih tapet se bode za to potrebovalo, in koliko bodo tapete veljale, ako se računa zvitek po 3 gl. 75 kr.?

54.) V vežo, 14·4 $^m/$ dolgo in 2·2 $^m/$ široko, treba položiti kamenite plošče. Koliko plošč bo treba, ako je vsaka 3 $^d/_m$ dolga in 2 $^d/_m$ široka, in koliko bodo veljala tla, ako stane vsaka plošča z vlaganjem vred $1\frac{2}{5}$ gl.?

55.) Nekdo ima pravokoten 64·5 $^m/$ dolg in 41·2 $^m/$ širok vrt. Napraviti hoče na kraji vrta okrog in okrog 3·4 $^m/$ široko pot; koliko ploščino bo imela ta pot?

56.) Po sredi pravokotnega vrta, ki je 32·4 $^m/$ dolg in 20·7 $^m/$ širok, vodi po dolzem in po čez 1·6 $^m/$ široka pot; koliko ostane še vrta?

57.) 6·5 $^m/$ dolgo in 4·8 $^m/$ široko streho treba s pločevino pokriti; vsaka plošča je 42 $^c/_m$ dolga in 36 $^c/_m$ široka. Koliko plošč se potrebuje, ako se mora pri vsaki plošči zarad spoja 3 $^c/_m$ dolžine in 3 $^c/_m$ širine odbiti?

58.) Druga streha je 34·1 $^m/$ dolga in 3·6 $^m/$ visoka; koliko treba strešnih opek, da se pokrije, ako so opeke 24 $^c/_m$ dolge in 19 $^c/_m$ široke, in ako pokriva vsaka opeka sosedno opeko 35 $^m/_m$ po čez in 42 $^m/_m$ po dolzem?

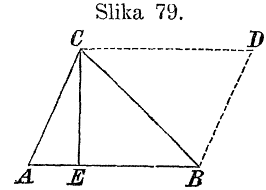
59.) Na denarnično mizo, 1·4 $^m/$ dolgo in 1·2 $^m/$ široko, napravi se nova kamenita plošča, katera pušča 7 $^c/_m$ lesenega robú; koliko stane le-ta plošča, ako se plača kvadratni meter po $28\frac{1}{2}$ gl.?

60.) 12 $^d/_m$ dolga in 9 $^d/_m$ široka mizna plošča olepotičena je na sredi z rombom, čegar diagonali merita 4 $^d/_m$ in 3 $^d/_m$; za koliko je miza večja od romba?

4. Ploščina trikotnika.

§ **107.** Vsak trikotnik ABC (slika 79.) moremo smatrati za polovico paralelograma $ABDC$, ki ima jednako osnovnico in isto višino CE kakor trikotnik; da to dokažemo, treba le skoz oglišči B in C vzporednici z nasprotnima stranicama potegniti. Ker je tedaj $\triangle\ ABC = \frac{1}{2} ABDC$ in $ABDC = AB \times CE$, je

Slika 79.



$$\triangle\ ABC = \frac{1}{2} \times AB \times CE;$$ t. j.:

Ploščina trikotnikova je jednaka polovici produkta iz osnovnice in višine.

Ako zaznamenujemo v trikotniku merska števila osnovnice, višine in ploščine, oziroma z o, v in p, je

$$p = \frac{o \times v}{2},$$

in obratno

$$o = \frac{2p}{v}, \quad v = \frac{2p}{o}.$$

Recimo, da meri v trikotniku n. pr. osnovnica 10 $^m/$ in višina 7 $^m/$, potem je njega ploščina $= \frac{10 \times 7}{2} = 35 \,\square\, ^m/$.

V pravokotnem trikotniku jemljemo navadno jedno kateto za osnovnico, druga je potem višina. Ploščina pravokotnega trikotnika je torej jednaka polovici produkta iz obeh katet.

Vzemimo, da meri n. pr. v pravokotnem trikotniku jedna kateta 3 $^m/$ 5 $^d/_m$ in druga 2 $^m/$ 4 $^d/_m$, potem je

$$3\ ^m/\ 5\ ^d/_m = 3 \cdot 5\ ^m/,$$
$$2\ ^m/\ 4\ ^d/_m = 2 \cdot 4\ ^m/,$$
$$\frac{3 \cdot 5 \times 2 \cdot 4}{2} = 4 \cdot 2 \,\square\, ^m/ \text{ ploščina.}$$

Iz izrekov, katere smo tu navedli, izvajamo tudi:

Dva trikotnika, imajoča jednako osnovnico in jednako višino, sta ploščinsko jednaka.

§ 108. Naloge.

1.) Kolik je obseg trikotniku, čegar stranice merijo 2 $^m/$ 4 $^d/_m$, 2 $^m/$ 7 $^d/_m$ in 3 $^m/$?

2.) Kolik je obseg jednakostraničnemu trikotniku, čegar stranica znaša *a)* 1·5 $^m/$, *b)* 7 $^m/$ 5 $^d/_m$ 8 $^c/_m$?

3.) V jednakokrakem trikotniku meri osnovnica 2·6 $^m/$, vsak krak pa po 2·1 $^m/$; kolik mu je obseg?

4.) Kolika je stranica jednakostraničnemu trikotniku, ako znaša njega obseg 5 $^m/$ 76 $^c/_m$?

5.) V jednakokrakem trikotniku meri obseg 4·89 $^m/$, osnovnica pa 1·25 $^m/$; kolik je vsak krak?

6.) Kolika je ploščina trikotniku, čegar osnovnica meri 5 $^m/$ 4 $^d/_m$ in višina 3 $^m/$ 5 $^d/_m$?

7.) V trikotniku znaša

a)	osnovnica	1 $^m/$ 8 $^d/_m$,	višina	1 $^m/$ 5 $^d/_m$;
b)	»	2·345 $^m/$,	»	1·724 $^m/$;
c)	»	$25\frac{2}{5}$ $^m/$,	»	$14\frac{1}{2}$ $^m/$;
d)	»	1 $^m/$ 5 $^d/_m$,	»	9 $^d/_m$ 8 $^c/_m$;

kolika je ploščina?

8.) Ploščina pravokotnega trikotnika znaša 8·58 □ $^{m}/$, osnovnica pa 3·25 $^{m}/$; kolika je višina?

9.) V pravokotnem trikotniku merita kateti 5·41 $^{m}/$ in 4·58 $^{m}/$; kolika je ploščina?

10.) Izračunaj ploščino pravokotnega trikotnika, čegar kateti merita: *a)* 7·9 $^{m}/$ in 3·9 $^{m}/$, *b)* 49 $^{m}/$ 5 $^{d}/_{m}$ in 37 $^{m}/$ 8 $^{c}/_{m}$.

11.) V pravokotnem trikotniku znaša ploščina 27 □ $^{m}/$ 56 □ $^{d}/_{m}$ 25 □ $^{c}/_{m}$, jedna kateta pa 5 $^{m}/$ 25 $^{c}/_{m}$; kolika je druga kateta?

12.) Stranice nekega trikotnika merijo 344 $^{c}/_{m}$, 183 $^{c}/_{m}$, 450 $^{c}/_{m}$, in višina, spuščena na prvo stranico, 167·5 $^{c}/_{m}$; koliki sta višini, spuščeni na drugi dve stranici?

13.) Kolika je vsota dvema trikotnikoma, ako meri višina vsacega po 17·4 $^{m}/$, osnovnica prvega 28·5 $^{m}/$ in druzega 24·1 $^{m}/$?

14.) V trikotniku znaša osnovnica 6 $^{m}/$, višina pa 3 $^{m}/$ 2 $^{c}/_{m}$; kolika je višina dvakrat tolikega trikotnika, ako znaša njega osnovnica 8 $^{m}/$?

15.) Trikotnik je ploščinsko jednak pravokotniku, čegar osnovnica meri 15·2 $^{m}/$ in višina 8·4 $^{m}/$; kolika je trikotnikova višina, ako znaša njega osnovnica 12 $^{m}/$?

16.) Trikotnik je ploščinsko jednak paralelogramu, čegar osnovnica meri 16 $^{m}/$ in višina 12·5 $^{m}/$; kolika je trikotnikova osnovnica, ako znaša njega višina 20 $^{m}/$?

17.) Koliko višino ima trikotnik, čegar osnovnica meri 8·1 $^{m}/$, če je ploščinsko jednak kvadratu s stranico 5·4 $^{m}/$?

18.) Travnik ima obliko trikotnika, čegar osnovnica znaša 172·4 $^{m}/$, višina pa 31·5 $^{m}/$; koliko arov ima travnik?

19.) Njiva ima obliko pravokotnega trikotnika, čegar kateti merita 103 $^{m}/$ in 67·6 $^{m}/$; koliko je njiva vredna, ako se računa ar po 11 gl.?

20.) Koliko stane trioglata plehasta plošča, imajoča osnovnico 4·6 $^{m}/$ in višino 3·2 $^{m}/$, ako tehta kvadratni meter 14 kilogramov in velja kilogram 64 kr.?

21.) Trioglato polje ima osnovnico 50·48 $^{m}/$ in je ploščinsko jednako kvadratastemu polju, čegar stranica meri 32·42 $^{m}/$; koliko višino ima prvo polje?

22.) Trioglato 67½ $^{m}/$ dolgo in 28 $^{m}/$ visoko njivo hočejo zamenjati za pravokotno, prav takó rodovitno in 17 $^{m}/$ 5 $^{d}/_{m}$ široko njivo; koliko dolžino mora imeti druga njiva?

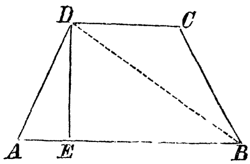
23.) Kački meri osnovnica 11·2 $^{m}/$, višina pa 4·5 $^{m}/$; kolika ji je ploščina?

24.) Dve kački, katerima meri osnovnica po 12 $^{m}/$ 4 $^{d}/_{m}$ in višina po 18 $^{m}/$ 8 $^{d}/_{m}$, treba z opekami pokriti; le-te so 3 $^{d}/_{m}$ dolge in 2 $^{d}/_{m}$ široke in ležé po dolzem in po širocem 0·4 $^{d}/_{m}$ druga na drugi; koliko strešnih opek se potrebuje za to, ako jih je treba 4 % več računati, ker se jih nekaj polomi?

5. Ploščina trapeza in trapezoida.

§ 109. Vsak trapez $ABCD$ (slika 80.) deli diagonala BD na dva trikotnika ABD in BCD; le-ta imata trapezovi vzporedni stranici AB in CD za osnovnici in njiju skupna višina DE je ob jednem tudi trapezova višina. Toda

Slika 80.



$$\triangle ABD = \tfrac{1}{2} \times AB \times DE,$$
$$\triangle BCD = \tfrac{1}{2} \times CD \times DE;$$

tedaj trapez $ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD) \times DE$; t. j.:

Ploščina trapezova je jednaka polovici produkta iz vsote obeh vzporednih stranic in višine.

Ako zaznamenujemo v trapezu vzporedni stranici z a in b, višino z v in ploščino s p, je

$$p = \frac{(a+b) \times v}{2}.$$

Ako znašata n. pr. v trapezu vzporedni stranici 16 $^m/$ in 10 $^m/$, višina pa 11 $^m/$, je

$$\frac{16+10}{2} \times 11 = \tfrac{26}{2} \times 11 = 13 \times 11 = 143 \,\square^m/ \text{ ploščina.}$$

§ 110. Ako nam je določiti ploščino trapezoida, razdelimo ga z diagonalo na dva trikotnika, izračunajmo jima ploščino, vzemši diagonalo za skupno osnovnico, za višini pa pravokotnici, spuščeni z nasprotnih oglišč na to diagonalo ter seštejmo ploščini teh trikotnikov.

