...nz Ritter von Močnik

Geometrische Formenlehre

für Mädchen-Bürgerschulen

Geometrische Formenlehre

für

Mädchen-Bürgerschulen.

…g erklärt.

Preis geh. 60 kr., cartoniert 70 kr., geb. 75 kr.

Prag. F. Tempsky. — Wien. F. Tempsky. — Leipzig. G. Freytag.

Buchhändler der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.

1891.

Geometrische Formenlehre

für

Mädchen-Bürgerschulen.

Von

Dr. Franz Ritter von Močnik.

Mit 169 in den Text gedruckten Holzschnitten.

Mit hohem k. k. Ministerialerlaß vom 25. Januar 1891 allgemein zulässig erklärt.

Preis geh. 60 kr., cartoniert 70 kr., geb. 75 kr.

Prag. F. Tempsky. | Wien. F. Tempsky. | Leipzig. G. Freytag.

Buchhändler der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien

1891.

Inhalt.

Einleitung.

		Seite
	Grundvorstellungen der Raumgebilde	1

Planimetrie.

I.	Punkte, gerade Linien und Winkel	9
II.	Geradlinige Figuren	25
	Dreiecke und Congruenz derselben	25
	Vierecke	38
	Vielecke	42
III.	Der Kreis	49
IV.	Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren	59
V.	Copieren, Vergrößern und Verkleinern der Figuren	69
VI.	Umfang und Flächeninhalt der geradlinigen Figuren	76
VII.	Pythagoräischer Lehrsatz	89
VIII.	Verwandlung und Theilung geradliniger Figuren	92
IX.	Umfang und Flächeninhalt des Kreises	95
X.	Die Ellipse	100

Stereometrie.

XI.	Gerade Linien und Ebenen im Raume	104
XII.	Körper im allgemeinen und ihre Netze	107
XIII.	Oberfläche und Cubikinhalt der Körper	118

Einleitung.

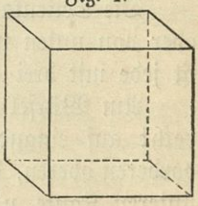
Grundvorstellungen der Raumgebilde.

1. Betrachtung des Würfels.

(Der Würfel wird auf dem Tische oder einem Gestelle so aufgestellt, dass zwei Flächen eine horizontale Lage haben und dass eine Fläche den Schülern zugewendet ist.)

§. 1. Der **Würfel** (Fig. 1) nimmt einen Raum ein. Dieser Raum ist von allen Seiten begrenzt. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt ein **Körper**. Der Würfel ist ein Körper.

Fig. 1.



Der Würfel ist nach **drei Richtungen** ausgedehnt: von **rechts** nach **links**, von **vorn** nach **hinten**, von **unten** nach **oben**; er ist **lang**, **breit** und **hoch**.

Ein Körper hat drei **Ausdehnungen**: Länge, Breite und Höhe.

§. 2. Der Würfel wird von sechs **Flächen** begrenzt. Diese sind: die obere, untere, vordere, hintere, rechte und linke Fläche.

Alle Flächen des Würfels sind **ebene** Flächen.

Jede Fläche des Würfels ist nach zwei Richtungen ausgedehnt; die untere Fläche von rechts nach links und von vorn nach hinten, u. s. w. **Eine Fläche** hat zwei **Ausdehnungen**: Länge und Breite.

Die untere Fläche, auf welcher der Würfel steht, sowie auch die obere Fläche, heißen **Grundflächen**; die übrigen vier Flächen heißen **Seitenflächen**.

Jede Grundfläche des Würfels ist **wagrecht** oder **horizontal**; jede Seitenfläche ist **lothrecht** oder **vertical**.

Die beiden Grundflächen haben gegen einander gleiche Stellung, sie sind **parallel**; von den Seitenflächen sind die vordere und die hintere, ebenso die rechte und die linke zu einander parallel.

Am Würfel stehen je zwei Flächen, welche zusammentreffen, **senkrecht** auf einander; die vordere Fläche steht senkrecht auf der oberen, unteren, rechten und linken Fläche, u. s. w.

Alle Grenzflächen eines Körpers zusammengenommen bilden dessen **Oberfläche**.

§. 3. Jede Fläche am Würfel wird von vier **Kanten** oder **Kantenlinien** begrenzt. Eine Kantenlinie entsteht da, wo zwei Flächen zusammentreffen.

Am ganzen Würfel kommen 12 Kanten vor: die vordere obere, die vordere untere, die vordere rechte, u. s. w.

Alle Kanten des Würfels sind **gerade** Linien.

Jede Kante des Würfels ist nur nach **einer** Richtung ausgedehnt; die vordere obere von rechts nach links, u. s. w. **Eine Linie** hat nur **eine Ausdehnung**: die Länge.

Alle Kanten des Würfels haben gleiche Länge.

Die 8 Kanten an den Grundflächen heißen **Grundkanten**, die übrigen 4 Kanten heißen **Seitenkanten**.

Jede Seitenkante des Würfels ist **vertical**; jede Grundkante ist **horizontal**. Am Würfel gibt es also 4 verticale und 8 horizontale Kanten.

Die Seitenkanten haben alle gleiche Richtung, von oben nach unten oder von unten nach oben; sie sind **parallel**. Von den Grundkanten ist jede mit drei anderen Grundkanten parallel.

Am Würfel stehen je zwei Kanten, welche zusammentreffen, **senkrecht** auf einander; die vordere rechte Kante steht senkrecht auf der vorderen oberen, der rechten oberen, der vorderen unteren und der rechten unteren Kante, u. s. w.

Jede Kante des Würfels steht auch **senkrecht** auf der Fläche, welche sie trifft; die vordere rechte Kante steht senkrecht auf der oberen und auf der unteren Fläche, u. s. w.

Eine nach allen Seiten begrenzte ebene Fläche heißt **Figur**. Die Grenzlinien einer Figur heißen **Seiten** derselben. Jede Fläche des Würfels ist eine **vierseitige** Figur. Da die Seiten gerade Linien sind, heißt die Figur **geradlinig**; da alle Seiten gleich sind, heißt sie **gleichseitig**.

Alle Grenzlinien einer Figur zusammengenommen bilden deren **Umfang**.

§ 4. Jede Kantenlinie des Würfels wird von zwei **Eckpunkten** begrenzt. Ein Eckpunkt entsteht da, wo drei Flächen zusammenstoßen.

Der Würfel hat 8 Eckpunkte. Diese sind: Der vordere obere rechte, der vordere obere linke, der vordere untere rechte, u. s. w. Der Würfel ist ein **eckiger** Körper.

Die Eckpunkte des Würfels sind nach keiner Richtung ausgedehnt; sie sind weder lang, noch breit, noch dick. Ein Punkt hat keine Ausdehnung.

Eine Figur, welche vier Seiten hat, hat auch vier Eckpunkte; ein vierseitige Figur heißt deshalb auch ein Viereck. Jede Fläche am Würfel ist ein gleichseitiges Viereck.

§. 5. Zwei Kanten, welche sich treffen, bilden einen Winkel.

Jede Fläche des Würfels hat 4 Winkel. Am ganzen Würfel sind 24 Winkel.

Jede vierseitige Figur am Würfel hat vier gleiche Winkel, sie ist gleichwinklig. Eine Figur, welche gleichseitig und gleichwinklig ist, heißt regelmäßig. Das regelmäßige Viereck heißt Quadrat. Am Würfel ist also jede Fläche ein Quadrat.

Die Quadrate am Würfel haben gleiche Größe, sie sind gleich; sie haben auch dieselbe Gestalt, und heißen daher ähnlich. Da sie gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben, so lassen sie sich so auf einander legen, dass sie sich decken; sie sind congruent.

Ein Körper, welcher von lauter congruenten und regelmäßigen Figuren begrenzt wird, heißt regelmäßig. Der Würfel ist ein regelmäßiger Körper.

Ein eckiger Körper, dessen obere Grundfläche mit der unteren parallel und congruent ist, heißt ein Prisma. Der Würfel ist also ein Prisma. Da die Seitenkanten des Würfels auf den Grundflächen senkrecht sind, sagt man: der Würfel ist ein senkrechtes oder gerades Prisma.

Dreht man den Würfel um eine Grundkante so, dass diese allein in der horizontalen Fläche liegt, so bleiben diese Grundkante und die mit ihr parallelen Kanten noch immer horizontal; die übrigen Kanten aber sind in der neuen Lage weder horizontal noch vertical, sie sind schräge. Die Flächen sind sämmtlich schräge. In der Lage der Flächen und Kanten gegen einander wird nichts geändert.

2. Betrachtung eines geraden Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck ist.

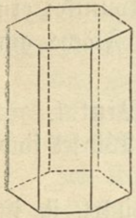
(Eine Seitenkante ist dreimal so groß als eine Grundkante. Das Prisma wird so aufgestellt, dass die Grundflächen eine horizontale Lage haben und dass drei Seitenflächen sichtbar sind.)

§. 6. Der Körper (Fig. 2) hat zwei Grundflächen und sechs Seitenflächen, zusammen 8 Flächen. Alle Flächen sind ebene Flächen.

Die Grundflächen sind horizontal, die Seitenflächen vertical.

Die Grundflächen sind parallel, die Seitenflächen schneiden sich und die Grundflächen. Die Seitenflächen stehen senkrecht auf den Grundflächen; zu einander stehen die Seitenflächen nicht senkrecht. Wenn man nämlich den Körper in eine solche Stellung bringt, dass von zwei anstoßenden Seitenflächen die eine horizontal ist, so ist die andere schräge; man sagt: die Seitenflächen stehen zu einander schief.

Fig. 2.



Die Grundflächen des Körpers haben gleiche Gestalt und gleiche Größe, sie sind congruent; die Seitenflächen sind auch congruent.

§. 7. Der betrachtete Körper hat 12 Grundkanten und 6 Seitenkanten, zusammen 18 Kanten. Alle Kanten sind gerade Linien.

Die Grundkanten sind horizontal, die Seitenkanten sind vertical.

Die Seitenkanten sind alle parallel. Von den Grundkanten ist jede nur mit drei anderen parallel.

Die Seitenkanten stehen senkrecht auf den Grundkanten; die Grundkanten sind nicht senkrecht auf einander. Wenn man nämlich das Prisma in eine solche Stellung neigt, dass von zwei anstoßenden Grundkanten die eine horizontal ist, so ist die andere schräge; man sagt: die zwei Grundkanten sind zu einander schief.

Die Seitenkanten stehen auch senkrecht auf den Grundflächen.

Alle Seitenkanten sind einander gleich; alle Grundkanten sind einander gleich. Die Seitenkanten sind jedoch den Grundkanten nicht gleich; eine Seitenkante ist dreimal so groß als eine Grundkante.

§. 8. Der betrachtete Körper hat 12 Eckpunkte. Der Körper ist eckig.

Jede Grundfläche hat sechs Eckpunkte, sie ist ein Sechseck. Jede Seitenfläche hat vier Eckpunkte, sie ist ein Viereck.

Jede Grundfläche des Körpers hat sechs, jede Seitenfläche vier Winkel. Am ganzen Prisma sind 36 Winkel.

Jede Grundfläche hat 6 gleiche Seiten und 6 gleiche Winkel; sie ist ein regelmäßiges Sechseck. In jeder Seitenfläche sind je zwei gegenüberliegende Seiten gleich, je zwei anstoßende Seiten aber ungleich; die vier Winkel sind alle gleich. Ein Viereck, das gleichwinklig, aber nicht gleichseitig ist, heißt ein Rechteck. Die Seitenflächen des Körpers sind also Rechtecke.

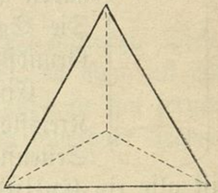
Da der Körper eckig ist und zwei parallele und congruente Grundflächen hat, ist er ein Prisma, und zwar, da er sechs Seitenkanten hat, ein sechsseitiges Prisma. Da die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht stehen, ist das Prisma ein gerades.

3. Betrachtung des Tetraeders.

(Das Tetraeder wird so aufgestellt, dass eine Fläche horizontal und eine Fläche den Schülern zugewendet ist.)

§. 9. Der Körper (Fig. 3) hat vier Flächen. Er heißt deshalb Vierflächner oder Tetraeder.

Fig. 3.



Alle Flächen sind ebene Flächen.

Die untere Fläche ist die Grundfläche, die übrigen sind Seitenflächen. Die Grundfläche ist horizontal, die Seitenflächen sind schräge. Keine der Flächen ist zu einer anderen parallel. Jede Fläche steht zu jeder andern schief.

§. 10. Das Tetraeder hat sechs Kanten. Alle Kanten sind gerade Linien und gleich lang.

Die Grundkanten sind horizontal, die Seitenkanten schräge. Keine Kante ist zu einer andern parallel. Jede Kante steht zu den Kanten, die sie trifft, schief.

Das Tetraeder hat vier Eckpunkte.

Jede Fläche hat drei Eckpunkte; sie ist ein Dreieck, und zwar, da alle Kanten gleich sind, ein gleichseitiges Dreieck.

§. 11. Jede Fläche des Tetraeders hat drei Winkel.

Die Dreiecke am Tetraeder sind gleichseitig und gleichwinklig; sie sind regelmäßig. Legt man sie auf einander, so decken sie sich; sie sind congruent. Das Tetraeder ist also von vier congruenten und regelmäßigen Figuren begrenzt; es ist ein regelmäßiger Körper.

Die Seitenflächen des Tetraeders treffen in einem gemeinschaftlichen Punkte, den man Spitze oder Scheitel nennt, zusammen. Ein solcher Körper heißt eine Pyramide. Da die Pyramide drei Seitenkanten hat, heißt sie dreiseitig; da sie gleiche Seitenkanten hat, heißt sie gerade. Das Tetraeder ist also eine gerade dreiseitige Pyramide, deren Kanten gleich sind.

4. Betrachtung des geraden Cylinders.

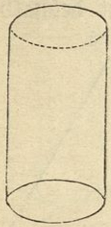
§. 12. Der Körper (Fig. 4) wird von drei Flächen begrenzt.

In jeder der beiden Grundflächen kann man nach allen Richtungen gerade Linien ziehen; die Grundflächen sind ebene Flächen. In der Seitenfläche kann man nur nach einer Richtung, von oben nach unten oder umgekehrt, gerade Linien ziehen; die Seitenfläche ist eine krumme Fläche; sie ist einseitig gekrümmt und heißt auch Mantelfläche. Da der Körper eine krumme Seitenfläche hat, heißt er ein runder Körper.

Versinnlichung durch das Anlegen eines Lineals.

In jeder der beiden Grundflächen gibt es einen Punkt, welcher von allen Punkten des Umfanges gleich weit entfernt ist. Eine solche Fläche heißt Kreisfläche.

Fig. 4.



Die Grundflächen sind horizontal, also parallel. Sie haben gleiche Größe und dieselbe Gestalt; sie sind congruent. Die Seitenfläche ist vertical und steht senkrecht auf den Grundflächen.

Ein Körper, welcher zwei parallele und congruente Kreisflächen zu Grundflächen und eine einfach gekrümmte Seitenfläche hat, heißt ein Cylinder. Der betrachtete Körper ist also ein Cylinder.

§. 13. Der Cylinder hat nur zwei Kanten; diese sind in keinem Theile gerade, sie sind krumme Linien. Jede dieser krummen Linien ist die Grenze einer Kreisfläche; sie heißt darum Kreislinie. Die beiden Kreislinien sind parallel und gleich lang.

Stellt man den Cylinder mit der Mantelfläche auf eine ebene Fläche (die Tischfläche), so berührt er diese in einer geraden Linie. Eine solche gerade Linie nennt man eine Seite des Cylinders.

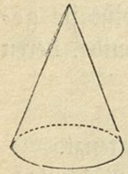
An dem betrachteten Cylinder steht jede Seite senkrecht auf den Grundflächen. Der Cylinder heißt deshalb ein gerader Cylinder.

Eckpunkte und Winkel kommen am Cylinder nicht vor.

5. Betrachtung des geraden Kegels.

§. 14. Der Kegel (Fig. 5) hat zwei Flächen; eine Grundfläche und eine Seitenfläche.

Fig. 5.



Die Grundfläche ist eine ebene Fläche, und zwar ein Kreis. Die Seitenfläche ist eine krumme Fläche; sie heißt auch der Mantel des Kegels. Die Mantelfläche läuft in einen Punkt aus, welcher die Spitze des Kegels heißt. Durch jeden Punkt der Mantelfläche läßt sich nur in einer Richtung, nämlich in derjenigen, welche durch die Spitze geht, eine gerade Linie ziehen; der Mantel des Kegels ist daher einseitig gekrümmt.

Weil der Kegel eine krumme Seitenfläche hat, heißt er ein runder Körper.

§. 15. Der Kegel hat nur eine Kante; sie ist eine Kreislinie.

Stellt man den Kegel mit der Mantelfläche auf die ebene Tischfläche, so berührt er diese in einer geraden Linie, welche man eine Seite des Kegels nennt.

An dem betrachteten Kegel sind alle Seiten gleich lang; er heißt deshalb ein gerader Kegel.

Der Kegel hat nur einen Eckpunkt: die Spitze. Winkel kommen am Kegel nicht vor.

6. Betrachtung der Kugel.

§. 16. Die Kugel wird von einer einzigen Fläche begrenzt. Diese Fläche ist krumm, und zwar allseitig gekrümmt, da man auf ihr nach keiner Richtung hin eine gerade Linie ziehen kann; sie hat ferner die Eigenschaft, dass alle Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkte gleichweit entfernt sind.

Die krumme Fläche der Kugel heißt ihre Oberfläche. Da die Kugel eine krumme Oberfläche hat, ist sie ein runder Körper.

Kanten, Eckpunkte und Winkel kommen an der Kugel nicht vor.

7. Zusammenhang, Entstehung und Eintheilung der Raumgebilde. Geometrie.

Körper, Flächen, Linien und Punkte.

§. 17. Die voranstehenden Betrachtungen der Körper liefern folgende Ergebnisse:

Ein nach allen Seiten begrenzter Raum heißt ein Körper. Jeder Körper dehnt sich nach drei Hauptrichtungen aus, nämlich in die Länge, Breite und Höhe, auch Tiefe oder Dicke genannt.

Die Grenzen der Körper heißen Flächen. Eine Fläche hat nur zwei Ausdehnungen, Länge und Breite.

Die Grenzen der Flächen heißen Linien. Eine Linie hat nur eine Ausdehnung, die Länge.

Die Grenzen der Linien heißen Punkte. Der Punkt ist weder lang, noch breit, noch dick, er hat keine Ausdehnung.

Körper, Flächen, Linien und Punkte nennt man Raumgebilde.

Entstehung der Raumgebilde durch Bewegung.

§. 18. Die Raumgebilde können durch Bewegung erzeugt werden.

Wenn sich ein Punkt im Raume fortbewegt, so ist der von ihm zurückgelegte Weg eine Linie.

Bewegt sich eine Linie im Raume in einer anderen Richtung als in der ihrer Verlängerung fort, so entsteht eine Fläche.

Bewegt sich eine Fläche in einer anderen Richtung als in der ihrer Erweiterung fort, so entsteht ein Körper.

Eintheilung der Linien, Flächen und Körper

§. 19. 1. Die Linien theilt man in gerade und krumme ein. Wenn sich ein Punkt ununterbrochen in derselben Richtung fortbewegt, so heißt die dadurch entstehende Linie eine gerade Linie oder eine Gerade. Wenn aber der Punkt bei der Bewegung seine Richtung fortwährend ändert, so heißt die dadurch beschriebene Linie eine krumme Linie.

Eine Linie, welche aus lauter geraden Linien zusammengesetzt, aber selbst nicht gerade ist, heißt eine gebrochene Linie. Eine Linie, welche aus geraden und krummen Linien zusammengesetzt ist, heißt gemischt.

2. Die Flächen theilt man in ebene und krumme ein. Eine Fläche, auf welcher nach jeder beliebigen Richtung eine gerade Linie gezogen werden kann, heißt eine ebene Fläche oder eine Ebene. Eine Fläche, auf welcher sich entweder nur nach einer oder nach gar keiner Richtung gerade Linien ziehen lassen, heißt eine krumme oder gekrümmte Fläche.

Eine Fläche, welche aus lauter ebenen Flächen zusammengesetzt, aber selbst nicht eben ist, heißt eine gebrochene Fläche. Eine Fläche, welche aus ebenen und gekrümmten Flächen zusammengesetzt ist, heißt gemischt.

Eine allseitig begrenzte Ebene heißt eine ebene Figur. Sie ist geradlinig, krummlinig oder gemischtlinig, je nachdem sie von geraden, von krummen, oder von geraden und krummen Linien begrenzt wird.

3. Die Körper theilt man in eckige und runde ein. Ein Körper, welcher von lauter Ebenen begrenzt wird, heißt ein eckiger oder ebenflächiger Körper. Ein Körper, welcher nicht von lauter Ebenen, sondern entweder bloß von krummen oder theils von ebenen, theils von krummen Flächen begrenzt wird, heißt ein runder oder krummflächiger Körper.

Geometrie und ihre Eintheilung.

§. 20. Die Lehre von den Raumgebilden wird Geometrie genannt.

Sie zerfällt in zwei Haupttheile: in die Planimetrie und in die Stereometrie. Die Planimetrie handelt von jenen Raumgebilden, welche in einer und derselben Ebene liegen; die Stereometrie aber beschäftigt sich mit jenen Raumgebilden, welche sich nicht in einer und derselben Ebene, sondern im dreifach ausgedehnten Raume befinden.

Planimetrie.

1. Punkte, gerade Linien und Winkel.

1. Punkte.

Darstellung der Punkte und ihre gegenseitige Lage.

§. 21. Ein Punkt kann, da er weder Länge, noch Breite, noch Dicke besitzt, nicht gesehen, sondern nur gedacht werden. Um nun die Stelle, wo man sich einen Punkt denkt, dem Auge sichtbar zu machen, bringt man dort mit dem Bleistifte, mit der Feder oder der Kreide einen Tupfen an. Solche Tupfen sind jedoch nicht wirkliche Punkte, sie sind nur Zeichen der Punkte.

Ein Punkt wird dadurch angegeben, dass man zu dem ihn versinnlichenden Tupfen einen Buchstaben oder eine Ziffer setzt; man sagt: der Punkt a, der Punkt 1.

Zwei Punkte können entweder neben einander, oder gerade über einander, oder schräg oberhalb oder unterhalb einander liegen.

Zeichne zwei Punkte in jeder dieser Lagen.

Welche und wieviele Lagen sind bei drei Punkten möglich? Zeichne dieselben.

Zeichne vier Punkte, welche a) nebeneinander, b) gerade über einander, c) in derselben Richtung schräg über einander liegen.

2. Gerade Linien.

Bestimmung und Darstellung der Geraden.

§. 22. Durch einen Punkt lassen sich unzählig viele gerade Linien in allen möglichen Richtungen ziehen. Ist noch ein zweiter Punkt gegeben, so wird es unter allen früheren Richtungen der Geraden eine einzige geben, in welcher die Gerade durch beide Punkte geht. Durch zwei Punkte ist eine gerade Linie vollkommen bestimmt.

Zwei Gerade, welche zwei Punkte gemeinschaftlich haben, fallen zusammen und bilden eine einzige Gerade.

Zwei von einander verschiedene Gerade können nur einen gemeinschaftlichen Punkt haben. Man sagt: sie schneiden sich in diesem

Punkte, und nennt den gemeinschaftlichen Punkt ihren Durchschnittspunkt.

§. 23. Die unbegrenzte Gerade wird durch jeden in ihr liegenden Punkt in zwei Theile getheilt, deren jeder sich nur nach einer Richtung unbegrenzt ausdehnt. Eine durch einen Punkt halb begrenzte Gerade heißt Strahl. Eine durch zwei Punkte ganz begrenzte Gerade heißt Strecke; die beiden Grenzpunkte nennt man ihre Endpunkte.

Die Strecke zwischen zwei Punkten ist die kürzeste Linie, welche zwischen den zwei Punkten gezogen werden kann; sie bestimmt daher die Entfernung oder den Abstand derselben.

Ein Strahl wird durch den Grenzpunkt und einen zweiten in ihm liegenden Punkt, eine Strecke durch ihre Endpunkte bezeichnet.

§. 24. Da eine Linie durch die stetige Bewegung eines Punktes entsteht, so ergibt sich daraus auch die Art und Weise, wie man eine Linie sichtbar darstellen kann. Um den Weg kenntlich zu machen, den der Punkt während der Bewegung durchlaufen hat, muss man die Spitze einer farbelassenden Feder oder eines Bleistiftes, welche den sich bewegenden Punkt vorstellt, etwas andrücken, wodurch überall die Spur der Bewegung zurückbleibt. Diese zurückgelassene Spur ist jedoch, da sie nicht bloß Länge, sondern auch etwas Breite und Dicke hat, keine wirkliche Linie, sondern nur das Zeichen der Linie.

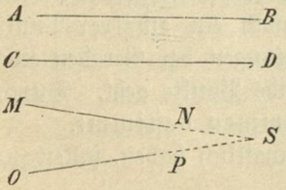
Zum geometrischen Zeichnen gerader Linien bedient man sich des Lineals.

Wie prüft man die Richtigkeit eines Lineals?

Aufgaben.

1. Bestimme zwei Punkte und verbinde sie aus freier Hand durch eine Strecke.
2. Verlängere diese Strecke über den einen Endpunkt hinaus.
3. Bestimme drei Punkte, welche nicht in gerader Linie liegen.

Fig. 6.



Parallele und nicht parallele Gerade.

§. 75. Zwei Gerade, welche in einer Ebene liegen, haben entweder dieselbe Richtung, oder sie weichen in ihren Richtungen von einander ab. Haben zwei gerade Linien dieselbe Richtung, so dass sie überall gleich weit von einander abstehen, so heißen sie parallel; wenn aber ihre Richtungen von einander abweichen, so dass sie sich auf der einen Seite nähern, auf der andern entfernen, so heißen sie nichtparallel. Die nichtparallelen Geraden werden nach jener Seite hin, wo sie sich nähern, convergierend, nach der andern divergierend genannt. So sind (Fig. 6) AB und CD parallele Linien, MN und OP convergierend, NM und PO divergierend.

Dass AB mit CD parallel ist, drückt man so aus: AB ‖ CD.

Zwei parallele Gerade können, weil sie durchaus gleich weit von einander entfernt bleiben, nie zusammentreffen, wenn man sie auch noch so weit verlängert; zwei nicht parallele Gerade aber müssen, hinlänglich verlängert, in einem Punkte zusammentreffen, und zwar auf derjenigen Seite, nach welcher sie convergieren. Convergierende Gerade haben immer einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt, aber auch nur einen einzigen.

Um zu einer schon gezeichneten Geraden eine Parallele aus freier Hand zu zeichnen, bestimme man zuerst zwei oder mehrere in gleicher Entfernung von der gegebenen Geraden liegende Punkte und zieht dann durch dieselben eine gerade Linie.

Aufgaben:

1. Zeichne eine Gerade, und zu ihr in beliebiger Entfernung eine Parallele.
2. Zeichne eine Gerade, und zu ihr durch einen nicht in ihr liegenden Punkt eine Parallele.
3. Zeichne zwei Parallele, und zu ihnen noch eine dritte Parallele.
4. Zeichne eine Gerade in beliebiger Richtung, und zu ihr in gleicher Entfernung drei Parallele.

Verticale, horizontale und schräge Gerade.

§. 26. 1. Eine Gerade, welche die Richtung eines Bleilothes d. i. eines freihängenden, durch eine Bleikugel gespannten Fadens hat, heißt vertical oder lothrecht. Ein freifallender Körper fällt in verticaler Richtung.

Wird durch eine verticale Gerade eine Ebene gelegt, so heißt diese eine Vertical-Ebene.

Beim Zeichnen wird die Verticale durch eine von oben nach unten oder umgekehrt gezogene Gerade dargestellt.

2. Eine Gerade, welche die Richtung eines auf dem ruhigen Wasserspiegel schwimmenden Stäbchens oder eines auf beiden Seiten gleichbelasteten Wagebalkens hat, heißt horizontal oder wagrecht.

Eine Ebene, in welcher sich nach allen Richtungen horizontale Gerade ziehen lassen, heißt eine Horizontal-Ebene; z. B. die Oberfläche des Wassers, die Bodenfläche eines Zimmers.

Beim Zeichnen wird die Horizontale durch eine von der Linken gegen die Rechte gehende Gerade dargestellt.

Eine gerade Linie, welche weder vertical noch horizontal ist, heißt schräge.

Aufgaben.

1. Wie viele verticale Linien sind durch einen Punkt möglich?
2. Wie viele horizontale Linien sind durch einen Punkt möglich?
3. Ziehe auf deiner Schreibtafel eine beliebige Gerade und bringe dann die Tafel in eine solche Lage, dass die Gerade a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schräge Richtung hat.
4. Zeichne in gleichen Entfernungen fünf horizontale Linien.
5. Zeichne ebenso fünf verticale Linien.
6. Zeichne ebenso fünf schräge, zu einander parallele Linien a) von links unten nach rechts oben, b) von links oben nach rechts unten.

Gleiche und ungleiche Strecken.

§. 27. Um zwei Strecken hinsichtlich ihrer Länge zu vergleichen, lege man sie so aufeinander, dass sie einen Endpunkt gemeinschaftlich haben. Fallen dann die anderen zwei Endpunkte ebenfalls zusammen, so sind die beiden Strecken gleich. Fallen aber die anderen Endpunkte der beiden Strecken nicht zusammen, so sind die Strecken ungleich, und zwar ist diejenige die kleinere, deren zweiter Endpunkt zwischen den Endpunkten der andern Strecke liegt; diese die größere.

Wenn zwei Strecken gleich sind, muss man sich dieselben auch so vorstellen können, dass sie auf einander gelegt sich decken.

Um anzuzeigen, dass die Strecken AB und CD ungleich sind, schreibt man

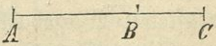
$AB > CD$, wenn AB größer ist als CD und
$AB < CD$, wenn AB kleiner ist als CD.

Zeichne in gleichen Entfernungen a) sechs horizontale, b) sechs verticale, c) sechs parallele schräge Strecken, welche gleich lang sind.

Summe und Differenz der Strecken.

§. 28. 1. Zeichnet man (Fig. 7) eine Strecke AB und verlängert sie um die Strecke BC, so ist die verlängerte Strecke AC so groß, als AB und BC zusammengenommen, oder es ist AC die Summe der beiden Strecken AB und BC, was so angeschrieben wird:

Fig. 7.



$$AC = AB + BC.$$

2. Zeichnet man eine Strecke AC (Fig. 7) und trägt auf dieselbe eine kleinere Strecke BC von C aus bis B auf, so zeigt der unbedeckte Theil AB der größeren Strecke an, um wie viel diese länger ist als

die kleinere Strecke; AB ist also die Differenz zwischen AC und BC, was so ausgedrückt wird:

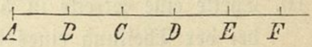
$$AB = AC - BC.$$

Vielfache und Theile der Strecken.

§. 29. 1. Trägt man (Fig. 8) auf eine Gerade von A aus die gleichen Strecken AB, BC, CD, DE, . . . auf, so ist

AC das Doppelte von AB,
AD das 3fache von AB,
AE das 4fache von AB, u. s. w.

Fig. 8.



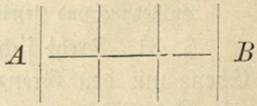
Die erhaltenen Strecken sind also Vielfache der Strecke AB.

2. Umgekehrt ist AB die Hälfte von AC, das Drittel von AD, der 4. Theil von AE, u. s. w. Die Strecke AC ist also durch den Punkt B in 2, AD durch die Punkte B und C in 3, AE durch die Punkte B, C und D in 4 gleiche Theile getheilt.

Aufgaben.

1. Zeichne eine Strecke und verlängere sie so, dass sie 3mal so lang wird, als sie ursprünglich war.
2. Zeichne zwei horizontale Strecken, von denen die zweite 5mal so groß ist als die erste.
3. Zeichne sechs parallele Strecken so, dass die zweite das Doppelte der ersten, die dritte das 3fache der ersten, . . . die sechste das 6fache der ersten sei.
4. Eine gegebene Strecke aus freier Hand in 2 gleiche Theile zu theilen oder zu halbieren. — Man bestimme in der Strecke einen Punkt so, dass er von den beiden Endpunkten derselben gleich weit entfernt ist.
5. Zeichne eine Strecke, theile sie in 2 gleiche Theile und dann jede Hälfte wieder in 2 gleiche Theile. Wie viele gleiche Theile erhältst du? — Wie wird also eine Strecke in 4 gleiche Theile getheilt?
6. Wie wird eine Strecke in 8, 16 gleiche Theile getheilt.
7. Eine Strecke AB (Fig. 9) in 3 gleiche Theile zu theilen. — Man bestimme in der Strecke zwei Punkte so, dass sie von einander und von den Endpunkten der Strecke gleich weit abstehen.

Fig. 9.



Im allgemeinen wird man bei der Theilung einer Strecke in gleiche Theile die beiläufig bestimmten Theilungspunkte mit dem Bleistifte zuerst sehr fein bezeichnen, dann durch die Theilungspunkte und durch die Endpunkte kleine parallele Linien ziehen und ihre Abstände vergleichen. Sind diese gleich, so ist die Theilung richtig; sind sie ungleich, so müssen die etwa unrichtigen Theilungspunkte so lange nach rechts oder links verschoben werden, bis jene Abstände gleich groß erscheinen.

8. Theile eine gezeichnete Strecke in 2 gleiche Theile und dann jeden Theil wieder in 3 gleiche Theile. — Wie wird also eine Strecke in 6 gleiche Theile getheilt?
9. Wie wird eine Strecke in 12, in 9 gleiche Theile getheilt?
10. Theile eine Strecke in 5 gleiche Theile. (Der Vorgang ist ähnlich wie bei der Theilung einer Strecke in 3 gleiche Theile.)
11. Wie wird eine Strecke in 10, 15 gleiche Theile getheilt?

