

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik 16 (1989/1990)

Številka 1

Strani 258-263

Marija Vencelj:

PLAVANJE V DVEH TEKOČINAH

Ključne besede: matematika, analiza, algebra, Arhimedov zakon za dve tekočini.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/16/923-Vencelj.pdf>

© 1988 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2009 DMFA - založništvo

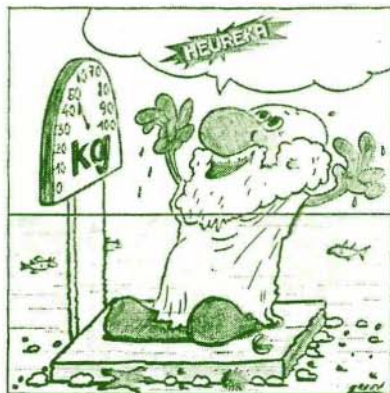
Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

MATEMATIKA

PLAVANJE V DVEH TEKOČINAH

Nedavno je minilo natanko 2200 let od smrti *Arhimeda*, enega največjih matematikov vseh časov. Umrl je pod mečem rimskega vojaka leta 212 pred našim štetjem, ko so v drugi punski vojni Rimljani zasedli njegove rodne Sirakuze. Smrt ga je doletela v starosti 75 let, medtem ko je sklonjen nad risbo v pesku reševal matematičen problem.

Arhimed velja za muzejski primerek zagrizenega misleca. Kadar je globoko razmišljal o matematiki, je pozabljal na hrano in na spanje. Glede pozabljivosti v zvezi z oblačenjem pa je prekosil vse. Tako je do slavnega odkritja o vzgonu, ki nosi po njem ime Arhimedov zakon, prišel med opazovanjem svojega, v kadi potopljenega telesa. Navdušen nad spoznanjem je tak, kot je bil, stekel iz kadi na ulice Sirakuz in vzklikal: "Hevreka, hevreka!" (Našel sem, našel sem!)



Slika desno: Arhimed (287–212)

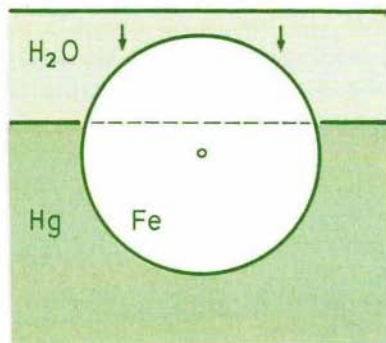
Arhimedu dolgujemo številna velika odkritja v matematiki, mehaniki in astronomiji, najbolj pa je znan prav po zakonu o hidrostatičnem vzgonu, s katerim deluje mirujoča tekočina na potopljeno telo. Zakon srečajo pri nas učenci v sedmem razredu osnovne šole in se glasi:

Mirujoča tekočina deluje na potopljeno telo s silo, ki kaže navpično navzgor in je enaka teži izpodrinjene tekočine. To silo imenujemo (hidrostatični) vzgon.

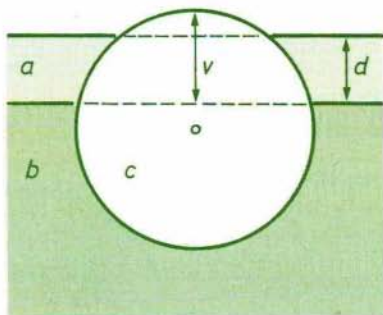
Po tem uvodu, skromnem za tako častitljivo obletnico, si za ilustracijo Arhimedovega zakona oglejmo nalogo, napovedano že v naslovu:

Na živo srebro, na katerem plava železna krogla, začnemo nalivati vodo in to počnemo toliko časa, da voda kroglo prekrije. Ali se bo pri tem krogla glede na gladino živega srebra dvignila, spustila ali ostala na svojem mestu? Kaj se s kroglo dogaja, medtem ko se vodna gladina dviga?