§ 111. Naloge.

1.) V četverokotniku (trapezu ali trapezoidu) merijo stranice po vrsti 13 $^m/$ 5 $^d/_m$, 12 $^m/$ 4 $^d/_m$, 27 $^m/$ 3 $^d/_m$, 19 $^m/$ 2 $^d/_m$; kolik je obseg?

2.) Trapez je 5·4 $^m/$ visok, vzporedni stranici pa merita 6·8 $^m/$ in 4·2 $^m/$; kolika je ploščina?

3.) Izračunaj ploščino trapeza, ako merita

a) vzporedni stranici 3 $^m/$ 4 $^d/_m$ in 7 $^m/$ 2 $^d/_m$, višina pa 4 $^m/$ 2 $^d/_m$;
b) » » 12·745 $^m/$ in 8·655 $^m/$, » » 8·8 $^m/$.

4.) V trapezu meri ploščina 567 $\square^d/_m$, vzporedni stranici pa 3·6 $^m/$ in 2·7 $^m/$; kolika je višina?

5.) V trapezu meri ploščina 124·8 $\square^m/$, višina 6·4 $^m/$ in jedna izmed vzporednih stranic 12·8 $^m/$; kolika je druga vzporedna stranica?

6.) V trapezoidu meri diagonala, vežoča dvoje oglišč, 5·24 $^m/$, njena razstoja od druzih dveh oglišč pa 3·56 $^m/$ in 2·35 $^m/$; kolika je ploščina temu četverokotniku?

7.) V četverokotniku sta diagonali pravokotni druga na drugi; kolika je njega ploščina, ako znašajo razdalje vseh štirih oglišč od presečišča diagonal po vrsti 42 $^{d}/_{m}$, 38 $^{d}/_{m}$, 15 $^{d}/_{m}$ in 55 $^{d}/_{m}$?

8.) Kolika je dolžina 5·2 $^{m}/$ širocega pravokotnika, ako je le-ta ploščinsko jednak trapezu, čegar višina ima 6·3 $^{m}/$, in čegar vzporedni stranici znašata 11 $^{m}/$ in 9·4 $^{m}/$?

9.) Zidališče ima obliko trapeza, čegar vzporedni stranici znašata 35 $^{m}/$ 2 $^{d}/_{m}$ in 33 $^{m}/$ 5 $^{d}/_{m}$, višina pa 21 $^{m}/$ 4 $^{d}/_{m}$; kolika je njega ploščina?

10.) Drugo trapezasto zidališče je dolgo ob jedni vzporedni stranici $23\frac{1}{2}$ $^{m}/$, ob drugi $21\frac{2}{5}$ $^{m}/$ in meri 417 $\square^{m}/$ 57 $\square^{d}/_{m}$; kolika je njega širina?

11.) Koliko ploskev ima trapezasto polje, čegar vzporedni stranici sta 14·3 $^{m}/$ in 10·5 $^{m}/$ dolgi in za 63·4 $^{m}/$ druga od druge oddaljeni?

12.) Deska je 42 $^{d}/_{m}$ dolga in na jednem konci 4 $^{d}/_{m}$, na drugem 3 $^{d}/_{m}$ široka; kolika je jedna njenih ploskev?

13.) Trapezasto polje je 238 $^{m}/$ dolgo, na jednem konci 26 $^{m}/$, na druzem 22·5 $^{m}/$ široko; koliko arov meri le-to polje?

14.) Travnik ima obliko trapeza, čegar vzporedni stranici merita 168·42 $^{m}/$ in 109·3 $^{m}/$, in čegar ploščina znaša 1·5 $^{H}/_{a}$; kolik je razstoj obeh vzporednih stranic?

15.) Dvorišče ima obliko trapeza, čegar vzporedni stranici merita 20 $^{m}/$ 4 $^{d}/_{m}$ in 18 $^{m}/$ 5 $^{d}/_{m}$, oddaljeni pa sta druga od druge za 15 $^{m}/$; le-to dvorišče treba pomostiti s kamenitimi ploščami; koliko tacih plošč je treba za pomoščenje, ako meri vsaka 25 $\square^{d}/_{m}$?

16.) Pri kamenoseku je naročena trapezasta plošča; vzporedni stranici meriti ji morata 1·9 $^{m}/$ in 1·2 $^{m}/$, njiju razstoj pa 1·1 $^{m}/$; koliko stane plošča, ako se računa $\square^{m}/$ po 15 gl. 54 kr.?

17.) Trapezast vrt, kateri je 9·6 $^{m}/$ širok in na jednem konci 20·75 $^{m}/$, na druzem pa 14·25 $^{m}/$ dolg, prodal se je za 480 gl.; po čem 1 $\square^{m}/$?

18.) Njivo, katera je 109 $^{m}/$ dolga, na jednem konci 56·2 $^{m}/$ in na druzem 46·8 $^{m}/$ široka, treba z režjo obsejati; koliko treba v to reži, ako se računa na 32 arov 1 hektoliter?

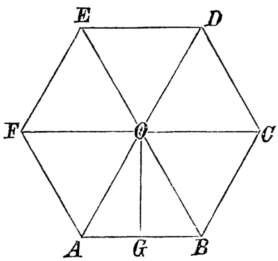
19.) Strešna ploskev ima obliko trapeza, čegar vzporedni stranici merita 15 $^{m}/$ 8 $^{d}/_{m}$ in 11 $^{m}/$ 6 $^{d}/_{m}$, njiju razstoj pa 6 $^{m}/$ 2 $^{d}/_{m}$; koliko stane pokrivanje, ako treba za 1 $\square^{m}/$ 1 gl. 12 kr. plačati?

20.) Streha ima dve trikotniški ploskvi, dve pa trapezasti; trikotnika in trapeza imata isto višino, namreč 3·6 $^{m}/$; osnovnica vsacega trikotnika meri 8 $^{m}/$, vzporedni stranici vsacega trapeza pa znašata po 18 $^{m}/$ in 10 $^{m}/$; koliko opek treba, da se pokrije le-ta streha, ako krije vsaka opeka 5 $\square^{d}/_{m}$?

6. Ploščina pravilnega in nepravilnega mnogokotnika.

§ 112. Vzemimo, da je O (slika 81.) središče pravilnemu mnogokotniku $ABCDEF$. Potegnemo li od središča do vseh oglišč preme, raztvorili smo mnogokotnik na toliko trikotnikov, kolikor ima stranic.

Slika 81.



Razstoj OG središča od jedne stranice je skupna višina vsem tem trikotnikom, ako vzamemo mnogokotnikove stranice za njihove osnovnice. Ker pa je ploščina trikotnikova jednaka polovici produkta iz osnovnice in višine, jednaka je torej ploščina mnogokotnikova polovici produkta iz vsote osnovnic vseh trikotnikov, t. j. iz mnogokotnikovega obsega, in skupne višine teh trikotnikov, t. j. iz razstoja med središčem in jedno stranico.

Ploščina pravilnega mnogokotnika je tedaj jednaka polovici produkta iz njegovega obsega in razstoja med središčem in jedno stranico.

Ako zaznamenujemo v pravilnem mnogokotniku obseg, razstoj središča od jedne stranice in ploščino oziroma z o, r in p, je

$$p = \frac{o \times r}{2}.$$

Recimo, da meri n. pr. v pravilnem šesterokotniku stranica 3 $^m/$ 81 $^c/_m$ in razstoj središča od jedne stranice 3 $^m/$ 3 $^d/_m$, dobimo

stranica 3 $^m/$ 81 $^c/_m$	$=$ 381 $^c/_m$,	1143 $\times$ 330 $=$ 377190 $\square ^c/_m$
obseg	$=$ 2286 $^c/_m$,	$=$ 37 $\square ^m/$ 71 $\square ^d/_m$ 90 $\square ^c/_m$
razstoj 3 $^m/$ 3 $^d/_m$	$=$ 330 $^c/_m$;	šesterokotnikova ploščina

V pravilnem mnogokotniku ni razstoj središča od jedne stranice kolikeršen koli, nego ravna se na prav določen način po dolžini stranice. Da dobimo namreč razstoj središča od jedne stranice, treba pomnožiti mersko število stranice

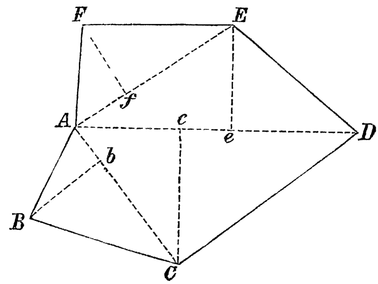
v jednakostraničnem trikotniku		z	0·28868,
»	kvadratu	»	0·50000,
» pravilnem	peterokotniku	»	0·68819,
» »	šesterokotniku	»	0·86603,
» »	osmerokotniku	»	1·20711,
» »	deseterokotniku	»	1·53884,
» »	dvanajsterokotniku	»	1·86603.

§ 113. Ploščino nepravilnega mnogokotnika nam je moči na dvoj način določiti:

a) Mnogokotnik razdeli z diagonalami na trikotnike ter izračunaj ploščino vsacemu izmed njih; ako seštevaš ploščine vseh trikotnikov, dobiš ploščino mnogokotnikovo.

Recimo, da nam je izračunati ploščino mnogokotniku $ABCDEF$ (slika 82.) V ta namen razložimo ga na trikotnike, in vzemimo, da je $AC = 12 \cdot 8\ ^m/$, $Bb = 6 \cdot 9\ ^m/$, $AD = 20 \cdot 8\ ^m/$, $Cc = 10 \cdot 4\ ^m/$, $Ee = 8\ ^m/$, $AE = 13 \cdot 8\ ^m/$ in $Ff = 5 \cdot 9\ ^m/$.

Slika 82.



Tedaj dobimo

$$\text{trikotnik } ABC = \frac{AC \times Bb}{2} = \frac{12 \cdot 8 \times 6 \cdot 9}{2} = 44 \cdot 16 \square ^m/$$

$$\text{»} \quad ACD = \frac{AD \times Cc}{2} = \frac{20 \cdot 8 \times 10 \cdot 4}{2} = 108 \cdot 16 \text{ »}$$

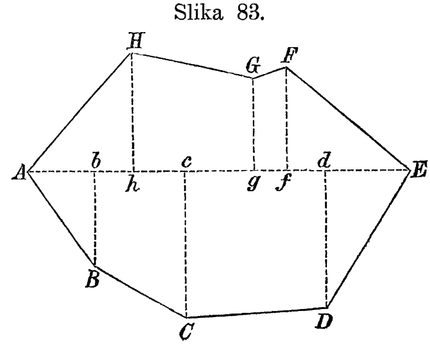
$$\text{»} \quad ADE = \frac{AD \times Ee}{2} = \frac{20 \cdot 8 \times 8}{2} = 83 \cdot 2 \text{ »}$$

$$\text{»} \quad AEF = \frac{AE \times Ff}{2} = \frac{13 \cdot 8 \times 5 \cdot 9}{2} = 40 \cdot 71 \text{ »}$$

$$\text{mnogokotnik } ABCDEF = 276 \cdot 23 \square ^m/.$$

b) Skoz dvoje najbolj oddaljenih oglišč potegni premo in na le-to spusti z vseh druzih oglišč pravokotnice. Na ta način razdelil si mnogokotnik na pravokotne trikotnike in trapeze, katere treba vsakega zá-se izračunati in potem sešteti.