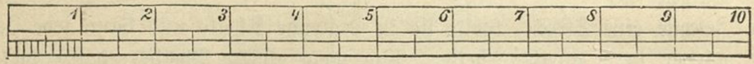
Messen der Strecken.

§. 30. Die Länge einer Strecke bestimmen, heißt dieselbe messen. Um eine Strecke zu messen, nimmt man irgend eine Strecke von bestimmter Länge als Einheit an, und untersucht, wie oft die als Einheit angenommene Strecke in der zu messenden enthalten ist. Die Zahl, welche dies anzeigt, heißt die Maßzahl der Strecke.

Die Einheit des Längenmaßes ist das Meter (*m*), das in 10 Decimeter (*dm*) à 10 Centimeter (*cm*) à 10 Millimeter (*mm*) eingetheilt wird. 1000 Meter = 1 Kilometer (*km*), 10 Kilometer = 1 Myriameter (μm).

Zum Ausmessen der Länge dienen Stäbe von Holz oder Metall, worauf eine oder mehrere Längeneinheiten nebst den Untertheilungen aufgetragen sind; sie heißen Maßstäbe. Fig. 10 stellt die Länge eines Decimeters mit dessen Eintheilung in Centimeter und Millimeter dar.

Fig. 10.



Anfängern ist anzurathen, dass sie zur Übung des Augenmaßes verschiedene Längen zuerst annäherungsweise mit dem Auge abschätzen und dann mit dem Maßstabe genau messen.

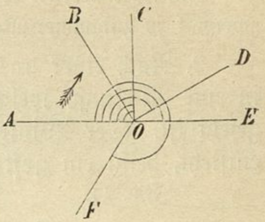
3. Winkel.

Entstehung und Bezeichnung der Winkel.

§. 31. Dreht sich der Strahl AO (Fig. 11) in einer und derselben Ebene um den Grenzpunkt O, so dass er nach und nach in die Lagen OB, OC, OD, . . . und zuletzt wieder in die ursprüngliche Lage zu stehen kommt, so weicht er bei dieser Drehung von seiner ursprünglichen Lage OA immer mehr ab.

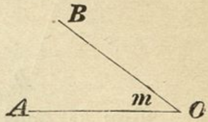
Die Abweichung der Richtungen zweier Strahlen, die von demselben Punkte ausgehen, heißt ein Winkel ($\sphericalangle$); die Strahlen, welche den Winkel bilden, nennt man die Schenkel, und ihren Durchschnittspunkt den Scheitel des Winkels.

Fig. 11.



Man bezeichnet einen Winkel entweder durch den Buchstaben am Scheitel, oder durch einen kleinen Buchstaben, den man in die Öffnung des Winkels setzt, oder durch drei Buchstaben, von denen zuerst der Buchstabe an dem einen Schenkel, dann der Buchstabe am Scheitel, und zuletzt der Buchstabe am andern Schenkel ausgesprochen wird. In dem Winkel (Fig. 12) ist O der Scheitel, OA und OB sind die Schenkel; der Winkel heißt daher: Winkel O, oder Winkel m, oder Winkel AOB oder BOA.

Fig. 12.



Ein Winkel wird desto größer, je mehr seine Schenkel von einander abweichen; die Länge der Schenkel hat keinen Einfluss auf die Größe eines Winkels.

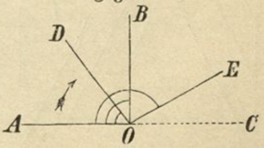
§. 32. Legt man die Flächen zweier Winkel so auf einander, dass die Scheitel und ein Paar Schenkel derselben zusammenfallen, so sind die beiden Winkel gleich, wenn das andere Paar Schenkel ebenfalls zusammenfällt, die Winkel sich also decken, und ungleich, wenn das andere Paar Schenkel nicht zusammenfällt. Im zweiten Falle ist derjenige Winkel der kleinere, dessen zweiter Schenkel zwischen den Schenkeln des andern Winkels liegt, dieser der größere.

Umgekehrt: Sind zwei Winkel gleich, so können sie mit den Winkelflächen so auf einander gelegt werden, dass, wenn der Scheitel und ein Paar Schenkel zusammenfallen, auch das andere Paar Schenkel zusammenfällt.

Arten der Winkel.

§. 33. 1. Dreht sich in einer Ebene der Strahl OA (Fig. 13) um den Grenzpunkt O, bis er den vierten Theil einer vollen Umdrehung gemacht hat, so heißt der dadurch erzeugte Winkel AOB ein rechter Winkel. Der rechte Winkel wird gewöhnlich mit dem Buchstaben R bezeichnet. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Fig. 13.

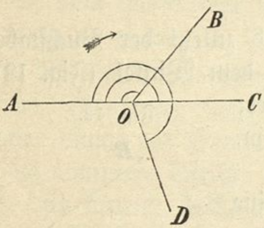


Der Winkel AOD, welcher kleiner als ein rechter ist, heißt ein spitzer Winkel. Der Winkel AOE, welcher größer als ein rechter Winkel ist, heißt ein stumpfer Winkel. Spitze und stumpfe Winkel werden auch schiefe Winkel genannt.

Um einen rechten Winkel zu erhalten, braucht man nur ein Stück Papier zweimal so zusammenzulegen, dass die Buglinien genau auf einander fallen.

2. Nach einer halben Umdrehung kommt der bewegliche Strahl in eine Richtung, welche seiner anfänglichen Richtung gerade entgegengesetzt ist. Der Winkel AOC (Fig. 14), welcher durch diese Drehung entsteht, heißt ein gestreckter Winkel. Seine Schenkel bilden eine gerade Linie. Ein gestreckter Winkel ist gleich zwei Rechten.

Fig. 14.

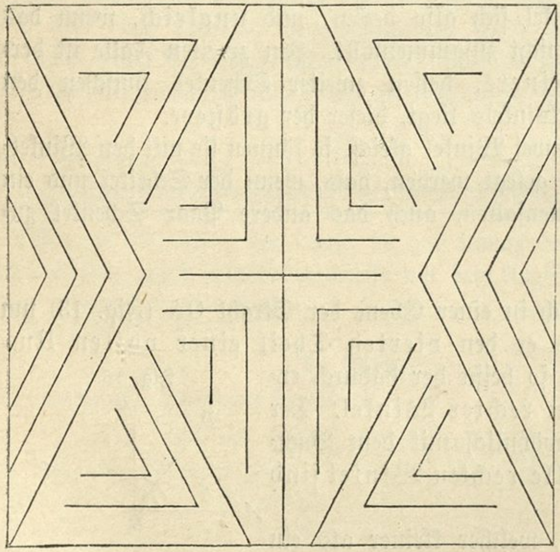


Ein Winkel AOB, welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein hohler Winkel. Ein Winkel AOD, welcher größer als ein gestreckter ist, heißt ein erhabener Winkel.

Der rechte, der spitze und der stumpfe Winkel sind hohle Winkel.

Von je zwei Strahlen werden immer zwei Winkel gebildet, ein hohler und ein erhabener; übrigens ist im allgemeinen immer der hohle zu verstehen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird.

Figuren-Tafel 15.



3. Nach einer ganzen Umdrehung gelangt der bewegliche Strahl wieder in seine ursprüngliche Lage. Der Winkel, der durch diese Drehung entsteht, heißt ein voller Winkel. Seine Schenkel fallen zusammen. Ein voller Winkel ist gleich zwei gestreckten Winkeln oder vier Rechten.

Figuren-Tafel 15 enthält eine Zusammenstellung der verschiedenen Arten von Winkeln.

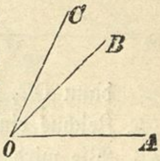
Aufgaben.

1. Was für einen Winkel beschreibt der Minutenzeiger einer Uhr in 10, 15, 25, 30, 40 Minuten, in 1 Stunde?
2. Was für einen Winkel bilden die beiden Zeiger einer Uhr a) um 3, 6, 9 Uhr, b) um 2, 5, 10 Uhr?
3. Was für einen Winkel beschreibt die Windfahne, wenn sie sich a) von Nord nach Süd, b) von Ost nach Süd, c) von Süd durch West und Nord nach Ost, d) von Ost nach Südwest dreht?
4. Zeichne drei hohle Winkel, von denen der erste ein rechter, der zweite ein spitzer, der dritte ein stumpfer Winkel ist.
5. Zeichne a) einen gestreckten, b) einen erhabenen, c) einen vollen Winkel.

Summe und Differenz der Winkel.

§. 34. 1. Dreht man in dem Winkel AOB (Fig. 16) den Schenkel OB von OA weg, bis er in die Lage OC kommt, so entsteht der Winkel AOC, welcher so groß ist, als die beiden Winkel AOB und BOC zusammengenommen; der Winkel AOC ist also die Summe der Winkel AOB und BOC.

Fig. 16.



Folgende zwei Sätze können hiernach durch entsprechende Zeichnung zur Anschauung gebracht werden.

a) Die Summe aller Winkel, welche auf einer Seite einer geraden Linie liegen und einen gemeinschaftlichen in ihr liegenden Scheitel haben, ist gleich einem gestreckten Winkel oder zwei Rechten.

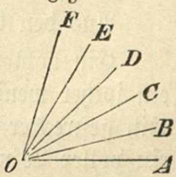
b) Die Summe aller Winkel, welche um einen Punkt herum neben einander liegen, ist gleich einem vollen Winkel oder vier Rechten.

2. Wird in dem Winkel AOC (Fig. 16) der Schenkel OC um den Winkel COB gegen OA zurückgedreht, so dass er in die Lage OB kommt, so entsteht der Winkel AOB, welcher die Differenz zwischen den Winkeln AOC und BOC ist.

Vielfache und Theile des Winkels.

§. 35. 1. Sind (Fig. 17) die Winkel AOB, BOC, COD, DOE, . . . einander gleich, so ist der Winkel AOC das Doppelte des Winkels AOB, AOD das Dreifache, AOE das Vierfache von AOB u. s. w. Die Winkel AOC, AOD, AOE, . . . sind also Vielfache des Winkels AOB.

Fig. 17.

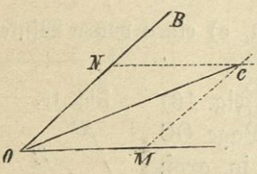


2. Umgekehrt ist der Winkel AOB die Hälfte von AOC, der dritte Theil von AOD, der vierte Theil von AOE u. s. w.

Aufgaben.

1. Zeichne nach dem Augenmaße drei Winkel, von denen der zweite 2mal, der dritte 3mal so groß ist als der erste.
2. Was für ein Winkel ist das Doppelte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten Winkels?
3. Was für ein Winkel ist die Hälfte a) eines rechten, b) eines stumpfen, c) eines gestreckten, d) eines erhabenen, e) eines vollen Winkels?

Fig. 18.



4. Einen Winkel AOB (Fig. 18) in zwei gleiche Theile zu theilen, oder zu halbieren. — Man mache OM = ON und bestimme einen Punkt C so, dass er von M und N gleich weit entfernt ist; zieht man dann OC, so ist Winkel AOC = BOC = $^1/_2$AOB.
5. Zeichne einen rechten Winkel und halbiere denselben.
6. Wie wird ein Winkel in 4, 8 gleiche Theile getheilt?
7. Versuche einen Winkel nach dem Augenmaße in 3, 5, 6 gleiche Theile zu theilen.

Das Winkelmaß.

§. 36. Zur Messung der Winkel nimmt man irgend einen bekannten Winkel als Einheit an und untersucht, wie oft derselbe in dem zu messenden Winkel enthalten ist.

Die Einheit des Winkelmaßes bildet wegen seiner unveränderlichen Größe der rechte Winkel. Man theilt ihn in 90 gleiche Winkel, welche Grade heißen; der 60ste Theil eines Grades heißt eine Minute, der 60ste Theil einer Minute eine Secunde.

Die Größe eines Winkels ist vollkommen bestimmt, wenn man angibt, wie viel Grade und Gradtheile er enthält. Die Grade, Minuten und Secunden eines Winkels bezeichnet man durch ^{0}, $'$, $''$; z. B. 57 Grade 48 Minuten 15 Secunden = $57^0\ 48'\ 15''$.

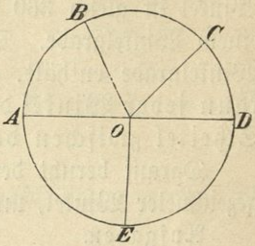
Aus den Erklärungen in §. 33 folgt:

Ein hohler Winkel enthält weniger als 180^0 und zwar insbesondere ein spitzer weniger als 90^0, ein rechter 90^0, ein stumpfer mehr als 90^0. Ein gestreckter Winkel hat 180^0, ein erhabener Winkel mehr als 180^0, ein voller Winkel 360^0.

Die Kreislinie.

§. 37. Dreht sich eine Strecke OA (Fig. 19) um den Punkt O in derselben Ebene so lange herum, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage kommt, so beschreibt während dieser Drehung der Punkt A eine krumme Linie ABCDEA, welche Kreislinie oder Kreis heißt. Die Kreislinie ist also eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, dass alle ihre Punkte von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit entfernt sind.

Fig. 19.



Der Punkt O, von welchem alle Punkte der Kreislinie gleich weit abstehen, heißt der Mittelpunkt oder das Centrum; die Länge der ganzen Kreislinie selbst wird der Umfang oder die Peripherie des Kreises genannt.

Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte zu irgend einem Punkte des Umfanges gezogen wird, heißt ein Halbmesser (Radius) des Kreises, z. B. OA, OB, OC. Da alle Punkte der Peripherie vom Mittelpunkte gleich weit abstehen, so sind alle Halbmesser eines Kreises einander gleich.

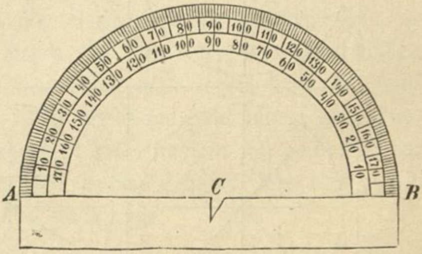
Eine Strecke AD, welche von einem Punkte des Umfanges durch den Mittelpunkt bis an die entgegengesetzte Seite des Umfanges gezogen wird, heißt ein Durchmesser (Diameter). Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß als ein Halbmesser desselben, daher sind auch alle Durchmesser eines Kreises einander gleich.

Jeder Theil des Umfanges, wie AB, wird ein Kreisbogen genannt; die Hälfte des Umfanges heißt insbesondere ein Halbkreis, der vierte Theil ein Quadrant.

Zum geometrischen Zeichnen des Kreises bedient man sich des Zirkels.

§. 38. Der Umfang eines jeden Kreises wird in 360 gleiche Bogen, welche man Bogengrade oder bloß Grade nennt, eingetheilt. Es kommen daher auf den Halbkreis 180, auf den Quadranten 90 Grade. Die Eintheilung des Halbkreises in Grade sieht man an dem Transporteur (Fig. 20), bei welchem die Kante AB den Durchmesser, und der Punkt C des Einschnittes den Mittelpunkt vorstellt. Jeder Grad wird in 60 gleiche Theile, Bogenminuten, und jede Minute in 60 Bogensecunden eingetheilt.

Fig. 20.



Man bezeichnet die Grade, Minuten und Secunden bei den Bogen auf gleiche Weise wie bei den Winkeln.

Messen der Winkel durch Kreisbogen.

§. 39. Theilt man die Peripherie eines Kreises in 360 Bogengrade und zieht von dem Mittelpunkte zu jedem Theilungspunkte einen Halbmesser, so entstehen um den Mittelpunkt 360 Winkel, welche alle unter einander gleich sind, weil bei je zweien, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden, die Schenkel zusammenfallen. Die Summe aller dieser Winkel ist gleich 360 Winkelgraden; folglich ist einer derselben gleich einem Winkelgrade. Da hiernach ein Winkel am Mittelpunkte so viele Winkelgrade enthält, als der zugehörige Bogen Bogengrade hat, so kann jeder Winkel durch den Kreisbogen, welchen man aus dem Scheitel zwischen den Schenkeln beschreibt, gemessen werden.

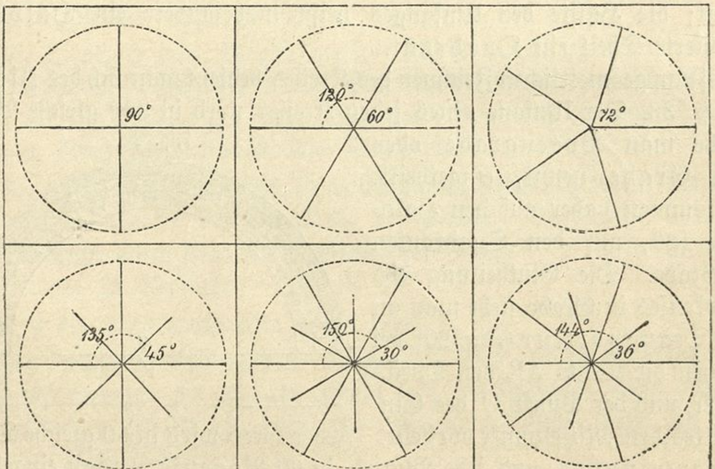
Darauf beruht der Gebrauch des Transporteurs zum Messen gezeichneter Winkel, und zum Zeichnen in Graden angegebener Winkel.

Aufgaben.

1. Zeichne beliebige Winkel, schätze zuerst ihre Größe nach dem Augenmaße ab, und miss sie dann mit dem Transporteur?
2. Zeichne zuerst nach dem Augenmaße aus freier Hand, und dann mit Hilfe des Transporteurs einen Winkel von 90°, 45°, 60°. 30°, 58°, 87°, 3°, 100°, 118°, 176°.

Die in der Figuren-Tafel 21 dargestellten Winkel kommen in der Praxis besonders häufig vor.

Figuren-Tafel 21.

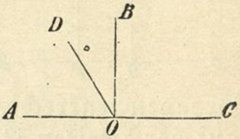


Nebenwinkel.

§. 40. Wird ein Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entstehen zwei Winkel, welche denselben Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide anderen Schenkel auf entgegengesetzten Seiten des Scheitels in einer geraden Linie liegen. Solche Winkel heißen **Nebenwinkel**.

AOB (Fig. 22) ist ein Nebenwinkel von BOC; ebenso sind AOD und COD Nebenwinkel.

Fig. 22.



Da je zwei Nebenwinkel zusammen genommen einen gestreckten Winkel geben, so folgt: **Die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei Rechten.**

Aufgaben.

1. Was für Winkel sind Nebenwinkel, wenn sie gleich sind, und was für Winkel sind sie, wenn sie ungleich sind?
2. Wie groß ist der Nebenwinkel von 20°, 35°, 64°, 100°, 148°, 55° 40′, 115° 16′ 45″?

Senkrechte und schiefe Gerade.

§. 41. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei gleiche Nebenwinkel, so sagt man: sie steht auf ihr **senkrecht** oder **normal**. Bildet eine Gerade mit einer andern Geraden zwei ungleiche Nebenwinkel, so steht sie auf ihr **schief**.

Eine Senkrechte bildet also mit der Geraden, auf welcher sie senkrecht steht, zwei rechte Winkel; eine Schiefe bildet mit der andern Geraden einen spitzen und einen stumpfen Winkel.

In Fig. 22 ist BO senkrecht auf AC, was man so bezeichnet: BO $\perp$ AC; dagegen steht DO auf AC schief.

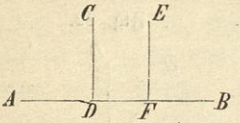
Wenn sich eine horizontale und eine verticale Linie durchschneiden, so bilden sie stets einen rechten Winkel, stehen also immer senkrecht auf einander. Aber nicht von je zwei senkrechten Linien kann man sagen, dass die eine horizontal und die andere vertical ist. Bei der Wage steht immer das Zünglein senkrecht auf dem Wagebalken; jedoch ist das Zünglein nur dann vertical und der Wagebalken horizontal, wenn die beiden Schalen leer oder gleich belastet sind; in jedem andern Falle sind sie schräge.

Ziehe eine Gerade, nimm darin fünf Punkte an, und errichte in jedem derselben auf die Gerade eine Senkrechte. Welche Lage gegen einander haben diese Senkrechten?

Zeichne zwei parallele Gerade, nimm in der einen fünf Punkte an, und fälle aus jedem auf die andere Gerade eine Senkrechte. Wie verhalten sich diese Senkrechten in Bezug auf ihre Länge?

§. 42. Es sei (Fig. 23) CD $\perp$ AB. Wenn die CD längs der AB mit sich selbst parallel fortschreitet, bis sie in die Lage EF kommt, so wird während dieser Bewegung die Lage CD gegen die AB nicht geändert; es wird daher CD auch in der Lage EF auf AB senkrecht stehen. Daraus sieht man:

Fig. 23.



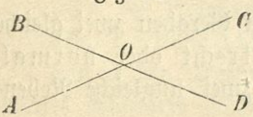
1. Steht eine Gerade auf einer andern Geraden senkrecht, so ist auch jede mit der ersteren Parallele auf der zweiten Geraden senkrecht.

2. Stehen zwei Gerade auf derselben dritten senkrecht, so sind sie unter einander parallel.

Scheitelwinkel.

§. 43. Verlängert man beide Schenkel eines Winkels AOB (Fig. 24) über den Scheitel O hinaus, so heißt der von diesen Verlängerungen gebildete Winkel COD der Scheitelwinkel des gegebenen Winkels AOB. Scheitelwinkel werden also von denselben zwei geraden Linien auf entgegengesetzten Seiten ihres Durchschnittspunktes gebildet.

Fig. 24.

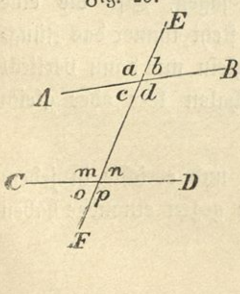


Da zwei sich schneidende Gerade auf beiden Seiten des Durchschnittspunktes ihre Richtungen beibehalten, so ist auch die Abweichung dieser Richtungen auf beiden Seiten dieselbe; d. h. je zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Gegenwinkel, Wechselwinkel und Anwinkel.

§. 44. Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen um die beiden Durchschnittspunkte acht Winkel. Die vier Winkel, welche zwischen den beiden geschnittenen Geraden liegen, heißen innere, die anderen vier äußere Winkel. In Fig. 25 sind AB und CD die beiden geschnittenen Geraden, EF ist die schneidende Gerade; c, d, m und n sind innere, a, b, o und p sind äußere Winkel.

Fig. 25.

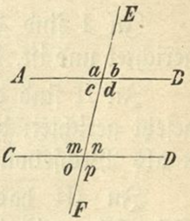


Ein äußerer und ein innerer Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen **Gegenwinkel**. Zwei äußere Winkel oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf verschiedenen Seiten der Schneidenden liegen, werden **Wechselwinkel** genannt. Zwei äußere oder zwei innere Winkel, welche verschiedene Scheitel haben und auf derselben Seite der Schneidenden liegen, heißen **Anwinkel**.

Gegenwinkel	Wechselwinkel	Anwinkel
a und m,	a und p,	a und o,
b „ n,	b „ o,	b „ p,
c „ o,	c „ n,	c „ m,
d „ p,	d „ m,	d „ n.

§. 45. Schreitet (Fig. 26) die Gerade AB längs der EF mit sich selbst parallel fort, bis sie in die Lage CD kommt, so wird sie, da sich dabei ihre Lage gegen die EF nicht ändert, mit dieser stets dieselben vier Winkel bilden; es werden also, wenn AB nach CD gelangt, je zwei Gegenwinkel auf einander fallen, also einander gleich sein; je zwei Wechselwinkel werden in zwei Scheitelwinkel übergehen, also auch einander gleich sein; je zwei Anwinkel endlich werden zu Nebenwinkeln, also zusammen 180^0 betragen. Es ist also

Fig. 26.



1) $a = m$, 2) $a = p$, 3) $a + o = 180^0$
$b = n$, $b = o$, $b + p = 180^0$,
$c = o$, $c = n$, $c + m = 180^0$,
$d = p$, $d = m$, $d + n = 180^0$; d. h.

Werden zwei parallele Gerade von einer dritten geschnitten, so sind

1. **je zwei Gegenwinkel einander gleich,**
2. **je zwei Wechselwinkel einander gleich,**
3. **je zwei Anwinkel zusammen gleich 180^0.**

Umgekehrt folgt: **Werden zwei Gerade von einer dritten so geschnitten, dass entweder zwei Gegenwinkel oder zwei Wechselwinkel gleich sind, oder zwei Anwinkel zusammen 180^0 betragen, so müssen die geschnittenen Geraden parallel sein.**

Aufgaben.

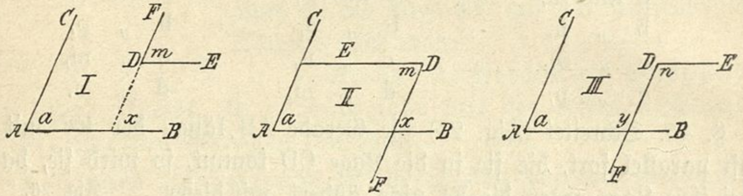
1. Zeichne zwei parallele Gerade AB und CD und durchschneide sie durch eine dritte Gerade EF, welche die anderen in G und H trifft. Benenne

jeden der dadurch entstehenden Winkel mit drei Buchstaben. Gib alle Paare von Neben-, Scheitel-, Gegen-, Wechsel- und Anwinkeln an.

2. Es sei (Fig. 26) der Winkel a = 112°; wie groß ist b, c, d, m, n, o, p?
3. Welche Richtungen haben die Schenkel a) zweier gleicher Gegenwinkel, b) zweier gleicher Wechselwinkel?

§. 46. Es sei (Fig. 27) AB ∥ DE und AC ∥ DF.

Fig. 27.



In I sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m gleichgerichtet und ist, da W. a = x und m = x als Gegenwinkel, auch a = m.

In II sind die parallelen Schenkel der Winkel a und m entgegengesetzt gerichtet; da a dem Winkel x als Gegenwinkel und m dem Winkel x als Wechselwinkel gleich ist, so ist auch in diesem Falle a = m.

In III haben die Winkel a und n auch paarweise parallele Schenkel, es ist jedoch nur ein Paar paralleler Schenkel nach derselben Seite, das andere Paar nach entgegengesetzten Seiten gerichtet. Da a + y = 2R und n = y ist, so ist auch a + n = 2R.

Daraus folgt:

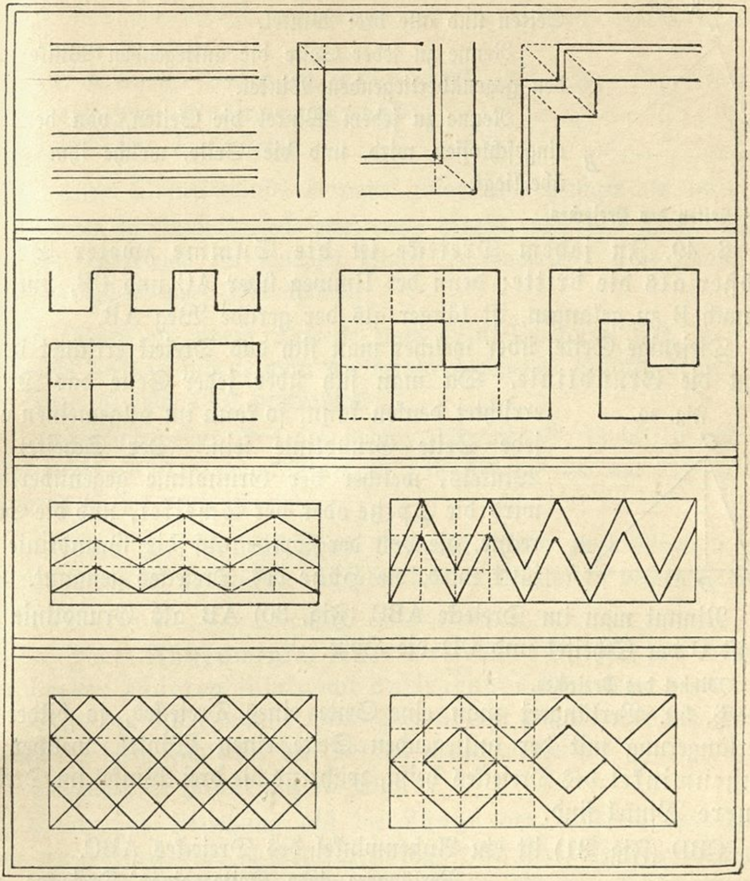
a) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, sind einander gleich, wenn beide Paare der parallelen Schenkel nach derselben Seite, oder beide Paare nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind.

b) Zwei Winkel, deren Schenkel paarweise einander parallel sind, betragen zusammen 180°, wenn nur ein Paar der parallelen Schenkel nach derselben Seite, das andere aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet ist.

4. Zeichenübungen.

§. 47. Zusammenstellungen von geraden Linien und Winkeln zu verschiedenen Formen (Figuren-Tafel 28): Einfaßlinien und Bänder, Eckeinfassungeu, Mäander, Zickzack, Netze und Verschlingungen.

Figuren=Tafel 28.



II. Geradlinige Figuren.

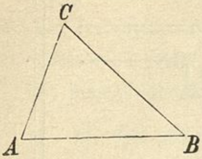
1. Dreiecke.

Bestandtheile der Dreiecke.

§. 48. Eine von drei Strecken begrenzte ebene Figur heißt ein Dreieck. Die drei Strecken heißen Seiten des Dreieckes.

Jedes Dreieck hat drei Seiten und drei Winkel. Jede Seite hat zwei anliegende und einen gegenüberliegenden Winkel. Jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen und die dritte liegt ihm gegenüber.

Fig. 29.



Nenne in dem Dreiecke ABC (Fig. 29) alle drei Seiten und alle drei Winkel.

Nenne zu jeder Seite die anliegenden Winkel und den gegenüberliegenden Winkel.

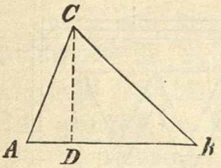
Nenne zu jedem Winkel die Seiten, von denen er eingeschlossen wird, und die Seite, welche ihm gegenüberliegt.

Seiten des Dreieckes.

§. 49. Jn jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte; denn der Umweg über AC und CB, um von A nach B zu gelangen, ist länger als der gerade Weg AB.

Diejenige Seite, über welcher man sich das Dreieck errichtet denkt, heißt die Grundlinie. Da man sich über jeder Seite das Dreieck errichtet denken kann, so kann im allgemeinen auch jede Seite Grundlinie sein. Der Scheitel des Winkels, welcher der Grundlinie gegenüberliegt, wird die Spitze oder der Scheitel, und die Senkrechte, die von der Spitze auf die Grundlinie gefällt wird, die Höhe des Dreieckes genannt.

Fig. 30.



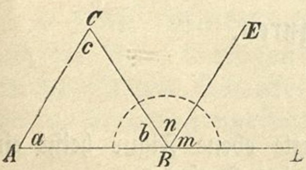
Nimmt man im Dreiecke ABC (Fig. 30) AB als Grundlinie an, so ist C der Scheitel und CD die Höhe.

Winkel des Dreieckes.

§. 50. Verlängert man eine Seite eines Dreieckes, so bildet die Verlängerung mit der anliegenden Seite einen Winkel, welcher ein Außenwinkel des Dreieckes heißt, während die drei Winkel im Dreiecke innere Winkel sind.

CBD (Fig. 31) ist ein Außenwinkel des Dreieckes ABC.

Fig. 31.



Verlängere jede Seite eines Dreieckes nach beiden Seiten. Wie viele Außenwinkel werden dadurch gebildet? Welche unter ihnen sind als Scheitelwinkel gleich? Nenne zu jedem Außenwinkel den inneren anliegenden, und die beiden nicht anliegenden Winkel.

§. 51. Wird in dem Dreiecke ABC (Fig. 31) die Seite AB verlängert und durch B die BE || AC gezogen, so entstehen die zwei Winkel m und n, von denen m dem Winkel a als Gegenwinkel, n dem Winkel c als Wechselwinkel gleich ist. Die Summe der drei Winkel a, c, b ist daher so groß, als die Summe der Winkel m, n, b. Die letztere Summe aber beträgt einen gestreckten Winkel oder zwei Rechte; also muss auch die Summe von a, c und b zwei Rechte betragen.

Die Summe der drei inneren Winkel eines Dreieckes ist also gleich zwei Rechten oder 180°.

Aus diesem Satze folgt:

1. Zwei Dreieckswinkel betragen zusammen weniger als 180°.

Können in einem Dreiecke zwei rechte Winkel, oder zwei stumpfe Winkel oder ein rechter und ein stumpfer Winkel vorkommen? Jedes Dreieck hat daher wenigstens zwei spitze Winkel.

2. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt sind, so findet man den dritten, indem man die beiden gegebenen Winkel addiert und ihre Summe von 180° subtrahiert.

Zwei Winkel eines Dreieckes sind: a) 65° und 87°; b) 43° 10′ und 102° 27′; c) 25° 46′ 21″ und 74° 48′ 49″; d) 57° 38′ 34″ und 61° 10′ 16″; wie groß ist der dritte Winkel?

3. Sind zwei Winkel eines Dreieckes gleich zwei Winkeln eines andern Dreieckes, so müssen auch die dritten Winkel in beiden Dreiecken gleich sein.

4. Jeder Außenwinkel eines Dreieckes ist gleich der Summe der beiden inneren ihm nicht anliegenden Winkel.

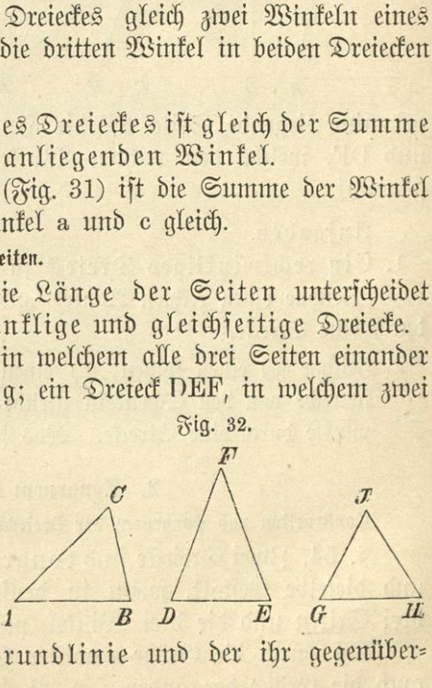
Denn der Außenwinkel CBD (Fig. 31) ist die Summe der Winkel m und n: diese sind aber den Winkel a und c gleich.