Spominjam se živahnega prerekanja, ki se je ob vprašanju vnelo v pisani počitniški družbi ob morju. Nekateri so menili, da se bo krogla še bolj potopila v živo srebro, ker bo pač morala nekako potoniti v od sebe redkejši vodi. Drugim se je dozdevalo, da voda pritiska kroglo navzdol, ker vodo pravzaprav nalijemo na kroglo, glede na to, da je gostota železa večja od polovične gostote živega srebra in je situacija taka, kot jo kaže slika 1.



Slika 1



Slika 2

Potem smo ugotovili, da voda, ki je gostejša od zraka, prav gotovo ustvarja neki dodatni vzgon, ko zalije zgornji krogelni odsek. Ta dodatna sila kroglo vleče iz živega srebra. S tem pa se zmanjša vzgon zaradi manjše potopitve v živo srebro, kar spet sili kroglo navzdol. Ravno dovolj različnih mnenj in dvomov, da se spravimo k računanju!

Železna krogla res plava na živem srebru, ker je gostota železa

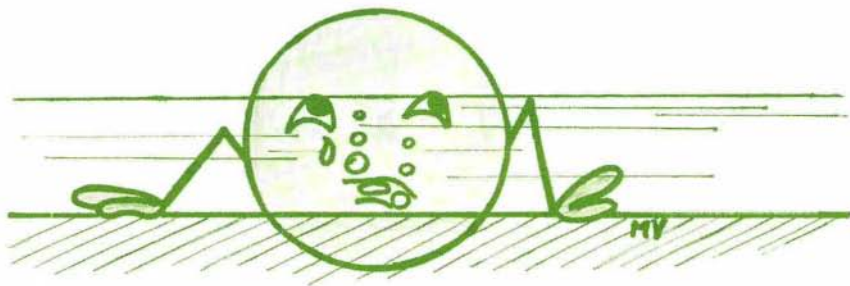
$7,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, gostota živega srebra pa $13,6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Domenimo se, naj krogla plava kar v "jezeru" živega srebra, saj bi pri premajhni posodi morali upoštevati tudi dodatne vplive na kroglo zaradi pojavov ob stenah posode.

Nalogo si bomo že na začetku zastavili nekoliko splošneje. Dani naj bosta dve tekočini, ena z gostoto a , druga z gostoto b , in krogla s polmerom r iz snovi z gostoto c . Pri tem naj velja

$$a \leq c < b$$

Označimo z d debelino plasti zgornje tekočine (to je seveda tista z gostoto a) in z v višino krogelnega odseka nad gladino spodnje gostejše tekočine (slika 2). Zanima nas, kako se spreminja v , ko d narašča po pozitivnih vrednostih. Naloge se lahko lotimo tako, da vse prostornine krogelnih odsekov in plasti, ki jih potrebujemo, takoj izrazimo z r , v in d in nato uporabimo Arhimedov zakon. Zdi se, da bi tako že s prvim zamahom ugnali našo nalogo. Zvezo med v in d bi sicer resda dobili, toda to je algebraična enačba tretje stopnje za v in za d s koeficienti, v katerih nastopajo polmer krogle r in vse tri gostote a , b in c . Iz nje bi težko razbrali še tako grobo zvezo med v in d . Zato bomo nalogo rešili drugače. Omenjeno enačbo bomo izpeljali šele na koncu.

Najprej bomo nalogo fizikalno poenostavili. Namesto, da imamo nad spodnjo tekočino plast zgornje tekočine debeline d , si lahko predstavljamo, da je nad spodnjo tekočino neka *namišljena* tekočina, ki kroglo povsem prekriva, in ima tako gostoto ρ , da ustvarja na kroglo enak vzgon kot dejanska situacija. Če vzamemo, da obdaja ves sistem namesto zraka kar vakuum, je na začetku ρ enak nič. Ko d narašča, gostota fiktivne tekočine tudi narašča (po katerem zakonu nas ne bo zanimalo, važno je le to, da očitno raste) do vrednosti a , to je do gostote zgornje tekočine.