Slika 83.



Vzemimo, da je (slika 83.) $Bb = 6\cdot8\ {}^m\!/$, $Cc = 10\cdot6\ {}^m\!/$, $Dd = 10\cdot1\ {}^m\!/$, $Ff = 8\cdot3\ {}^m\!/$, $Gg = 6\cdot2\ {}^m\!/$, $Hh = 9\cdot2\ {}^m\!/$; dalje $Ab = 5\cdot6\ {}^m\!/$, $bh = 2\cdot6\ {}^m\!/$, $hc = 4\cdot2\ {}^m\!/$, $cg = 4\cdot6\ {}^m\!/$, $gf = 3\ {}^m\!/$, $fd = 2\cdot8\ {}^m\!/$, $dE = 5\cdot8\ {}^m\!/$.

Račun sestavimo lahko takó-le:

Mnogokotnikove sestavine	Faktorji		Produkti
	Osnovnice ali vsote vzporednih stranic	Višine	
$\triangle\ ABb$	$Bb = 6\cdot8$	$Ab = 5\cdot6$	38·08
Trap. $BbcC$	$Bb + Cc = 17\cdot4$	$bc = 6\cdot8$	118·32
» $CcdD$	$Cc + Dd = 20\cdot7$	$cd = 10\cdot4$	215·28
$\triangle\ DdE$	$Dd = 10\cdot1$	$dE = 5\cdot8$	58·58
$\triangle\ EFf$	$Ff = 8\cdot3$	$fE = 8\cdot6$	71·38
Trap. $FfgG$	$Ff + Gg = 14\cdot5$	$fg = 3$	43·50
» $GghH$	$Gg + Hh = 15\cdot4$	$gh = 8\cdot8$	135·52
$\triangle\ AhH$	$Hh = 9\cdot2$	$Ah = 8\cdot2$	75·44
			756·10
		Mnogokotnik $ABCDEFGH$ =	378·05 □${}^m\!/$

Tu smo produkte najprej sešteli in še le njihovo vsoto z 2 delili, mesto da bi bili vsak produkt posebej z 2 delili.

§ 114. Naloge.

1.) V pravilnem peterokotniku meri stranica $4\ {}^m\!/\ 7\ {}^d\!/_m$; kolik mu je obseg?

2.) Kvadratova stranica znaša $3\cdot6\ {}^m\!/$; kolika mora biti stranica pravilnega šesterokotnika, da ima le-ta isti obseg kakor kvadrat?

3.) Kolika je ploščina pravilnega osmerokotnika, čegar stranica ima $1\cdot667\ {}^m\!/$?

4.) Nekdo hoče postaviti šesterostranično pravilno utico s stranico $3\ {}^m\!/$; koliko prostora potrebuje v to?

5.) Neka tla imajo obliko pravilnega dvanajsterokotnika, čegar stranica meri $3\cdot1\ {}^m\!/$; kolika jim je ploščina?

6.) Peterokotnik je sestavljen s treh trikotnikov, katerim merijo osnovnice $215\ {}^m\!/$, $182\cdot5\ {}^m\!/$ in $72\ {}^m\!/$, višine pa v istem redu $22\ {}^m\!/$, $34\ {}^m\!/$ in $16\cdot8\ {}^m\!/$; kolika mu je ploščina?

7.) Načrtaj nepravilen sedmerokotnik in z njim skladen mnogokotnik; v prvem potegni one daljice, katere so za izračunanje ploščine potrebne, po § 113. *a)*, v druzem po § 113. *b)*; le-te daljice izmeri s pomočjo merila, katero si načrtal, potem pa izračunaj ploščino kakor smo v § 113. učili.

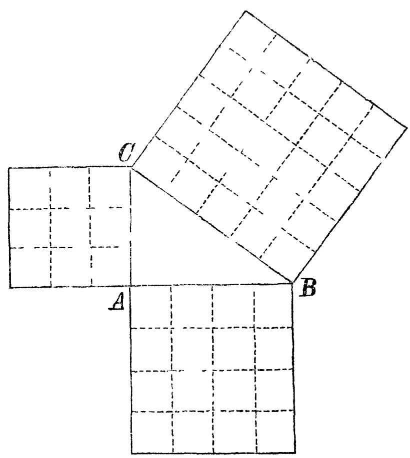
8.) Vrt ima obliko šesterokotnika in se dá na te-le trikotnike razstaviti:

v trikotniku A meri osnovnica 36·6 $^m/$, višina 6·6 $^m/$,
» » B » » 42·4 $^m/$, » 20 $^m/$,
» » C » » 42·4 $^m/$, » 22 $^m/$,
» » D » » 28·4 $^m/$, » 9·8 $^m/$;
koliko arov ploščine ima le-ta vrt?

7. Pitagorov izrek.

§ 115. Odrežemo li na krakih pravega kota A (slika 84.) daljici $AB = 4\,^d/_m$ in $AC = 3\,^d/_m$, ter potegnemo daljico BC, prepričamo se lahko, da meri le-ta natanko $5\,^d/_m$. Načrtamo li v tem pravokotnem trikotniku BAC nad hipotenuzo in obema katetama kvadrate, potem najdemo, le-te raztvorivši na kvadratne decimetre, da ima kvadrat nad hipotenuzo 25 □$^d/_m$, kvadrat nad kateto AB 16 □$^d/_m$ in kvadrat nad drugo kateto AC 9 □$^d/_m$.

Slika 84.



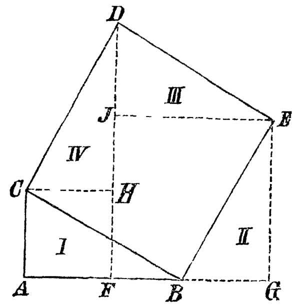
V pravokotnem trikotniku je tedaj kvadrat nad hipotenuzo jednak vsoti kvadratov nad obema katetama.

Ta imenitni izrek imenuje se po Pitagoru, kateri ga je izumel, Pitagorov izrek.

V prejšnjem trikotniku smo dali stranicam določeno dolžino. Sicer pa nam je lahko dokazati, da velja Pitagorov izrek za kakeršen koli pravokoten trikotnik BAC (slika 85.)

V ta namen načrtaj nad hipotenuzo BC kvadrat $BCDE$ ter spusti s toček D in E na AB in njen podaljšek pravokotnici DF in EG; dalje spusti na DF pravokotnici CH in EJ. Iz tega načrtovanja izvira, da so pravokotni trikotniki BAC, EGB, EJD in DHC, katere hočemo po vrsti z I., II., III. in IV.

Slika 85.



zaznamenovati, skladni; dalje, da nam predstavlja *AFHC* kvadrat nad kateto *AC* in *FGEJ* kvadrat nad kateto *AB*. Kvadrat nad hipotenuzo, namreč *BCDE*, je sestavljen z lika *BCHJE* in trikotnikov III. in IV.; vzamemo li od tega kvadrata prej imenovana trikotnika, ter ja denemo na mesto trikotnikov I. in II., potem izpremeni se prejšnji kvadrat v lik *ACHJEG*, kateri je pa jednak kvadratoma nad obema katetama, namreč *FGEJ* in *AFHC*. Kvadrat nad hipotenuzo ima tedaj prav toliko ploščino kakor kvadrata nad katetama skupaj, kar hočemo takó-le pisati:

$$\square\, BC = \square\, AB + \square\, AC.$$

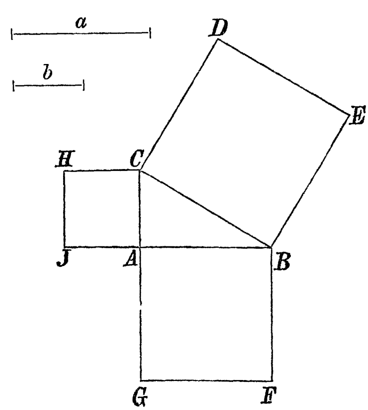
Ta dokaz nam je môči prav lahko predočiti, ako izrežemo lik *BCHJE* in trikotnika I. in II. z lepenke; ako položimo k onemu liku trikotnika takó, da imata ležo III. in IV., dobimo kvadrat nad hipotenuzo; ako pa ja položimo spodaj v ležo I. in II., dobimo kvadrata nad obema katetama; iz tega pa izvira, da je ploščina v obeh slučajih jedna in ista.

Iz Pitagorovega izreka izvajamo obratno:

Kvadrat nad jedno kateto je jednak diferenci med kvadratom nad hipotenuzo in kvadratom nad drugo kateto.

§ **116.** Načrtaj kvadrat, kateri je jednak vsoti dveh danih kvadratov.

Slika 86.



Vzemimo, da sta a in b (slika 86.) stranici danih dveh kvadratov. Ako načrtaš s tema dvema stranicama kakor katetama pravokoten trikotnik *BAC* in nad hipotenuzo *BC* kvadrat *BCDE*, je ta tolik, kolikeršna sta kvadrata *ABFG* in *ACHJ*, katera imata a in b za stranici, skupaj.

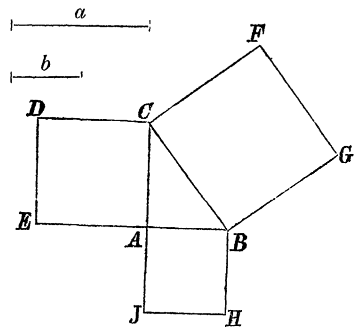
1.) Načrtaj dva kvadrata, katerih stranici merita 5 cm in 12 cm, in potem kvadrat, kateri je jednak vsoti onih dveh kvadratov.

2.) Načrtaj kvadrat, kateri je jednak vsoti treh kvadratov, katerih stranice so dane.

§ **117.** Načrtaj kvadrat, kateri je jednak diferenci dveh danih kvadratov.

Recimo, da sta a in b (slika 87.) stranici danih dveh kvadratov. Ako načrtaš v A prav kot in narediš AB jednako stranici b manjšega kvadrata, ter dalje napišeš s polumerom a z B lok, sekajoč AC v C, potem je nad AC načrtani kvadrat $ACDE$ jednak diferenci kvadratov $BCFG$ in $ABHJ$, katerih stranici sta a in b.

Slika 87.



Načrtaj dva kvadrata s stranicami 18 % in 29 % in potem kvadrat, kateri je jednak diferenci prejšnjih dveh kvadratov.

8. Kakó je pretvarjati premočrtne like.

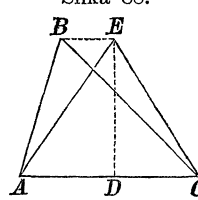
§ 118. Premočrten lik pretvorimo *(verwandeln)* na druzega, ako načrtamo lik, kateri zadostuje gotovim pogojem ter je danemu ploščinsko jednak.

Pretvori dan trikotnik ABC (slika 88.) na jednakokrakega.

Potegneš li skoz B vzporednico z AC, imeti morajo vsi trikotniki, katerim je AC osnovnica, vrh pa v oni vzporednici, isto ploščino.

Da dobiš izmed teh trikotnikov onega, ki je jednakokrak, razpolovi osnovnico v D, v tej točki postavi na AC pravokotnico DE ter potegni AE in CE; trikotnik ACE je jednakokrak in danemu trikotniku ABC jednak.

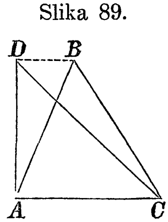
Slika 88.