Eintheilung der Dreiecke nach den Seiten.

§. 52. In Beziehung auf die Länge der Seiten unterscheidet man ungleichseitige, gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke.

Ein Dreieck ABC (Fig. 32), in welchem alle drei Seiten einander ungleich sind, heißt ungleichseitig; ein Dreieck DEF, in welchem zwei Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig; ein Dreieck GHJ, in welchem alle drei Seiten gleich sind, wird gleichseitig genannt.

Fig. 32.

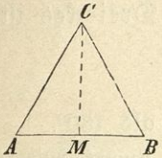


Im gleichschenkligen Dreiecke heißen die gleichen Seiten Schenkel, die dritte Seite die Grundlinie und der ihr gegenüberliegende Eckpunkt der Scheitel.

Aufgaben.

1. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Fig. 33.



Zeichne (Fig. 33) eine Strecke AB, errichte in der Mitte M derselben eine Senkrechte und bestimme in ihr den dritten Dreieckspunkt C so, dass er von A und von B so weit entfernt ist, wie A von B.

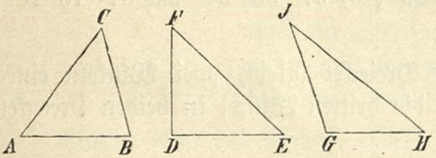
2. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen.

Errichte in der Mitte der Grundlinie eine Senkrechte und nimm einen beliebigen Punkt derselben als dritten Dreieckspunkt an.

Eintheilung der Dreiecke nach den Winkeln.

§. 53. Mit Rücksicht auf die Winkel gibt es spitzwinklige Dreiecke, in denen alle drei Winkel spitz sind; rechtwinklige, in denen ein rechter und zwei spitze Winkel vorkommen; und stumpfwinklige, in denen ein Winkel stumpf, die anderen zwei spitz sind.

Fig. 34.



In Fig. 34 ist ABC ein spitzwinkliges, FDE ein rechtwinkliges und JGH ein stumpfwinkliges Dreieck.

Im rechtwinkligen Dreiecke heißt die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite EF die Hypotenuse; die beiden Seiten DE und DF, welche den rechten Winkel einschließen, werden Katheten genannt.

Aufgaben.

1. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen.

Zeichne einen rechten Winkel und verbinde zwei Punkte der Schenkel durch eine Strecke.

2. Zeichne a) einen spitzen, b) einen rechten, c) einen stumpfen Winkel, schneide von den Schenkeln gleiche Strecken ab und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke. Was für ein Dreieck erhältst du?

2. Congruenz der Dreiecke.

Construction und Congruenz der Dreiecke.

§. 54. Zwei Dreiecke sind congruent, d. i. sieh aben dieselbe Größe und dieselbe Gestalt, wenn in denselben alle sechs Bestandstücke, die drei Seiten und die drei Winkel, paarweise gleich sind.

Da durch die Größe gewisser Seiten und Winkel eines Dreieckes auch die Größe der anderen, z. B. durch die Größe zweier Winkel die

Größe des dritten Winkels, bestimmt ist, so kann man aus der Gleichheit von weniger als sechs Bestandstücken in zwei Dreiecken auf ihre Congruenz schließen.

Um zu sehen, wie viele und welche Bestandstücke in zwei Dreiecken paarweise gleich sein müssen, damit die Dreiecke congruent seien, braucht man nur zu untersuchen, wie viele und welche Stücke erforderlich sind, um mit denselben ein Dreieck von bestimmter Größe und Gestalt zu construieren, weil dann alle Dreiecke, welche in diesen Stücken übereinstimmen, congruent sein müssen.

Ist nur ein Bestandstück, oder sind zwei Bestandstücke gegeben, so lassen sich mit denselben unzählig viele verschiedene Dreiecke construieren.

Damit ein Dreieck der Größe und der Gestalt nach vollkommen bestimmt werde, sind wenigstens drei Bestandstücke erforderlich; es können gegeben sein:

1. alle drei Seiten,
2. zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel,
3. zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel,
4. eine Seite und zwei Winkel,
5. alle drei Winkel.

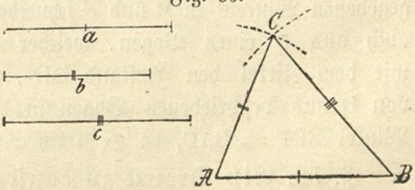
Da jedoch durch drei Winkel zwar die Gestalt, nicht aber auch die Größe eines Dreieckes bestimmt wird, so liefert der letzte der angeführten fünf Fälle keine bestimmte Construction.

Es bleiben demnach nur die ersten vier Fälle zu untersuchen übrig.

§. 55. Ein Dreieck zu construieren, wenn die drei Seiten gegeben sind.

Es seien (Fig. 35) a, b, c die Längen der drei Seiten. Trägt man die Strecke AB = a auf, so sind dadurch zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Beschreibt man dann aus A mit dem Halbmesser b und aus B mit dem Halbmesser c Kreisbogen, welche sich im Punkte C schneiden, so ist C der dritte Eckpunkt des Dreieckes. Man ziehe daher die Strecken AC und BC; dann ist ABC das verlangte Dreieck. Durch drei Seiten ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Fig. 35.



Geschieht die Auflösung einer Aufgabe, wie hier, mittelst des Lineals und des Zirkels, und gründet sie sich auf die Lehren der Geometrie, so heißt die Zeichnung eine geometrische Construction.

Zeichnet man mit denselben drei Seiten a, b, c noch ein zweites Dreieck DEF, so muss dieses mit ABC gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben, also mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

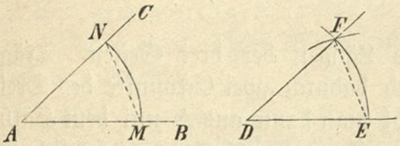
(I. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben alle drei Seiten paarweise gleich sind.

Aufgaben.

1. Zeichne vier Dreiecke mit den Seiten
   a) 3 *cm*, 2 *cm*, 4 *cm*; b) 5 *cm*, 4 *cm*, 3 *cm*; c) 37 *mm*, 24 *mm*, 28 *mm*; d) 2 *cm* 6 *mm*, 3 *cm* 2 *mm*, 4 *cm* 1 *mm*.
2. Versuche mit den Strecken 2 *cm*, 3 *cm*, 5 *cm* ein Dreieck zu construieren. Wie müssen die drei gegebenen Strecken beschaffen sein, damit man mit ihnen ein Dreieck zeichnen könne?
3. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie 25 *mm* und dessen Schenkel 31 *mm* ist.
4. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite a) 3 *cm*, b) 3 *cm* 2 *mm* beträgt.
5. Ein Dreieck ABC (Fig. 35) zu übertragen, d. i. ein Dreieck DEF zu zeichnen, welches mit dem Dreiecke ABC congruent ist.

   Mache DE = AB, beschreibe aus D mit dem Halbmesser AC, und aus E mit dem Halbmesser BC Kreisbogen, welche sich in F schneiden. Ziehe dann DF und EF, so entsteht das Dreieck DEF, welches mit ABC congruent ist.

Fig. 36.



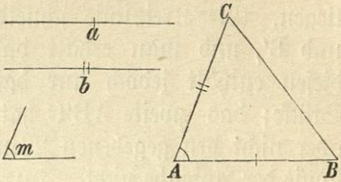
6. Einen Winkel BAC (Fig. 36) zu übertragen, d. i. einen Winkel zu zeichnen, welcher dem Winkel BAC gleich ist.

   Ziehe DE; dann beschreibe aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die Schenkel des gegebenen Winkels in M und N schneidet; mit demselben Halbmesser beschreibe auch aus D einen Bogen, welcher DE in E durchschneidet; endlich fasse mit dem Zirkel den Abstand MN, und durchschneide damit aus E den von D aus beschriebenen Bogen in F. Wird nun DF gezogen, so ist der Winkel EDF = BAC, da $\triangle$ DEF $\cong$ AMN ist.

§. 56. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Es seien (Fig. 37) a und b die zwei gegebenen Seiten und m der von ihnen eingeschlossene Winkel. Construiert man in A den gegebenen Winkel m und trägt auf dessen Schenkeln AB = a und AC = b auf, so ist dadurch die Lage der Eckpunkte B und C, daher auch die dritte Seite BC bestimmt. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel wird also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Fig. 37.



Construiert man mit denselben drei Stücken ein zweites Dreieck, so muss es mit dem früheren in der Größe und Gestalt übereinstimmen, d. h. mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

(II. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel paarweise gleich sind.

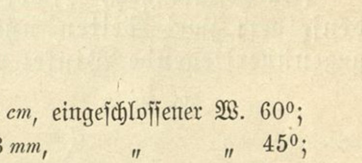
Aufgaben.

1. Construiere folgende Dreiecke:
   a) zwei Seiten 3 *cm* und 4 *cm*, eingeschlossener W. 60°;
   b) „ „ 35 *mm* „ 23 *mm*, „ „ 45°;
   c) „ „ 2 *cm* 2 *mm* „ 6 *cm* 6 *mm*, „ „ 120°.
2. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 21 *mm* und 29 *mm*.
3. Zeichne mit Hilfe des Transporteurs ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel 2 *cm* 8 *mm* und dessen Winkel am Scheitel 76° ist.

§. 57. Ein Dreieck zu construieren, wenn zwei Seiten und der einer dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

Der gegebene Winkel kann der größeren oder kleineren der beiden Seiten gegenüberliegen.

Fig. 38.



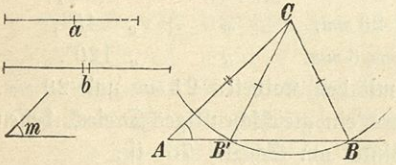
a) Es seien (Fig. 38) a und b die beiden gegebenen Seiten und zwar a größer als b; der der größeren Seite a gegenüberliegende Winkel sei m.

Man trage den Winkel m auf und mache den einen Schenkel AC gleich der Seite b, deren gegenüberliegender Winkel nicht gegeben ist; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und C, bestimmt. Der dritte Eckpunkt B muss in dem zweiten Schenkel AB des Winkels liegen und zugleich von dem Eckpunkte C um die Strecke a entfernt sein. Beschreibt man daher aus C mit dem Halbmesser a eine Kreislinie, so muss B in dem Durchschnitte dieser Kreislinie mit dem Schenkel AB liegen. Die Kreislinie schneidet den Schenkel AB in zwei Punkten B und B′, und man erhält daher zwei Dreiecke ABC und AB′C. Von diesen enthält jedoch nur das erste Dreieck ABC die gegebenen drei Stücke; das zweite AB′C hat zwar auch die zwei gegebenen Seiten, aber nicht den gegebenen Winkel, sondern dessen Nebenwinkel, genügt somit der Aufgabe nicht. Durch zwei Seiten und den der größeren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Zeichnet man mit denselben drei Stücken noch ein zweites Dreieck, so muss dieses mit dem früheren gleiche Größe und dieselbe Gestalt haben. Daraus folgt:

(III. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben zwei Seiten und der der größeren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel paarweise gleich sind.

Fig. 39.



b) Es seien (Fig. 39) a und b die zwei gegebenen Seiten und zwar a kleiner als b, und der Winkel, welcher der kleineren Seite a gegenüberliegt, sei m. Durch das gleiche Verfahren, wie oben, erhält man zwei Dreiecke ABC und AB′C, welche beide die gegebenen drei Stücke enthalten, aber in der Größe und Gestalt verschieden sind. Durch zwei Seiten und den der kleineren Seite gegenüberliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes nicht bestimmt.

Zeichne ein Dreieck, in welchem zwei Seiten a) 4 *cm* und 2 *cm*, b) 3 *cm* 2 *mm* und 2 *cm* 4 *mm*, c) 23 *mm* und 19 *mm* sind, und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel a) 60°, b) 72°, c) 150° beträgt.

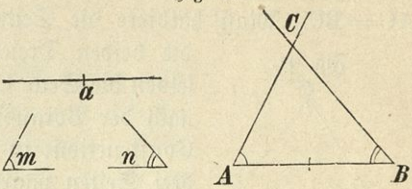
§. 58. Ein Dreieck zu construieren, wenn eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

Die zwei Winkel sind entweder die der gegebenen Seite anliegenden oder es ist der eine ein anliegender, der andere der gegenüberliegende Winkel.

a) Es seien (Fig. 40) a die gegebene Seite, m und n die ihr anliegenden Winkel.

Man ziehe AB = a; dadurch sind zwei Eckpunkte des Dreieckes, A und B, bestimmt. Trägt man in A den Winkel m und in B den Winkel n auf, so muss der dritte Eckpunkt C in dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden AC und BC, welche mit der Seite AB die gegebenen Winkel bilden, liegen. Man erhält also das Dreieck ABC, welches eine völlig bestimmte Größe und Gestalt hat. Durch eine Seite und die beiden ihr anliegenden Winkel ist also die Größe und Gestalt eines Dreieckes vollkommen bestimmt.

Fig. 40.



Wird mit denselben drei Stücken a, m und n noch ein zweites Dreieck gezeichnet, so muss es mit ABC gleiche Größe und gleiche Gestalt haben, also mit ihm congruent sein. Daraus folgt:

(IV. **Congruenzsatz.**) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in denselben eine Seite und die ihr anliegenden Winkel paarweise gleich sind.

b) Sind von einem Dreiecke eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben, so ist dadurch auch der dritte Winkel bekannt und daher nach a) das Dreieck vollkommen bestimmt.

Aufgaben.

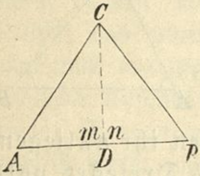
1. Zeichne folgende Dreiecke:
   a) eine Seite 4 *cm*, anliegende Winkel 60° und 45°;
   b) „ „ 3 *cm* „ „ 72° „ 30°;
   c) „ „ 2·8 *cm* „ „ 120° „ 36°.
2. Versuche mit der Seite 2 *dm* und den Winkeln 120° und 72° ein Dreieck zu zeichnen. Wie müssen die anliegenden Winkel beschaffen sein, damit die Construction des Dreieckes möglich sei?
3. Construiere mit Hilfe des Transporteurs ein Dreieck, in welchem eine Seite 27 *mm*, ein anliegender Winkel 59° und der gegenüberliegende Winkel 72° beträgt.
4. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, wenn gegeben sind:
   a) eine Kathete = 2 *cm* 5 *mm* und der anliegende spitze Winkel = 72°;
   b) eine Kathete = 3 *cm* und der gegenüberliegende Winkel = 60°;
   c) die Hypotenuse = 4 *cm* und ein anliegender Winkel = 45°.

3. Anwendung der Congruenzsätze.

Eigenschaften der gleichschenkligen Dreiecke.

§. 59. Es sei das Dreieck ABC (Fig. 41) gleichschenklig und zwar $AC = BC$. Man halbiere die Seite AB im Punkte D und vergleiche die beiden Dreiecke ACD und BCD; es ist in denselben die Seite CD gemeinschaftlich, ferner $AC = BC$ nach der Voraussetzung, und $AD = BD$ vermöge der Construction; in den beiden Dreiecken sind also alle drei Seiten paarweise gleich, folglich sind die Dreiecke ACD und BCD congruent. Aus der Deckung dieser Dreiecke folgt $\sphericalangle A = B$; ferner $\sphericalangle m = n$, d. h. $CD \perp AB$.

Fig. 41.



Es ergeben sich daher folgende Sätze:

1. In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

In einem gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel gleich.

2. Die Strecke, welche in einem gleichschenkligen Dreiecke die Mitte der Grundlinie mit dem Scheitel verbindet, steht auf der Grundlinie senkrecht.

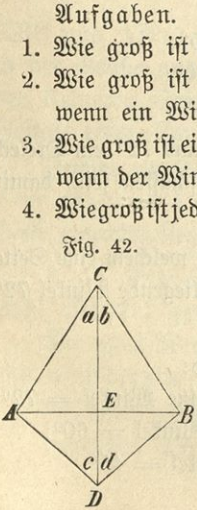
3. Umgekehrt: Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes auf diese errichtet, geht durch den Scheitel.

4. Zieht man in einem gleichschenkligen Dreiecke vom Scheitel eine Senkrechte auf die Grundlinie, so wird diese dadurch halbiert.

Aufgaben.

1. Wie groß ist jeder Winkel eines gleichseitigen Dreieckes?
2. Wie groß ist der Winkel am Scheitel eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn ein Winkel an der Grundlinie a) 52^0, b) $37^0\ 12'\ 50''$ ist?
3. Wie groß ist ein Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn der Winkel am Scheitel a) 71^0, b) $25^0\ 46'$, c) $59^0\ 19'\ 42''$ beträgt?
4. Wie groß ist jeder spitze Winkel eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes?

Fig. 42.



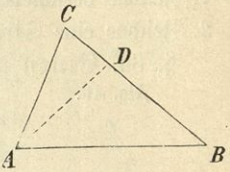
§. 60. Zeichnet man über der Grundlinie AB (Fig. 42) zwei gleichschenklige Dreiecke ABC und ABD und zieht durch die Scheitel C und D die Strecke CD, so sind die Dreiecke ACD und BCD congruent (warum?). Aus der Deckung dieser Dreiecke folgt Winkel $a = b$ und $c = d$; ferner $AE = BE$; endlich Winkel $AEC = BEC$, d. h. $CE \perp AB$.

Zeichnet man daher über derselben Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese 1. die Winkel an den Scheiteln, sie halbiert 2. die gemeinschaftliche Grundlinie und steht 3. auf der Grundlinie senkrecht.

Folgerungen.

§. 61. Es sei (Fig. 43) AD = BD, daher auch ∢ BAD = ABD. Vergrößert man den Winkel BAD und verlängert die gegenüberliegende Seite BD, so dass das Dreieck ABC entsteht, so ist in demselben die Seite BC > AC. Denn BC = BD + CD ist so groß als AD + CD; diese Summe ist aber > AC (§. 49), also ist auch BC > AC. Daraus folgt:

Fig. 43.

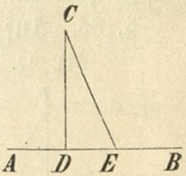


Sind in einem Dreiecke zwei Winkel ungleich, so sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten ungleich, und zwar liegt dem größeren Winkel auch eine größere Seite gegenüber.

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse, im stumpfwinkligen die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende Seite die größte Seite.

§. 62. Zieht man vom Punkte C (Fig. 44) zu der Geraden AB die Senkrechte CD und überdies irgend eine andere Gerade z. B. CE, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck CDE, und es muss darin die Hypotenuse CE größer sein, als die Kathete CD.

Fig. 44.



Die Senkrechte ist daher die kürzeste Gerade, die von einem Punkte zu einer geraden Linie gezogen werden kann.

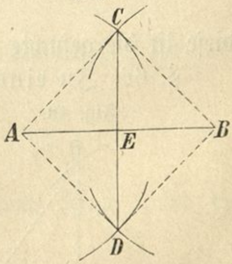
Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade dient dazu, um die Entfernung jenes Punktes von der Geraden zu messen.

Constructionsaufgaben.

§. 63. Eine gegebene Strecke AB (Fig. 45) zu halbieren.

Die Auflösung beruht auf dem Satze: Zeichnet man über einer Strecke zwei gleichschenklige Dreiecke und zieht durch die Scheitel eine Gerade, so halbiert diese die Grundlinie.

Fig. 45.



Man braucht nur über AB zwei gleichschenklige Dreiecke zu construieren und ihre Scheitel C und D durch eine Gerade zu verbinden. Dabei sind jedoch die Schenkel der gleichschenkligen Dreiecke für die Lösung der Aufgabe entbehrlich. Die Auflösung ist also:

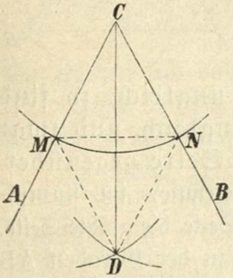
Um eine Strecke zu halbieren, beschreibe man aus ihren Endpunkten mit demselben Halbmesser nach oben und unten Kreisbogen, welche sich in zwei Punkten schneiden, und ziehe durch beide Punkte eine Gerade; diese Gerade halbiert die gegebene Strecke.

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene Strecken und halbiere jede derselben.
2. Zeichne eine Strecke und theile sie in 4, 8 gleiche Theile.

§. 64. Einen gegebenen Winkel ABC (Fig. 46) zu halbieren.

Fig. 46.



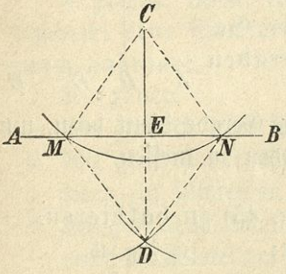
Um einen Winkel zu halbieren, beschreibe man aus dem Scheitel einen Bogen, welcher die beiden Schenkel schneidet; aus den Durchschnittspunkten beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und ziehe dann durch diesen Punkt und den Scheitel des Winkels eine Gerade; diese Gerade halbiert den gegebenen Winkel.

Aufgaben.

1. Zeichne verschiedene Winkel und halbiere sie.
2. Zeichne einen Winkel und theile ihn in 4 gleiche Theile.

§. 65. Auf eine gegebene Gerade AB (Fig. 47) von einem außer ihr befindlichen Punkte C eine Senkrechte zu fällen.

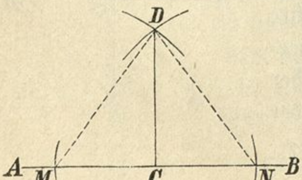
Fig. 47.



Um aus einem Punkte zu einer Geraden eine Senkrechte zu ziehen, beschreibe man aus jenem Punkte einen Kreisbogen, welcher die Gerade in zwei Punkten schneidet; aus diesen beschreibe man wieder mit demselben Halbmesser zwei Bogen, die sich in einem Punkte schneiden, und verbinde diesen Punkt mit dem gegebenen Punkte durch eine Gerade; diese ist die gesuchte Senkrechte.

§. 66. In einem Punkte C einer Geraden AB (Fig. 48) auf diese eine Senkrechte zu errichten.

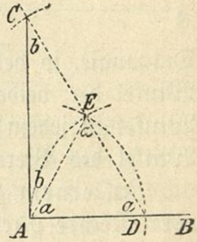
Fig. 48.



Um in einem Punkte einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten, schneide man von jenem Punkte aus an der Geraden gleiche Stücke ab, beschreibe aus ihren Endpunkten mit demselben Halbmesser zwei Bogen, welche sich in einem Punkte schneiden, und ziehe durch diesen und den gegebenen Punkt eine Gerade; diese ist die gesuchte Senkrechte.

Ist der gegebene Punkt A ein Endpunkt der gegebenen Strecke AB, so verlängere man die Gerade über diesen Endpunkt hinaus und verfahre sodann wie vorhin. Läßst sich aber die Linie nicht über den Endpunkt hinaus verlängern, so kann man die verlangte Senkrechte auf folgende Art erhalten:

Fig. 49.



Man beschreibe (Fig. 49) aus A mit einem beliebigen Halbmesser einen Bogen, welcher die AB in D schneidet; mit demselben Halbmesser durchschneide man aus D den früheren Kreisbogen in E, und beschreibe aus E einen neuen Bogen, welcher von der durch D und E gezogenen Geraden in C geschnitten wird. Zieht man nun die AC, so steht diese auf AB senkrecht.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist leicht einzusehen. Vermöge der Construction ist das Dreieck ADE gleichseitig und das Dreieck ACE gleichschenklig. Im $\triangle$ ADE ist daher jeder der drei Winkel $a = 60^0$; im $\triangle$ ACE ist jeder der zwei gleichen Winkel b an der Grundlinie die Hälfte des Außenwinkels a, also $b = 30^0$. Mithin ist Winkel $BAC = a + b = 60^0 + 30^0 = 90^0$, und daher $AC \perp AB$.

§. 67. Geometrische Construction einzelner Winkel.

1. Einen Winkel von a) 60^0, b) 30^0, c) 120^0, d) 150^0 geometrisch zu construieren.

a) Durch Construction eines gleichseitigen Dreieckes.

b) Durch Halbierung des Winkels von 60^0.

c) und d) Durch Construction des Nebenwinkels von 60^0, bezüglich von 30^0.

2. Einen Winkel von a) 90^0, b) 45^0, c) 135^0 geometrisch zu construieren.

a) Nach §. 65 oder §. 66.

b) und c) Durch Halbierung des Winkels von 90^0, und durch Construction des Nebenwinkels von 45^0.

4. Vierecke.

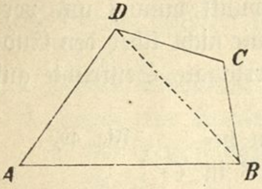
Bestandtheile der Vierecke.

§. 68. Eine von vier Strecken begrenzte ebene Figur wird ein Viereck genannt.

Ein Viereck hat vier Seiten und vier Winkel.

Die Strecke, welche zwei gegenüberstehende Eckpunkte verbindet, heißt Diagonale.

Fig. 50.



Aufgaben.

1. Wie viele Diagonalen können in einem Vierecke gezogen werden?
2. Nenne in dem Vierecke ABCD (Fig. 50) alle vier Seiten und alle vier Winkel. Nenne die Diagonale.

§. 69. Zieht man in einem Viereck eine Diagonale, so betragen alle Winkel des Viereckes eben so viel als die Winkel der beiden Dreiecke, in welche das Viereck zerlegt wird; die Winkel in jedem der zwei Dreiecke betragen nun zwei Rechte, daher die Winkel des Viereckes vier Rechte.

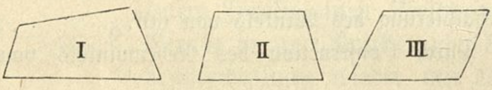
In einem Vierecke beträgt also die Summe aller Winkel vier Rechte oder 360^0.

Wenn in einem Vierecke alle vier Winkel gleich sind, wie groß ist jeder?

Eintheilung der Vierecke nach den Richtungen der gegenüberliegenden Seiten.

§. 70. Ein Viereck, in welchem keine Seite mit einer andern parallel ist, heißt ein Trapezoid (Fig. 51, I). Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten parallel, die andern zwei Seiten aber nicht-parallel sind, heißt ein Trapez (Fig. 51, II). Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm (Fig. 51, III).

Fig. 51.



Ein Trapez, in welchem die nichtparallelen Seiten einander gleich sind, heißt gleichschenklig.

In einem Parallelogramme kann man was immer für eine Seite als Grundlinie annehmen; die Senkrechte, die darauf von der gegenüberliegenden Seite gefällt wird, ist dann die Höhe. In einem Trapeze versteht man unter der Höhe eine Senkrechte, welche von einem Punkte der einen parallelen Seite auf die andere parallele Seite gefällt wird.

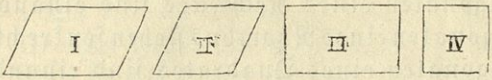
Aufgaben.

1. Zeichne ein gleichschenkliges Trapez.
2. Zeichne zwei Parallele, dann eben so zwei andere Parallele, welche die früheren durchschneiden. Was für ein Viereck entsteht dadurch?

Eintheilung der Parallelogramme nach der Größe der Seiten und Winkel.

§. 71. Ein Parallelogramm, in welchem weder alle Seiten noch alle Winkel gleich sind, heißt ein Rhomboid (Fig. 52, I); ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich sind, ein Rhombus (Fig. 52, II); ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel gleich sind, ein Rechteck (Fig. 52, III); ein Parallelogramm endlich, in welchem alle Seiten und alle Winkel gleich sind, ein Quadrat (Fig. 52, IV).

Fig. 52.



Im Rechtecke und im Quadrate ist jeder Winkel ein rechter; im Rhomboid und im Rhombus kommen zwei gleiche spitze und zwei gleiche stumpfe Winkel vor. Darum werden das Rechteck und das Quadrat auch rechtwinklige, das Rhomboid und der Rhombus schiefwinklige Parallelogramme genannt.

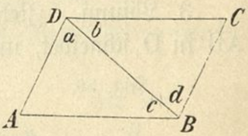
Zeichne einen spitzen oder stumpfen Winkel a) mit ungleichen Schenkeln, b) mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche mit den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle?

Zeichne einen rechten Winkel a) mit ungleichen, b) mit gleichen Schenkeln und ziehe durch die Endpunkte Gerade, welche mit den Schenkeln parallel sind. Was für ein Viereck entsteht in jedem Falle?

Eigenschaften der Parallelogramme.

§. 72. Es sei (Fig. 53) $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$. Zieht man die Diagonale BD, so sind die Wechselwinkel a und d, und eben so die Wechselwinkel c und b einander gleich; daher ist $\triangle ABD \cong BCD$. Dann ist auch Winkel $A = C$, also auch $B = D$, und Seite $AB = CD$, $AD = BC$. Daraus folgt:

Fig. 53.



1. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.

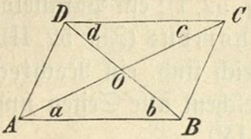
2. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

3. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberliegenden Seiten gleich; oder:

Parallele zwischen Parallelen sind einander gleich.

§. 73. Es sei ABCD (Fig. 54) ein Parallelogramm, also AB ∥ CD, AD ∥ BC. Zieht man die Diagonalen AC und BD, so ist wegen AB = CD, a = c und b = d das Dreieck ABO ≅ CDO, folglich AO = CO, BO = DO; d. i. die Diagonalen eines jeden Parallelogrammes halbieren einander.

Fig. 54.



Von den Diagonalen der Parallelogramme gelten noch folgende Sätze:

1. Die Diagonalen eines Rechteckes sind einander gleich.
2. Die Diagonalen eines Rhombus stehen senkrecht aufeinander.
3. Die Diagonalen eines Quadrates sind einander gleich und stehen senkrecht auf einander.

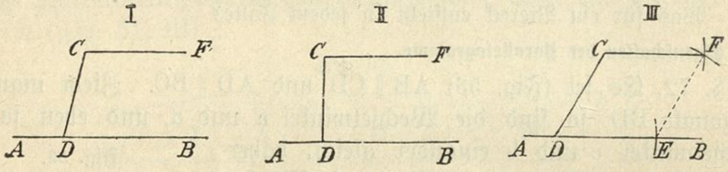
Constructionsaufgaben.

§. 74. Zu einer Geraden AB (Fig. 55) durch einen Punkt C außerhalb derselben eine Parallele zu ziehen.

1. Lösung. Ziehe (Fig. 55, I) durch C eine Gerade, welche die AB in D schneidet, und trage in C einen Winkel DCF = ADC so auf, dass er zu ADC Wechselwinkel wird; der zweite Schenkel CF des construierten Winkels ist die gesuchte Parallele (§. 45).

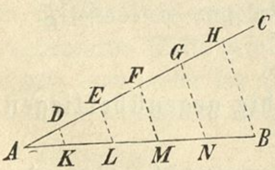
2. Lösung. Fälle (Fig. 55, II) von C die CD ⊥ AB und errichte in C die CF ⊥ CD; dann ist CF ∥ AB (42, 2).

Fig. 55.



3. Lösung. Ziehe (Fig. 55, III) durch C eine Gerade, welche die AB in D schneidet, und beschreibe aus D mit dem Halbmesser CD einen Kreisbogen, welcher die AB in E schneidet; beschreibt man dann mit demselben Halbmesser aus C und E zwei Kreisbogen, welche sich in F schneiden, und zieht CF, so ist CDEF ein Parallelogramm, daher CF ∥ DE, oder CF ∥ AB.

Fig. 56.



§. 75. Eine gegebene Strecke in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.

a) Es sei die Strecke AB (Fig. 56) z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen. Man ziehe durch A eine andere Gerade AC von beliebiger Richtung und Länge, und trage darauf von A aus 5 beliebige gleiche Theile. Verbindet man den Endpunkt H des fünften Theiles mit B durch die HB, und zieht durch D, E, F, G Parallele mit HB, so theilen diese auch die AB in 5 gleiche Theile AK, KL, LM, MN, NB.

§. 76. 1. Ein Parallelogramm zu construieren, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Man zeichne in A (Fig. 57) einen Winkel = m, schneide von den Schenkeln AB = a und AD = b ab; hierauf beschreibe man aus B mit dem Halbmesser AD einen Bogen und durchschneide ihn aus D mit dem Halbmesser AB; dann ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

Fig. 57.

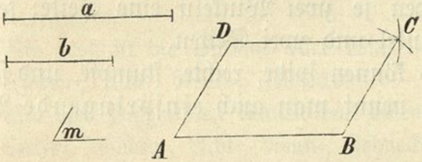
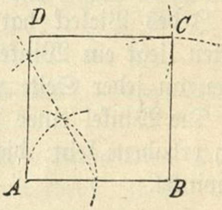


Fig. 58.



2. a) Ein Quadrat zu construieren, wenn seine Seite AB (Fig. 58) gegeben ist.

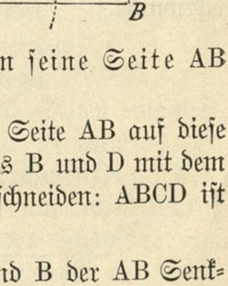
Man errichte im Endpunkte A der gegebenen Seite AB auf diese eine Senkrechte, mache AD = AB und beschreibe aus B und D mit dem Halbmesser AB zwei Kreisbogen, welche sich in C schneiden: ABCD ist das verlangte Quadrat.

Oder: Man errichte in beiden Eckpunkten A und B der AB Senkrechte, trage auf denselben AB bis D und C auf und ziehe DC.

b) Ein Quadrat zu construieren, wenn seine Diagonale AC (Fig. 59) gegeben ist.

Man halbiere AC in O, ziehe durch diesen Punkt eine Senkrechte und trage auf ihr die halbe Diagonale bis B und D auf; ABCD ist dann das verlangte Quadrat.

Fig. 59.



3. Ein Rechteck zu construieren, wenn gegeben sind:

a) zwei Seiten (28 *mm* und 19 *mm*);

b) eine Seite und die Diagonale (25*mm*, 35*mm*).