Plavanje v dveh tekočinah (Marija Vencelj)

Razen tega bomo za začetek delali kar s prostorninami. To med drugim pomeni, da bodo dobljene "prostorninske" formule veljavne za vsako v dveh tekočinah plavajoče telo (pri pogoju $a \leq c < b$), ne le za kroglo. Označimo z V prostornino plavajočega telesa, z X prostornino tistega dela, ki je nad stično ravnino obeh tekočin, in z Y prostornino dela, ki je pod to ravnino (slika 3).

Imamo

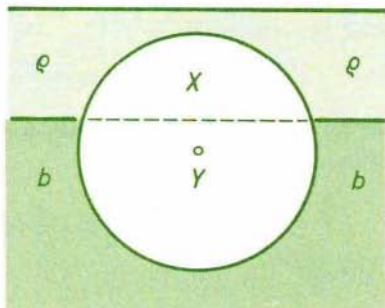
$$X + Y = V$$

in po Arhimedovem zakonu

$$\rho X + b Y = c V$$

Odtod sledi

$$X = \frac{b-c}{b-\rho} V,$$



Slika 3

Dobljeni rezultat pove več, kot smo morda pričakovali. Ko se večja ρ , se večja tudi X . Torej je X naraščajoča funkcija gostote fiktivne tekočine ρ , ta pa je, kot vemo, naraščajoča funkcija debeline plasti zgornje tekočine d . Sledi: X je naraščajoča funkcija debeline d . Za kroglo to pomeni, da je *v naraščajoča funkcija spremenljivke d . Ko torej višina zgornje tekočine narašča, se plavajoče telo počasi dviga iz spodnje tekočine*. Prostornina X dela telesa nad stično ploskvijo obeh tekočin narašča od

$$X_0 = \frac{b-c}{b} V \quad \text{do} \quad X_1 = \frac{b-c}{b-a} V$$

Če vstavimo podatke za naš primer živega srebra, vode in železne krogle, to je $a = 1$, $b = 13,6$ in $c = 7,9$ (vse seveda pomnoženo z 10^3 kg/m^3), dobimo, da gleda na začetku iz živega srebra $0,419 V$, ko kroglo voda povsem pokrije, pa $0,452 V$.

Formula $X = \frac{b-c}{b-\rho} V$ pove še več. Izpeljana je bila sicer za fiktivno tekočino gostote ρ , a velja vedno, če ima zgornja tekočina gostoto ρ in povsem prekriva plavajoče telo, da je le $\rho \leq c < b$. Če je $\rho = c$, dobimo $X = V$, kar je edino smiselno, saj mora zgornja tekočina, če ima gostoto enako gostoti plavajočega telesa, telo povsem dvigniti iz spodnje tekočine.

Ostane nam še, da poiščemo obljubljeni enačbo med višino v krogelnega

odseka nad gladino spodnje tekočine in višino d plasti zgornje tekočine.

Prostornina krogelnega odseka z višino v je

$$V(v) = \frac{\pi}{3} v^2 (3r - v)$$

Nobene omejitve splošnosti ne predstavlja, če vzamemo, da je polmer krogle enak 1. Za splošen primer bo treba v rezultatih samo namesto v in d pisati rv in rd . Vzeli bomo torej

$$V(v) = \frac{\pi}{3} v^2 (3 - v) = \frac{\pi}{3} f(v)$$

kjer je $f(v) = v^2 (3 - v)$. Pomagajmo si s sliko 2 in uporabimo spet Arhimedov zakon. Dobimo

$$c \cdot \frac{4}{3} \pi = b \left[\frac{4}{3} \pi - \frac{\pi}{3} f(v) \right] + a \left[\frac{\pi}{3} f(v) - \frac{\pi}{3} f(v-d) \right]$$

in od tod

$$f(v) = 4 \frac{b-c}{b-a} - \frac{a}{b-a} f(v-d) \quad (1)$$

Ker je $0 \leq a < b$, iz te formule, razen za $a = 0$, sledi, da je prostornina tistega dela krogle, ki gleda iz spodnje tekočine, padajoča linearna funkcija prostornine tistega dela, ki gleda iz zgornje tekočine. Za $a = 0$ je $f(v) = 4(b-c)/b$, torej konstanta, kar je smiselno, saj to pomeni, da je zgornja tekočina vakuum in se krogla res ne premakne.