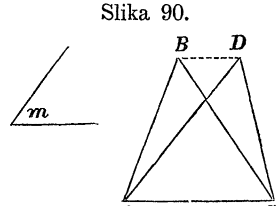
§ 119. Pretvori dan trikotnik ABC (slika 89.) na pravokotnega.

V A postavi na AC pravokotnico, skoz B pa potegni vzporednico z AC, sekajočo ono pravokotnico v D. Ako potegneš CD, je ACD zahtevani trikotnik.

Slika 89.



Slika 90.

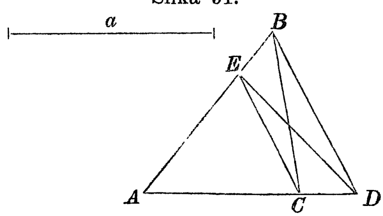


§ 120. Pretvori dan trikotnik ABC (slika 90.) na druzega, kateri bode imel dani kot m.

Skoz B potegni vzporednico z AC, v A pa načrtaj kot $CAD = m$, čegar krak seče ono vzporednico v D. Ako potegneš CD, je ACD zahtevani trikotnik.

§ 121. Pretvori dan trikotnik ABC (slika 91.) na druzega, kateri bode imel dano osnovnico a.

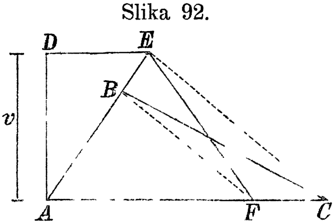
Slika 91.



Na AC načrtaj a od A do D ter potegni BD; dalje potegni $CE \parallel BD$, točki D in E pa zveži z daljico DE. Trikotnika CED in CEB imata isto osnovnico CE in jednako višino, tedaj sta jednaka. Dodaš li k ACE trikotnik CED, dobiš ADE; ako prišteješ pa k ACE trikotnik CEB, dobiš ACB; trikotnik ADE, kateri ima dano osnovnico a, jednak je torej danemu trikotniku ABC.

§ 122. Pretvori trikotnik ABC (slika 92.) na druzega, kateri bode imel dano višino v.

Slika 92.



V A postavi na AC pravokotnico ter odreži na njej $AD = v$, skoz D pa potegni z AC vzporednico, sekajočo podaljšano stranico AB v E. Ako potegneš še CE, dalje $BF \parallel EC$ in slednjič EF, je AFE zahtevani trikotnik.

Naloge.

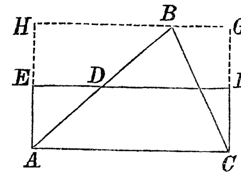
Načrtaj trikotnik s stranicami $4\,^{c}/_{m}$, $3\,^{c}/_{m}$ in $2\,^{c}/_{m}$ ter ga pretvori

a) na jednakokrak trikotnik z osnovnico $5\,^{c}/_{m}$;
b) na pravokoten trikotnik s kateto $3\,^{c}/_{m}$;
c) na trikotnik s kotom 60^0;
d) na trikotnik z osnovnico $35\,^{m}/_{m}$;
e) na trikotnik z višino $26\,^{m}/_{m}$;
f) na trikotnik s kotom 30^0 in osnovnico $3\,^{c}/_{m}$;
g) na trikotnik s kotom 45^0 in višino $25\,^{m}/_{m}$.

§ 123. Pretvori trikotnik ABC (slika 93.) na pravokotnik.

V A in C postavi pravokotnici na AC, stranico AB pa razpolovi v D ter potegni skoz D z AC vzporednico, sekajočo oni dve pravokotnici v E in F. Pravokotnik $ACFE$ je potem jednak trikotniku ABC, ker je vsak polovica pravokotnika $ACGH$.

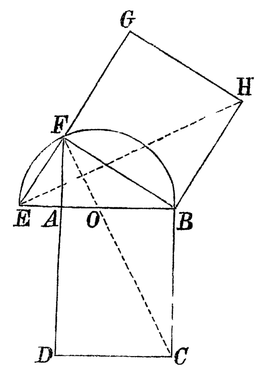
Slika 93.



§ 124. Pretvori pravokotnik $ABCD$ (slika 94.) na kvadrat.

Podaljšaj stranici AB in AD čez A ter naredi $BE = BC$. Ako načrtaš dalje s srede O daljice BE s polumerom OB lok, sekajoč podaljšano AD v F, potem je trikotnik BFE pri F pravokoten (§ 65.) Kvadrat $BFGH$, katerega načrtaš nad BF, je danemu pravokotniku $ABCD$ ploščinsko jednak.

Slika 94.



Da to izprevidiš, potegni premi EH in FC; trikotnik EBH je potem polovica kvadrata $BFGH$, in CBF polovica pravokotnika $ABCD$. Trikotnika EBH in CBF sta pa skladna, tedaj tudi ploščinsko jednaka; zatorej morata biti jednaka tudi oba dvakrat tolika lika, namreč kvadrat $BFGH$ in pravokotnik $ABCD$.

§ 125. 1.) Pretvori dan paralelogram na pravokotnik.

Razrešitev navedli smo že v § 102.

2.) Pretvori dan paralelogram na druzega, kateri bode imel dan kot.

Razrešitev podobna je oni naloge v § 120.

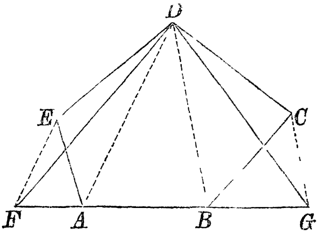
3.) Pretvori dan paralelogram na druzega, kateri bode imel dano stranico.

Pretvorbo izvršiš oziraje se na § 121.

§ 126. Pretvori kateri koli premočrten lik $ABCDE$ (slika 95.) na trikotnik.

Potegni diagonalo AD in skoz E z njo vzporednico, sekajočo podaljšano AB v F. Potegneš li DF, potem je četverokotnik $BCDF$ jednak peterokotniku $ABCDE$; kajti obadva razločujeta se le v tem, da je sestavljen četverokotnik $BCDF$ s četverokotnika $ABCD$ in trikotnika ADF, peterokotnik $ABCDE$ pa z $ABCD$ in trikotnika

Slika 95.



ADE; a trikotnika *ADF* in *ADE* sta jednaka, kajti oba imata isto osnovnico *AD* in jednako višino; vsled tega sta tudi lika *BCDF* in *ABCDE* ploščinsko jednaka. Sedaj treba le še četverokotnik *BCDF* v trikotnik pretvoriti. V ta namen potegni diagonalo *BD*, skoz *C* z njo vzporednico, sekajočo podaljšano *AB* v točki *G*, in slednjič daljico *DG*; trikotnik *FGD* je potem jednak četverokotniku *BCDF* (zakaj?), tedaj tudi peterokotniku *ABCDE*.

Dani peterokotnik treba torej pretvoriti najprej na četverokotnik in le-tega na trikotnik.

Naloge.

1.) Načrtaj šesterokotnik ter ga pretvori zaporedoma na peterokotnik, na četverokotnik in na trikotnik.

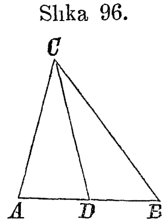
Vsak premočrten lik je môči tedaj pretvoriti na trikotnik, potem na pravokotnik in slednjič na kvadrat.

S pomočjo take pretvorbe je môči določiti na prav jednostaven način ploščino vsakemu mnogokotniku; za to treba le s kakim merilom izmeriti stranico kvadratu, na katerega smo mnogokotnik pretvorili, ter mersko število te stranice samo s seboj pomnožiti.

2.) Načrtaj tri skladne, nepravilne osmerokotnike, ter določi ploščino prvemu in druzemu, kakor smo v § 109. učili, tretjemu pa, pretvorivši ga na kvadrat.

9. Kakó je deliti premočrtne like.

Slika 96.

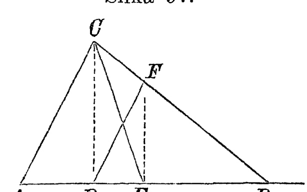


§ 127. Razdeli trikotnik *ABC* (slika 96.) z oglišča *C* na dva jednaka dela.

Razpolovi stranico *AB* v *D* ter potegni *CD*. Trikotnika *ADC* in *BCD* imata jednaki osnovnici in isto višino, torej sta jednaka.

Razdeli trikotnik na tri, štiri, pet jednakih delov.

Slika 97.



§ 128. Razdeli trikotnik *ABC* (slika 97.) s katere koli točke *D*, ležeče v jednistranici, na dva jednaka dela.

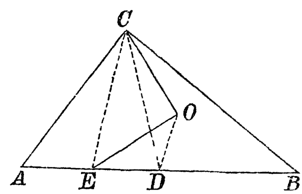
Razpolovi AB v E ter potegni CD in CE; trikotnik ACD je potem za CDE manjši nego polovica od ABC.

Ako potegneš tedaj $EF \parallel CD$, in še DF, je $\triangle CDF = \triangle CDE$, torej $ABFC = \triangle ACE$, in zato $ADFC$ jedna, $\triangle BDF$ pa druga polovica trikotnika ABC.

§ **129.** Razdeli trikotnik ABC (slika 98.) s točke v njem ležeče na dva jednaka dela.

Razpolovi AB v točki D ter potegni CD. Ako je dana točka v CD, potem je ta prema sama iskana razpolovnica; ako je dana točka zunaj CD, kakor n. pr. tu točka O, potem potegni OD in vzporedno z njo CE. Zvežeš li O s C in E, potem lahko dokažeš, da sta četverokotnika $AEOC$ in $BEOC$ jednaka, torej vsak polovica trikotnika ABC.

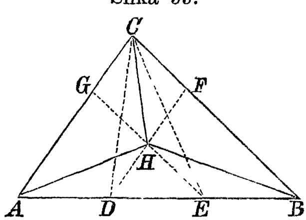
Slika 98.



§ **130.** Razdeli trikotnik ABC (slika 99.) takó na tri jednake dele, da se bodo sekale razdelnice, potegnene z oglišč, v skupni točki znotraj trikotnika.

Razdeli stranico AB v točkah D in E na tri jednake dele, ter potegni CD in CE; trikotniki ACD, DCE, BCE so potem jednaki. Potegneš li še $DF \parallel AC$ in $EG \parallel BC$, potem so od presečišča H potegnene preme AH, BH, CH iskane razdelnice. Kajti $\triangle ACH = \triangle ACD = \frac{1}{3} \triangle ABC$; dalje $\triangle BCH = \triangle BCE = \frac{1}{3} \triangle ABC$; tedaj mora biti tudi ostanek, namreč $\triangle ABH$ tretjina $\triangle ABC$.

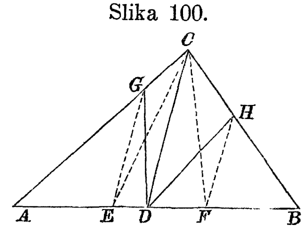
Slika 99.



§ **131.** Razdeli trikotnik ABC (slika 100.) s točke D, ležeče v jedni stranici, na tri jednake dele.

Potegni CD, AB pa razdeli v točkah E in F na tri jednake dele ter potegni daljici EG in FH vzporedno s CD. Zvežeš li točko D z G in H s premama DG in DH, potem so le-te iskani razdelnici. Kajti $\triangle ACE = \triangle ECF = \triangle BCF = \frac{1}{3} \triangle ABC$. A trikotnika

Slika 100.