4. Einen **Rhombus** zu construieren, wenn gegeben sind:
a) eine Seite und ein Winkel (38 *mm*, 45°);
b) die Grundlinie und die Höhe (32 *mm*, 24 *mm*);
c) die beiden Diagonalen (38 *mm*, 28 *mm*).
5. Ein gleichschenkliges **Trapez** zu zeichnen, wenn gegeben sind:
a) die Parallelseiten (26 *mm*, 22 *mm*) und die Höhe (18 *mm*);
b) die Parallelseiten und der Winkel an der ersten Seite (38 *mm*, 26 *mm*, 60°).

5. Vielecke.

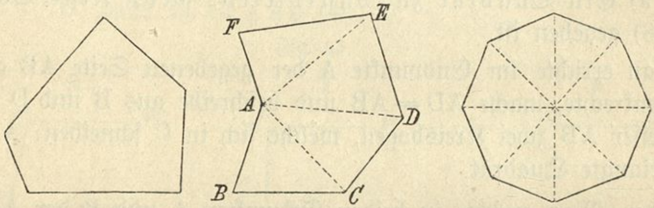
Bestandtheile der Vielecke.

§. 77. Eine von mehreren Strecken begrenzte ebene Figur heißt **Vieleck** oder **Polygon**.

Jedes Vieleck hat so viele Seiten als Winkel; zwischen je zwei Seiten liegt ein Winkel, zwischen je zwei Winkeln eine Seite; ferner liegen an jeder Seite zwei Winkel und zwei Seiten.

Die Winkel eines Vieleckes können spitze, rechte, stumpfe, und selbst auch erhabene sein; die letzten nennt man auch **einspringende Vieleckswinkel**.

Fig. 60.



Eine Strecke AC (Fig. 60), welche zwei nicht unmittelbar aufeinander folgende Eckpunkte des Vieleckes verbindet, heißt **Diagonale**.

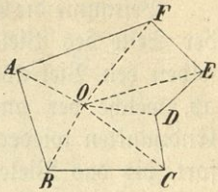
Die Summe aller Seiten eines Vieleckes heißt der **Umfang**, und die Größe der von den Seiten eingeschlossenen Fläche der **Flächeninhalt** desselben.

§. 78. **In jedem Vieleck ist die Summe aller Winkel gleich so vielmal zwei Rechten als das Vieleck Seiten hat, weniger vier Rechten.**

Nimmt man innerhalb des Viereckes ABCDEF (Fig. 61) einen beliebigen Punkt O an und zieht von diesem zu allen Eckpunkten gerade Linien, so erhält man so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat die Winkel eines solchen Dreieckes betragen zwei Rechte, daher die

Winkel aller Dreiecke so vielmal 2 Rechte, als das Vieleck Seiten hat. Unter den Winkeln der Dreiecke kommen nun alle Vieleckswinkel vor, aber überdies auch noch die Winkel um den Punkt O herum, die nicht Vieleckswinkel sind und die zusammen 4 Rechte betragen. Um daher bloß die Summe der Vieleckswinkel zu erhalten, muss man von der Winkelsumme aller Dreiecke noch vier Rechte subtrahieren.

Fig. 61.



Eintheilung der Vielecke nach der Anzahl der Seiten.

§. 79. Die Vielecke werden nach der Anzahl ihrer Seiten in dreiseitige oder Dreiecke, vierseitige oder Vierecke, fünfseitige oder Fünfecke, u. s. w. eingetheilt.

Im engeren Sinne versteht man unter Vieleck eine Figur, welche mehr als vier Seiten hat.

Aufgaben.

1. Wie groß ist die Summe aller Winkel eines Fünfeckes? — eines Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehneckes?
2. Wie viel Diagonalen können von einem Eckpunkt in einem Vier-, Fünf-, Sechs-, Sieben-, Acht-, Neun-, Zehnecke gezogen werden? In wie viele Dreiecke wird dadurch jedes der genannten Vielecke zerlegt?

Eintheilung der Vielecke nach der Größe der Seiten und Winkel.

§. 80. Ein Vieleck heißt gleichseitig, wenn alle Seiten einander gleich sind; sonst ungleichseitig. Ein Vieleck heißt gleichwinklig, wenn alle Winkel einander gleich sind; sonst ungleichwinklig. Ein Vieleck heißt regelmäßig, wenn alle Seiten gleich und alle Winkel gleich sind; sonst unregelmäßig. So ist z. B. der Rhombus ein gleichseitiges, das Rechteck ein gleichwinkliges, das Quadrat ein regelmäßiges Viereck.

Da in einem regelmäßigen Vielecke alle Winkel gleich sind, so findet man die Größe eines derselben, wenn man zuerst die Summe aller Winkel bestimmt und dann dieselbe durch die Anzahl der Winkel dividiert. So beträgt

ein Winkel des regelmäßigen Dreieckes . . $\frac{180^0}{3} = 60^0$,

" " " " Viereckes . . $\frac{360^0}{4} = 90^0$,

" " " " Fünfeckes . . $\frac{540^0}{5} = 108^0$,

" " " " Sechseckes . $\frac{720^0}{6} = 120^0$, u. s. w.

Constructionsaufgaben.

§. 81. 1. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen.

Bestimme die Größe eines Vieleckswinkels, zeichne eine Strecke, welche der Seite des Vieleckes gleich ist, und trage in den Endpunkten derselben den Vieleckswinkel auf; von den neuen Schenkeln schneide Stücke ab, welche der angenommenen Vielecksseite gleich sind, trage in den Endpunkten wieder den Vieleckswinkel auf und setze dieses Verfahren fort, bis das Vieleck geschlossen ist.

2. Zeichne ein regelmäßiges Fünfeck. (Die Prüfung geschieht, indem man alle Diagonalen zieht und nachsieht, ob je eine mit einer Seite parallel ist.)

3. Zeichne ein regelmäßiges Sechseck. (Es müssen je zwei gegenüberliegende Seiten und eine Diagonale parallel sein.)

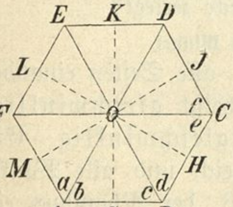
4. Zeichne ein regelmäßiges a) Achteck, b) Zehneck.

Einfacher geschieht die Construction regelmäßiger Vielecke mit Hilfe des Kreises, wovon später bei der Kreislehre die Rede sein wird.

Eigenschaften der regelmäßigen Vielecke.

§. 82. Es sei das Vieleck ABCDEF (Fig. 62) regelmäßig, also AB = BC = CD = DE = EF = FA, und A = B = C = D = E = F.

Fig. 62.



Aus der Congruenz der Dreiecke ergeben sich folgende Sätze:

1. Halbiert man in einem regelmäßigen Vielecke zwei aufeinander folgende Umfangswinkel und verbindet den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien mit den übrigen Eckpunkten des Vieleckes durch Strecken, so wird dadurch das Vieleck in lauter congruente gleichschenklige Dreiecke getheilt.

2. In jedem regelmäßigen Vielecke gibt es einen Punkt, der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist.

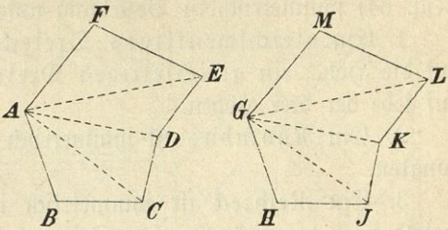
Dieser Punkt heißt der Mittelpunkt des regelmäßigen Vieleckes. Man findet ihn, indem man zwei aufeinander folgende Vieleckswinkel halbiert.

Congruenz der Vielecke.

§. 83. Zwei Vielecke sind congruent, wenn sie alle Seiten und alle Winkel nach der Ordnung paarweise gleich haben.

Zwei Vielecke ABCDEF und GHJKLM (Fig. 63), welche aus gleich vielen der Ordnung nach congruenten Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst congruent.

Fig. 63.



Denn legt man beide Vielecke so aufeinander, dass zwei gleichliegende Dreiecke auf einander fallen, z. B. ABC auf GHJ, so muss auch das zweite Paar Dreiecke sich decken, folglich auch das dritte Paar, . . .; daher decken sich auch die ganzen Vielecke.

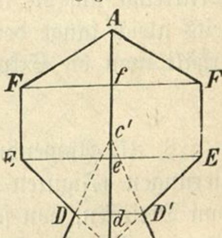
§. 84. Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 63) zu übertragen, d. i. ein Vieleck zu zeichnen, welches mit dem Vielecke ABCDEF congruent ist.

Man zerlege das gegebene Vieleck von A aus durch Diagonalen in Dreiecke, beschreibe mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen so viele in derselben Ordnung liegende Dreiecke, welche mit denen des gegebenen Vieleckes congruent sind. Die dadurch entstehende Figur GHJKLM ist mit der gegebenen congruent. Es ist hier nicht nöthig die Diagonalen wirklich zu ziehen; dieselben können in dem gegebenen wie in dem neu entstehenden Vielecke bloß gedacht werden.

Symmetrische Gebilde.

§. 85. Fällt man in der Figur ABCDEF (Fig. 64) von den Eckpunkten die Senkrechten Dd, Ee, Ff auf AB und wendet die Figur als eine feste Verbindung um AB als Achse um, so heißt das Gebilde ABC'D'E'F', welches man dadurch erhält, mit dem gegebenen Gebilde ABCDEF symmetrisch, und die Gerade AB, um welche die Umwendung geschieht, die Symmetrieachse oder Symmetrale.

Fig. 64.



Zwei symmetrische Gebilde haben demnach die Eigenschaft, dass die Verbindungsstrecke je zweier entsprechender Punkte derselben auf der Symmetrale senkrecht steht und von ihr halbiert wird.

Zwei symmetrische ebene Gebilde sind immer auch congruent; ihre gleichen Bestandstücke folgen jedoch in Beziehung auf die Symmetrale in entgegengesetzter Ordnung auf einander.

§. 86. Ein ebenes Gebilde, welches sich durch eine Gerade in zwei symmetrische Theile theilen läßt, heißt selbst symmetrisch in Beziehung auf diese Gerade als Symmetrale. So ist das Vieleck AFEDCC'D'E'F' (Fig. 64) symmetrisch in Beziehung auf die Gerade AB.

1. Ein gleichschenkliges Dreieck ist symmetrisch in Beziehung auf die Höhe; ein gleichseitiges Dreieck ist symmetrisch in Beziehung auf jede der drei Höhen.

2. Ein Rhombus ist symmetrisch in Bezug auf jede seiner Diagonalen.

3. Ein Rechteck ist symmetrisch in Beziehung auf jede Gerade, welche zwei gegenüberliegende Seiten halbiert.

4. Ein Quadrat ist symmetrisch sowohl in Bezug auf jede Diagonale, als auch in Bezug auf jede Gerade, welche zwei gegenüberliegende Seiten halbiert.

5. Ein gleichschenkliges Trapez ist symmetrisch in Bezug auf die Gerade, welche die zwei parallelen Seiten halbiert.

6. Ein regelmäßiges Vieleck ist symmetrisch in Beziehung auf jede Gerade, welche durch den Mittelpunkt und entweder durch einen Eckpunkt oder durch die Mitte einer Seite geht; es hat eben so viele Symmetralen, als es Seiten hat.

Aufgabe.

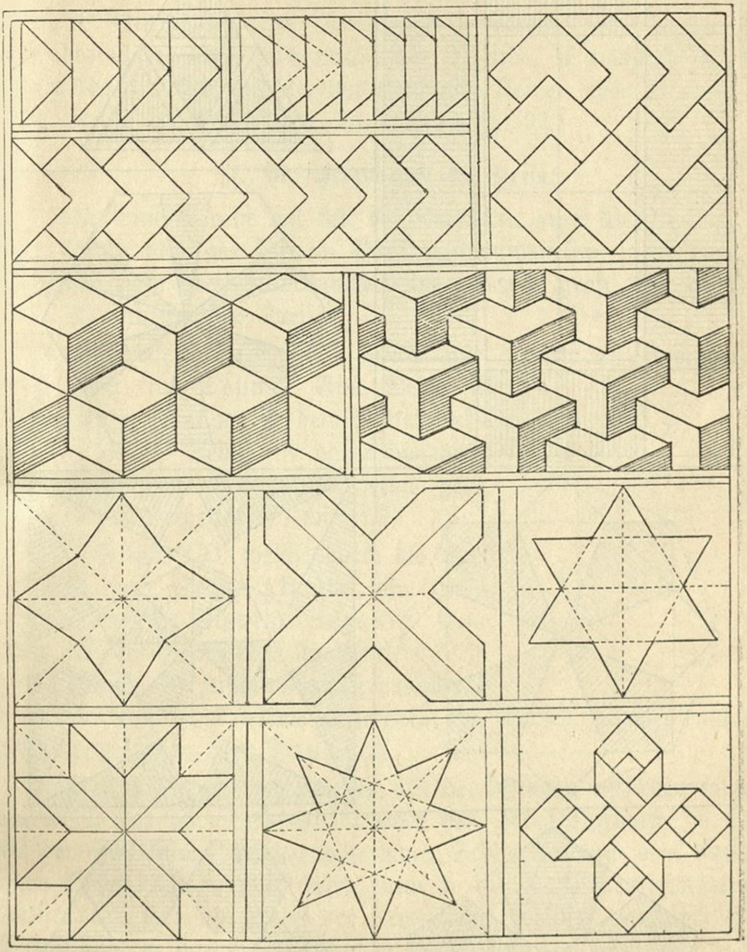
Ein symmetrisches Vieleck zu übertragen. (Fig. 64).

Man ziehe in dem gegebenen Vielecke die Symmetrale AB und auf diese von den Eckpunkten Senkrechte. Dann bestimmt man in der Copie zuerst die Symmetrale, trägt auf ihr die einzelnen Abschnitte der gegebenen Symmetrale auf, errichtet durch die so gefundenen Punkte Senkrechte auf die neue Symmetrale und schneidet von denselben beiderseits gleich lange der früheren Länge entsprechende Stücke ab; dadurch erhält man die Eckpunkte des verlangten neuen Vieleckes.

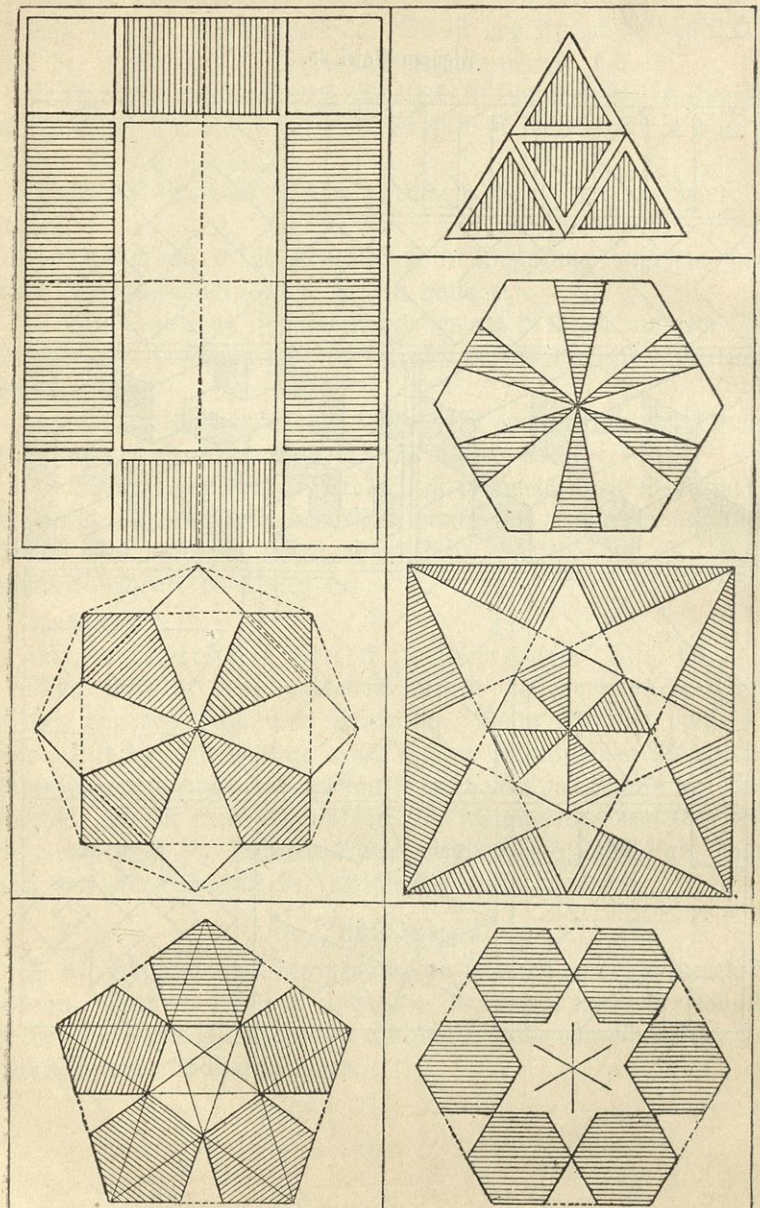
6. Zeichenübungen.

§. 87. Anwendungen der geradlinigen Figuren zu verschiedenen Verzierungen (Figuren-Tafel 65 und 66): Reihungen und Verbindungen von Dreiecken, von schräggestellten Quadraten und von Rhomben; sternförmige Vielecke; Schraffierungen.

Figuren=Tafel 65.



Figuren-Tafel 66.



III. Der Kreis.

1. Der Punkt und der Kreis.

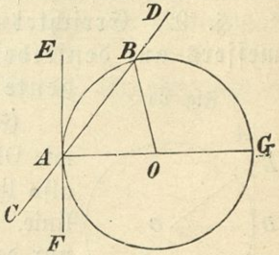
§. 88. Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, oder in dem Umfange desselben, oder außerhalb des Kreises, je nachdem die Entfernung des Punktes vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises. (§. 37.)

2. Die Gerade und der Kreis.

§. 89. Eine Gerade hat mit der Kreislinie zwei Punkte, oder nur einen Punkt, oder gar keinen Punkt gemeinschaftlich, je nachdem ihre Entfernung vom Kreismittelpunkte kleiner, eben so groß, oder größer ist als der Halbmesser des Kreises.

Eine Strecke AB (Fig. 67), welche zwei Punkte des Umfanges verbindet, heißt eine Sehne. Eine Sehne ist um so größer, je näher sie dem Mittelpunkte liegt; die längste Sehne ist daher diejenige, welche durch den Mittelpunkt selbst geht, nämlich der Durchmesser, wie AG.

Fig. 67.



Eine Gerade CD, welche durch die Verlängerung einer Sehne AB über ihre Endpunkte hinausgeht heißt eine Secante. Eine Gerade EF, welche mit der Kreislinie nur in einem Punkte A zusammentrifft, während alle andern Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen, heißt eine Berührungslinie oder Tangente.

Durch den Schnitt des Kreises mit der Geraden entstehen folgende Figuren: 1. der Kreisabschnitt oder das Kreissegment, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von einer Sehne AB und dem dazu gehörigen Bogen AB begrenzt wird; und 2. der Kreisausschnitt oder Kreissector, d. i. ein Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und dem dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, wie AOBA.

§. 90. Zu gleichen Sehnen gehören in demselben Kreise auch gleiche Bogen; und umgekehrt: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Sehnen.

Von der Richtigkeit dieser zwei Sätze kann man sich überzeugen, indem man die betreffenden Kreisabschnitte übereinander legt; man findet, daß unter jeder der zwei obigen Voraussetzungen die beiden Kreisabschnitte vollkommen übereinander fallen, folglich im ersten Falle auch die Bogen, im zweiten auch die Sehnen sich decken.

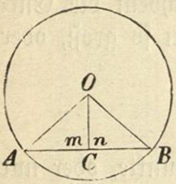


Fig. 68.

§. 91. Jede Sehne AB (Fig. 68) eines Kreises kann als die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes, dessen Scheitel im Mittelpunkte liegt und dessen Schenkel Halbmesser des Kreises sind, angesehen werden. Die in §. 59 von den gleichschenkligen Dreiecken angeführten Sätze 2, 3 und 4 lassen sich daher für den Kreis so ausdrücken:

1. Die Strecke, welche den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, steht auf der Sehne senkrecht.

2. Die Senkrechte, welche man in der Mitte der Sehne eines Kreises auf dieselbe errichtet, geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

3. Zieht man in einem Kreise vom Mittelpunkte eine Senkrechte auf eine Sehne, so wird diese dadurch halbiert.

§. 92. Errichtet man in dem Endpunkte eines Halbmessers auf denselben eine Senkrechte, so ist diese eine Tangente des Kreises.

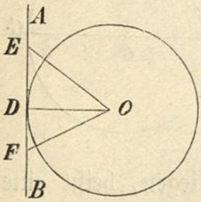


Fig. 69.

Es sei (Fig. 69) $AB \perp OD$. Jede schiefe Strecke wie OE, OF, . . . ist länger als die Senkrechte OD; also liegen die Punkte E, F . . . außerhalb der Kreislinie. Die Gerade AB hat daher mit der Kreislinie nur den Punkt D gemeinschaftlich, alle anderen Punkte liegen außerhalb des Kreises; AB ist also eine Tangente des Kreises.

3. Der Winkel und der Kreis.

§. 93. Ein Winkel, dessen Scheitel im Mittelpunkte eines Kreises liegt, dessen Schenkel daher Halbmesser des Kreises sind, heißt ein Centriwinkel.

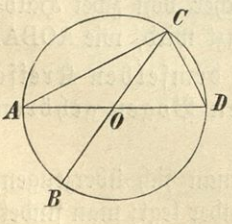


Fig. 70.

Ein Winkel, dessen Scheitel in der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen des Kreises sind, heißt ein Peripheriewinkel.

AOB (Fig. 70) ist ein Centriwinkel, der auf dem Bogen AB aufsteht; ACB ist ein Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB aufsteht.

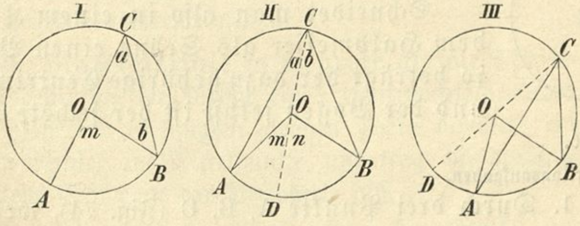
Gehen die Schenkel eines Peripheriewinkels durch die Endpunkte eines Durchmessers, wie bei dem Winkel ACD, so heißt derselbe ein Winkel im Halbkreise.

§. 94. Zu gleichen Centriwinkeln gehören in demselben Kreise auch gleiche Sehnen und Bogen; umgekehrt: zu gleichen Sehnen gehören auch gleiche Centriwinkel, und: zu gleichen Bogen gehören auch gleiche Centriwinkel.

Von der Richtigkeit dieser drei Sätze überzeugt man sich, wenn man entweder zwei gleiche Centriwinkel, oder zwei gleiche Sehnen, oder im dritten Satze zwei gleiche Bogen annimmt, und dann die betreffenden Kreisausschnitte über einander gelegt denkt; man findet, daß sich unter jeder dieser Voraussetzungen die beiden Kreisausschnitte vollkommen decken, daß also für jede Voraussetzung auch die angeführten Behauptungen richtig sind.

§. 95. Stehen ein Centri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen eines Kreises, so sind in Bezug auf die Lage der Schenkel des Peripheriewinkels drei Fälle möglich: entweder liegt der Mittelpunkt des Kreises in einem Schenkel des Winkels (Fig. 71, I), oder liegt derselbe zwischen den Schenkeln des Winkels (Fig. 71, II), oder liegt er außerhalb der Winkelfläche (Fig. 71, III).

Fig. 71.



a) In Figur 71, I ist m als ein Außenwinkel des Dreieckes BOC gleich der Summe der innern entgegengesetzten Winkel, also $m = a + b$; nun sind b und a als Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreieckes einander gleich, daher $m = a + a = 2a$.

b) Zieht man in Figur 71, II den Durchmesser CD, so ist nach a) der Winkel $m = 2a$, $n = 2b$, daher auch $m + n = 2(a + b)$, d. i. der Winkel $AOB = 2\,ACB$.

c) Wird in Figur 71, III der Durchmesser CD gezogen, so ist nach a) der Winkel BOD = 2BCD, ferner AOD = 2ACD; daher auch BOD — AOD = 2(BCD — ACD), d. i. Winkel AOB = 2ACB.

Es findet somit allgemein der Satz statt:

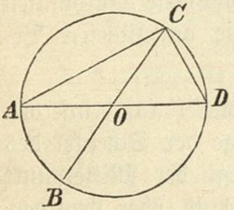
Wenn ein Centri- und ein Peripheriewinkel auf demselben Bogen aufstehen, so ist der Centriwinkel doppelt so groß als der Peripheriewinkel.

Daraus folgt:

Peripheriewinkel, welche in demselben Kreise auf gleichen Bogen aufstehen, sind einander gleich.

§. 96. ACD (Fig. 72) ist ein Winkel im Halbkreise. Zieht man den Durchmesser CB, so sind nach dem vorhergehenden Satze die Peripheriewinkel ACB und DCB einzeln die Hälfte der Centriwinkel AOB und DOB, daher muss auch die Summe der ersteren die Hälfte von der Summe der letzteren sein. Nun betragen AOB und DOB zusammen zwei Rechte, also muss die Summe ACB + DCB, d. i. der Winkel ACD im Halbkreise, gleich einem Rechten sein.

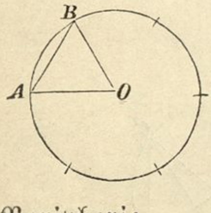
Fig. 72.



Der Winkel im Halbkreise ist also ein Rechter.

§. 97. Es sei (Fig. 73) O der Mittelpunkt eines Kreises und AB = AO. Das Dreieck ABO ist gleichseitig, daher jeder Winkel desselben gleich 60^0.

Fig. 73.

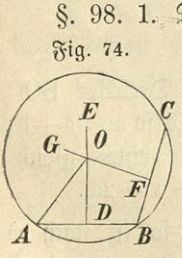


Schneidet man also in einem Kreise mit dem Halbmesser als Sehne einen Bogen ab, so beträgt der dazu gehörige Centriwinkel 60^0 und der Bogen selbst ist der sechste Theil der Peripherie.

Constructionsaufgaben.

§. 98. 1. Durch drei Punkte A, B, C (Fig. 74), welche nicht in einer geraden Linie liegen, einen Kreis zu beschreiben.

Fig. 74.



Man ziehe die Strecken AB und BC und errichte in den Mitten derselben die Senkrechten DE und FG; dann ist nach §. 91, 2 der Durchschnitt O dieser Senkrechten der Mittelpunkt und OA der Halbmesser des gesuchten Kreises.

2. Den Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens zu finden.

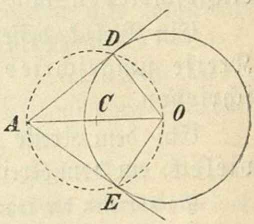
Man ziehe zwei Sehnen und errichte auf dieselben in ihren Halbierungspunkten Senkrechte; der Durchschnittspunkt der beiden Senkrechten ist der gesuchte Mittelpunkt.

§. 99. 1. **Durch einen Punkt in dem Umfange des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.**

Man ziehe zu dem gegebenen Punkte einen Halbmesser und errichte darauf eine Senkrechte; diese ist die verlangte Tangente (§ 92).

2. **Durch einen Punkt A (Fig. 75) außerhalb des Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.**

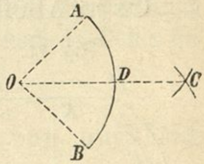
Fig. 75.



Man verbinde den gegebenen Punkt A mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises durch die Strecke AO, halbiere diese in C, und beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreis, welcher den gegebenen in den Punkten D und E durchschneidet. Zieht man nun AD und AE, so sind diese beiden Geraden Tangenten des Kreises (§. 96).

§. 100. **Einen Kreisbogen AB (Fig. 76) zu halbieren.**

Fig. 76.



Man beschreibe aus den Endpunkten A und B mit demselben Halbmesser Bogen, welche sich in C durchschneiden, und ziehe die Gerade CO; diese halbiert den gegebenen Kreisbogen in D.

§. 101. **Die Kreislinie in mehrere gleiche Theile zu theilen.**

Man bestimme die Größe eines Centriwinkels, indem man 360^0 durch die Zahl der verlangten gleichen Theile dividiert, construiere den gefundenen Winkel am Mittelpunkte, und trage die durch seine Schenkel abgeschnittene Sehne in der Peripherie auf.

Mechanisch wird die Construction der Winkel und daher die Kreistheilung mit Hilfe des **Transporteurs** ausgeführt.

Geometrisch lassen sich nur diejenigen Theilungen der Kreislinie ausführen, bei denen der entsprechende Centriwinkel geometrisch construiert werden kann. Hierher gehören zunächst folgende Aufgaben:

a) Die Kreislinie in 2 gleiche Theile zu theilen.

Man ziehe einen Durchmesser.

Durch Halbierung der Bogen erhält man dann 4, 8, 16, ... gleiche Theile.

b) Die Kreislinie in 6 gleiche Theile zu theilen. Man trage den Halbmesser als Sehne im Kreise auf (§. 97).

Nimmt man zwei solche Theile für einen einzigen, so ist die Kreislinie in 3 gleiche Theile getheilt.

Wie wird man die Peripherie in 12, 24 gleiche Theile theilen?

4. Das Vieleck und der Kreis.

§. 102. Ein Vieleck, dessen Eckpunkte in dem Umfange eines Kreises liegen, dessen Seiten also Sehnen des Kreises sind, heißt dem Kreise eingeschrieben und der Kreis heißt dem Vielecke umgeschrieben.

Ein Vieleck, dessen Seiten Tangenten des Kreises sind, heißt dem Kreise umgeschrieben und der Kreis heißt dem Vielecke eingeschrieben.

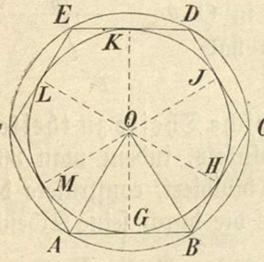
Ein dem Kreise eingeschriebenes Vieleck heißt auch ein Sehnenvieleck, ein dem Kreise umgeschriebenes Vieleck ein Tangentenvieleck.

Eigenschaften der regelmäßigen Sehnen- und Tangentenvielecke.

§. 103. Jedem regelmäßigen Vielecke läßt sich ein Kreis ein- und umschreiben.

Es sei ABCDEF (Fig. 77) ein regelmäßiges Vieleck. Halbiert man zwei Winkel, z. B. A und B, so besitzt der Durchschnittspunkt O der beiden Halbierungslinien die Eigenschaft, dass er von allen Seiten und eben so von allen Eckpunkten gleichweit absteht. Beschreibt man daher aus O mit der auf AB Senkrechten OG als Halbmesser einen Kreis, so muss der Umfang desselben durch die Punkte G, H, I, K, L, M gehen, und da die Seiten des Vieleckes Tangenten zu diesem Kreise sind, so ist dieser dem Vielecke eingeschrieben. Beschreibt man ebenso aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO einen Kreis, so muss derselbe durch alle Eckpunkte A, B, C, D, E, F gehen, und ist somit dem Vielecke umgeschrieben.

Fig. 77.



§. 104. 1. Theilt man den Umfang eines Kreises in mehrere gleiche Theile und zieht durch je zwei aufeinander folgende Theilungspunkte eine Sehne, so ist das von diesen Sehnen gebildete Vieleck regelmäßig.

Ist (Fig. 77) die aus O mit dem Halbmesser OA beschriebene Kreislinie in mehrere gleiche Theile getheilt, und zieht man die Sehnen

AB, BC, CD, DE, EF, FA, so sind in dem Vielecke ABCDEF die Seiten als Sehnen des Kreises, welche zu gleichen Bogen gehören, und die Vieleckswinkel als Peripheriewinkel, welche auf gleichen Bogen aufstehen, einander gleich. Das Vieleck ist daher gleichseitig und gleichwinklig, also regelmäßig.

2. Theilt man einen Kreis in mehrere gleiche Theile und zieht durch jeden Theilungspunkt eine Tangente, so wird von diesen Tangenten ein regelmäßiges Vieleck eingeschlossen.

Da (Fig. 77) die Centriwinkel des Kreises nach der Annahme gleich sind, so ist leicht einzusehen, dass die Vierecke GOMA, GOHB, HOJC, ... über einander gelegt sich vollkommen decken, also congruent sind. Aus dieser Congruenz aber folgt erstlich, dass der Winkel A = B = C ... ist, ferner dass sowohl GB = HC = JD = ... als auch AG = BH = CJ = ... ist, somit auch die Summen dieser gleichen Strecken, nämlich die Vieleckseiten AB, BC, CD .... gleich sind.

§. 105. Werden einem Kreise verschiedene regelmäßige Vielecke ein- und umgeschrieben, so ist jedes eingeschriebene Vieleck kleiner und jedes umgeschriebene Vieleck größer als der Kreis; der Unterschied zwischen dem Kreise und dem Vielecke wird jedoch um so kleiner, je mehr Seiten das Vieleck hat, und kann durch fortgesetzte Verdopplung der Seitenanzahl kleiner gemacht werden, als jede noch so kleine gegebene Größe.

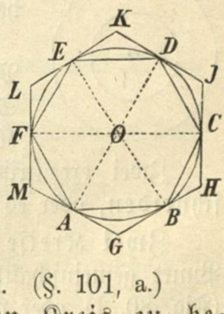
In diesem Sinne sagt man:

Der Kreis ist ein regelmäßiges Vieleck von unendlich vielen Seiten.

Constructionsaufgaben.

§. 106. 1. Einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck a) einzuschreiben, b) umzuschreiben. (Fig. 78).

Fig. 78.



Man theile die Kreislinie in so viele gleiche Theile, als das Vieleck Seiten haben soll, und ziehe durch die Theilungspunkte a) Sehnen, b) Tangenten des Kreises.

2. Einem gegebenen Kreise a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Sechseck ein- und umzuschreiben. (§. 101, b.)