Ko je $d = v$, je krogla povsem pokrita z zgornjo tekočino. Denimo, da je tedaj višina krogelnega odseka, ki gleda iz spodnje tekočine, enaka v_1 , torej $d = v = v_1$. Tedaj imamo

$$f_1 = f(v_1) = 4 \frac{b-c}{b-a} \quad (2)$$

Če je $d = 0$, je $v = v_0$, kjer je v_0 višina krogelnega odseka, ki gleda iz težje tekočine, preden dodamo lažjo tekočino. Označimo $f_0 = f(v_0)$, upoštevajmo (2) in vstavimo v (1). Dobimo

$$-\frac{a}{b-a} = -\frac{f_1 - f_0}{f_0}$$

Enačba (1) preide v

$$f(v) = f_1 - \frac{f_1 - f_0}{f_0} f(v-d) \quad (3)$$

ali, če zapišemo s sorazmerjem

$$\frac{f(v-d)}{f_0} = \frac{f_1 - f(v)}{f_1 - f_0} \quad (4)$$

Na levi imamo razmerje med prostornino krogelnega odseka, ki gleda iz zgornje tekočine pri višini d zgornje tekočine, in prostornino odseka, ki gleda iz spodnje tekočine, če ni zgornje tekočine. Lahko bi tudi rekli, da je to razmerje med prostorninama odsekov, ki gledata iz vse tekočine v danem trenutku (to je pri danem d) in na začetku (pri $d = 0$). Na desni pa je razmerje med prostorninama plasti, za katero se bo krogla še dvignila iz spodnje tekočine od danega trenutka dalje, in plasti, za katero se v celem (od $d = 0$ do z zgornjo tekočino popolnoma prekrivane krogle) dvigne iz spodnje tekočine. Formula (4) pove, da sta opisani razmerji za vsak d med seboj enaki (faktor $\pi/3$, ki nas prevede na prostornine, je v formuli (4) krajšan).

Če izrazimo v (3) $f(v)$ in $f(v-d)$ z v in d in enačbo uredimo, dobimo

$$f_1 v^3 - 3[(f_1 - f_0)d + f_1]v^2 + 3(f_1 - f_0)d(2+d)v + f_1 f_0 - (f_1 - f_0)d^2(3+d) = 0 \quad (5)$$

Koeficient f_1 bi bil enak nič le v primeru, ko bi bila krogla vsa potopljena v spodnjo tekočino; toda predpostavili smo, da je gostota krogle c manjša od gostote spodnje tekočine b , in se to ne zgodi. Torej enačbo (5) lahko z f_1 krajšamo. Če označimo še

$$\mu = 1 - f_0/f_1 = a/b$$

preide (5) v

$$v^3 - 3(\mu d + 1)v^2 + 3\mu d(2+d)v - \mu d^2(3+d) + f_0 = 0 \quad (6)$$

kjer je μ parameter, po velikosti med 0 in 1. Zanimivo je, da nastopa gostota c plavajoče krogle le v f_0 , torej vpliva le na prosti člen enačbe. Četudi smo enačbo poenostavili, kolikor je bilo mogoče, ni tako preprosta, da bi iz nje zlahka razbrali, da se v veča, če d raste od 0 do v_1 . Naša prvotna pot je bila preprostejša. Seveda pa brez enačbe (6) ne gre, če nas ne zanima le kvalitativen rezultat, mapak tudi kvantitativen, to je dejanska višina v pri dani debelini d .

Za živo srebro, vodo in železno kroglo ima enačba (6) obliko

$$v^3 - 3(0,0735d + 1)v^2 + 0,2205d(2+d)v - 0,0735d^2(3+d) + 1,676 = 0$$

Pri danem d jo še najlažje rešimo numerično.

Marija Vencelj