ADG in *ACE* sta ploščinsko jednaka in prav takó tudi trikotnika *BDH* in *BCF;* tedaj je $\triangle ADG = \frac{1}{3} \triangle ABC$ in $\triangle BDH = \frac{1}{3} \triangle ABC$; vsled tega mora biti tudi ostanek $CGDH = \frac{1}{3} ABC$.

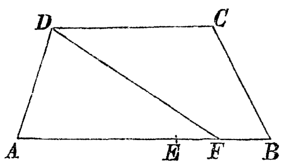
§ **132.** Razdeli paralelogram takó na več jednakih delov, da bodo vse razdelnice z jedno stranico vzporedne.

Razdeli stranici, kateri sta tej stranici priležni, na toliko jednakih delov, kolikor jih je zahtevanih, skoz razdelišča pa potegni preme; paralelogrami, katere si na ta način dobil, imajo jednako osnovnico in isto višino; oni so torej jednaki.

§ **133.** Razdeli trapez takó na več jednakih delov, da bodo sekale razdelnice obedve vzporedni stranici.

Vsako izmed obeh vzporednih stranic razdeli na toliko jednakih delov, kolikor jih je zahtevanih, skoz razdelišča pa potegni preme; le-te so iskane razdelnice.

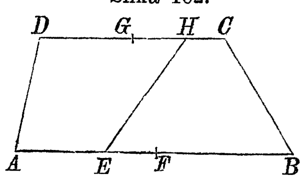
Slika 101.



§ **134.** Razdeli trapez *ABCD* (slika 101.) z oglišča *D* na dva jednaka dela.

Na večjo vzporedno stranico *AB* načrtaj od *A* do *E* manjšo *CD*, razstoj *BE* pa razpolovi v *F* ter potegni *DF;* na ta način razdelil si dani trapez na dva dela *ADF* in *BCDF*, katera sta ploščinsko jednaka (zakaj?).

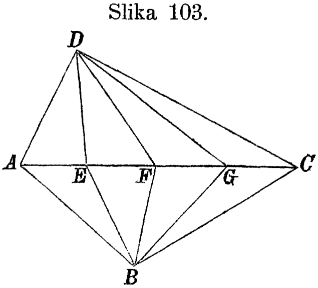
Slika 102.



§ **135.** Razdeli trapez *ABCD* (slika 102.) s točke *E*, ležeče v jedni stranici vzporednici, na dva jednaka dela.

Razpolovi obe stranici vzporednici v točkah *F* in *G* ter naredi $HG = EF$. Ako potegneš daljico *EH*, potem sta trapeza *AEHD* in *BEHC* jednaka, kar lahko dokažeš; *EH* je tedaj iskana razdelnica.

Slika 103.



§ **136.** Razdeli trapezoid na več jednakih delov.

Treba li n. pr. trapezoid *ABCD* (slika 103.) razdeliti na štiri jednake dele, potem potegni diagonalo *AC* ter jo razdeli na štiri jednake dele, razdelišča pa zveži z nasprotnima ogliščema s premami; trapezoidi *ABED, BFDE, BGDF* in *BCDG*, katere si na ta način dobil, so jednaki.

VII. O podobnosti premočrtnih likov.

1. O sorazmernosti daljic.

§ **137.** Daljico, katero je môči na drugi daljici jedenkrat ali večkrat brez ostanka načrtati, imenujemo m e r o druge daljice. Takó je v sliki 104., kjer vzamemo, da je $AB = BC = CD = DE = EF$, daljica AB mera daljic AB, AC, CF, sploh vseh ondi načrtanih daljic.

Slika 104.

Primerjajoč daljici AB in AF vidimo, da ima AB skupno mero AB 1krat, AF pa 5krat v sebi; daljici AB in AF sta si tedaj kakor števili 1 in 5, ali njiju razmerje je 1 : 5. Takisto se prepričamo, da sta

daljici	AB	in	AC	v razmerji	1 : 2,	
»	AC	»	AB »	»	2 : 1,	
»	BD	»	AF »	»	2 : 5,	
»	CF	»	AE »	»	3 : 4,	i. t. d.

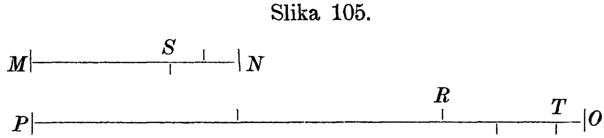
§ **138.** K a k ó i z r a ž u j e m o r a z m e r j e d v e h d a l j i c s š t e v i l i.

V ta namen treba načrtati manjšo daljico kolikorkrat je mogoče na večjo.

Ako ima večja daljica manjšo večkrat, n. pr. 5krat v sebi, in sicer brez ostanka, potem je 1 : 5 razmerje med manjšo in večjo daljico.

Ako se pa manjša daljica ne dá na večjo natanko načrtati, nego ima n. pr. PO (slika 105.) daljico MN 2krat v sebi in ostanek RO, potem treba iskati tretje daljice, katera je s k u p n a mera daljicama MN in RO. V ta namen treba načrtati ostanek RO na manjšo daljico MN; vzemimo, da ima MN daljico RO jedenkrat v sebi in je

Slika 105.



SN ostanek. Ta ostanek načrtamo zopet na prejšnji RO, recimo, da ima RO daljico SN 2krat v sebi in je TO novi ostanek. Ta ostanek

TO načrtamo zopet na prejšnji ostanek SN, kateri ga ima natanko 2krat v sebi. TO je skupna mera daljicama MN in PO, kajti

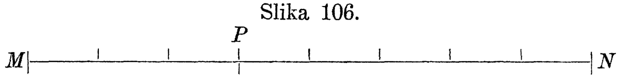
$$\begin{aligned} SN &= 2\,TO, \\ RO &= 2\,SN + TO = 5\,TO, \\ MN &= RO + SN = 7\,TO, \\ PO &= 2\,MN + RO = 19\,TO. \end{aligned}$$

Mero TO ima tedaj daljica MN 7krat in daljica PO 19krat v sebi; zarad tega sta si daljici MN in PO kakor števili 7 in 19, ali 7 : 19 je razmerje med MN in PO.

Načrtaj več parov daljic ter izrazi na ravnokar omenjeni način razmerje med vsakima dvema daljicama s števili.

§ 139. 1.) Razdeli daljico MN (slika 106.) na dva dela, katera sta si, kakor n. pr. števili 3 : 5.

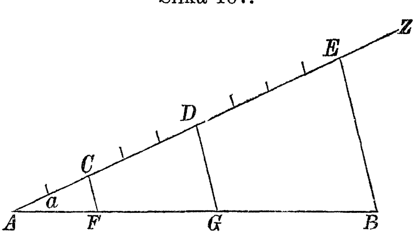
Slika 106.



Najprej razdeli MN na $3 + 5 = 8$ jednakih delov ter vzemi od teh 3 za prvi iskani del MP, druzih 5 pa za drugi del PN.

2.) Razdeli daljico AB (slika 107.) takó na tri dele, da si bodo le-ti kakor števila 2, 3, 4.

Slika 107.



Skoz A potegni kateri koli trak AZ, nanj načrtaj od A do C 2 jednaka dela, od C do D 3, od D do E pa 4 prav tolike dele ter potegni BE. Potegneš li skoz točki C in D še premi CF in DG vzporedno z BE, potem ima AB $2 + 3 + 4 = 9$ jednakih delov, AF pa ima 2 taka dela, FG ima 3, GB pa 4 take dele, tedaj so si AF, FG in GB kakor števila 2, 3 in 4.

Naloge.

1.) Potegni daljico ter jo razdeli v razmerji 4 : 3.

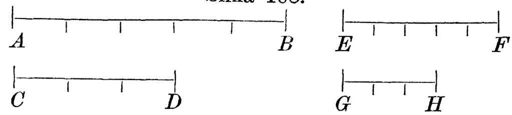
2.) Razdeli daljico na štiri dele, kateri so si kakor števila 1, 3, 4, 6.

3.) Načrtaj trikotnik, v katerem so si stranice kakor števila 3, 4, 5.

4.) Načrtaj jednakokrak trikotnik, v katerem je razmerje med osnovnico in krakom 2 : 3.

§ 140. Daljici AB in CD (slika 108.) sta v razmerji $5 : 3$, razmerje daljic EF in GH je tudi $5 : 3$. Ako postavimo med te jednaki razmerji $AB : CD$ in $EF : GH$ jednačaj, dobimo sorazmerje ali proporcijo $AB : CD = EF : GH$, katero čitamo: AB in CD sta si kakor EF in GH, ali: razmerje med AB in CD je jednako razmerju med EF in GH.

Slika 108.



V tem slučaji pravimo: daljici AB in EF sta sorazmerni *(proportioniert)* z daljicama CD in GH.

Je-li $CD = EF$, potem imenujemo $AB : CD = CD : GH$ stalno sorazmerje *(stetige Proportion)*; CD je srednja geometrijska sorazmernica med AB in GH.

2. O sorazmernosti premočrtnih likov.

§ 141. Ako zaznamenujeta P in p ploščini, S in s stranici dveh kvadratov, potem je po § 99.

$$P = S^2,\ p = s^2, \text{ tedaj}$$
$$P : p = S^2 : s^2; \text{ t. j.:}$$

Ploščini dveh kvadratov sta si kakor drugi potenci njiju stranic.

§ 142. Ako zaznamenujemo ploščini dveh paralelogramov ali trikotnikov oziroma s P in p ali $P_\triangle$ in $p_\triangle$, in dotični osnovnici z O in o in višini z V in v, dobimo po §§ 100., 103. in 105.

$$P = O \times V,\ p = o \times v, \text{ in}$$
$$P_\triangle = \frac{O \times V}{2},\ p_\triangle = \frac{o \times v}{2}, \text{ tedaj}$$
$$P : p = O \times V : o \times v, \text{ in}$$
$$P_\triangle : p_\triangle = O \times V : o \times v; \text{ t. j.:}$$

Ploščini dveh paralelogramov ali trikotnikov sta si kakor produkta iz njih osnovnic in višin.

Za $V = v$ izpremené se prejšnji sorazmerji v te-le:

$$P : p = O : o, \text{ in}$$
$$P_\triangle : p_\triangle = O : o; \text{ t. j.:}$$

Ploščini dveh paralelogramov ali trikotnikov, katera imata jednako višino, sta si kakor njiju osnovnici.

Za $O = o$ dobimo prav takó:

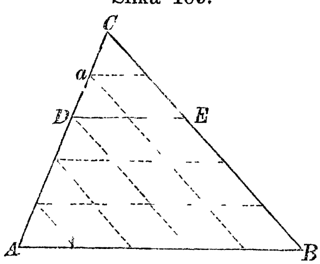
$$P : p = V : v, \text{ in}$$
$$P_{\triangle} : p_{\triangle} = V : v; \text{ t. j.:}$$

Ploščini dveh paralelogramov ali trikotnikov z jednako osnovnico sta si kakor njiju višini.

3. O podobnosti trikotnikov.

§ 143. Dva trikotnika imenujemo podobna *(ähnlich)*, ako imata isto obliko, a različno veličino.

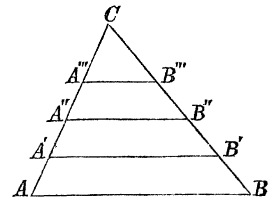
Slika 109.