3. Einem gegebenen Kreise a) ein Quadrat, b) ein regelmäßiges Achteck ein- und umzuschreiben. (§. 101, a.)

4. Um ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben (§. 103.)

5. In ein regelmäßiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben. (§. 103).

6. Construiere a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein Quadrat, c) ein regelmäßiges Sechseck und beschreibe um jede dieser Figuren und in jede derselben einen Kreis.

7. Ein regelmäßiges Vieleck zu zeichnen, wenn jede Seite eine bestimmte Länge haben soll.

Hier kommt es nur darauf an, die Größe des Kreises zu finden, welchem das verlangte Vieleck eingeschrieben erscheint. Zu diesem Ende wird das Dreieck ABO (Fig. 78) construiert, indem man für AB die gegebene Seite und für BAO und ABO die halben Vieleckswinkel annimmt. Man berechne daher zuerst die Größe eines Vieleckswinkels, ziehe eine Strecke, welche der gegebenen Seite gleich ist, trage in jedem Endpunkte den halben Vieleckswinkel auf, aus dem Durchschnittspunkte der beiden neuen Schenkel beschreibe man durch die Endpunkte der gegebenen Strecke einen Kreis und trage in diesem die gegebene Seite als Sehne auf.

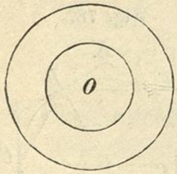
8. Zeichne eine Strecke von 3 *cm* Länge und beschreibe über derselben a) ein gleichseitiges Dreieck, b) ein regelmäßiges Sechseck, c) ein regelmäßiges Zwölfeck.

9. Construiere über der Seite 1·8 *cm* mit Hilfe des Transporteurs ein regelmäßiges a) Fünfeck, b) Achteck, c) Zehneck.

5. Lage der Kreise gegen einander.

§. 107. Zwei Kreise, welche einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen concentrische Kreise, wie Fig. 79.

Fig. 79.



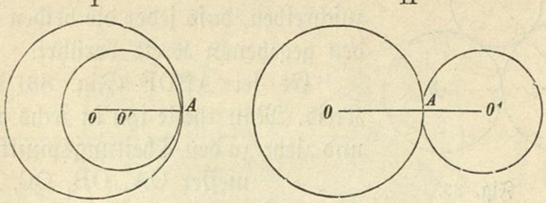
Die zwischen ihren Peripherien liegende Fläche heißt ein Kreisring.

Zwei Kreise, welche keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben, heißen excentrische Kreise. Die Strecke, welche die Mittelpunkte zweier excentrischer Kreise verbindet, heißt die Centrale der beiden Kreise.

Zwei excentrische Kreise können sich entweder berühren oder schneiden, oder es ist keines von beiden der Fall.

Zwei Kreise berühren sich, wenn ihre Umfänge nur einen Punkt gemeinschaftlich haben. Die Berührung geschieht von innen (Fig. 80, I), oder von außen (Fig. 80, II), je nachdem der eine Kreis innerhalb oder außerhalb des andern liegt. Bei der inneren Berührung zweier Kreise ist die Centrale OO′ gleich der Differenz der Halbmesser AO—AO′; bei der äußeren Berührung ist die Centrale OO′ gleich der

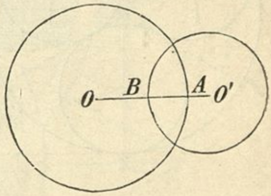
Fig. 80.



Summe der Halbmesser AO + AO′. In beiden Fällen liegt der Berührungspunkt auf der Centrale.

Zwei Kreise schneiden sich, wenn ihre Peripherien (Fig. 81) zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Das gemeinschaftliche Stück der beiden Kreisflächen heißt eine Linse, jedes der nicht gemeinschaftlichen Stücke ein Mond.

Fig. 81.



Beim Durchschnitte zweier Kreise ist die Centrale OO′ größer als die Differenz der Halbmesser AO — BO′, aber kleiner als die Summe derselben AO + BO′.

Zwei excentrische Kreise, welche sich weder berühren noch schneiden, können entweder ganz in einander oder ganz außer einander liegen. Die Centrale ist im ersten Falle kleiner als die Differenz, im zweiten Falle größer als die Summe der Halbmesser.

Welche Fälle sind in Beziehung auf die gegenseitige Lage bei drei Kreisen möglich? Wie viele Punkte haben drei sich schneidende Kreise mit einander gemeinschaftlich?

Constructionsaufgaben.

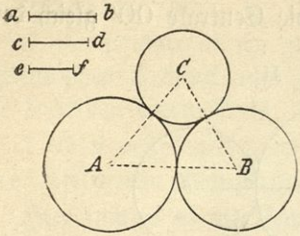
§. 108. 1. Construiere mit den Halbmessern 24 *mm* und 15 *mm* zwei Kreise, die sich a) von innen, b) von außen berühren.

2. Beschreibe in einen gegebenen Kreis zwei gleiche Kreise so, dass sie denselben von innen und sich selbst von außen berühren.

3. Mit den Halbmessern ab, cd, ef (Fig. 82) drei Kreise zu beschreiben, welche sich gegenseitig von außen berühren.

Man construiere mit den Seiten AB = ab + cd, AC = ab + ef und BC = cd + ef ein Dreieck ABC, beschreibe aus A mit dem Halbmesser ab, aus B mit cd, und aus C mit ef Kreise, so werden diese die verlangte Eigenschaft haben.

Fig. 82.

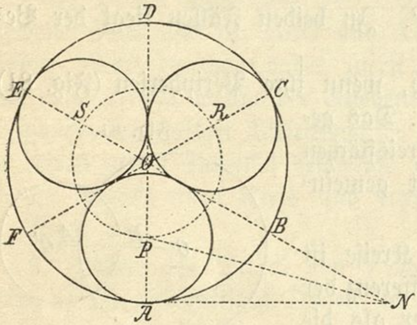


Wie wird die Auflösung geschehen, wenn alle drei Kreise gleiche Halbmesser haben?

4. In einen Kreis drei Kreise so einzuschreiben, daſs jeder die beiden anderen und den gegebenen Kreis berührt.

Es sei ABDF (Fig. 83) der gegebene Kreis. Man theile ihn in sechs gleiche Theile und ziehe zu den Theilungspunkten die Halbmesser OA, OB, OC, ... In A errichte man auf OA die Senkrechte AN, welche den verlängerten Halbmesser OB in N trifft, und halbiere den Winkel ANO durch die Gerade NP; dann ist P der Mittelpunkt und PA der Halbmesser des einen der drei verlangten Kreise. Macht man nun OR = OS = OP, so sind R und S die Mittelpunkte der beiden anderen Kreise.

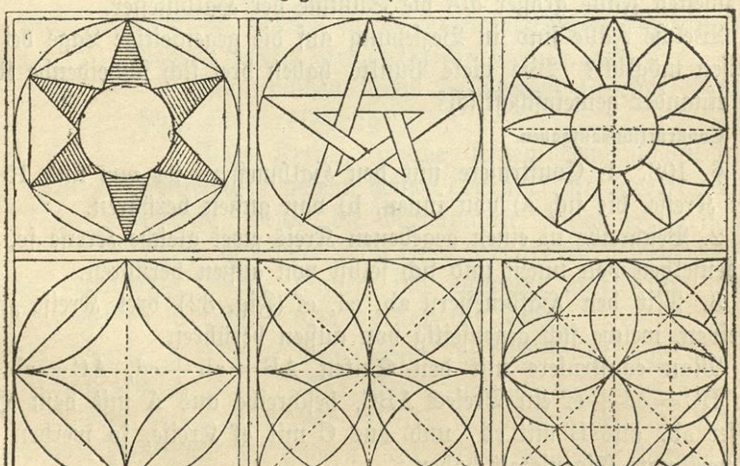
Fig. 83.



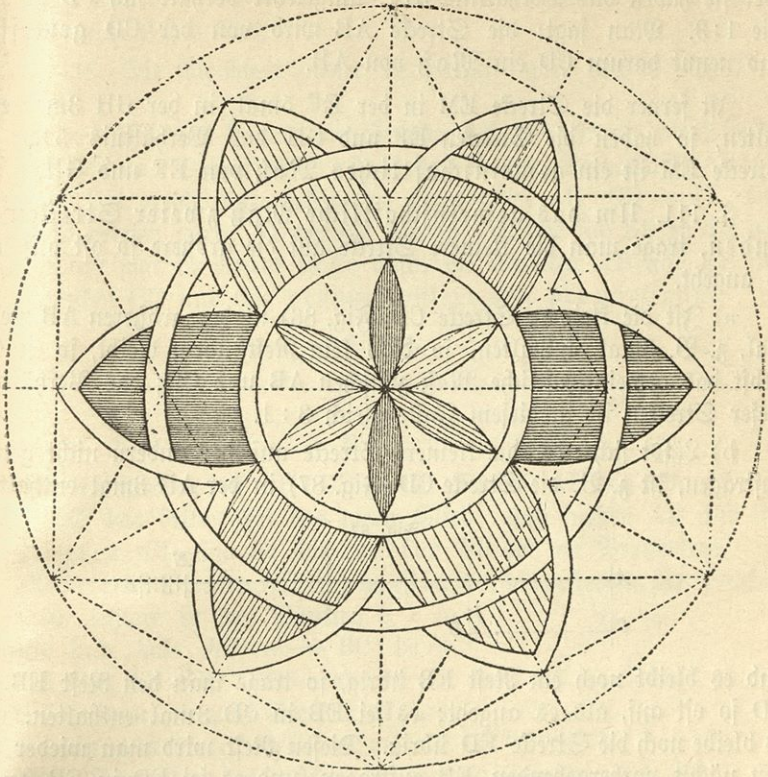
7. Zeichenübungen.

§. 109. Anwendungen des Kreises für das geometrische Ornament (Fig. 84 und 85) Sternfiguren, Verbindungen von Kreisbogen.

Figuren-Tafel 84.



Figur 85.

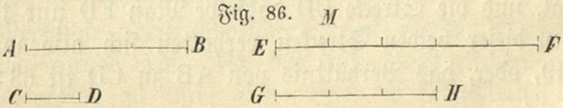


IV. Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.

1. Verhältnisse und Proportionen der Strecken.

§. 110. Vergleicht man (Fig. 86) die zwei Strecken AB und CD mit einander, so sieht man, daſs CD in AB 3mal enthalten ist.

Fig. 86.



Diese Vergleichung gibt das Verhältnis von AB zu CD, welches man so anschreibt AB:CD; AB heiſst das Vorderglied, CD das Hinterglied. Da CD in AB 3mal, in CD aber 1mal enthalten ist, so verhalten sich die Strecken AB und CD wie die Zahlen 3 und 1, oder sie haben das Verhältnis 3 : 1, umgekehrt verhält sich CD zu AB wie 1 : 3. Man sagt: die Strecke AB wird von der CD gemessen und nennt darum CD ein Maß von AB.

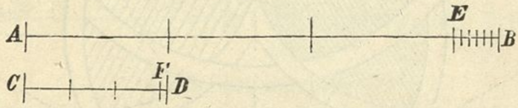
Ist ferner die Strecke EM in der EF 5mal, in der GH 3mal enthalten, so haben die Strecken EF und GH das Verhältnis 5 : 3: die Strecke EM ist ein gemeinschaftliches Maß von EF und GH.

§. 111. Um das gemeinschaftliche Maß zweier Strecken zu finden, trage man die kleinere Strecke auf die größere so oft auf, als es angeht.

a) Ist die kleinere Strecke CD (Fig. 86) in der größeren AB mehrmal, z. B. 3mal, enthalten, so daſs kein Rest übrig bleibt, so ist CD selbst das gemeinschaftliche Maß zwischen AB und CD; das Verhältnis dieser Strecken ist in diesem Falle gleich 3 : 1.

b) Läſst sich aber die kleinere Strecke auf der andern nicht genau auftragen, ist z. B. die Strecke CD (Fig. 87) in der AB 3mal enthalten,

Fig. 87.



und es bleibt noch ein Rest EB übrig, so trage man den Rest EB auf CD so oft auf, als es angeht; es sei EB in CD 3mal enthalten, und es bleibe noch die Strecke FD übrig. Diesen Rest wird man wieder auf den nächst vorhergehenden EB auftragen, und es sei FD in EB genau 6mal enthalten. FD ist dann das gemeinschaftliche Maß von AB und CD, denn man hat

$$EB = 6\,FD,$$
$$CD = 3\,EB + FD = 19\,FD,$$
$$AB = 3\,CD + EB = 63\,FD.$$

Aus dieser Darstellung ersieht man, daſs die Strecke AB das Maß FD 63mal, und die Strecke CD dasselbe Maß FD nur 19mal enthält; die Längen dieser beiden Strecken verhalten sich also wie die Zahlen 63 und 19, oder, das Verhältnis von AB zu CD ist 63 : 19.

Aufgaben.

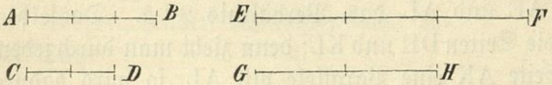
1. Bestimme das Verhältnis a) zwischen der Länge und der Höhe der Schultafel, b) zwischen der Breite und der Höhe des Fensters.

2. Zeichne mehrere Strecken und bestimme das Verhältnis zwischen je zweien zuerst nach dem Augenmaße und dann mittelst des Messens durch ein gemeinschaftliches Maß.

§. 112. Die Gleichheit zweier Verhältnisse wird eine **Proportion** genannt.

Haben (Fig. 88) sowohl die Strecken AB und CD als die Strecken EF und GH das Verhältnis 3 : 2, so sind die zwei Verhältnisse AB : CD und EF : GH gleich, und geben die Proportion AB : CD = EF : GH, welche so gelesen wird: AB verhält sich zu CD, wie sich EF zu GH verhält. Man sagt in diesem Falle auch: die Strecken AB und EF sind den Strecken CD und GH **proportioniert** oder **proportional**.

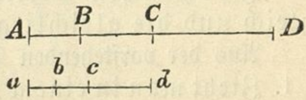
Fig. 88.



In der Proportion AB : CD = EF : GH ist AB das erste, CD das zweite, EF das dritte, GH das vierte Glied; auch heißen AB und GH die **äußeren**, CD und EF die **inneren** Glieder der Proportion.

Wenn zwei Strecken AD und ad (Fig. 89), die erstere in den Punkten B, C, die letztere in den Punkten b, c so getheilt sind, dass AB : ab = BC : bc = CD : cd oder AB : BC : CD = ab : bc : cd ist, so sagt man, die zwei Strecken AD und ad sind **einander proportional** getheilt.

Fig. 89.



Eine Proportion, in welcher die inneren Glieder gleich sind, z. B. KL : MN = MN : PQ, heißt eine **stetige Proportion**. MN heißt die **mittlere geometrische Proportionale** zwischen KL und PQ.

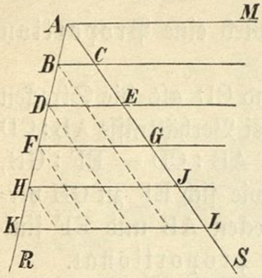
2. Ähnlichkeit der Dreiecke.

Ähnlichkeitssätze.

§. 113. Zwei Dreiecke, welche dieselbe Gestalt haben und sich nur durch die Größe unterscheiden, heißen **ähnlich** ($\sim$).

Um die Merkmale zweier ähnlicher Dreiecke anschaulich darzustellen, lasse man eine Gerade AM (Fig. 90) auf einem Schenkel AR des Winkels RAS parallel zu ihrer ersten Lage so fortschreiten, dass sie auf jenem Schenkel gleiche Stücke AB, BD, DF, FH, HK abschneidet; dann werden auch die Abschnitte des zweiten Schenkels AC, CE, EG, GJ, JL unter einander gleich, und es entstehen die Dreiecke ABC, ADE, AFG, AHJ AKL, welche zwar verschiedene Größe haben, in der Gestalt jedoch übereinstimmen, somit ähnlich sind.

Fig. 90.



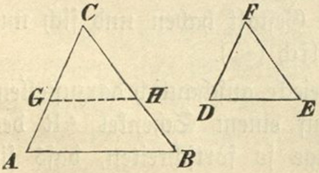
Vergleicht man nun irgend zweier Dreiecke, z. B. ADE und AKL, so findet man, dass sie erstlich paarweise gleiche Winkel haben; denn der Winkel am Scheitel A ist beiden Dreiecken gemeinschaftlich, die anderen zwei Winkel aber sind als Gegenwinkel paarweise gleich. Vergleicht man ferner die Seiten der beiden Dreiecke, so sieht man, dass AD 2 solche Theile enthält, als deren auf AK 5 kommen; die Seiten AD und AK haben also das Verhältnis 2 : 5. Ebenso enthält AE 2 solche Theile, von denen AL 5 enthält; es haben also auch die Seiten AE und AL das Verhältnis 2 : 5. Dasselbe Verhältnis haben auch die Seiten DE und KL; denn zieht man durch jeden Theilungspunkt der Seite AK eine Parallele mit AL, so wird dadurch DE in 2, und KL in 5 Theile getheilt, welche alle untereinander gleich sind, so dass sich auch die Seiten DE und KL so verhalten wie 2 : 5. Es ist also AD : AK = AE : AL = DE : KL, d. i. in den Dreiecken sind je zwei Seiten, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegen, einander proportional. Daraus folgt:

In ähnlichen Dreiecken sind alle drei Winkel paarweise gleich und die gleichliegenden Seiten proportional.

Aus der vorstehenden Darstellung folgt auch:

1. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so werden durch dieselbe die beiden anderen Seiten proportional geschnitten.
2. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so ist das gegebene Dreieck dem durch die Parallele abgeschnittenen Dreiecke ähnlich.

Fig. 91.



§. 114. Es sei in den Dreiecken ABC und DEF (Fig. 91) der Winkel A = D, B = E, und C = F. Man schneide von der AC ein Stück CG ab, welches der DF gleich ist, und ziehe GH ∥ AB, dann ist das Dreieck ABC ∼ GHC. Das letztere Dreieck GHC ist nun mit DEF congruent, denn die Seite CG = DF, der Winkel G = D, weil beide dem Winkel A gleich sind, und der Winkel C = F. Wenn aber das Dreieck ABC mit

GHC ähnlich, und GHC mit DEF congruent ist, so muss auch ABC ∼ DEF sein.

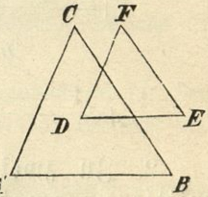
Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in denselben alle drei Winkel wechselseitig gleich sind.

Da in zwei Dreiecken, welche zwei Winkel wechselseitig gleich haben, auch die dritten Winkel gleich sein müssen, so folgt, dass man schon aus der Gleichheit zweier Winkel in zwei Dreiecken auf die Ähnlichkeit derselben schließen kann.

Aufgabe. Über einer Strecke DE (Fig. 91) ein Dreieck zu construieren, welches mit einem gegebenen Dreiecke ABC ähnlich ist.

Man trage in D den Winkel EDF = BAC und in E den Winkel DEF = ABC auf; ihre Schenkel schneiden sich im Punkte F, und es ist △ DEF ∼ ABC.

Fig. 92.

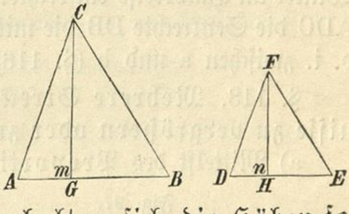


Auf dem vorhergehenden Ähnlichkeitssatze beruht auch der Satz:

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen zu den Seiten des andern parallel sind. (Fig. 92.)

§. 115. Es sei (Fig. 93) das Dreieck ABC ∼ DEF; AB und DE seien die Grundlinien, CG und FH die Höhen.

Fig. 93.

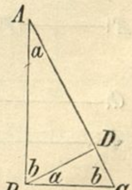


Weil nach der Voraussetzung der Winkel A = D und m = n ist, so ist △ ACG ∼ △ DFH, und daher CG : FH = AC : DF. Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und DEF ist aber auch AB : DE = AC : DF; daher ist auch CG : FH = AB : DE, d. h.

In zwei ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen so wie die Grundlinien.

§. 116. Es sei ABC (Fig. 94) ein rechtwinkliges Dreieck.

Fig. 94.



Fällt man von B eine Senkrechte BD auf die Hypotenuse, so haben, wie man aus der Figur sieht, die dadurch entstehenden kleineren Dreiecke DAB und DBC mit dem gegebenen Dreiecke BAC und unter einander gleiche Winkel; es ist daher

△ DAB ∼ DBC, also AD : BD = BD : CD.

Zieht man also in einem rechtwinkligen Dreiecke von dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte, so ist diese Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Constructionsaufgaben.

§. 117. 1. Zu drei gegebenen Strecken a, b, c (Fig. 95) die vierte Proportionale zu finden.

Construiere einen beliebigen Winkel A, schneide auf dessen Schenkeln AB = a, AC = b, AD = c ab und ziehe CE || BD. Dann ist $\triangle$ ABD $\sim$ ACE, daher AB : AC = AD : AE, oder a : b = c : AE.

Fig. 95.

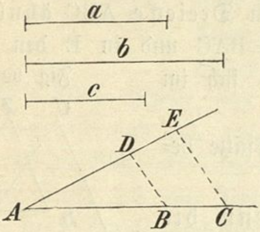
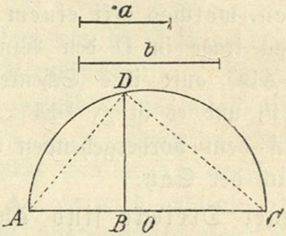


Fig. 96.



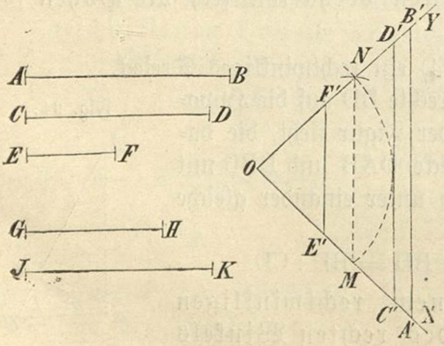
2. Zu zwei gegebenen Strecken a und b (Fig. 96) die mittlere geometrische Proportionale zu construieren.

Trage auf einer Geraden AB = a und BC = b auf, beschreibe über AC einen Halbkreis und ziehe BD $\perp$ AC. Dann ist ADC als Winkel im Halbkreise ein rechter und daher in dem rechtwinkligen Dreiecke ADC die Senkrechte DB die mittlere Proportionale zwischen AB und BC, d. i. zwischen a und b (§. 116).

§. 118. Mehrere Strecken nach einem gegebenen Verhältnisse zu vergrößern oder zu verkleinern.

a) Mittelst des Proportionalwinkels.

Fig. 97.



Es seien z. B. die Strecken AB, CD, EF (Fig. 97) in dem Verhältnisse GH : IK zu vergrößern. Man ziehe eine Gerade OX von unbestimmter Länge, und beschreibe von O aus mit dem Halbmesser GH einen Bogen, welcher die OX in M schneidet; aus M beschreibt man mit IK als Halbmesser einen Bogen, welcher den früheren in N durchschneidet; zieht man nun durch

O und N die Gerade OY von unbestimmter Länge, so ist XOY der Proportionalwinkel für die verlangte Vergrößerung. Trägt man auf beide Schenkel AB auf, indem man OA' = OB' = AB macht, so ist A'B' die für AB gesuchte vergrößerte Strecke. Macht man eben so OC' = OD' = CD, OE' = OF' = EF, so sind C'D' und E'F' die zu den Linien CD, EF gehörigen vergrößerten Strecken.

Wäre das Verhältnis nicht in Linien, sondern in Zahlen angegeben, so würde man auf einer Geraden so viele gleiche Theile auftragen, als die größere Verhältniszahl anzeigt; von diesen würde man mit dem Zirkel zuerst so viele abfassen, als die erste Verhältniszahl anzeigt, und mit diesem Halbmesser aus O einen Bogen MN beschreiben; dann würde man mit dem Zirkel so viele Theile abnehmen, als die zweite Verhältniszahl anzeigt, und damit aus M den früheren Bogen durchschneiden; durch die Schenkel OM und ON ist nun der Proportionalwinkel bestimmt.

Der Proportionalwinkel ist für jede Verkleinerung anwendbar, für Vergrößerungen aber nur dann, wenn die Strecken nicht über das zweifache vergrößert werden sollen.

Eine besonders wichtige Anwendung findet der Proportionalwinkel bei der Construction ähnlicher Figuren (§§. 122 und 126).

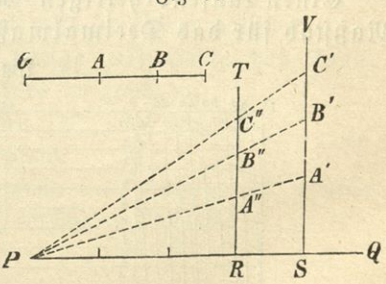
Aufgaben.

1. Zeichne vier Strecken und verkleinere sie in dem Verhältnisse 5 : 2.
2. Zeichne drei Strecken und vergrößere dieselben in dem Verhältnisse 2 : 3.

b) Man kann auch folgendes Verfahren anwenden:

Um die gegebenen Strecken OA, OB, OC (Fig. 98) z. B. in dem Verhältnisse 4 : 3 zu verkleinern, ziehe man eine Gerade PQ, trage von P aus 3, und ebenso von P aus 4 gleiche Theile auf; in den Endpunkten R und S errichte man die Senkrechten RT und SV, trage auf die entferntere Senkrechte SV die gegebenen Strecken von S bis A', B', C', auf, und ziehe durch den Punkt P und die Punkte A', B', C', gerade Linien, welche die nähere Senkrechte in den Punkten A'' ,B'', C'' treffen;

Fig. 98.



die Geraden RA'', RB'', RC'' sind dann die gesuchten verhältnismäßig verkleinerten Strecken.

Wären die gegebenen Strecken in dem Verhältnisse 3 : 4 zu vergrößern, so würde man sie auf die nähere Senkrechte RT auftragen; auf der Senkrechten SV erhielte man dann die vergrößerten Strecken.

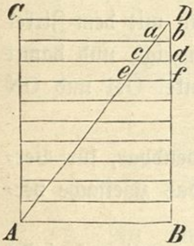
Aufgaben.

Zeichne drei Strecken und verkleinere sie in dem Verhältnisse a) 2 : 1, b) 3 : 2.

Zeichne drei Strecken und vergrößere sie in dem Verhältnisse a) 1 : 2, b) 3 : 5.

§. 119. Eine gegebene Strecke in mehrere, z. B. in 10 gleiche Theile zu theilen.

Fig. 99.



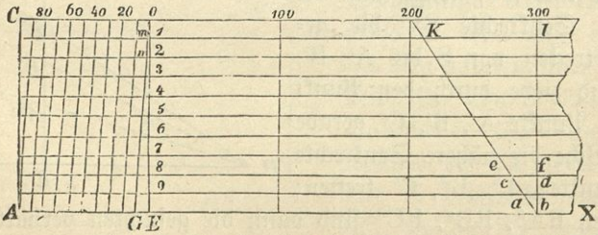
Man errichte auf AB (Fig. 99) in den Endpunkten die Senkrechten AC und BD, trage auf jede 10 gleich große Theile bis C und D auf und ziehe durch je zwei zusammengehörige Theilungspunkte eine Gerade. Zieht man nun die Transversale AD, so ist ab der 10te Theil von AB, cd ist $\frac{2}{10}$, ef $\frac{3}{10}$ u. s. w. von der Strecke AB.

§. 120. Will man eine in der Natur gemessene Strecke auf dem Papiere darstellen, so geschieht dies gewöhnlich nicht in der wahren Größe, sondern in einem kleineren verjüngten Maße. Es wird nämlich angenommen, dass eine bestimmte Länge z. B. ein Centimeter auf dem Papiere, eine bestimmte Länge, z. B. ein Meter oder 20 Meter, in der Wirklichkeit vorstellen soll. Ein Maßstab, auf welchem die in der Wirklichkeit üblichen Längenmaße verkleinert aufgetragen sind, heißt ein verjüngter Maßstab.

Die Construction verjüngter Transversal-Maßstäbe beruht auf dem in §.119 angegebenen Verfahren, eine Strecke in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Einen tausendtheiligen Maßstab d. i. einen Transversal-Maßstab für das Decimalmaß zu construieren.

Fig. 100.



Man trage auf eine Gerade AEX (Fig. 100) 10 gleiche Theile auf, deren jeder 100 Einheiten vorstellen soll, so dass auf die ganze Linie

1000 Einheiten kommen. In den Endpunkten errichte man zwei Senkrechte, trage darauf wieder 10 beliebig große, jedoch gleiche Theile auf, und ziehe durch die letzten Theilungspunkte eine Strecke, welche der zuerst gezogenen Geraden parallel und gleich sein muss, und welche ebenfalls in 10 gleiche Theile getheilt wird. Sodann ziehe man durch die gegenüberstehenden Theilungspunkte gerade Linien, welche alle entweder auf AX senkrecht stehen oder mit AX parallel sind. Um nun einen Theil AE wieder in 10 Theile zu theilen, braucht man nur in irgend einer Abtheilung eine Diagonale b 200 zu ziehen. Es ist dann ab der 10te Theil von der Strecke zwischen 200 und 300, folglich auch von AE; ebenso enthält cd 2 solche Theile, ef 3 Theile u. s. w. Diese Theile trägt man nun sowohl auf AE als CO auf, zieht dann durch O und G, sowie durch je zwei folgende Theilungspunkte Transversalen und schreibt an die Theilungspunkte die entsprechenden Zahlen hin.

Die ganze Strecke AEX enthält 1000 Theile; AE ist der 10te Theil davon und enthält somit 100 Theile; EG ist der 10te Theil von AE, enthält demnach 10 solche Theile; m1 endlich ist der 10te Theil von EG, enthält also einen solchen Theil, wie deren auf die ganze Linie 1000 kommen, m1 ist also der 1000ste Theil derselben; n2 enthält zwei solche Theile u. s. w.

Stellt z. B. AE ein Decimeter vor, so ist GE ein Centimeter, m1 ein Millimeter des verjüngten Decimalmaßes.

Aufgaben.

1. Eine auf dem Papiere dargestellte Strecke mit Hilfe des Transversalmaßstabes zu messen.
2. Zeichne mehrere parallele Strecken und miss sie mit dem obigen Maßstabe.
3. Zeichne ein Dreieck, ein Viereck, und miss die Seiten desselben.
4. Eine Strecke von bestimmter Länge mit Hilfe des Transversalmaßstabes auf dem Papiere zu zeichnen.
5. Construiere ein Dreieck, dessen Seiten 137, 160, 185 sind.
6. Zeichne mit der Seite 209 ein Quadrat.
7. Bestimme die wirkliche Breite und Höhe eines Fensters und construiere dann das Fenster nach dem obigen verjüngten Maßstabe.

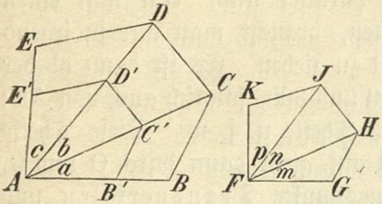
3. Ähnlichkeit der Vielecke.

§. 121. Zwei Vielecke sind ähnlich, wenn ihre Winkel paarweise gleich und die gleichliegenden Seiten proportional sind.

Zwei Vielecke, welche aus gleich vielen der Ordnung nach einander ähnlichen Dreiecken zusammengesetzt sind, sind selbst einander ähnlich.

Es sei (Fig. 101) das Dreieck ABC ∼ FGH, ACD ∼ FHJ, ADE ∼ FJK. Nach dieser Voraussetzung sind je zwei gleichliegende Dreieckswinkel gleich und je zwei gleichliegende Dreiecksseiten proportional. Dann sind auch je zwei gleichliegende Vieleckswinkel einander gleich. Weil die Winkel a, b, c einzeln den Winkeln m, n, p gleich sind, so müssen auch ihre Summen gleich sein, nämlich A = F. Die Winkel B und G sind nach der Annahme gleich. Ferner ist der Winkel C = H, weil beide aus gleich großen Winkeln zusammengesetzt sind; und aus demselben Grunde D = J. Endlich ist nach der Annahme auch E = K. Nun ist noch zu zeigen, dass die gleichliegenden Seiten der beiden Vielecke proportional sind. Nach der Voraussetzung ist AB : FG = BC : GH. Ferner sind die Verhältnisse BC : GH und CD : HJ gleich, weil sie beide einem dritten Verhältnisse AC : FH gleich sind. Wegen CD : HJ = AD : FJ, und DE : JK = AD : FJ folgt ebenso CD : HJ = DE : JK. Endlich ist nach der Annahme DE : JK = EA : KF. Es ist also AB : FG = BC : GH = CD : HJ = DE : JK = EA : KF. Die beiden Vielecke ABCDE und FGHJK haben also in der Ordnung gleiche Winkel und proportionale Seiten; sie sind demnach ähnlich.

Fig. 101.



Constructionsaufgaben.

§. 122. 1. Zu einem Vielecke ABCDE (Fig. 101) ein ähnliches Vieleck so zu construieren, dass die Seiten der zwei Vielecke ein gegebenes Verhältnis, z. B. 5 : 3, haben.

Man theile das gegebene Vieleck von einem Eckpunkte A aus durch Diagonalen in Dreiecke, verkleinere sowohl die Seiten als die Diagonalen — entweder mittelst des Proportionalwinkels oder nach dem in §. 118, b) angeführten Verfahren — in dem Verhältnisse 5 : 3 und construiere mit den so verkleinerten Seiten und Diagonalen mittelst der Durchschnitte von Kreisbogen nach der Ordnung die Dreiecke FGH, FHJ und FJK; FGHJK ist das verlangte Vieleck.

Die Eintheilung in Dreiecke könnte auch aus einem Punkte im Innern des gegebenen Vieleckes geschehen.

2. Zeichne ein beliebiges Sechseck und dann ein zweites ihm ähnliches, so dass sich die Seiten des ersten Sechseckes zu jenem des zweiten wie 10 : 3 verhalten.

3. Zeichne zwei ähnliche Achtecke, deren gleichliegende Seiten sich wie 4 : 5 verhalten.

4. Über einer Strecke FG (Fig. 101) ein Vieleck zu construieren, welches einem Vielecke ABCDE ähnlich ist.

Man ziehe die Diagonalen AC, AD, mache AB' = FG, und ziehe B'C' ∥ BC, C'D' ∥ CD, D'E' ∥ DE; dann ist das Vieleck AB'C'D'E' ∾ ABCDE. Construiert man nun über FG ein Vieleck FGHJK, welches mit AB'C'D'E' congruent ist, so ist dasselbe das verlangte Vieleck.

4. Zeichenübungen.

§. 123. Verbindungen ähnlicher Figuren; der Drei- und der Vierbogen. (Figuren-Tafel 102 auf Seite 70.)

V. Copieren der Figuren.

§. 124. Eine Figur copieren heißt, eine Figur verzeichnen, welche mit einer andern vorgelegten Figur congruent oder ähnlich ist. Die vorgelegte Figur, nach deren Muster man zeichnet, heißt das Original, die Nachahmung davon Copie. Die Copie hat mit dem Original entweder gleiche Größe oder sie erscheint nach einem bestimmten Verhältnisse vergrößert oder verkleinert.

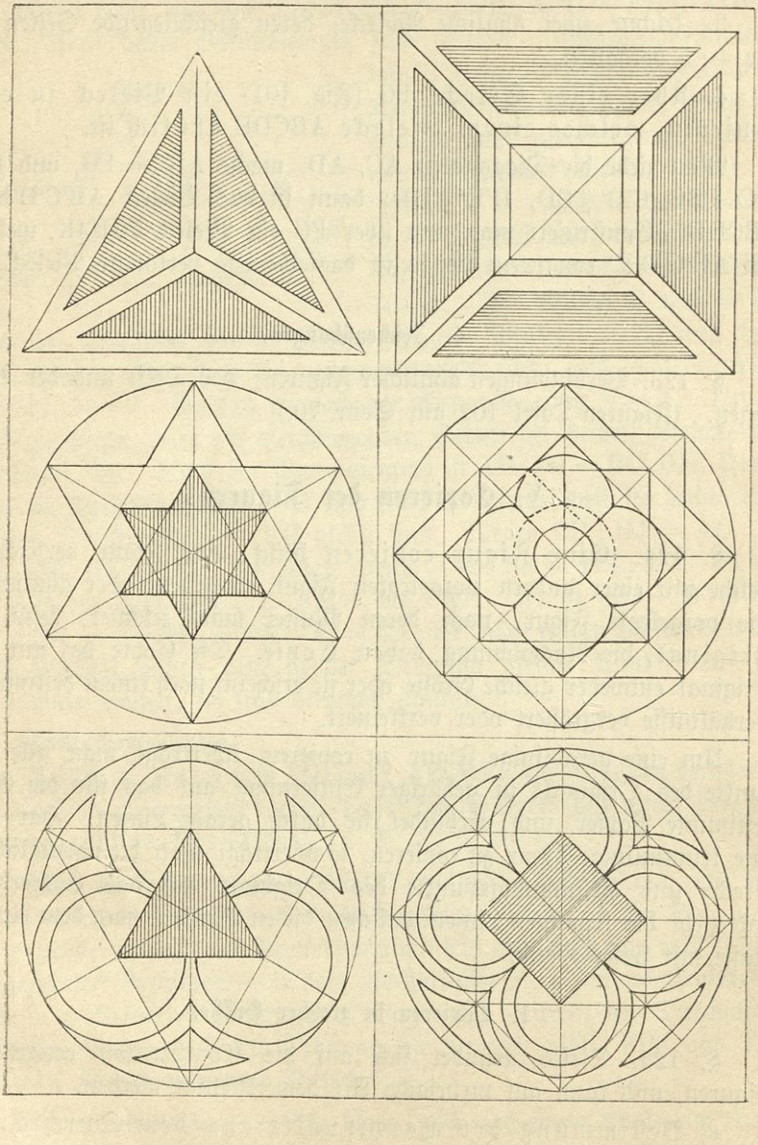
Um eine geradlinige Figur zu copieren, überträgt man alle Eckpunkte des Originals in gehöriger Entfernung auf das für die Copie bestimmte Papier, und verbindet sie durch gerade Linien. Hat man eine krummlinige Figur zu copieren, so überträgt man die vorzüglichsten Brech- und Krümmungspunkte des Originals auf das Copierblatt, und zieht die krummen Linien zwischen diesen Punkten nach dem Augenmaße mit freier Hand.

1. Copieren in gleicher Größe.

§. 125. Dieses gründet sich auf die Construction congruenter Figuren, und kann auf mehrfache Art bewerkstelligt werden.

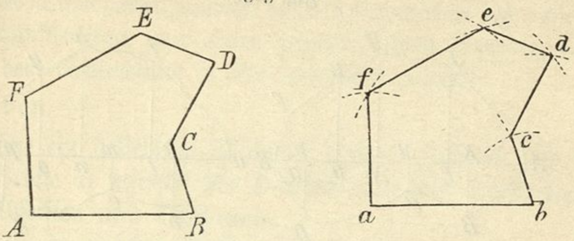
a) Bestimmung der Hauptpunkte aus dem Durchschnitte von Kreisbogen.

Figuren=Tafel 102.



Man überträgt auf das Copierblatt zwei Punkte A und B (Fig. 103) des Originals in einer solchen Lage, dass darauf die ganze Figur eine schickliche Stellung erhalten kann. Um aus den dadurch erhaltenen

Fig. 103.

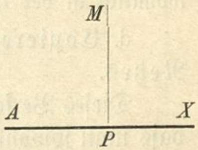


zwei Punkten a und b einen dritten Punkt c zu bestimmen, nehme man vom Original den Abstand CA und beschreibe damit aus dem Punkte a in der Copie einen Bogen nach der Gegend, wo der Punkt c beiläufig hinfallen soll; dann nehme man vom Original die Entfernung CB, und durchschneide mit diesem Halbmesser aus b den früher gezogenen Bogen; der Durchschnittspunkt ist der gesuchte Punkt c. So kann man jeden Punkt der Copie aus zwei anderen bereits erhaltenen Punkten bestimmen und dadurch die Copie ausführen.

Damit sich die Fehler, die man allenfalls bei Bestimmung einzelner Punkte begeht, nicht auch auf die neuen Punkte fortpflanzen, soll man alle oder doch die meisten Punkte aus denselben zwei Punkten a und b bestimmen.

b) Copieren mittelst Abscissen und Ordinaten.

Fig. 104.



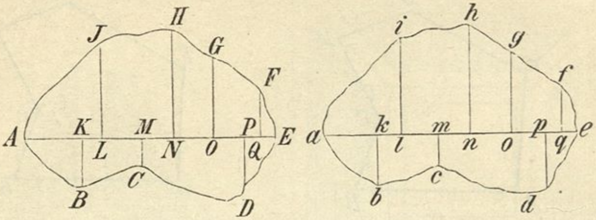
Zieht man in einer Ebene von einem bestimmten Punkte A (Fig. 104) einen Strahl AX, und fällt von irgend einem Punkte M auf diesen Strahl eine Senkrechte MP, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück AP des Strahles die Abscisse, die Senkrechte MP selbst aber die Ordinate jenes Punktes M. Der Strahl AX heißt die Abscissenlinie, der Punkt A des Anfangspunkt.

Wenn der Anfangspunkt A und die Richtung der Abscissenlinie AX gegeben sind, so ist die Lage eines jeden Punktes M vollkommen bestimmt, wenn dessen Abscisse AP und dessen Ordinate MP bekannt sind; denn man braucht nur von A aus an der Abscissenlinie ein Stück abzuschneiden, welches der Abscisse AP gleich ist, dann im Punkte P eine Senkrechte zu errichten und die Ordinate PM darauf aufzutragen; der Endpunkt ist der gesuchte Punkt M.

Um mittelst Abscissen und Ordinaten ein Gebilde ABCDE . . . (Fig. 105) zu copieren, nehme man im Originale irgend eine Gerade

AE als Abscissenlinie und A als Anfangspunkt derselben an, und fälle von allen Hauptpunkten Senkrechte auf die Abscissenlinie. Sodann ziehe man auf dem Copierblatte die Abscissenlinie ae in schicklicher Lage, trage

Fig. 105.



darauf in der Ordnung alle Abscissen von a bis k, l, m, n, . . . auf, errichte in diesen Punkten Senkrechte und trage auf ihnen die entsprechenden Ordinaten von k bis b, von l bis i, von m bis c, . . . auf, so ist dadurch die Lage aller Punkte in der Copie bestimmt; man braucht sie dann nur gehörig durch Linien zu verbinden.

c. **Copieren mittelst der Quadratnetze.**

Man überziehe das Original mit einer hinreichenden Menge kleiner Quadrate. Dieselbe Quadrateintheilung wird auch auf dem zur Copie bestimmten Papiere mit feinen Bleilinien ausgeführt. Nun beginnt das Copieren, indem man von Quadrat zu Quadrat die einzelnen Linien entweder durch bloße Abschätzung oder der größeren Genauigkeit wegen mit Hilfe eines Zirkels so auf die Copie überträgt, wie sie im Original vorliegen. Man fängt gewöhnlich in der linken oberen Ecke zu zeichnen an.

d. **Copieren mit Hilfe eines stigmographisch punktierten Netzes.**

Dieses Verfahren unterscheidet sich von dem vorhergehenden dadurch, dass man sowohl das Original als das Copierblatt, anstatt mit Quadratnetzen, mit quadratisch geordneten Punkten überzieht und sodann die Figur zwischen die Punkte der Copie in gleicher Stellung überträgt, wie sie im Original vorkommt.

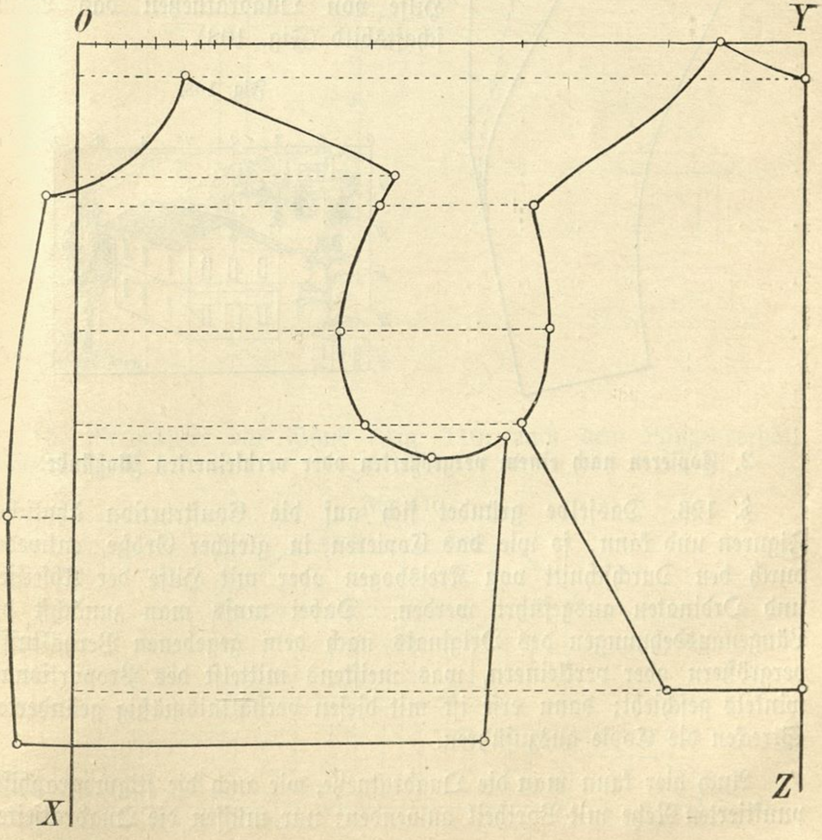
Das Copieren in gleicher Größe kann mechanisch auch durch ein **Transparentpapier** ausgeführt werden, indem man dieses auf das Original befestigt, die Figur durchzeichnet und sodann die Zeichnung entweder durch das Pikieren oder mittelst des Durchpausens auf das Copierblatt überträgt. Beim **Pikieren** legt man die Zeichnung des Transparentpapiers über das Copierblatt, durchsticht die Hauptpunkte dieser Zeichnung mit einer feinen Nadel so, dass sie sich auf dem Copierblatte wieder darstellen, wo man sie dann nur gehörig durch Linien zu verbinden braucht. Das **Durchpausen** besteht darin, dass man die Rückseite des Transparentpapieres mit geschabtem Blei bestreicht und dieses mit einem Papierstücke gleichmäßig darauf verreibt, dann diese Seite des Transparentpapieres auf das Copierblatt legt und die Figur, ohne sie durchzuschneiden, mit einem gespitzten Stifte überzieht, wodurch sich dieselbe auf dem Copierblatte in Blei gezeichnet abdrückt.

Aufgaben.

1. Zeichne ein beliebiges Sechseck, Achteck, Zehneck, und copiere es in gleicher Größe a) mittelst des Durchschnittes von Kreisbogen, b) mit Hilfe von Abscissen und Ordinaten.

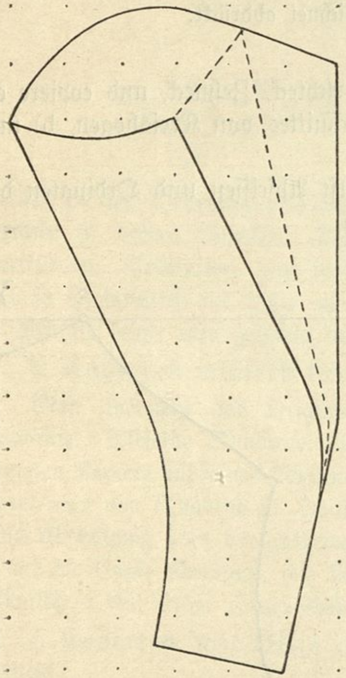
2. Copiere in gleicher Größe mittelst Abscissen und Ordinaten die Zeichnung eines Leibschnittes (Fig. 106).

Fig. 106.



Hier hat die Gerade OY die Länge von 1 *dm* und wird in 50 gleiche Theile, verjüngte *cm*, eingetheilt, so dass 1 *cm* in der Zeichnung $^1/_5$ *cm* der natürlichen Größe beträgt. Die Geraden OX und YZ sind senkrecht auf OY gezogen, daher zu einander parallel. Die Gerade OX nimmt man als Abscissenlinie an und fällt darauf von allen Eck- und Krümmungspunkten der Zeichnung Senkrechte, die Ordinaten, welche mit OY parallel sind. Auf dieser Grundlage wird sodann die Copie ausgeführt.

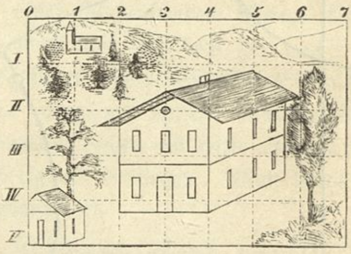
Fig. 107.



3. Copiere in gleicher Größe mit Hilfe eines punktierten Netzes die Zeichnung eines Ärmelschnittes (Fig. 107).

4. Copiere in gleicher Größe mit Hilfe von Quadratnetzen das Landschaftsbild (Fig. 108).

Fig. 108.



2. Copieren nach einem vergrößerten oder verkleinerten Maßstabe.

§. 126. Dasselbe gründet sich auf die Construction ähnlicher Figuren und kann, so wie das Copieren in gleicher Größe, entweder durch den Durchschnitt von Kreisbogen oder mit Hilfe der Abscissen und Ordinaten ausgeführt werden. Dabei muss man zunächst die Längenausdehnungen des Originals nach dem gegebenen Verhältnisse vergrößern oder verkleinern, was meistens mittelst des Proportionalwinkels geschieht; dann erst ist mit diesen verhältnismäßig geänderten Strecken die Copie auszuführen.

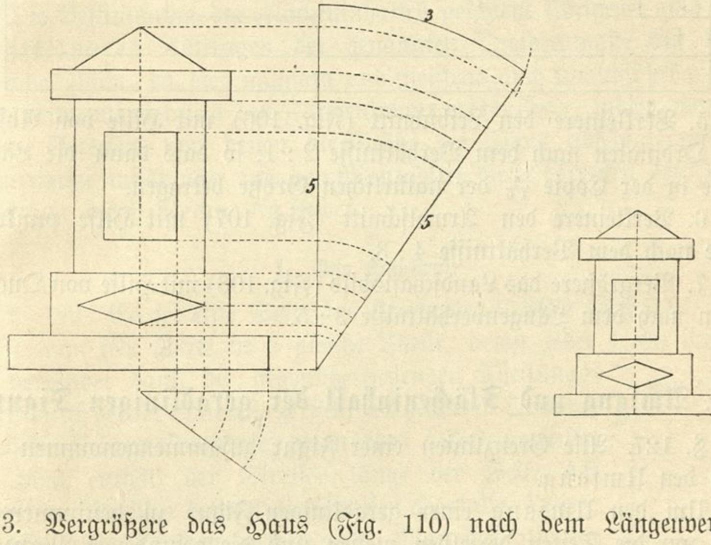
Auch hier kann man die Quadratnetze, wie auch die stigmographisch punktierten Netze mit Vortheil anwenden; nur müssen die Quadratseiten oder die Abstände der Punkte des Netzes in der Copie verhältnismäßig größer oder kleiner angenommen werden als im Original.

Aufgaben.

1. Zeichne ein beliebiges Fünfeck, Sechseck, Achteck und mache davon sowohl mittelst des Durchschnittes von Kreisbogen, als mit Hilfe von Abscissen und Ordinaten Copien, in denen die Abstände a) im Verhältnisse 2 : 3 vergrößert, b) im Verhältnisse 5 : 2 verkleinert erscheinen.

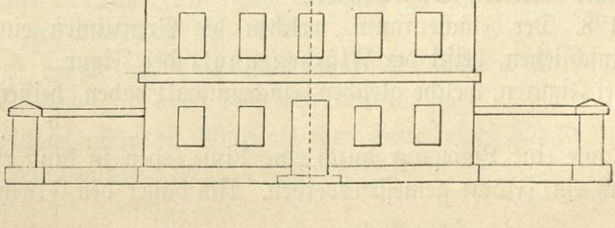
2. Verkleinere den Grabstein (Fig. 109) nach dem Längenverhältnisse 5 : 3.

Fig. 109.



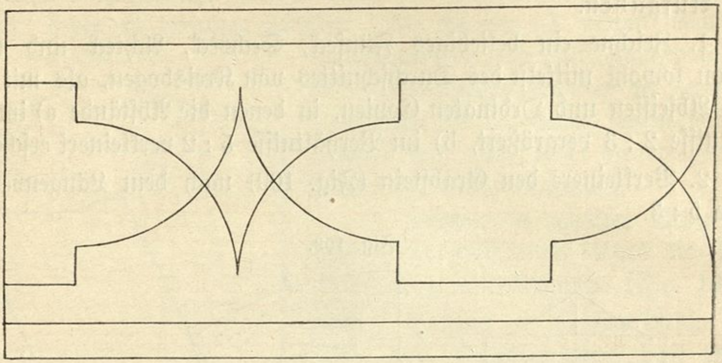
3. Vergrößere das Haus (Fig. 110) nach dem Längenverhältnisse 5 : 8.

Fig. 110.



4. Vergrößere das Stickmuster (Fig. 111) nach dem Längenverhältnisse 3 : 4.

Fig. 111.



5. Verkleinere den Leibschnitt (Fig. 106) mit Hilfe von Abscissen und Ordinaten nach dem Verhältnisse 2 : 1, so dass dann die Längenmaße in der Copie $\frac{1}{10}$ der natürlichen Größe betragen.

6. Verkleinere den Ärmelschnitt (Fig. 107) mit Hilfe punktierter Netze nach dem Verhältnisse 4 : 3.

7. Vergrößere das Landschaftsbild (Fig. 108) mit Hilfe von Quadratnetzen nach dem Längenverhältnisse 3 : 5.

VI. Umfang und Flächeninhalt der geradlinigen Figuren.

§. 127. Alle Grenzlinien einer Figur zusammengenommen nennt man den Umfang.

Um den Umfang einer geradlinigen Figur zu bestimmen, darf man nur die Seiten derselben messen und die gefundenen Maßzahlen, die sich offenbar auf das Längenmaß beziehen, addieren. Ist die Figur gleichseitig, so ist der Umfang gleich der Länge einer Seite multipliciert mit der Anzahl der Seiten.

Die Bestimmung des Umfanges einer geradlinigen Figur unterliegt daher keiner weiteren Schwierigkeit.

§. 128. Der Flächenraum, welchen die Grenzlinien einer ebenen Figur einschließen, heißt der Flächeninhalt der Figur.

Zwei Figuren, welche gleichen Flächeninhalt haben, heißen flächengleich.

So wie eine Linie nur durch eine Linie, eben so kann eine Fläche nur durch eine Fläche gemessen werden. Um daher den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, muß man irgend eine bestimmte Fläche als Einheit annehmen und untersuchen, wie oft dieselbe in der gegebenen Fläche enthalten ist. Die Zahl, welche dieses anzeigt heißt die Maßzahl der Fläche.

Als Einheit des Flächenmaßes nimmt man ein Quadrat an, dessen Seite der Einheit des Längenmaßes gleich ist, von welcher dann das Quadrat den Namen erhält. Ein solches Quadrat heißt ein Quadratmeter (m^2), ein Quadratdecimeter (dm^2), . . ., je nachdem die Seite einem Meter, Decimeter . . . gleich ist.

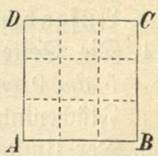
Eine Fläche messen heißt demnach untersuchen, wie viele Quadratmeter, Quadratdecimeter, . . . die Fläche enthält.

Die Bestimmung des Flächeninhaltes geschieht übrigens nicht durch unmittelbares Auftragen der genannten Quadratmaße auf die zu messende Fläche, da dies mühsam und meistens auch unausführbar wäre. Man bestimmt vielmehr den Flächeninhalt mittelbar, indem man diejenigen Strecken, von denen die Größe der Figur abhängt, mit dem Längenmaße misst und aus den Maßzahlen dieser Strecken den Inhalt der Fläche durch Rechnung findet.

1. Das Quadrat.

§. 129. Es sei eine Seite des Quadrates ABCD (Fig. 112) 3 *dm*. Theilt man jede Seite in 3 gleiche Theile, deren jeder 1 *dm* lang ist, und verbindet dann die gegenüberliegenden Theilungspunkte durch gerade Linien, so zerfällt das gegebene Quadrat in lauter kleinere Quadrate, deren jedes 1 dm^2 vorstellt; und zwar enthält der Streifen längs der Seite AB 3 dm^2, der darüber befindliche Streifen ebenfalls 3 dm^2, und der dritte Streifen auch 3 dm^2. Man hat also im ganzen 3mal 3 $dm^2 = 9\ dm^2$.

Fig. 112.



Zeichne ein Quadrat, dessen Seite 4 *cm* ist, und bestimme auf gleiche Weise, wie viel cm^2 dasselbe enthält.

Der Flächeninhalt eines Quadrates wird also gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite mit sich selbst multipliciert, d. i. zur zweiten Potenz erhebt.

Daher kommt es, dass man auch im Rechnen die zweite Potenz einer Zahl das Quadrat derselben nennt.

Bezeichnet man die Maßzahl der Seite eines Quadrates durch s und den Flächeninhalt desselben durch f, so ist $f = s^2$.

Heißen S und F die Seite und der Flächeninhalt eines zweiten Quadrates, so ist ebenso $F = S^2$; daher

$$F : f = S^2 : s^2,$$ d. h.

die Flächeninhalte zweier Quadrate verhalten sich wie die zweiten Potenzen ihrer Seiten.

Die Benennung des Flächeninhaltes hängt von der Benennung der Seiten ab; ist z. B. die Seite in Metern ausgedrückt, so wird die Zahl, welche man als Flächeninhalt bekommt, Quadratmeter anzeigen; ist die Seite des Quadrates in Decimetern angegeben, so erhält man auch den Flächeninhalt in Quadratdecimetern.

Wenn der Flächeninhalt eines Quadrates bekannt ist und man die Länge einer Seite finden will, so braucht man nur eine Zahl zu suchen, welche mit sich selbst multipliciert den gegebenen Flächeninhalt gibt, d. h. man darf nur aus dem bekannten Flächeninhalte die Quadratwurzel ausziehen. Es ist also $s = \sqrt{f}$.

Ein Quadrat, dessen Seite 10 *dm* beträgt, hat $10 \times 10\ dm^2 = 100\ dm^2$ Inhalt. Ein solches Quadrat ist nun $1\ m^2$, also ist

$$1\ m^2 = 100\ dm^2.$$

Eben so folgt:

$1\ dm^2 = 100\ cm^2$	$1\ km^2 = 1000000\ m^2$
$1\ cm^2 = 100\ mm^2$	$1\ \mu m^2 = 100\ km^2$.

Beim Bodenflächenmaße heißt eine Fläche von $100\ m^2$ ein Ar, eine Fläche von 100 Ar ein Hektar.

Aufgaben.

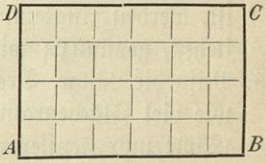
1. Die Seite eines Quadrates ist a) 21 *m*, b) 5 *m* 4 *dm*, c) 3 *m* 5 *dm* 9 *cm*, d) 0·715 *m*; wie groß ist der Umfang, wie groß der Flächeninhalt?
2. Der Umfang eines Quadrates ist 23 *m* 2 *dm*; wie groß ist a) die Seite, b) der Flächeninhalt?
3. Der Flächeninhalt eines Quadrates ist $15\ m^2\ 52\ dm^2\ 36\ cm^2$; wie groß ist die Seite, wie groß der Umfang?
4. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, dessen Flächeninhalt a) $376·36\ dm^2$, b) $2\ m^2\ 13\ dm^2\ 16\ cm^2$, c) $12·3201\ m^2$ ist?
5. Wie viel Spitzen sind zur glatten Umrandung einer quadratischen Tischdecke von 1·25 *m* Seitenlänge erforderlich, wenn wegen der Ecken 24 *cm* hinzugerechnet werden müssen?
6. Wie viel kostet ein quadratischer Bauplatz von 36 *m* Seitenlänge, wenn man das m^2 mit 5 fl. 50 kr. bezahlt?

7. Ein quadratischer Acker kostete 1250 fl.; wie viel *m* beträgt eine Seite desselben, wenn 1 *a* zu 8 fl. gerechnet wurde?
8. Die Seite eines Quadrates ist 3 *dm*, die eines zweiten Quadrates 12 *dm*; wie verhalten sich a) die Umfänge, b) die Flächeninhalte der beiden Quadrate?
9. Ein quadratischer Hof von 12 *m* Seitenlänge soll mit quadratischen Steinplatten von 16 *dm* Umfang gepflastert werden; wie viel solche Steinplatten sind erforderlich.
10. An der Fläche eines Quadrates, dessen Seite 48 *cm* ist, wird der Rand 3 *cm* breit vergoldet; wie viel dm^2 beträgt die Vergoldung?
11. Man will in einem quadratförmigen Garten, dessen Seite 58 *m* 5 *dm* ist, ringsherum einen Weg machen, der eine Breite von 1 *m* 2 *dm* haben soll, welchen Flächenraum wird dieser Weg einnehmen?

2. Das Rechteck.

§. 130. Es sei in dem Rechtecke ABCD (Fig. 113) die Grundlinie AB = 6 *cm*, und die Höhe AD = 4 *cm*. Theilt man die AB in 6, die AD in 4 gleiche Theile und zieht mit denselben durch die Theilungspunkte parallele Linien, so ist ein jedes der dadurch entstehenden Quadrate 1 cm^2, und man hat 4 Streifen solcher Quadrate, von je 6 cm^2; der Flächeninhalt des Rechteckes ABCD beträgt daher 4mal 6 cm^2 = 24 cm^2.

Fig. 113.



Durch ähnliche Zeichnungen und Schlüsse findet man, dass ein Rechteck, welches 7 *m* lang und 3 *m* breit ist, $7 \times 3\ m^2 = 21\ m^2$ enthält; dass die Fläche eines Rechteckes, dessen Grundlinie und Höhe 8 *dm* und 5 *dm* sind, $8 \times 5\ dm^2 = 40\ dm^2$.

Der Flächeninhalt eines Rechteckes wird also gefunden, indem man die Maßzahl der Grundlinie mit der Maßzahl der Höhe (oder die Länge mit der Breite) multipliciert.

Man pflegt diesen Satz kürzer so auszudrücken:

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.

Hieraus folgt auch:

Zwei Rechtecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

Ist der Flächeninhalt eines Rechteckes und zugleich die Grundlinie bekannt, so findet man die Höhe, indem man den Flächeninhalt durch die Grundlinie dividiert. Eben so wird die Grundlinie gefunden, indem man den Flächeninhalt durch die Höhe dividiert.

Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe eines Rechteckes, und f den Flächeninhalt desselben, so ist

$$f = g \,.\, h, \quad g = \frac{f}{h}, \quad h = \frac{f}{g}.$$

Aufgaben.

1. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt folgender Rechtecke:
   a) Länge 9·2 *m*, Breite 5·8 *m*;
   b) „ 12 *m* 3 *dm*, „ 9 *m* 2 *dm*;
   c) „ 3·215 *m*, „ 1·064 *m*.
2. Der Umfang eines Rechteckes beträgt 87 *m* 4 *dm*, die kürzere Seite 18 *m* 4 *dm*; wie groß ist a) die längere Seite, b) der Flächeninhalt?
3. Ein Spiegel mit Rahmen ist 5 *dm* 8 *cm* breit und 8 *dm* 2 *cm* hoch; wie groß ist der Umfang?
4. Längs der Hecke eines Gartens, welcher 33 *m* lang und 21 *m* breit ist, werden ringsum Maulbeerbäume, welche 3 *m* von einander abstehen, gepflanzt; wie viel Maulbeerbäume sind dazu erforderlich?
5. Miss die Länge, Breite und Höhe des Schulzimmers und berechne, wie viel Flächenraum der Boden, die Decke und die vier Wände (Thür und Fenster mitgerechnet) haben.
6. Die Seiten eines Rechteckes sind 9 *dm* und 6 *dm*, die Seiten eines zweiten Rechteckes sind doppelt so groß; wie verhalten sich a) die Umfänge, b) die Flächeninhalte der beiden Rechtecke?
7. Berechne die Höhe der Rechtecke von
   a) 9 m^2 Flächeninhalt und 3·6 *m* Grundlinie;
   b) 46·92 dm^2 „ „ 9·2 *dm* „ ;
   c) 22·3747 m^2 „ „ 5 *m* 29 *cm* „ .
8. Berechne die Grundlinie der Rechtecke von
   a) 24 m^2 Flächeninhalt und 3·2 *m* Höhe;
   b) 26 dm^2 55 cm^2 „ „ 4 *dm* 5 *cm* „ ;
   c) 5444·16 cm^2 „ „ 63·6 *cm* „ .
9. Wie groß ist die Fläche einer Tischplatte, deren Länge 1·2 *m* und deren Breite $\frac{5}{6}$ von der Länge beträgt?
10. Eine gehäkelte Bettdecke ist aus Quadraten von 9 *cm* Seitenlänge zusammengesetzt; wie viel Quadrate sind erforderlich, wenn die Decke 2·5 *m* lang und 1·782 *m* breit ist?
11. Ein Bettvorleger von 75 *cm* Breite und 1·5 *m* Länge soll ringsum mit einem 15 *cm* breiten Plüschstreifen besetzt werden; wie viel *cm*

sind davon erforderlich, wenn der Plüsch 1·5 *m* Breite hat, und wie theuer kommt der Besatz, wenn das *m* dieses Stoffes 6·6 fl. kostet?

12. Wie viel Ar hat ein rechteckiger Garten von 38 *m* Länge und 32 *m* Breite?

13. Ein Acker enthält 71·74 Ar, seine Länge ist 425·6 *m*; wie groß ist seine Breite?

14. Jemand vertauscht einen Acker, welcher 746 m^2 20 dm^2 Flächeninhalt hat, gegen einen andern von gleichem Inhalte, welcher 18 *m* 2 *dm* breit ist; wie lang muss dieser Acker sein?

15. Ein Spiegel mit Rahmen hat 6 *dm* 3 *cm* Breite und 8 *dm* 5 *cm* Höhe; wie groß ist der Inhalt der sichtbaren Spiegelfläche, wenn der Rahmen 5 *cm* breit ist?

16. Jemand kauft einen Bauplatz von der Form eines Rechteckes, 34 *m* 4 *dm* lang und 19 *m* 2 *dm* breit, und bezahlt das m^2 zu $5\frac{1}{2}$ fl.; wie viel kostet der Bauplatz?

17. Wie viel kostet die Verglasung von 8 Fenstern, deren jedes im Lichten 0·9 *m* breit und 1·5 *m* hoch ist, wenn man für 1 m^2 Verglasung 2 fl. 80 kr. rechnet?

18. Ein rechteckiges Feld von 72·4 *m* Länge verliert durch Anlage eines Weges 1·75 *m* von seiner Breite; welche Entschädigung ist dem Eigenthümer zu leisten, wenn er für 1 m^2 26 kr. verlangt?

19. Ein Fußboden von 7·5 *m* Länge und 6·4 *m* Breite soll mit harten Bretteln belegt werden; wie viel wird der Tischler dafür verlangen, wenn er 1 m^2 Belegung mit $4\frac{1}{4}$ fl. berechnet?

20. Ein Quadrat ist flächengleich mit einem Rechtecke von 54 *m* Länge und 21 *m* Breite; um wie viel ist der Umfang des Quadrates kleiner als der Umfang des Rechteckes?

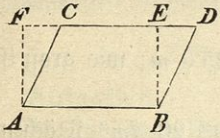
21. A hat zwei Gärten von gleicher Größe, einen quadratischen von 56 *m* Seitenlänge und einen rechteckigen von 42 *m* Breite; um jeden dieser Gärten will er eine Hecke anpflanzen lassen; wie viel Meter wird die Hecke um den rechteckigen Garten länger sein als die um den quadratischen?