Da določimo natančneje pojem o podobnosti dveh trikotnikov, potegnimo v trikotniku ABC (slika 109.) s stranico AB vzporednico DE ter primerjajmo stranice in kote trikotnikov ABC in DEC. Tu najdemo najprej, da imata trikotnika jednake kote; kajti kot C je obema trikotnikoma skupen; kota BAC in EDC sta jednaka kakor protikota, in prav takó tudi kota ABC in DEC. Da zvemo odnošaje med stranicami, poiščimo najprej razmerje med AC in DC (slika 109.); vzemimo, da je Ca njiju skupna mera; recimo dalje, da ima le-to AC 5krat, DC 2krat v sebi, tedaj $AC : DC = 5 : 2$. Potegnemo li skoz vsako razdelišče stranice AC vzporednico z AB, razdelimo tudi BC s tem po § 74. na 5 med seboj jednakih delov; le-teh ima EC 2, tedaj $BC : EC = 5 : 2$. Ako potegnemo slednjič skoz vsako razdelišče stranice AC tudi vzporednico z BC, razdelimo tudi AB na 5, DE pa na 2 jednaka dela, in sicer so posamični deli stranice AB prav toliki, kolikeršna sta dela stranice DE, kajti vzporednice med vzporednicami so jednake; tedaj velja tudi $AB : DE = 5 : 2$. V teh dveh trikotnikih je torej razmerje med vsakima dvema stranicama, kateri sta jednakima kotoma nasprotni, isto, namreč $5 : 2$.

Ako potegnemo tedaj v trikotniku vzporednico z jedno stranico, dobimo manjši trikotnik; le-ta in dani trikotnik imata jednake kote in sorazmerne stranice.

Slika 110.



Vzemimo, da se pomikata v trikotniku ABC točki A in B v stranicah AC in BC proti C, in sicer takó, da ostane daljica, ki ji veže, namreč $A'B'$, $A''B''$, ... v vsaki novi leži z AB vzporedna, potem je vsak naslednji trikotnik $A'B'C$, $A''B''C$ manjši od prejšnjega, a oblika ostane vsem neizpremenjena. Vsi ti trikotniki imajo torej prav isto obliko; oni so tedaj podobni. Ob jednem pa je iz ravnokar dokazanega izreka razvidno, da imata po dva in dva izmed teh trikotnikov paroma jednake kote, in da je razmerje med stranicami, katere so jednakim kotom nasprotne, isto. Odtod izvajamo:

Dva trikotnika sta si podobna, ako imata vse kote paroma jednake in jednakim kotom nasprotne stranice sorazmerne.

V podobnih trikotnikih imenujemo jednakim kotom nasprotne stranice istoležne *(homolog)* stranice.

Iz zadnjih dveh izrekov izvajamo pa tudi:

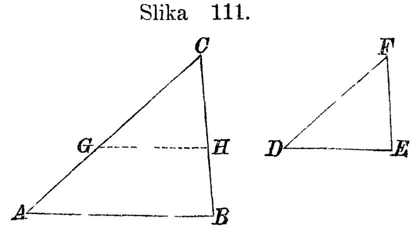
Ako potegnemo v trikotniku vzporednico z jedno stranico, dobimo manjši trikotnik, kateri je danemu podoben.

§ 144. Da sta si dva trikotnika podobna, treba šestero svojstev, namreč: vsak izmed treh kotov jednega trikotnika mora biti jednak jednemu kotu v druzem trikotniku, in vsaka stranica jednega trikotnika mora biti z istoležno stranico druzega trikotnika v istem razmerji.

Ako imata dva trikotnika troje sestavin paroma jednakih, sklepamo večidel že, da sta skladna; prav takó sklepamo lahko tudi, da sta si dva trikotnika podobna, ako je danih le nekaj za podobnost potrebnih svojstev ali pa tudi druzih pogojev, po katerih se ona svojstva samo ob sebi razumevajo Slučaje, v katerih se more to zgoditi, navajamo v naslednjem.

§ 145. Vzemimo, da je v trikotnikih ABC in DEF (slika 111.) kot $A = D$, $B = E$, tedaj tudi $C = F$. Ako naredimo $CG = DF$ ter potegnemo $GH \parallel AB$, je $\triangle GHC \cong DEF$ (po I. izreku o skladnosti), a $\triangle ABC \sim \triangle GHC$, torej tudi $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Slika 111.



Odtod izvajamo:

(I. izrek o podobnosti.) Dva trikotnika sta si podobna, ako imata vse tri kote paroma jednake.

Toda, če sta v dveh trikotnikih dva kota paroma jednaka, morata biti jednaka tudi tretja dva kota; tedaj lahko sklepamo, da sta si dva trikotnika podobna, če imata le dva kota paroma jednaka.

Kateri pogoj zadostuje, da sta si dva jednakokraka, kateri, da sta si dva pravokotna trikotnika podobna?

Dva jednakostranična trikotnika sta si vsikdar podobna.

Načrtaj več podobnih trikotnikov, v katerih se nahajata kota 60^0 in 45^0.

§ 146. Vzemimo, da je v trikotnikih ABC in DEF (slika 111.) $AC : DF = BC : EF$ in kot $C = F$.

Ako naredimo $CG = DF$ ter potegnemo $GH \parallel AB$, je $AC : CG = BC : CH$. V tem in prejšnjem sorazmerji so prvi trije členi jednaki, tedaj morata biti tudi četrta člena jednaka, torej $CH = EF$. Potem pa je $\triangle\ GHC \cong DEF$ (po II. izreku o skladnosti); a $\triangle\ ABC \sim \triangle\ GHC$, tedaj tudi $\triangle\ ABC \sim \triangle\ DEF$; t. j.:

(II. izrek o podobnosti.) Dva trikotnika sta si podobna, ako sta dve stranici prvega sorazmerni z dvema stranicama druzega, in kota, katera te stranice oklepajo, jednaka.

§ 147. Recimo, da je v trikotnikih ABC in DEF (slika 111.) $AC : DF = BC : EF$, $AC > BC$, $DF > EF$, in kot $B = E$.

Naredimo $CG = DF$ ter potegnimo $GH \parallel AB$, potem je $AC : CG = BC : CH$. To in prejšnje sorazmerje imata prve tri člene jednake, tedaj morata imeti tudi četrta člena jednaka, torej $CH = EF$. Potem pa je $\triangle\ GHC \cong \triangle\ DEF$ (po III. izreku o skladnosti); a $\triangle\ ABC \sim GHC$, tedaj tudi $\triangle\ ABC \sim \triangle\ DEF$.

Odtod izvajamo:

(III. izrek o podobnosti.) Dva trikotnika sta si podobna, ako sta dve stranici jednega sorazmerni z dvema stranicama druzega in večjima izmed teh stranic nasprotna kota jednaka.

§ 148. Vzemimo, da je v trikotnikih ABC in DEF (slika 111.)

$$AC : DF = BC : EF, \text{ in}$$
$$AC : DF = AB : DE,$$

Ako naredimo $CG = DF$ ter potegnemo $GH \parallel AB$, potem velja

$$AC : CG = BC : CH, \text{ in}$$
$$AC : CG = AB : GH.$$

V prvem in tretjem sorazmerji so prvi trije členi jednaki, tedaj morata biti tudi četrta člena jednaka, torej $CH = EF$. Prav takó izvajamo iz druzega in četrtega sorazmerja, da je $GH = DE$. Potem pa je $\triangle\, GHC \cong \triangle\, DEF$ (po IV. izreku o skladnosti); toda $\triangle\, ABC \sim \triangle\, GHC$, torej tudi $\triangle\, ABC \sim \triangle\, DEF$; t. j.:

(IV. izrek o podobnosti.) Dva trikotnika sta si popodobna, ako so vse tri stranice jednega sorazmerne z vsemi tremi stranicami druzega trikotnika.

§ **149.** Iz I. izreka o podobnosti izvajamo še ta-le dva:

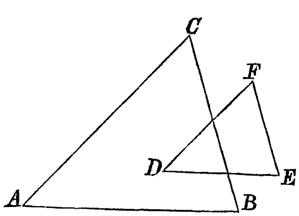
1.) Dva trikotnika sta si podobna, ako imata paroma vzporedne stranice.

Vzemimo, da je v trikotnikih ABC in DEF (slika 112.) stranica $AB \parallel DE$, $AC \parallel DF$ in $BC \parallel EF$.

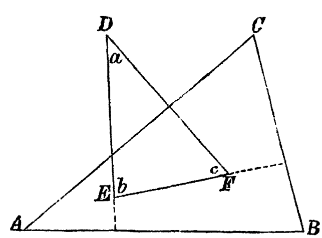
Ker so koti, katerih kraki so v istem smislu vzporedni, jednaki, je kot $A = D$, $B = E$ in $C = F$; tedaj $\triangle\, ABC \sim \triangle\, DEF$.

Katere stranice so v tacih dveh trikotnikih istoležne?

Slika 112.



Slika 113.



2.) Dva trikotnika sta si podobna, ako so njiju stranice paroma druga na drugi pravokotne.

Recimo, da je v trikotnikih ABC in DEF (slika 113.) stranica $AB \perp DE$, $AC \perp DF$ in $BC \perp EF$.

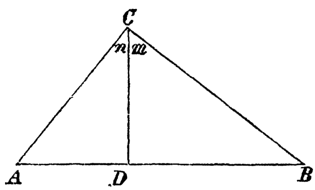
Po § 43. je tu kot $A = a$, $B = b$ in $C = c$, tedaj $\triangle\, ABC \sim \triangle\, DEF$.

Katere stranice so v tacih dveh trikotnikih istoležne?

§ **150.** Vzemimo, da je trikotnik ABC (slika 114.) pri C pravokoten in $CD \perp$ na hipotenuzi AB.

V trikotnikih ABC in ACD je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC = R$ in $A = A$; tedaj tudi $B = n$, in zarad tega $\triangle ABC \sim \triangle ACD$.

Slika 114.



V trikotnikih ABC in BCD je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDC = R$ in $B = B$; tedaj tudi $A = m$, in zategadelj $\triangle ABC \sim \triangle BCD$.

Ako je pa $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ in $\triangle ABC \sim BCD$, je tudi

$$\triangle ACD \sim \triangle BCD.$$

1.) Ker so pa v podobnih trikotnikih jednakim kotom nasprotne stranice sorazmerne, velja

$$\left.\begin{array}{ll} \text{zarad } \triangle ABC \sim \triangle ACD \ldots & AB : AC = AC : AD, \\ \quad » \quad \triangle ABC \sim \triangle BCD \ldots & AB : BC = BC : BD. \end{array}\right\}$$

2.) Prav takó je tudi

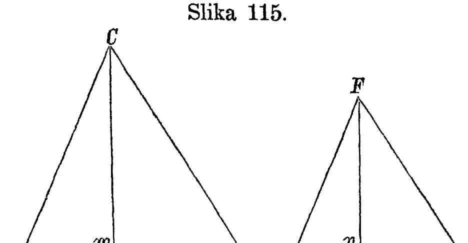
$$\text{zarad } \triangle ACD \sim \triangle BCD \ldots AD : CD = CD : BD.$$

Če spustimo tedaj v pravokotnem trikotniku z vrha pravega kota pravokotnico na hipotenuzo, je

1.) vsaka kateta danega trikotnika srednja sorazmernica med vso hipotenuzo in tej kateti priležnim odsekom hipotenuze;
2.) pravokotnica srednja sorazmernica med obema odsekoma hipotenuze.

4. O najimenitnejših svojstvih podobnih trikotnikov.

Slika 115.



§ **151.** Vzemimo, da je (slika 115.) trikotnik $ABC \sim DEF$; vzemimo dalje, da sta v teh trikotnikih AB in DE osnovnici, CG in FH pa višini.