22. 6 größere Thüren, jede 2·3 *m* hoch und 1·3 *m* breit, und 4 kleinere Thüren, jede 1·9 *m* hoch und 1 *m* breit, sollen von innen und außen mit Ölfarbe angestrichen werden; wie theuer kommt der Anstrich, wenn das m^2 85 kr. kostet?

3. Das schiefwinklige Parallelogramm.

§. 131. Jedes schiefwinklige Parallelogramm ABCD (Fig. 114) kann in ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe verwandelt werden, indem man das rechtwinklige Dreieck BDE an die Stelle von ACF überträgt. Um den Inhalt des Rechteckes zu finden, muss man die Grundlinie mit der Höhe multiplicieren; daher ist auch der **Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms gleich dem Producte aus der Grundlinie und der Höhe.**

Fig. 114.



Je zwei Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

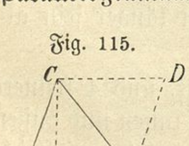
Aufgaben.

1. In einem Rhomboid betragen zwei anstoßende Seiten 38 *m* und 23 *m*; wie groß ist der Umfang?
2. Wie groß ist die Fläche eines Parallelogramms, in welchem die Grundlinie 4 *m* 3 *dm* 4 *cm* und die Höhe 2 *m* 3 *dm* 2 *cm* beträgt?
3. In einem Rhomboid ist
   die Grundlinie a) 108 *dm*, b) 17·7 *m*, c) 8 *m* 5 *dm* 1 *cm*;
   die Höhe a) 64 *dm*, b) 9·3 *dm*, c) 7 *m* 4 *dm* 8 *cm*;
   wie groß ist der Flächeninhalt?
4. Der Flächeninhalt eines schiefen Parallelogramms beträgt 18 m^2 81 dm^2, die Höhe ist $3\frac{9}{16}$ *m*; wie groß ist die Grundlinie?
5. Bestimme die Höhe eines Rhomboids, dessen Flächeninhalt 31·79 dm^2 und dessen Grundlinie 7·48 *dm* ist.
6. Ein Acker hat die Gestalt eines Rhomboids von 8 Hektar 32 Ar Inhalt und 225 *m* Höhe; wie groß ist die Grundlinie?

4. Das Dreieck.

§. 132. Jedes Dreieck ABC (Fig. 115) kann als die Hälfte eines Parallelogramms dargestellt werden, welches mit ihm gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat; man braucht nur durch zwei Eckpunkte B und C mit den gegenliegenden Seiten Parallele zu ziehen. Um den Flächeninhalt des Parallelogramms zu erhalten, muss man die Grundlinie mit der Höhe multiplicieren; zur Bestimmung der Dreiecksfläche wird man daher auch die Grundlinie

Fig. 115.



mit der Höhe multiplicieren, jedoch von diesem Producte nur die Hälfte nehmen.

Der Flächeninhalt eines Dreieckes wird also gefunden; indem man das Product aus der Grundlinie und der Höhe durch 2 dividiert.

Zwei Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind flächengleich.

Wird der doppelte Flächeninhalt eines Dreieckes durch die Grundlinie dividiert, so erhält man die Höhe; wird er durch die Höhe dividiert, so erhält man die Grundlinie.

Bezeichnet g die Grundlinie, h die Höhe und f den Flächeninhalt eines Dreieckes, so ist

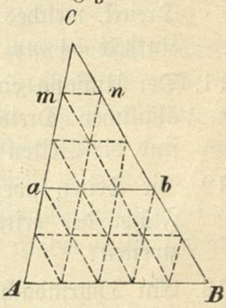
$$f = \frac{g \cdot h}{2}, \quad g = \frac{2f}{h}, \quad h = \frac{2f}{g}.$$

In einem rechtwinkligen Dreiecke wird gewöhnlich eine Kathete als Grundlinie angenommen; die andere Kathete stellt dann die Höhe vor. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreieckes ist daher gleich dem halben Producte der beiden Katheten.

§. 133. Es seien (Fig. 116) ABC und abC zwei ähnliche Dreiecke, deren gleichliegende Seiten sich wie 5 : 3 verhalten. Theilt man AC in 5 gleiche Theile, von denen auf aC 3 kommen, und zieht durch die Theilungspunkte der AC Parallele mit AB und BC und dann durch die Theilungspunkte der BC Parallele mit AC, so zerfallen die gegebenen Dreiecke in lauter congruente und mit mnC gleiche Dreiecke, und zwar $\triangle$ ABC $= 25$ mnC, $\triangle$ abC $= 9$ mnC, daher

$$ABC : abC = 25 : 9.$$

Fig. 116.



Dasselbe Verhältnis 25 : 9 haben aber auch die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Zwei ähnliche Dreiecke verhalten sich also wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Umfang eines Dreieckes, dessen Seiten 38 *m* 7 *dm*, 25 *m* 4 *dm*, 31 *m* 5 *dm* sind?
2. Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist a) 2·3 *m*, b) 1 *m* 5 *dm* 2 *cm*, c) $97\frac{3}{4}$ *cm*; wie groß ist der Umfang?
3. Wie groß ist die Seite eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Umfang 10 *m* 3 *dm* 5 *cm* beträgt?

4. Berechne den Flächeninhalt folgender Dreiecke:
   a) Grundlinie 3·2 *m*, Höhe 3·2 *m*;
   b) „ 4·25 *dm*, „ 2·84 *dm*;
   c) „ 1 *m* 4 *dm* 2 *cm*, „ 5 *dm* 9 *cm*.
5. Ein Stück Land von der Gestalt eines Dreieckes hat 108 *m* zur Grundlinie und 72 *m* zur Höhe; wie viel ist es wert, wenn das Hektar zu 1015 fl. gerechnet wird?
6. Berechne die Höhe der Dreiecke von
   a) 2·25 m^2 Flächeninhalt und 2·5 *m* Grundlinie;
   b) 58·96 dm^2 „ „ 13·4 *dm* „ ;
   c) 2722·08 cm^2 „ „ 85·6 *cm* „ .
7. Berechne die Grundlinie der Dreiecke von
   a) 12 m^2 Flächeninhalt und 3·2 *m* Höhe;
   b) 34·83 cm^2 „ „ 10·32 *cm* „ ;
   c) 843·66 dm^2 „ „ 38·7 *dm* „ .
8. In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die eine Kathete 29 *m* 3 *dm*, die andere 18 *m* 4 *dm*; wie groß ist der Inhalt?
9. In einem rechtwinkligen Dreiecke, welches 20 m^2 72 dm^2 enthält, ist eine Kathete 7 *m* 4 *dm*; wie groß ist die zweite Kathete?
10. Die Seite eines Quadrates ist 36 *mm*. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, welches ebenso groß ist als jenes Quadrat, und dessen eine Kathete 54 *mm* ist.
11. Der Umfang eines Dreieckes beträgt 4·37 *m*; die Seiten eines ihm ähnlichen Dreieckes sind 4·55 *m*, 4·445 *m* und 6·3 *m*; wie groß sind die Seiten des ersten Dreieckes?
12. Die Seiten zweier ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie 4 : 5; die Fläche des ersten Dreieckes ist 8 m^2; wie groß ist die Fläche des zweiten?
13. Ein Thurmdach besteht aus 4 gleichschenkligen Dreiecken. Wie viel m^2 Blech braucht man zu dessen Deckung, wenn die Grundlinie eines solchen Dreieckes 2 *m* 2 *dm* und die Höhe 4 *m* 5 *dm* beträgt, und wenn für Verschnitt und Falze 6% hinzugerechnet werden?

5. Das Trapez.

§. 134. Um den Flächeninhalt des Trapezes ABCD (Fig. 117) zu erhalten, braucht man es nur durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zu zerlegen. Man erhält dadurch

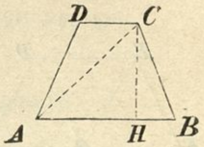
$\triangle$ ABC = ½ AB . CH,

$\triangle$ ACD = ½ CD. CH, also

Trapez ABCD = ½ (AB + CD) . CH;

d. h. der Flächeninhalt eines Trapezes wird gefunden, indem man die halbe Summe der beiden parallelen Seiten mit der Höhe des Trapezes multipliciert.

Fig. 117.



Heißt die eine der Parallelseiten a, die andere b, und die Höhe h, so ist der Flächeninhalt

$$f = \frac{a + b}{2} \cdot h.$$

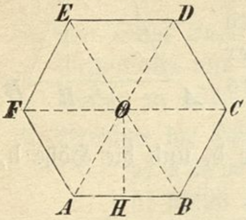
Aufgaben.

1. In einem Trapeze betragen die parallelen Seiten 36 *m* und 27 *m*, die Höhe ist 18 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?
2. Berechne den Flächeninhalt folgender Trapeze:
   a) Parallelseiten 5 *m* und 6 *m*, Höhe 4 *m*;
   b) " 3·5 *m* und 2·8 *m*, Höhe 1·6 *m*;
   c) " 2 *m* 54 *cm* und 5 *m* 39 *cm*, Höhe 4 *m* 28 *cm*.
3. In einem Trapeze, dessen Parallelseiten 5½ und 4⅗ *m* sind, beträgt der Flächenraum 20·79 m^2; wie groß ist der Abstand der beiden parallelen Seiten?
4. Ein Trapez von 1·05 *m* Höhe hat 2·6565 m^2 Flächeninhalt: wenn nun die eine Parallelseite 2·75 *m* beträgt, wie groß ist die andere?
5. Ein Platz hat die Form eines Trapezes, worin die Parallelseiten 185 *m* 5 *dm* und 140 *m* 2 *dm* betragen und 25 *m* 2 *dm* von einander abstehen; welchen Flächenraum hat dieser Platz?
6. In einem trapezförmigen Garten betragen die Parallelseiten 58·4 *m* und 46·8 *m*, ihr Abstand ist 34·5 *m*; wie viel ist der Garten wert, das Ar zu 25 fl. gerechnet?
7. Eine Dachfläche hat die Form eines Trapezes, in welchem die untere Länge 24 *m*, die obere Länge (der First) 16·4 *m* und der Abstand des Firstes von der unteren Seite 7·5 *m* beträgt; wie viel kostet die Schiefereindeckung dieser Dachfläche, wenn 1 m^2 mit 1·8 fl. berechnet wird?

6. Das Vieleck.

§. 135. Die Fläche eines regelmäßigen Vieleckes ABCDEF (Fig. 118) findet man am leichtesten, indem man von der Mitte zu allen Eckpunkten gerade Linien zieht und die dadurch entstehenden Theil-dreiecke berechnet; da aber diese Dreiecke congruent sind, so braucht man nur eines zu bestimmen, und die gefundene Fläche mit der Anzahl der Dreiecke zu multiplicieren. Der Flächeninhalt eines Theildreieckes AOB ist gleich der Grundlinie AB multipliciert mit der halben Höhe OH; daher die Fläche aller 6 Dreiecke 6mal AB, multipliciert mit der halben Höhe OH; 6mal AB ist der Umfang des Vieleckes, OH ist der Abstand des Mittelpunktes von der Seite des Vieleckes. Daher gilt der Satz:

Fig. 118.



Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes ist gleich dem Umfange multipliciert mit dem halben Abstande des Mittelpunktes von einer Seite.

Bezeichnet u den Umfang, a den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite und f den Flächeninhalt, so ist

$$f = u \cdot \frac{a}{2}.$$

Der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite kann nicht willkürlich angenommen werden, er hängt auf eine ganz bestimmte Weise von der Länge der Seite ab. Um nämlich die Maßzahl für den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite zu finden, multipliciert man die gegebene Seite

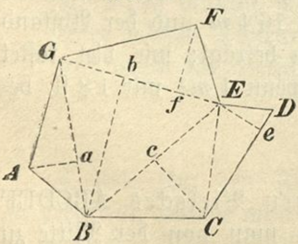
in einem	gleichseitigen	Dreiecke	mit	0·28868,
„ „	regelmäßigen	Fünfecke	„	0·68819,
„ „	„	Sechsecke	„	0·86603,
„ „	„	Achtecke	„	1·20711,
„ „	„	Zehnecke	„	1·53884.

§. 136. **Den Flächeninhalt eines unregelmäßigen Vieleckes kann man vorzüglich auf folgende zwei Arten bestimmen.**

a) **Durch Zerlegung in Dreiecke.**

Zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreiecke, berechne jedes derselben und addiere alle Dreiecksflächen.

Fig. 119.



Es sei die Fläche des Vieleckes ABCDEFG (Fig. 119) auszurechnen. Man zerlege das Vieleck in Dreiecke, und es sei BG = 39 *m*, BE = 42·5 *m*, CD = 31·5 *m*, GE = 39·5 *m*, Aa = 11·6 *m*, Cc = 19·7 *m*, Ee = 12·1 *m*, Bb = 35·4 *m*, Ff = 16·4 *m*.

Man hat nun

$$\text{Dreieck } ABG = \frac{BG \times Aa}{2} = \frac{39 \times 11{\cdot}6}{2} = 226{\cdot}2 \; m^2$$

$$\text{〃} \quad BEG = \frac{GE \times Bb}{2} = \frac{39{\cdot}5 \times 35{\cdot}4}{2} = 699{\cdot}15 \text{ 〃}$$

$$\text{〃} \quad BCE = \frac{BE \times Cc}{2} = \frac{42{\cdot}5 \times 19{\cdot}7}{2} = 418{\cdot}62 \text{ 〃}$$

$$\text{〃} \quad CDE = \frac{CD \times Ee}{2} = \frac{31{\cdot}5 \times 12{\cdot}1}{2} = 190{\cdot}58 \text{ 〃}$$

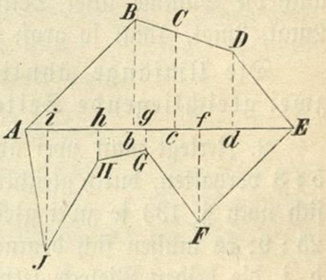
$$\text{〃} \quad EFG = \frac{GE \times Ff}{2} = \frac{39{\cdot}5 \times 16{\cdot}4}{2} = 323{\cdot}9 \text{ 〃}$$

$$\text{Vieleck } ABCDEFG = 1858{\cdot}45 \; m^2.$$

b) Mittelst Abscissen und Ordinaten.

Ziehe durch zwei Eckpunkte eine Gerade als Abscissenlinie und fälle darauf von allen übrigen Eckpunkten Senkrechte; dadurch zerfällt die Figur in lauter rechtwinklige Dreiecke und Trapeze, welche einzeln berechnet und addiert werden. Dabei werden die Ordinaten als Grundlinien der Dreiecke oder als parallele Seiten der Trapeze, die Abscissentheile als Höhen betrachtet.

Fig. 120.



Es sei (Fig. 120) Bb = 60·5 m, Cc = 57·2 m, Dd = 46 m, Ff = 52·3 m, Gg = 12·1 m, Hh = 17·1 m, Ji = 63·4 m, ferner Ai = 9·1 m, ih = 29·2 m, hb = 22·1 m, bg = 3·1 m, gc = 19·2 m, cf = 15·4 m, fd = 16·8 m, dE = 34·8 m.

Die Rechnung kann in folgender Tabelle zusammengestellt werden:

Bestandtheile der Figur	Factoren		Producte
	Grundlinien oder Summen der Parallelseiten	Höhen	
△ ABb	Bb = 60·5 *m*	Ab = 60·4 *m*	3654·20
Trap. BbcC	Bb + Cc = 117·7 *m*	bc = 22·3 *m*	2624·71
„ CcdD	Cc + Dd = 103·2 *m*	cd = 32·2 *m*	3323·04
△ DdE	Dd = 46 *m*	dE = 34·8 *m*	1600·80
△ FfE	Ff = 52·3 *m*	Ef = 51·6 *m*	2698·68
„ FfgG	Ff + Gg = 64·4 *m*	fg = 34·6 *m*	2228·24
„ GghH	Gg + Hh = 29·2 *m*	gh = 25·2 *m*	735·84
„ HhiJ	Hh + Ji = 80·5 *m*	hi = 29·2 *m*	2350·60
△ AJi	Ji = 63·4 *m*	Ai = 9·1 *m*	576·94
			19793·05
	Fläche ABCDEFGHJ =		9896·52 m^2

Hier hat man, anstatt die Producte einzeln durch 2 zu dividieren, dieselben früher addiert und erst die Summe durch 2 dividiert.

§. 137. 1. Wenn jede Seite eines Vieleckes 2mal, 3mal, 4mal so groß ist als die gleichliegende Seite eines ähnlichen Vieleckes, so wird auch die Summe aller Seiten, d. i. der Umfang des ersten Vieleckes, 2mal, 3mal, 4mal so groß sein als der Umfang des zweiten Vieleckes.

Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie zwei gleichliegende Seiten.

2. Zerlegt man zwei ähnliche Vielecke, deren Seiten sich z. B. wie 5 : 3 verhalten, durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so verhalten sich nach §. 133 je zwei gleichliegende Dreiecke der beiden Vielecke wie 25 : 9; es müssen sich demnach auch die Summen aller dieser Dreiecke, d. i. die beiden Vielecke selbst wie 25 : 9 verhalten.

Die Flächeninhalte zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich also wie die Quadrate zweier gleichliegender Seiten.

Wird daher eine in der Wirklichkeit aufgenommene Figur im verjüngten Maße auf das Papier gezeichnet, so dass jede Linie auf dem Papiere nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$, ... von der wirklich gemessenen Länge beträgt, so ist der Flächeninhalt der Figur auf dem Papiere $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{100}$, ... von dem Flächeninhalte der ähnlichen, in der Wirklichkeit aufgenommenen Figur.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Umfang eines regelmäßigen Sechseckes, dessen Seite 1 *m* 2 *dm* 5 *cm* ist?

2. Wie groß ist der Abstand des Mittelpunktes von einer Seite

a) in einem regelmäßigen Fünfecke mit der Seite 8·2 *dm*?

b) in einem regelmäßigen Achtecke mit der Seite 2·5 *dm*?

3. Berechne den Umfang und den Flächeninhalt

a) eines regelmäßigen Sechseckes mit der Seite 4·8 *m*;

b) eines regelmäßigen Zehneckes mit der Seite 1·2 *m*.

4. Ein Lampenteller in Form eines regelmäßigen Sechseckes von 90 *cm* Umfang ist aus 6 gleichen Dreiecken zusammengesetzt; welche Ausdehnungen hat ein solches Dreieck?

5. Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist 4·2 *m*; berechne a) den Abstand des Mittelpunktes von einer Seite, b) den Umfang, c) den Flächeninhalt.

6. Der Umfang eines regelmäßigen Fünfeckes ist 21·5 *dm*; wie groß ist a) die Seite, b) der Flächeninhalt?

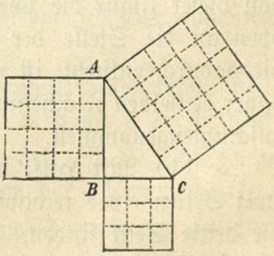
7. Es soll ein regelmäßig achtseitiges Gartenhaus, dessen Seite 1·3 *m* lang ist, ausgesteckt werden; wie groß ist der dazu erforderliche Flächenraum?

8. Auf einer Landkarte sind die natürlichen Längen in dem Verhältnisse 1 : 250000, auf einer zweiten in dem Verhältnisse 1 : 50000 dargestellt; welche Fläche nimmt auf der ersten Karte ein Land ein, das auf der zweiten eine Fläche von 1 cm^2 60 mm^2 hat?

VII. Pythagoräischer Lehrsatz.

§. 139. Zeichne einen rechten Winkel ABC (Fig. 121), trage auf den einen Schenkel 3, auf den andern 4 gleiche Theile, z. B. Centimeter auf, und verbinde die Endpunkte durch eine Strecke AC; die Hypotenuse des dadurch entstandenen Dreieckes wird genau 5 Centimeter enthalten. Das Quadrat von 3 ist 9, das Quadrat von 4 ist 16, und die Summe der Quadrate 25; das Quadrat der Hypotenuse 5 ist auch 25. Es ist also das Quadrat der Hypotenuse so groß, als die Summe aus den Quadraten der beiden Katheten. Dieses läßt sich auch geometrisch ableiten. Beschreibt man nämlich sowohl über der Hypotenuse, als über den Katheten

Fig. 121.



Quadrate, und zerlegt jedes derselben in Quadratcentimeter, so sieht man, dass in dem Quadrate der Hypotenuse eben so viele Quadratcentimeter vorkommen, als in den Quadraten der beiden Katheten zusammengenommen.

Durch diese Betrachtungen wird man auf den folgenden Satz geleitet, welcher der pythagoräische Lehrsatz heißt:

In einem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe aus den Quadraten der beiden Katheten.

Für das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck läst sich durch Fig. 122 die Wahrheit des pythagoräischen Lehrsatzes ganz anschaulich darstellen.

Fig. 122.

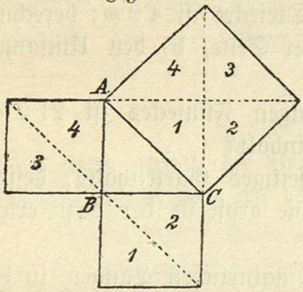
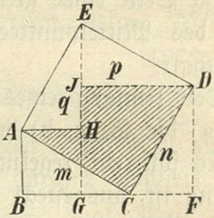


Fig. 123.



Um sich zu überzeugen, dass dieser Satz für irgend ein rechtwinkliges Dreieck ABC (Fig. 123) giltig ist, errichte man über der Hypotenuse AC das Quadrat ACDE, verlängere BC und fälle darauf die Senkrechten DF und EG; ebenso fälle man auf EG die Senkrechten AH und DJ. Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke ABC, CFD, EJD und AHE, die wir kürzer durch m, n, p und q bezeichnen wollen, congruent. Die Figur ABFDJH enthält nun die Quadrate der beiden Katheten AB und BC. Man erhält aber offenbar denselben Flächenraum, wenn man von dieser Figur die zwei Dreiecke m und n unten wegnimmt und sie oben an die Stelle der Dreiecke p und q anlegt. Die Figur ACDF, die dadurch entsteht, ist nun das Quadrat der Hypotenuse AC, welches daher denselben Flächeninhalt hat, als die Quadrate der beiden Katheten zusammengenommen.

§. 140. Mit Hilfe des pythagoräischen Lehrsatzes kann man, wenn zwei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes bekannt sind, durch Rechnung die dritte Seite finden.

1. Sind die beiden Katheten bekannt, so erhebt man jede Kathete

zum Quadrate und addiert die Quadrate, diese Summe gibt das Quadrat der Hypotenuse; um die Hypotenuse selbst zu erhalten, braucht man nur aus jener Summe die Quadratwurzel auszuziehen.

Es sei z. B. die eine Kathete 36 *cm*, die andere 160 *cm*; wie groß ist die Hypotenuse?

$$\text{Katheten}\left\{\begin{array}{ll} 36\ cm & 36^2 = 1296 \\ 160\ cm & 160^2 = 25600 \end{array}\right.$$

$$\sqrt{26896} = 164\ cm \text{ Hypot.}$$

2. Sind die Hypotenuse und eine Kathete bekannt, so erhebe man beide zum Quadrate, subtrahiere vom Quadrate der Hypotenuse das Quadrat der bekannten Kathete, der Rest gibt das Quadrat der andern noch unbekannten Kathete; will man diese Kathete selbst finden, so darf man nur aus jenem Reste die Quadratwurzel ausziehen.

Es sei z. B. die Hypotenuse 2 *m* 8 *cm*, eine Kathete 8 *dm*; wie groß ist die andere Kathete?

$$\begin{array}{ll} \text{Hypot. } 208\ cm & 208^2 = 43264 \\ \text{Kathete } 80\ cm & 80^2 = 6400 \end{array}$$

$$\sqrt{36864} = 192\ cm \text{ zweite Kath.}$$

Aufgaben.

1. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes sind a) 45 *m* und 12 *m*, b) 15·1 *m* und 6·8 *m*, c) 3 *m* 15 *cm* und 4 *m* 2 *dm*, d) 355 *mm* und 852 *mm*; wie groß ist die Hypotenuse, der Umfang und der Flächeninhalt?
2. Zu einem rechtwinkligen Dreiecke ist
   a) die Hypotenuse 51 *dm*, eine Kathete 24 *dm*;
   b) „ „ 8·7 *m*, „ „ 6 *m*;
   c) „ „ 1·35 *m*, „ „ 0·81 *m*;
   d) „ „ 689 *mm*, „ „ 265 *mm*;
   wie groß ist die andere Kathete, der Umfang und der Flächeninhalt?
3. Wie lang muss eine Leiter sein, damit sie an einer Mauer 6 *m* hoch reiche, wenn sie unten 2·5 *m* weit von der Mauer aufgestellt werden soll?
4. Berechne die Hypotenuse und den Flächeninhalt eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreieckes, dessen Kathete 1 *m* 6 *dm* 4 *cm* beträgt?
5. In einem rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecke ist die Hypotenuse 58 *mm*; wie groß ist jede Kathete, wie groß der Flächeninhalt?
6. In einem gleichseitigen Dreiecke beträgt eine Seite 8 *dm*; wie groß ist a) die Höhe, b) der Flächeninhalt?

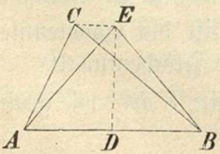
7. Berechne die Höhe und den Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreieckes, dessen Seite a) 2 *dm* 4 *cm*, b) 4 *m* 2 *dm* 6 *cm* beträgt.
8. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das mit einem gleichseitigen Dreiecke von 4·6 *dm* Seitenlänge flächengleich ist?
9. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 3 *m* 4 *dm* 6 *cm* und die Höhe 4 *m* 2 *dm* 4 *cm*; wie groß ist ein Schenkel?
10. In einem gleichschenkligen Dreiecke beträgt die Grundlinie 4·8 *dm* und jede der gleichen Seiten 5·2 *dm*; wie groß ist die Höhe, und wie groß der Flächeninhalt?
11. Wie groß ist die Diagonale eines Quadrates, dessen Seite 1 *m* ist?
12. Die Diagonale eines Quadrates ist 1 *m* 7 *dm*; wie groß ist die Seite, wie groß der Flächeninhalt?
13. Eine quadratische Tischplatte hat 0·961 m^2; wie groß ist die Diagonale?
14. Die anstoßenden Seiten eines Rechteckes sind 8·85 *m* und 4·72 *m*; wie groß ist die Diagonale?
15. In einem Rechtecke beträgt die Diagonale 923 *mm* und eine Seite 355 *mm*; wie groß ist die zweite Seite?
16. Wie groß ist die Diagonale eines Rechteckes, dessen Länge 5·2 *m* und dessen Flächeninhalt 20·28 m^2 beträgt?
17. Die Diagonalen eines Rhombus betragen 2·26 *m* und 1·75 *m*; wie groß ist a) die Seite, b) der Flächeninhalt?
18. Ein Garten hat die Form eines Rhombus: wie viel Ar enthält er, wenn eine Seite 24 *m* und eine Diagonale 32 *m* beträgt?

VIII. Verwandlung und Theilung geradliniger Figuren.

1. Verwandlung geradliniger Figuren.

§. 141. Eine Figur in eine andere verwandeln, heißt eine Figur construieren, welche mit der ersten flächengleich ist und gegebenen Bedingungen entspricht.

Fig. 124.



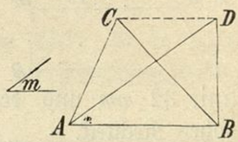
1. Ein ungleichseitiges Dreieck ABC (Fig. 124) in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Man halbiere die AB in D, ziehe DE ⊥ AB und CE ∥ AB; verbindet man den Durchschnittspunkt E mit A und B, so ist ABE das verlangte gleichschenklige Dreieck.

2. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 125) in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel m enthält.

Man construiere den Winkel BAD = m und ziehe CD ∥ AB; zieht man noch DB, so ist ABD das verlangte Dreieck.

Fig. 125.



3. Zeichne ein Dreieck mit der Grundlinie 36 *mm* und den anliegenden Winkeln 60^0 und 45^0 und verwandle es in ein Dreieck über derselben Grundlinie mit dem anliegenden Winkel 30^0.

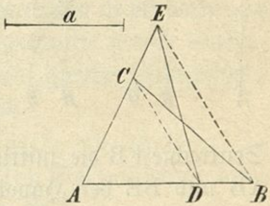
4. Ein schiefwinkliges Dreieck in ein rechtwinkliges zu verwandeln.

Die Auflösung wie bei der Aufgabe 2., worin jedoch m als rechter Winkel angenommen werden muss.

5. Ein gegebenes Dreieck ABC (Fig. 126) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Man mache AD = a, ziehe DC und damit parallel die BE, welche die verlängerte AC in E trifft; ADE ist nun das verlangte Dreieck. Denn es ist

Fig. 126.



$$\triangle \text{ ACD} = \text{ACD},$$
$$\triangle \text{ CDE} = \text{CDB, also}$$
$$\overline{\triangle \text{ ADC} + \text{CDE} = \triangle \text{ ACD} + \text{CDB, oder}}$$
$$\triangle \text{ ADE} = \text{ABC}.$$

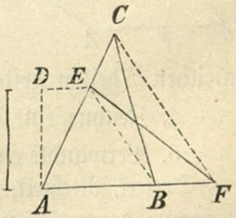
6. Construiere ein Dreieck mit den Seiten 42 *mm*, 32 *mm* und dem eingeschlossenen Winkel 60^0 und verwandle es unter Beibehaltung dieses Winkels in ein Dreieck, das die Grundlinie 36 *mm* hat.

7. Ein Dreieck ABC (Fig. 127) in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Man errichte AD = h senkrecht auf AB, ziehe DE ∥ AB, dann die EB, und damit parallel die CF. Verbindet man nun E und F durch eine Strecke, so ist △ AEF = ABC.

Beweis wie bei der Aufgabe 5.

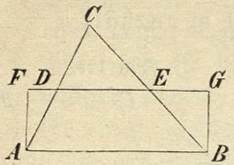
Fig. 127.



8. Ein Dreieck ABC (Fig. 128) in ein Rechteck zu verwandeln.

Man halbiere die Seiten AC und BC in D und E, ziehe durch diese Punkte eine Gerade, und errichte in A und B

Fig. 128.



die Senkrechten AF und BG; dann ist ABGF das gesuchte Rechteck.

9. Zeichne ein Dreieck mit den Seiten 35 *mm*, 31 *mm* und 26 *mm* und verwandle es in ein Rechteck.

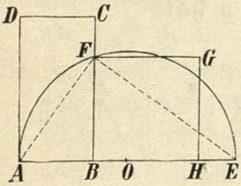
10. Construiere ein Dreieck mit der Grundlinie 32 *mm* und der Höhe 22 *mm* und verwandle es in ein gleich hohes Rechteck.

§. 142. 1. Ein schiefwinkliges Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Die Auflösung wurde in §. 131 angeführt.

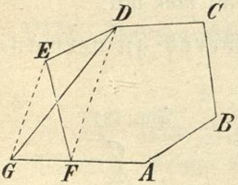
2. Ein Rechteck ABCD (Fig. 129) in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 129.



Verlängere die kleinere Seite AB bis E, so dass BE = AD wird, beschreibe über AE als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Seite BC in F schneidet, und construiere über BF das Quadrat BFGH; dieses ist dann dem gegebenen Rechtecke gleich. Denn zieht man AF und EF, so ist AFE als Winkel im Halbkreise ein rechter, daher in dem rechtwinkligen Dreiecke AFE die Senkrechte FB die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AB und BE der Hypotenuse. Man hat also AB : FB = FB : BE oder AB : FB = FB : AD, daher $AB \times AD = FB^2$, d. i. Rechteck ABCD = Quadrat BFGH.

Fig. 130.



3. Ein Vieleck ABCDEF (Fig. 130) in ein anderes zu verwandeln, das eine Seite weniger hat.

Man ziehe die Diagonale DF und damit parallel die EG, welche die verlängerte AF in G trifft. Zieht man DG, so ist das Vieleck ABCDG gleich dem Vielecke ABCDEF, weil beide aus gleichen Theilen bestehen.

4. Zeichne ein Viereck und verwandle es in ein Dreieck.

5. Verwandle ein unregelmäßiges Sechseck in ein Fünfeck, — Viereck, — Dreieck, Rechteck, Quadrat; miss die Seite dieses Quadrates, und berechne daraus den Flächeninhalt desselben, welcher zugleich der Inhalt des gegebenen Sechseckes ist.

2. Theilung geradliniger Figuren.

§. 143. 1. Ein gegebenes Dreieck durch gerade Linien, welche durch einen Eckpunkt gehen, in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Theile die diesem Eckpunkte gegenüberliegende Seite in so viele gleiche Theile als verlangt werden, und verbinde die Theilungspunkte durch Strecken mit jenem Eckpunkte.

Wäre das gegebene Dreieck in Theile zu theilen, welche unter einander in einem gegebenen Verhältnisse stehen, so müsste man auch die Dreieckseite nach dem gegebenen Verhältnisse theilen und weiter wie vorhin verfahren.

2. Ein Dreieck in vier congruente Dreiecke zu theilen.

Verbinde die Halbierungspunkte der Seiten.

§. 144. 1. Ein Parallelogramm in mehrere gleiche Theile so zu theilen, dass alle Theilungslinien mit einer Seite parallel sind.

Man theile die dieser Seite anliegenden Gegenseiten in die verlangte Zahl gleicher Theile und ziehe durch die Theilungspunkte gerade Linien; die dadurch entstehenden Parallelogramme haben gleiche Grundlinien und dieselbe Höhe und sind daher einander gleich.

2. Ein Trapez in mehrere gleiche Theile zu theilen, so dass die Theilungslinien die beiden parallelen Seiten schneiden.

Durch Theilung der Parallelseiten in gleiche Theile.

3. Ein Trapezoid in beliebig viele gleiche Theile zu theilen.

Ziehe eine Diagonale, theile dieselbe in die verlangte Anzahl gleicher Theile und ziehe von den Theilungspunkten gerade Linien zu den der Diagonale gegenüberliegenden Eckpunkten.