Ker je po pogoji kot $A = D$ in $m = n$, je

$\triangle ACG \sim \triangle DFH$, tedaj $CG : FH = AC : DF$. Zarad podobnosti trikotnikov ABC in DEF velja pa tudi $AB : DE = AC : DF$; tedaj tudi $CG : FH = AB : DE$; t. j.:

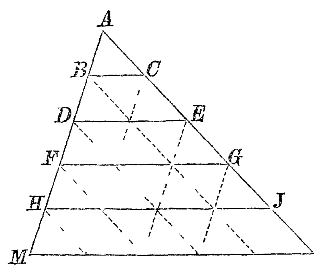
V podobnih trikotnikih so si višine kakor osnovnice.

§ 152. Če je vsaka trikotnikova stranica dvakrat, trikrat, štirikrat tolika, kolikeršna je istoležna stranica v druzem podobnem trikotniku, potem je tudi vsota vseh stranic, t. j. obseg prvega trikotnika dvakrat, trikrat, štirikrat tolik, kolikeršen je obseg druzega trikotnika.

V podobnih trikotnikih sta si obsega kakor vsaki dve istoležni stranici.

§ 153. Ako razdelimo v trikotniku AMN (slika 116.) stranico AM na pet jednakih delov ter potegnemo skoz vsako razdelišče vzporednico z MN, dobimo podobne trikotnike ABC, ADE, AFG, . . .; če potegnemo dalje skoz vsako razdelišče v stranici AM vzporednice z AN, in prav takó tudi skoz vsako razdelišče stranice AN vzporednice z AM, dobimo trikotnike, kateri imajo vsi isto ploščino kakor ABC.

Slika 116.



Trikotnik ADE ima 4 trikotnike in izmed teh je vsak jednak ABC; ploščini trikotnikov ADE in ABC sta si tedaj kakor $4 : 1$. Istoležne stranice teh dveh trikotnikov pa so si kakor $2 : 1$, tedaj njih kvadrati kakor $4 : 1$. Ploščini teh dveh trikotnikov sta tedaj v prav istem razmerji kakor kvadrati njih istoležnih stranic.

Iz pridejane slike je dalje razvidno, da je v trikotnikih AFG in ABC razmerje med ploščinama in tudi med kvadratoma vsakih dveh istoležnih stranic $9 : 1$.

V trikotnikih AHJ in AMN je $16 : 25$ razmerje med ploščinama in ob jednem tudi razmerje med kvadratoma vsakih dveh istoležnih stranic.

Odtod izvajamo:

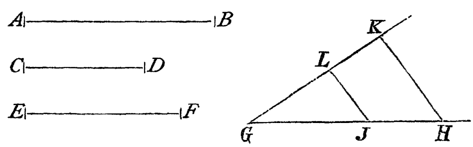
Ploščine podobnih trikotnikov so v istem razmerji kakor kvadrati njih istoležnih stranic.

Ako je tedaj v kacem trikotniku vsaka stranica 2-, 3-, 4-, 5-, 6krat tolika, kolikeršna je istoležna stranica v podobnem trikotniku, potem je ploščina prvega trikotnika 4-, 9-, 16-, 25-, 36krat tolika kakor ploščina druzega trikotnika.

5. Načrtovanje, opirajoče se na podobnost trikotnikov.

§ 154. Dane so tri daljice AB, CD in EF (slika 117); poišči četrto sorazmernico.

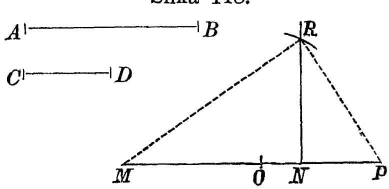
Slika 117.



Načrtaj kakeršen koli kot G, na njega krakih odreži $GH = AB$, $GJ = CD$, $GK = EF$, potem potegni HK in s to vzporedno JL; GL je četrta sorazmernica daljic AB, CD in EF. Kajti $\triangle GHK \sim \triangle GJL$, tedaj $GH : GJ = GK : GL$, ali $AB : CD = EF : GL$.

§ 155. Poišči srednjo sorazmernico k danima daljicama AB in CD (slika 118.)

Slika 118.

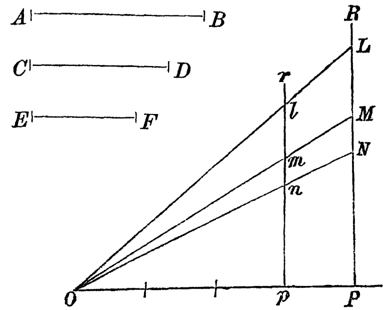


Na kateri koli premi načrtaj $MN = AB$ in $NP = CD$, v N pa postavi na MP pravokotnico; potem pa načrtaj, razpolovivši MP v O, z O s polumerom $OM = OP$ lok, sekajoč ono pravokotnico v R; NR je srednja sorazmernica med AB in CD. Kajti po § 65. je trikotnik MRP pri R pravokoten, tedaj (po § 150., 2.) $MN : NR = NR : NP$, ali $AB : NR = NR : CD$.

§ 156. Povečaj ali zmanjšaj več danih daljic AB, CD, EF,... (slika 119.) v danem razmerji.

Recimo, da treba dane daljice povečati n. pr. v razmerji $3 : 4$. V ta namen potegni trak OP, na tem načrtaj od O najprej 3, in potem tudi od O 4 jednake in prav tolike dele kakor so prvi; v točkah p in P postavi pravokotnici pr in PR; na bližjo pravokotnico pr načrtaj daljice $pl = AB$, $pm = CD$, $pn = EF, \ldots$, potem

Slika 119.



pa potegni skoz točko O in točke $l, m, n, \ldots$ trakove, sekajoče bolj oddaljeno pravokotnico v točkah $L, M, N, \ldots PL, PM, PN$ so iskane, v danem razmerji povečane daljice. Da je res takó, razvidno je iz podobnosti trikotnikov Opl in OPL, Opm in OPM, i. t. d.

Ako bi hoteli dane daljice zmanjšati v razmerji 4 : 3, načrtali bi jih na bolj oddaljeno pravokotnico PR; na bližji pravokotnici pr dobili bi potem v danem razmerji umanjene daljice.

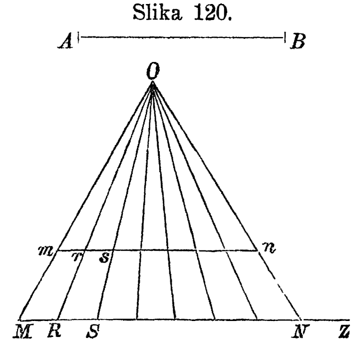
Vzemimo, da razmerje, v katerem treba dane daljice povečati ali zmanjšati, ni izraženo s števili nego z daljicami. V tem slučaji načrtaj na premo OP od O mesto jednakih delov, kateri izražujejo razmerska števila, razmerske črte, sicer pa delaj kakor prej.

§ **157.** Razdeli dano daljico na več jednakih delov.

a) Jedno razrešitev te naloge navedli smo že v § 75.; a ona je težavna in se dá le težko brez pogreškov izvesti, ker treba več vzporednic potegniti.

b) Jednostavnejša je ta-le razrešitev:

Slika 120.



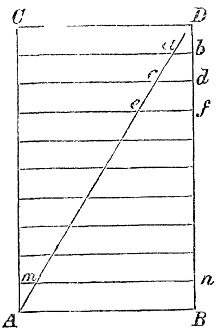
Vzemimo, da treba daljico AB (slika 120.) n. pr. na 7 jednakih delov razdeliti. V ta namen potegni trak AZ; nanj načrtaj 7 jednakih, sicer pa kakeršnih koli delov do N, nad MN pa načrtaj jednakostraničen trikotnik MNO. Narediš li $Om = On = AB$ ter potegneš mn, potem je Omn jednakostraničen trikotnik (zakaj?), tedaj mn jednaka AB in vzporedna z MN. Ako potegneš potem še od O do razdelišč stranice MN preme $OR, OS, \ldots$, sekajoče mn v točkah $r, s, \ldots$, razdelil si v teh točkah $mn = AB$ na 7 jednakik delov.

Kajti $\triangle\, Omr \backsim \triangle\, OMR$, $\triangle\, Ors \backsim \triangle\, ORS$, i. t. d.; a trikotniki $OMR, ORS, \ldots$ so jednaki, ker imajo isto višino in jednake osnovnice; zarad tega morajo biti jednaki tudi trikotniki $Omr, Ors, \ldots$;

ker pa imajo le-ti isto višino, imeti morajo tudi jednake osnovnice. Deli *mr, rs, ...,* daljice *mn* so torej jednaki.

c) Kadar treba določiti prav majhne dele kake daljice, služi nam ta-le razrešitev:

Slika 121.



Recimo, da treba AB (slika 121.) n. pr. na 10 jednakih delov razdeliti. V ta namen postavi v A in B pravokotnici na AB, na vsako izmed njih načrtaj do C in D 10 jednakih delov, potem pa zveži prvi dve, drugi dve, ... razdelišči s premo. Nalogo si razrešil, ako potegneš sedaj v pravokotniku $ABCD$ diagonalo AD. Kajti trikotnika Dab in DAB sta si podobna, tedaj mora biti razmerje $ab : AB$ jednako razmerju $Db : DB$; toda Db je deseti del od DB, tedaj mora biti tudi ab deseti del od AB. Prav takó izvajamo, da je $cd = \frac{2}{10} AB$, $ef = \frac{3}{10} AB$, ... $mn = \frac{9}{10} AB$.

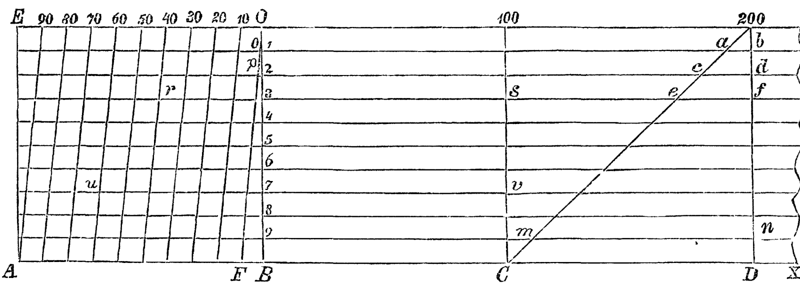
§* 158. Daljic, katere smo v naravi res izmerili, navadno ne načrtavamo na papir v njih pravi veličini nego v omaljenem merilu. Določeno dolžino, n. pr. 1 centimeter na papirji, vzamemo namreč za določeno dolžino, n. pr. 1 meter ali 20 metrov v resnici. Merilo, na katerem so one dolgostne mere, katere nam za resnično merjenje rabijo, zmanjšane, imenujemo omaljeno merilo (*verjüngter Masstab*).

Omaljena poprečna merila načrtavamo opiraje se na § 157., *c)*, kakó razdeliti daljico na več jednakih delov.

1.) Načrtaj tisočinsko merilo, t. j. poprečno merilo za decimalno mero.

Na trak AX (slika 122.) načrtaj 10 jednakih delov AB, BC, CD, ...; vsak tak del naj velja za 10 dolgostnih jednot. V krajiščih postavi pravokotnice in na te načrtaj zopet deset jednakih, sicer pa kakeršnih koli delov. Ako potegneš sedaj skoz zadnji dve razdelišči daljico, vzporedna je le-ta s prvo daljico in nji jednaka ter tudi na 10 jednakih delov razdeljena. Potem potegni skoz po dvoje nasprotnih razdelišč preme; le-te so ali vzporedne z AX ali pa na nji pravokotne. Dalje potegni v katerem koli razdelku diagonalo C 200 in na ta način si razdelil tudi AB na 10 jednakih delov. Kajti ab je deseti del od CD, tedaj tudi od AB; prav takó ima cd 2 taka dela, ef 3 dele, i. t. d. Te dele načrtaj sedaj na AB in $E0$, in sicer je najpripravnejše, da načrtaš najprej 9 delov, namreč mn, od 0 do 90 in od E do 10 in prav takó tudi na AB; potem načrtaj takisto 8, 7, 6, 5 delov. Slednjič potegni skoz 0 in F, in prav takó skoz vsaki dve naslednji razdelišči prečnice ali transverzale, k razdeliščem pa zapiši števila, kakor jih vidiš 'v sliki.

Slika 122.



Vsa daljica ADX ima 1000 delov; AB je deseti del, tedaj ima 100 delov; BF je deseti del od AB in ima 10 takih delov; $o1$ je po načrtovanji deseti del od BF, torej ima 1 tak del, kakeršnih ima vsa daljica 1000; $p2$ ima dva taka dela, i. t. d.

Ako vzamemo, da velja vsa daljica ADX za 1 meter, je AB 1 decimeter, BF 1 centimeter, $o1$ 1 milimeter.

2.) Načrtaj omaljeno tisočdelno merilo, na katerem veljata 2 c/m prave velikosti za 1 d/m.

3.) Načrtaj s pomočjo tega merila na katero koli premo 3 d/m, 2 d/m 8 c/m, 1 d/m 7 c/m 5 m/m, 239 m/m, 304 m/m dolgo daljico.

4.) Načrtaj trikotnik, čegar stranice merijo 21 c/m, 18 c/m in 16 c/m.

5.) Načrtaj kvadrat s stranico 145 m/m.

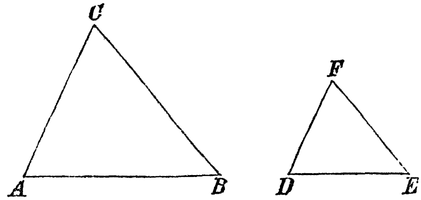
6.) Potegni tri daljice in določi jim s pomočjo gornjega merila dolžino v milimetrih.

7.) Načrtaj 4-, 5-, 6terostraničen mnogokotnik in določi mu obseg.

8.) Razmerje med dvema daljicama je 3 : 4; prva je 126 m/m dolga; načrtaj obe dve daljici.

§ 159. 1.) Načrtaj nad dano daljico DE (slika 123.) trikotnik, kateri je podoben danemu trikotniku ABC.

Slika 123.



a) V D načrtaj kot $EDF = BAC$ in v E kot $DEF = ABC$; njiju kraka sečeta se v F in DEF je zahtevani trikotnik.

b) K AC in BC poišči daljici, kateri sta v razmerji $AB : DE$ izpremenjeni (§ 154.); s prvo načrtaj lok z D, z drugo pa z E; ako potegneš od presečišča F teh dveh lokov do D in E premi, je $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

2.) Načrtaj kak trikotnik in potem tak temu podoben trikotnik. da je razmerje med istoležnimi stranicami v prvem in druzem trikotniku 1.) 5 : 3, 2.) 2 : 5.

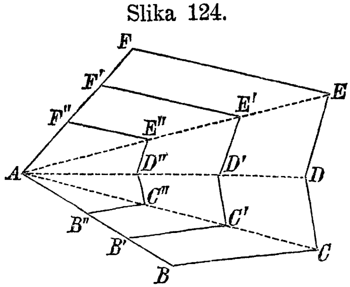
3.) V trikotniku ABC je razmerje stranic $AB : AC = 4 : 5$, in kot A, katerega te dve stranici oklepata, znaša 60^0; načrtaj nad stranico 248 $^m/_m$ trikotnik, kateri je podoben trikotniku ABC.

6. O podobnosti mnogokotnikov.

§ **160.** Dva mnogokotnika imenujemo podobna, ako imata isto obliko.

Da določimo svojstva podobnih mnogokotnikov natančneje, potegnimo v mnogokotniku $ABCDEF$ (slika 124.) od A diagonale AC, AD in AE. Mislimo si, da se pomikajo točke B, C, D, E, F v premah AB, AC, AD, AE, AF takó proti točki A, da ostanejo daljice $B'C'$, $C'D'$, ... $B''C''$, $C''D''$ ... v vsaki novi leži z istoležnimi stranicami BC, CD, ... vzporedne; na ta način dobivamo manjše in manjše mnogokotnike $AB'C'D'E'F'$, $AB''C''D''E''F''$, ..., a vsi imajo očividno isto obliko kakor dani mnogokotnik, tedaj so si podobni.

Slika 124.



Kot A je vsem mnogokotnikom skupen; a tudi drugi koti ostali so neizpremenjeni, kajti stranice pomikale so se vzporedno; vsi ti mnogokotniki imajo torej v istem redu jednake kote. Po § 147. so pa tudi stranice vsakega novega mnogokotnika sorazmerne z istoležnimi stranicami danega mnogokotnika.

V podobnih mnogokotnikih so tedaj koti v istem redu jednaki in istoležne stranice so sorazmerne.

Vsi pravilni mnogokotniki z istim številom stranic so podobni.

Iz prejšnjega izvajamo dalje:

a) Istoležne diagonale delé podobne mnogokotnike na podobne trikotnike.

b) V podobnih mnogokotnikih so istoležne diagonale v istem razmerji kakor istoležne stranice.

§ **161.** Ako je v kacem mnogokotniku vsaka stranica 2krat, 3krat, 4krat tolika kakor istoležna stranica v podobnem mnogokotniku, potem je tudi vsota vseh stranic, t. j. obseg prvega mnogokotnika, 2krat, 3krat, 4krat tolik, kolikeršen je obseg druzega mnogokotnika.

Obsegi podobnih mnogokotnikov so si tedaj kakor vsaki dve istoležni stranici.

V kakem razmerji sta obsega dveh pravilnih mnogokotnikov z istim številom stranic?

§ **162.** Ako potegnemo v dveh podobnih mnogokotnikih, izmed katerih ima prvi dvakrat tolike stranice kakor drugi, istoležne diagonale, raztvorimo ja na trikotnike; vsak trikotnik prvega mnogokotnika je (po § 157.) 4krat tolik kakor istoležni trikotnik druzega mnogokotnika, tedaj je tudi vsota vseh trikotnikov v prvem mnogokotniku, t. j. njega ploščina, 4krat tolika kakor vsota vseh trikotnikov, t. j. ploščina druzega mnogokotnika. Ploščini teh dveh mnogokotnikov sta si tedaj kakor $4:1$; a v istem razmerji sta tudi kvadrata vsakih dveh istoležnih stranic.

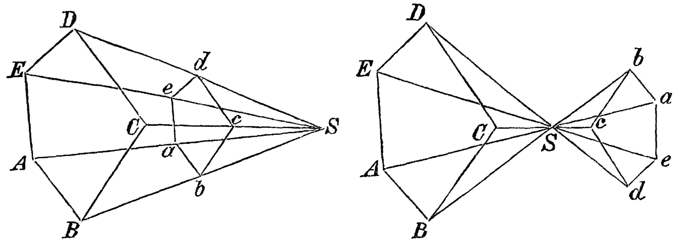
Ploščine podobnih mnogokotnikov so si kakor kvadrati istoležnih stranic.

Ako načrtamo tedaj lik, katerega smo v naravi res izmerili, v omaljeni meri takó na papir, da znaša na papirji vsaka njegova stranica le $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$, ... prave izmerjene dolžine, znaša likova ploščina na papirji $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{100}$, ... ploščine podobnega res izmerjenega lika.

V kakem razmerji sta ploščini dveh pravilnih mnogokotnikov z istim številom stranic?

§ **163.** Ako sečejo prečnice trakove, katere potegnemo od točke S (slika 125.), sorazmerno v točkah A in a, B in b, C in c, ..., potem sta si mnogokotnika $ABCD$ ... in $abcd$ ... podobna.

Slika 125.



Vzemimo, da velja $SA : Sa = SB : Sb = SC : Sc = \ldots$, potem sta si trikotnika SAB in Sab podobna in prav takó tudi SBC in Sbc, SCD in Scd, ..., tedaj $AB : ab = BC : bc$, kajti obedve razmerji jednaki sta razmerju $SB : Sb$. Prav takó dobimo tudi $BC : bc = CD : cd$, ... V mnogokotnikih $ABCD \ldots$ in $abcd \ldots$ so tedaj istoležne stranice sorazmerne.

Ker je dalje $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc$, $CD \parallel cd$, ..., so tudi koti A in a, B in b, C in c, ... paroma jednaki.

Mnogokotnika sta si torej podobna.

Dva podobna mnogokotnika môči je, primerno ja premaknivši, vsikdar v tako ležo spraviti, da sečejo njijina oglišča trakove, katere potegnemo od točke S, sorazmerno. Tako ležo dveh podobnih mnogokotnikov imenujemo perspektivno *(perspectivisch)* ležo, točko S pa podobnišče *(Aehnlichkeitspunkt)*, in sicer vnanje ali notranje. Podobnišče je vnanje, kadar sta po dve istoležni stranici v obeh mnogokotnikih na isti strani, notranje pa, kadar sta na nasprotnih stranéh te točke. Dva podobna in perspektivno ležeča mnogokotnika imata vnanje podobnišče, kadar so stranice, oklepajoče jednake kote, v istem smislu vzporedne; nasprotno pa imata notranje podobnišče, kadar so le-te stranice v nasprotnem smislu vzporedne.

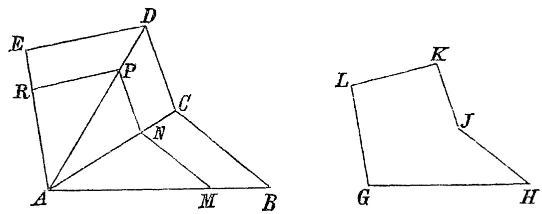
Dva podobna in perspektivno ležeča pravilna mnogokotnika zadostujeta obema ravno navedenima pogojema, torej imata vnanje in notranje podobnišče. Prvo je na daljici, katera veže središči obeh mnogokotnikov, drugo pa na podaljšku te daljice.

§ 164. Naloge.

1.) Načrtaj nad dano daljico GH (slika 126.) mnogokotnik, kateri je podoben danemu mnogokotniku $ABCDE$.

Potegni diagonali AC in AD ter naredi $AM = GH$; dalje potegni $MN \parallel BC$, $NP \parallel CD$, $PR \parallel DE$ in mnogokotnik $ABCDE \sim AMNPR$. Ako načrtaš sedaj nad GH mnogokotnik $GHJKL$, kateri je z $AMNPR$ skladen, je le-ta zahtevani mnogokotnik.

Slika 126.



Točke N, P, R dobiš lahko tudi na ta način, da zmanjšaš daljice AC, AD, AE v razmerji $AB : GH$ ter potem te zmanjšane daljice načrtaš od A do N, P, R.

2.) Načrtaj četverokotnik, kateri je danemu četverokotniku podoben, a novi mnogokotnik ima naj le na pol tolik obseg kakor dani.

3.) Načrtaj kakeršen koli peterokotnik in potem še drug prvemu podoben peterokotnik, in sicer naj bo razmerje med stranicami prvega in druzega $10 : 3$.

4.) Načrtaj dva podobna šesterokotnika, v katerih imajo istoležne stranice razmerje $4 : 5$.