IX. Umfang und Flächeninhalt des Kreises.

1. Umfang des Kreises.

§. 145. Das einem Kreise eingeschriebene regelmäßige Sechseck hat einen kleineren, das umgeschriebene regelmäßige Sechseck einen größeren Umfang als der Kreis. Bestimmt man daher die Umfänge dieser

Sechsecke, so erhält man zwei Werte, zwischen denen der Umfang des Kreises liegt.

In noch engere Grenzen wird die Kreislinie durch zwei dem Kreise eingeschriebene und umgeschriebene regelmäßige 12=, 24=, 48=, . . . Ecke eingeschlossen. Durch Berechnung der Umfänge solcher Vielecke, deren Seitenzahl immer um das Doppelte zunimmt, hat man näherungsweise die Länge des Kreisumfanges bestimmt, und gefunden, dass der Umfang eines Kreises 3·14159 . . . mal so groß ist als der Durchmesser.

Die Zahl, welche das Verhältnis zwischen dem Umfange eines Kreises und dem Durchmesser angibt, heißt die **Ludolfische Zahl** und wird mit dem griechischen Buchstaben π bezeichnet. Es ist also $\pi = 3{\cdot}14159 \ldots$ In vielen Fällen ist der Näherungsbruch $\pi = 3\frac{1}{7}$ oder $\pi = 3{\cdot}14$ ausreichend.

Zur Veranschaulichung nehme man einen aus Holz gefertigten Kreis, dessen Durchmesser 1 Decimeter beträgt, umspanne den Umfang möglichst genau mit einem Faden und messe dann die Länge dieses Fadens. Man findet, dass der Faden, also auch der Umfang des Kreises 3 Decimeter und nahe 14 Millimeter, d. i. nahe 3·14 Decimeter lang ist.

Bezeichnet r den Halbmesser, d den Durchmesser und u den Umfang eines Kreises, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$u = d\pi \text{ oder } u = 2r\pi \text{, daher}$$

$$d = \frac{u}{\pi} \text{ und } r = \frac{u}{2\pi}\text{; d. h.}$$

1) **Der Umfang eines Kreises ist gleich dem Durchmesser oder dem doppelten Halbmesser multipliciert mit der Ludolfischen Zahl.**

2) **Der Durchmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange dividiert durch die Ludolfische Zahl.**

3) **Der Halbmesser eines Kreises ist gleich dem Umfange dividiert durch die doppelte Ludolfische Zahl.**

Heißt U der Umfang eines zweiten Kreises, welcher den Halbmesser R und den Durchmesser D hat, so ist

$$U : u = D\pi : d\pi = D : d \text{, und}$$

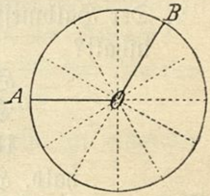
$$U : u = 2R\pi : 2r\pi = R : r\text{; d. h.}$$

die Umfänge zweier Kreise verhalten sich so wie ihre Durchmesser oder Halbmesser.

2. Flächeninhalt des Kreises.

§. 146. Denkt man sich in einem Kreise (Fig. 131) unzählig viele Halbmesser gezogen, so zerfällt die Kreisfläche in unzählig viele Kreisausschnitte; diese kann man als Dreiecke ansehen, deren gemeinschaftliche Höhe der Halbmesser ist, und deren Grundlinien zusammen den Umfang geben.

Fig. 131.



Um daher die Fläche des Kreises zu erhalten, wird man alle Dreiecksflächen berechnen und addieren; man wird also alle Grundlinien addieren und ihre Summe, d. i. den Kreisumfang mit der halben gemeinschaftlichen Höhe d. i. mit dem halben Halbmesser multiplicieren.

Der Flächeninhalt eines Kreises ist also gleich dem Umfange multipliciert mit dem halben Halbmesser.

Bezeichnet f den Flächeninhalt und u den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser r ist, so ist $f = u \cdot \frac{r}{2}$.

Da aber $u = 2r\pi$ ist, so ist auch $f = 2r\pi \cdot \frac{r}{2}$, oder

$$f = r^2\pi,$$

d. i. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers multipliciert mit der Ludolfischen Zahl.

Bezeichnet F den Flächeninhalt eines zweiten Kreises, dessen Halbmesser R ist, so hat man ebenso $F = R^2\pi$; daher

$$F : f = R^2\pi : r^2\pi = R^2 : r^2, \text{ d. h.}$$

die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Ist umgekehrt der Flächeninhalt eines Kreises bekannt, und die Länge des Halbmessers zu suchen, so braucht man nur den Flächeninhalt durch die Ludolfische Zahl zu dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers vor; zieht man daraus die Quadratwurzel, so hat man den Halbmesser selbst; folglich

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

Durch die Figur 131 wird auch der folgende Satz veranschaulicht:

Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes ist gleich der Länge des dazu gehörigen Bogens multipliciert mit dem halben Halbmesser.

Den Flächeninhalt eines Kreisringes findet man, indem man die Flächen der beiden Kreise, deren Unterschied der Ring ist, berechnet und von einander subtrahiert.

§. 147. Aufgaben.

1. Der Durchmesser eines Kreises beträgt 6 *dm*; wie groß ist der Umfang?

$6\ dm \times 3\frac{1}{7}$	oder	$6\ dm \times 3{\cdot}14$	genauer	$6\ dm \times 3{\cdot}1416$
$18\frac{6}{7}$		$18{\cdot}84\ dm$		$18{\cdot}8496\ dm.$

2. Der Halbmesser eines Kreises ist 10 *m*; wie groß ist der Flächeninhalt?

Halbm. =	10 *m*	oder	10×10
Durchm. =	20 *m*		$100 \times 3{\cdot}1416$
Umfang =	62·832 *m*		$314{\cdot}16\ m^2$.
halb. Halbm. =	5 *m*		
Flächeninhalt =	$314{\cdot}16\ m^2$.		

3. Der Halbmesser eines Kreises ist a) 28 *dm*, b) 1·8 *m*, c) 2·65 *m*; d) $35\frac{1}{2}$ *cm*; wie groß ist der Umfang, wie groß der Flächeninhalt?
4. In einem Kreise ist der Durchmesser a) 13 *m*, b) 5·8 *m*, c) 0·135 *m*, d) 8 *dm* 3 *cm* 4 *mm*; berechne den Umfang und den Flächeninhalt.
5. Wie groß ist a) der Durchmesser, b) der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang 20 *m* beträgt?
6. Der Umfang eines Kreises ist a) 2·5 *m*, b) 0·8168 *m*, c) 131·95 *dm*, d) 18·3469 *m*; wie groß ist der Halbmesser, wie groß der Flächeninhalt?
7. Der Durchmesser eines Kreises ist 2 *dm*, ebenso groß ist die Seite eines Quadrates; um wie viel ist der Flächeninhalt des Kreises kleiner als der des Quadrates?
8. Der Minutenzeiger einer Uhr ist 13 *cm* lang; welche Länge hat der Weg, den seine Spitze in einer Stunde beschreibt?
9. Jeder Grad des Erdäquators ist 15 geographische Meilen lang; wie groß ist a) der Umfang, b) der Halbmesser des Äquators?
10. Ein Wagenrad, dessen Durchmesser 1·1 *m* beträgt, hat auf einer zurückgelegten Strecke 240 Umläufe gemacht; wie lang war die Strecke?
11. An einem Wagen hat jedes Vorderrad 1 *m*, jedes Hinterrad 1·4 *m* Durchmesser; wie viele Umläufe hat jedes Rad gemacht, wenn der Wagen eine Strecke von 1 *km* zurückgelegt hat?
12. Welchen Durchmesser hat ein Locomotivrad, das sich auf einem Schienenwege von 990 *m* 315mal umdreht?

13. Man will einen kreisrunden Tisch auf 8 Personen machen; wie groß wird man den Durchmesser dazu nehmen, wenn man auf eine Person 8 *dm* des Umfanges rechnet?

14. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt 7 m^2 76 dm^2 beträgt?

$$7\ m^2\ 76\ dm^2 = 776\ dm^2 \qquad 776 : 3{\cdot}14 = 247{\cdot}14$$

$$\sqrt{247{\cdot}14} = 15{\cdot}7\ dm = 1\ m\ 5\ dm\ 7\ cm.$$

15. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt a) $86\frac{5}{8}$ dm^2, b) 1451·44 cm^2, c) 84 dm^2 90 cm^2 56 mm^2 beträgt?

16. Die Durchmesser zweier Kreise sind 2·4 *dm* und 3·6 *dm*; wie verhalten sich a) ihre Umfänge, b) ihre Flächeninhalte?

17. Wie verhalten sich die Flächeninhalte zweier Kreise zu einander, wenn sich ihre Umfänge wie 3 : 5 verhalten?

18. Ein kreisrunder Saal hat 8 *m* 5 *dm* im Durchmesser; wie groß ist der Flächeninhalt?

19. Der Umfang eines Baumstammes ist $2\frac{2}{3}$ *m*; wie groß ist der Durchmesser, wie groß der Flächeninhalt eines Querschnittes?

20. Wie viel Menschen haben in einem kreisrunden Saale Platz, dessen Durchmesser 14 *m* ist, wenn ein Mensch $17\frac{1}{2}$ dm^2 einnimmt?

21. Auf einem Anger ist eine Kuh mit einem 2·8 *m* langen Stricke angebunden; wie viel m^2 Weide sind ihr zugemessen?

22. Bestimme den Halbmesser eines Kreises, der an Inhalt gleich ist einem Quadrate mit der Seite 2 *m* 3 *dm*.

23. Ein Kreis hat mit einem Quadrate gleichen Umfang, nämlich 9·42 *dm*; wie groß ist der Unterschied der Flächeninhalte des Kreises und des Quadrates?

24. Für einen kreisrunden Tisch, dessen Platte 19·64 dm^2 groß ist, soll eine Decke gestrickt werden, die rundherum 15 *cm* herabhängt; welchen Durchmesser wird dieselbe haben, und wie viel *m* Fransen benöthigt man zur Umrandung derselben?

25. Wie groß ist die Fläche eines Kreisringes, wenn die zwei concentrischen Kreise 3 *m* 6 *dm* und 4 *m* 4 *dm* zu Durchmessern haben?

26. Bestimme den Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn die ihn einschließenden Kreisumfänge 315·8 *mm* und 410·5 *mm* betragen.

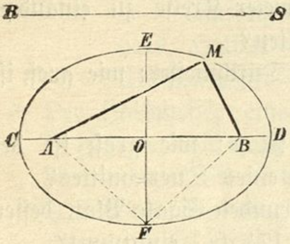
27. Ein kreisrunder Grasplatz von 18 *m* Durchmesser ist mit einem 2 *m* breiten Wege umzogen; wie viel Flächenraum nimmt dieser Weg ein?

28. Ein Garten ist 68 *m* 2 *dm* lang, 41 *m* 3 *dm* breit; in der Mitte desselben befindet sich ein kreisrunder Teich, welcher sammt der ihn einschließenden Mauer 12 *m* 4 *dm* im Durchmesser hat; wie groß ist die Landfläche des Gartens?

X. Die Ellipse.

§. 148. Es seien in einer Geraden zwei Punkte A und B (Fig. 132) gegeben. Befestigt man in A und B Stifte und legt um dieselben einen an den Enden zusammen gebundenen Faden, der um die gegebene Strecke RS länger ist als der Abstand AB der beiden Punkte A und B, spannt sodann den Faden mittelst eines Zeichenstiftes M und führt diesen so, dass der Faden immer straff gespannt bleibt, um die beiden Punkte herum, so beschreibt der Punkt M eine krumme Linie, welche Ellipse heißt.

Fig. 132.



Die Ellipse ist also eine krumme Linie von solcher Beschaffenheit, dass die Summe der Entfernungen eines jeden ihrer Punkte von zwei gegebenen Punkten immer derselben gegebenen Strecke gleich ist.

Die Ellipse ist, wie der Kreis, eine geschlossene krumme Linie.

Die zwei gegebenen Punkte A und B heißen die Brennpunkte der Ellipse; die Entfernungen eines Punktes M von den beiden Brennpunkten, nämlich die Strecken AM und BM, werden Leitstrahlen jenes Punktes genannt.

Die Strecke CD, welche durch die beiden Brennpunkte geht, heißt die große Achse. Die Endpunkte C und D derselben heißen die Scheitel, und der Halbierungspunkt O der Mittelpunkt der Ellipse. Die große Achse CD ist gleich der gegebenen Strecke RS. Man kann daher sagen:

Die Summe der Leitstrahlen eines jeden Punktes der Ellipse ist der großen Achse gleich.

$$AM + BM = AF + BF = \ldots = CD.$$

Die Strecke EF, welche im Mittelpunkte O auf der großen Achse senkrecht steht, heißt die kleine Achse der Ellipse.

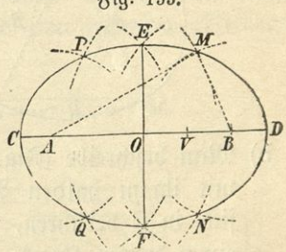
Die Entfernung eines Brennpunktes der Ellipse von dem Mittelpunkte derselben heißt die Excentricität der Ellipse. Je kleiner die Excentricität ist, desto mehr nähert sich die Ellipse einem Kreise. Ein Kreis kann daher als eine Ellipse, deren Excentricität Null ist, angesehen werden.

Die Ellipse ist in der Anwendung von großer Wichtigkeit; man baut z. B. Gewölbe, Wasserbehälter, Rasenplätze, Blumenbeete u. dgl. von elliptischer Form; am wichtigsten aber ist diese Linie in der Astronomie, indem unsere Erde und alle Planeten unseres Sonnensystems in mehr oder weniger gestreckten Ellipsen sich um die Sonne bewegen, die sich in einem der Brennpunkte aller jener elliptischen Bahnen befindet.

In dem rechtwinkligen Dreiecke AOF ist die Hypotenuse AF gleich der halben großen Achse, die Kathete OF gleich der halben kleinen Achse, und die Kathete AO gleich der Excentricität der Ellipse. Sind daher von diesen drei Größen zwei gegeben, so kann man aus denselben die dritte bestimmen.

§. 149. **Wenn die große Achse und die Entfernung der beiden Brennpunkte gegeben sind, beliebig viele Punkte der Ellipse zu bestimmen.**

Fig. 133.



Es seien (Fig. 133) A und B die beiden Brennpunkte. Man ziehe durch dieselben eine Gerade, halbiere den Abstand AB in O, und trage von O aus bis C und D die halbe Länge der gegebenen großen Achse auf; CD ist nun die große Achse der Ellipse, C und D sind ihre Scheitel. Beschreibt man ferner mit der halben großen Achse aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, so liegen die Durchschnittspunkte E und F in der Ellipse. Zieht man durch diese Punkte die Strecke EF, so muß dieselbe, weil über AB als Grundlinie nach oben und unten ein gleichschenkliges Dreieck gedacht werden kann, durch den Punkt O gehen und auf AB senkrecht stehen; EF ist also die kleine Achse der Ellipse. Nun nehme man in der Strecke AB irgend einen Punkt V an, so wird dadurch die große Achse in zwei Abschnitte getheilt; beschreibt man zuerst mit dem größeren CV aus beiden Brennpunkten nach oben und unten Bogen, und dann ebenso mit dem kleineren Abschnitte DV, so sind die vier Durchschnittspunkte M, N, P und Q Punkte der Ellipse, weil für jeden derselben der eine

Leitstrahl dem Abschnitte CV der großen Achse und der andere Leitstrahl dem Abschnitte DV, also ihre Summe der ganzen großen Achse gleich ist. Auf diese Art werden, wenn man in der Strecke AB verschiedene Punkte annimmt, beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmt werden. Verbindet man diese Punkte durch eine stetig gekrümmte Linie, so erhält man dadurch die verlangte Ellipse, und zwar um so genauer, je mehr Punkte derselben man bestimmt hat.

§. 150. **Aus vier Kreisbogen eine geschlossene krumme Linie, welche sich an Gestalt einer Ellipse nähert, zu construieren.**

a) Man beschreibe (Fig. 134) aus zwei beliebigen Punkten A und B mit ihrem Abstande AB als Halbmesser zwei Kreise, die sich in C und D schneiden, und ziehe aus C und D durch A und B Gerade, welche die Peripherien der beiden Kreise in M, N, P und Q schneiden. Beschreibt man dann aus C den Kreisbogen MN und aus D den Kreisbogen QP, so erhält man die krumme Linie MNPQM, deren Gestalt sich einer Ellipse nähert.

Fig. 134.

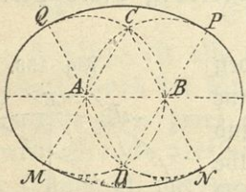
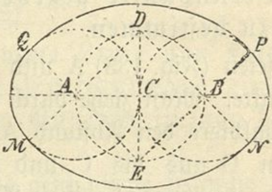


Fig. 135.



b) Man beschreibe (Fig. 135) aus zwei beliebigen Punkten A und B mit ihrem halben Abstande AC als Halbmesser zwei Kreise, die sich in C berühren, und dann aus C mit demselben Halbmesser einen dritten Kreis; ziehe durch C eine Senkrechte DE auf AB, und aus D und E durch A und B Gerade, welche die zwei ersteren Kreise in M, N, P und Q schneiden. Beschreibt man dann aus D den Kreisbogen MN und aus E den Kreisbogen QP, so ist MNPQM eine krumme Linie, welche sich einer Ellipse nähert.

Flächeninhalt der Ellipse.

§. 151. Man hat gefunden, dass eine Ellipse eben so viel Flächenraum einschließt, als ein Kreis, in welchem das Quadrat des Halbmessers gleich ist dem Producte aus den beiden Halbachsen der Ellipse. Da nun der Flächeninhalt eines Kreises gleich ist dem Quadrate des Halbmessers multipliciert mit der Ludolfischen Zahl, so folgt:

Der Flächeninhalt einer Ellipse wird gefunden, indem man das Product der beiden halben Achsen mit der Ludolfischen Zahl multipliciert.

Z. B. wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren Achsen 11 *m* und 7 *m* sind?

Product der Halbachsen $= \frac{11}{2} \times \frac{7}{2} = 19\frac{1}{4}$.

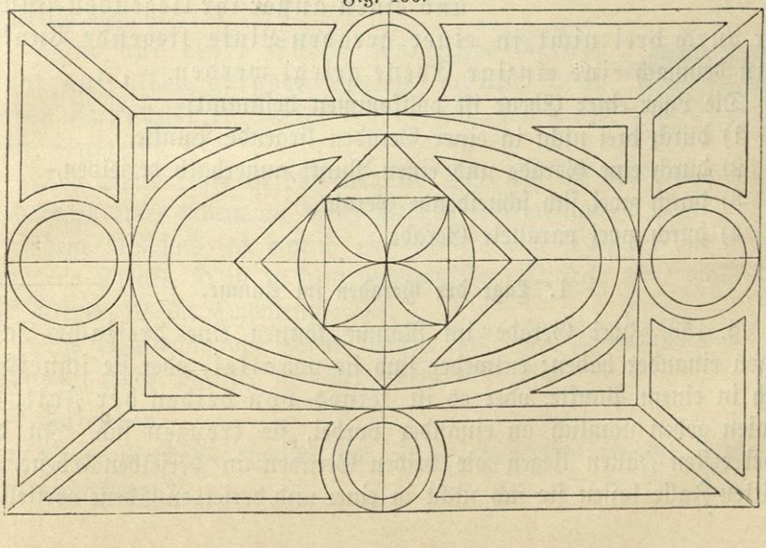
Flächeninhalt $= 19\frac{1}{4} \times 3\frac{1}{7} = 60\frac{1}{2}\ dm^2$.

Aufgaben.

1. Die kleine Achse der Ellipse sei 3 *dm*, die Excentricität 8 *dm*; wie groß ist die halbe große Achse?
2. Die Excentricität einer Ellipse ist 1·6 *m*, die große Achse 6·8 *m*; wie groß ist die kleine Achse?
3. Ein Gärtner hat eine Ellipse zu construieren, deren Achsen 522 *cm* und 378 *cm* betragen; wie weit muss er die Brennpunkte von einander nehmen?
4. Ein Blumenbeet hat die Form einer Ellipse von $4\frac{1}{2}$ *m* Länge und $3\frac{3}{4}$ *m* Breite; wie groß ist der Flächenraum?
5. Eine Untertasse in Form einer Ellipse, deren Achsen 26 *cm* und 15 *cm* betragen, soll gehäkelt werden; wie viel kurze Maschen wird man ausführen müssen, wenn 1 cm^2 36 kurze Maschen erfordert?
6. Wie groß ist der Flächeninhalt einer Ellipse, deren kleine Achse 7·2 *dm* ist, und deren Brennpunkte 3 *dm* von einander abstehen?

Zeichenübung.

Fig. 136.



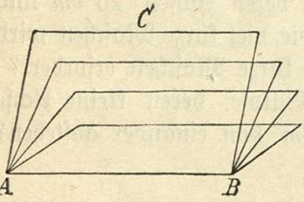
Stereometrie.

XI. Gerade Linien und Ebenen im Raume.

Bestimmung der Ebenen.

§. 152. Durch zwei Punkte A und B (Fig. 137) wird eine Gerade vollkommen bestimmt, d. h. es läßt sich durch zwei Punkte eine einzige gerade Linie ziehen. Legt man nun durch diese Gerade AB eine Ebene, so kann man diese rings um die Gerade herumdrehen, wodurch sie unzählig viele verschiedene Lagen einnimmt. Durch zwei Punkte oder durch eine Gerade ist demnach eine Ebene nicht bestimmt. Nimmt man aber außer der Geraden noch einen dritten Punkt C an, so wird es unter jenen unzählig vielen Lagen, welche die Ebene während ihrer Umdrehung annehmen kann, eine einzige geben, in welcher die Ebene durch die Gerade AB und den außer ihr liegenden Punkt C geht. Durch eine Gerade und einen außer ihr liegenden Punkt oder durch drei nicht in einer geraden Linie liegende Punkte kann demnach eine einzige Ebene gelegt werden.

Fig. 137.



Die Lage einer Ebene ist vollkommen bestimmt:

1) durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte,
2) durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derselben,
3) durch zwei sich schneidende Gerade,
4) durch zwei parallele Gerade.

1. Lage der Geraden im Raume.

§. 153. Zwei Gerade im Raume können eine dreifache Lage gegen einander haben; entweder sind sie parallel, oder sie schneiden sich in einem Punkte, oder es ist keines von beiden der Fall; die Linien gehen nämlich an einander vorbei, sie kreuzen sich. In den zwei ersten Fällen liegen die beiden Geraden in derselben Ebene, im dritten Falle lassen sie sich nicht in einer und derselben Ebene vorstellen.

Aufgaben.

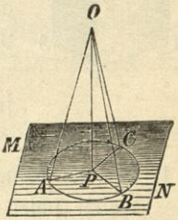
1. Gib gerade Linien im Schulzimmer an, welche parallel sind; ferner solche, welche sich schneiden; und endlich auch solche, welche sich kreuzen.
2. Welche Lage gegen einander können oder müssen a) zwei verticale, b) eine verticale und eine horizontale, c) eine verticale und eine schräge, d) zwei horizontale, e) eine horizontale und eine schräge, f) zwei schräge Gerade haben?

§. 154. Eine Gerade ist mit einer Ebene parallel, wenn alle ihre Punkte von der Ebene gleichweit abstehen, so dass die Gerade nach beiden Seiten beliebig verlängert, mit der nach allen Richtungen erweiterten Ebene nicht zusammentrifft; im entgegengesetzten Falle ist die Gerade gegen die Ebene geneigt und schneidet dieselbe, genügend verlängert, in einem Punkte.

Der Punkt, in welchem eine Gerade mit einer Ebene zusammentrifft, wird der Fußpunkt der Geraden in dieser Ebene genannt.

Eine gegen die Ebene geneigte Gerade kann auf derselben senkrecht oder schief aufstehen. Eine gerade Linie heißt auf einer Ebene senkrecht, wenn sie sich nach keiner Seite hin gegen die Ebene mehr neigt als nach einer andern Seite; sonst heißt sie auf der Ebene schief.

Fig. 138.



Dreht man ein rechtwinkliges Dreieck APO (Fig. 138) um die eine Kathete OP herum, so beschreibt die zweite Kathete AP während dieser Drehung eine Ebene, auf welcher die erste Kathete OP senkrecht steht.

Eine auf einer Ebene senkrechte Gerade steht auf allen geraden Linien, welche durch ihren Fußpunkt in dieser Ebene gezogen werden, senkrecht.

Die Senkrechte ist die kürzeste Strecke, die von einem Punkte außerhalb einer Ebene zu dieser gezogen werden kann. Denn: ist OP $\perp$ Ebene MN und OA irgend eine andere von O zu der Ebene schief gezogene Strecke, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke APO die Kathete OP kleiner als die Hypotenuse OA.

Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Ebene gibt die Entfernung jenes Punktes von der Ebene an.

Aufgaben.

1. Welche Linien im Zimmer sind mit dem Fußboden parallel, welche mit einer Wand?

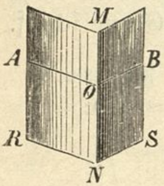
2. Nenne gerade Linien im Schulzimmer, die auf dem Fußboden, und solche, die auf den Wänden senkrecht stehen.
3. Welche Lage gegen einander haben eine verticale Gerade und a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schiefe Ebene?
4. Welche Lage gegen einander können oder müssen eine horizontale Gerade und a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schiefe Ebene haben?
5. Welche Lage gegen einander können oder müssen eine schiefe Gerade und a) eine verticale, b) eine horizontale, c) eine schiefe Ebene haben?

2. Lage der Ebenen gegen einander.

§. 155. Zwei Ebenen sind entweder parallel, wenn sie nämlich überall gleichweit von einander abstehen, so dass sie auch noch so weit erweitert nie zusammentreffen; oder gegen einander geneigt, wenn sie hinlänglich erweitert zusammentreffen.

Der Abstand zweier paralleler Ebenen ist die Senkrechte, welche von einem Punkte der einen auf die andere gefällt wird.

Fig. 139.



Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich, hinlänglich erweitert, in einer geraden Linie. Der Winkel AOB (Fig. 139), den die Senkrechten bilden, die man in irgend einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen auf dieselbe in den beiden Ebenen errichtet, heißt der Neigungswinkel dieser Ebenen.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so heißen sie aufeinander senkrecht, sonst schief.

Aufgaben.

1. Welche Ebenen im Schulzimmer sind parallel; welche stehen senkrecht, welche schief auf einander?
2. Können a) zwei verticale, b) zwei horizontale, c) zwei schiefe Ebenen sich schneiden?
3. Welche Lage gegen einander können oder müssen a) zwei verticale Ebenen, b) eine verticale und eine horizontale Ebene, c) eine verticale und eine schiefe Ebene, d) zwei horizontale Ebenen, e) eine horizontale und eine schiefe Ebene, f) zwei schiefe Ebenen haben?

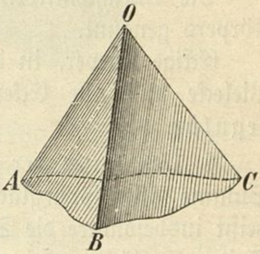
3. Körperecken.

§. 156. Der nach einer Seite unbegrenzte Raum, den mehrere sich schneidende und in einem Punkte zusammenstoßende Ebenen einschließen, heißt ein körperlicher Winkel oder eine Ecke; z. B. die Ecke eines

Zimmers, eines Kastens. Die Geraden, in denen sich je zwei auf einander folgende Ebenen durchschneiden, nennt man die **Kanten**, und den Punkt, in welchem alle Ebenen zusammenstoßen, den **Scheitel** oder die **Spitze** des Körperwinkels. Ein Winkel, welcher von zwei auf einander folgenden Kanten gebildet wird, heißt ein **Kantenwinkel**.

Um einen Körperwinkel zu benennen, gibt man entweder bloß den Buchstaben am Scheitel an, oder man nennt auch die Buchstaben an allen Kanten, so jedoch, dass der Buchstabe am Scheitel zuerst gesetzt wird. Die Ecke (Fig. 140) heißt die Ecke O, oder die Ecke OABC; O ist die Spitze; OA, OB, OC sind die Kanten, AOB, BOC, COA die Kantenwinkel.

Fig. 140.



Von zwei Ebenen kann keine Ecke gebildet werden, weil dieselben in einer geraden Linie, und nicht bloß in einem Punkte zusammenstoßen; zur Entstehung einer Ecke sind also wenigstens drei Ebenen erforderlich. Eine Ecke heißt **dreiseitig**, **vierseitig** . ., je nachdem sie von drei, vier, . . Ebenen gebildet wird.

§. 157. **In jeder Ecke ist die Summe der Kantenwinkel kleiner als vier Rechte.**

Denn würden alle Kantenwinkel zusammen vier Rechte betragen, so müssten alle Seitenebenen in eine einzige Ebene hineinfallen und könnten daher keine Ecke bilden.

Wenn mehrere ebene Winkel zusammen 360° oder mehr als 360° betragen, so können sie keine Ecke bilden.

XII. Körper im allgemeinen und ihre Netze.

Eintheilung der Körper.

§. 158. Man unterscheidet **eckige** und **runde Körper**; erstere werden von lauter Ebenen eingeschlossen, letztere entweder von ebenen und gekrümmten Flächen, oder von einer einzigen gekrümmten Fläche. So ist der Würfel ein eckiger Körper; eine Walze, eine Kugel sind runde Körper.

Wenn ein Körper auf einer Ebene aufliegt, so heißt diese die **Grundfläche**; und wenn mit dieser als Grundfläche betrachteten Ebene eine zweite Ebene parallel läuft, so sagt man: der Körper hat zwei parallele Grundflächen. Bei dem Würfel z. B. kann jede Fläche als Grundfläche betrachtet werden; eine Walze hat zwei Grundflächen, nämlich die beiden Kreisflächen. Die übrigen Grenzflächen eines Körpers werden Seitenflächen genannt.

Drei Ebenen bilden eine Ecke, schließen aber noch keinen Raum ein. Damit ein Raum nach allen Seiten abgeschlossen, d. i. damit ein Körper gebildet werde, sind wenigstens vier Ebenen erforderlich.

Die Durchschnittslinie je zweier Grenzebenen wird eine Kante des Körpers genannt.

Eckige Körper, in denen alle Grenzflächen congruente regelmäßige Vielecke und alle Ecken congruent sind, heißen regelmäßig oder regulär.

§. 159. Unter der Oberfläche eines Körpers versteht man die Summe aller Grenzflächen desselben. Die Summe der Seitenflächen heißt insbesondere die Seitenoberfläche des Körpers. Die gekrümmte Seitenoberfläche heißt auch Mantelfläche.

Um die Oberfläche eines Körpers geometrisch darzustellen, construiert man alle Grenzflächen desselben zusammenhängend in einer einzigen Ebene. Eine solche Zeichnung heißt das Netz des Körpers.

Die Körpernetze dienen nicht bloß zur Bestimmung der Oberfläche, sondern auch, indem man sie gehörig ausschneidet und zusammenfügt, zur Anfertigung von Modellen der Körper.

Der Raum, welchen die Oberfläche eines Körpers einschließt, heißt dessen Cubikinhalt oder Volumen.

Regelmäßige Körper.

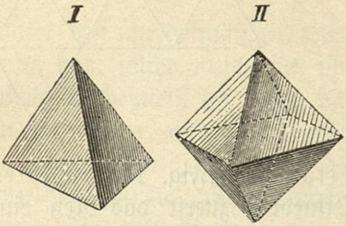
§. 160. Aus dem Satze, dass die Summe aller Kantenwinkel einer Ecke kleiner als 360° sein muss (§. 157), folgt, dass es nur fünf regelmäßige Körper geben kann.

Denn der Winkel eines regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes beträgt 60°; von solchen Winkeln können drei, vier oder auch fünf eine Ecke bilden; aus sechs oder mehr als sechs solchen Winkeln aber kann keine Ecke entstehen, da ihre Summe 360° oder mehr als 360° beträgt. Von gleichseitigen Dreiecken können daher nur drei regelmäßige Körper begrenzt werden, nämlich das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder.

Das Tetraeder oder der Vierflach (Fig. 141, I) wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei in einer Ecke zusammenstoßen; es hat 4 Ecken und 6 Kanten.

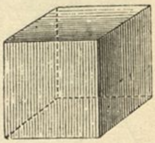
Das Oktaeder oder der Achtflach (Fig. 141, II) wird von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier eine Ecke bilden; es hat 6 solche Ecken und 12 Kanten.

Fig. 141.



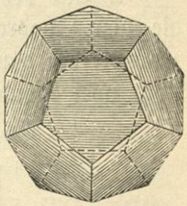
Das Ikosaeder oder der Zwanzigflach (Fig. 141, III) wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, deren je fünf eine Ecke bilden; es hat 12 Ecken und 30 Kanten.

Fig. 142.



Der Winkel eines regelmäßigen Viereckes (Quadrates) ist ein rechter; von solchen Winkeln können nur drei in einer Ecke zusammentreffen; aus vier oder mehr als vier rechten Winkeln kann keine Ecke gebildet werden. Es gibt daher einen einzigen von Quadraten begrenzten Körper; er heißt Hexaeder, auch Sechsflach, Cubus oder Würfel. Das Hexaeder (Fig. 142) wird von sechs Quadraten eingeschlossen und hat 8 dreiseitige Ecken und 12 Kanten.

Fig. 143.



Der Winkel eines regelmäßigen Fünfeckes beträgt 108°; von solchen Winkeln können nur drei eine Ecke bilden. Es gibt daher einen einzigen von regelmäßigen Fünfecken begrenzten regelmäßigen Körper. Dieser heißt das Dodekaeder oder der Zwölfflach (Fig. 143) und hat 12 Seitenflächen, 20 dreiseitige Ecken und 30 Kanten.

Im regelmäßigen Sechsecke ist jeder Winkel 120°. Von solchen Winkeln wie auch von den Winkeln eines regelmäßigen Vieleckes von mehr als sechs Seiten kann keine Ecke gebildet werden.

Es gibt daher nur fünf regelmäßige Körper.

§. 161. 1. Um das Netz eines Tetraeders (Fig. 144) zu erhalten, construiere man mit der Kante des Tetraeders ein gleichseitiges Dreieck und sodann über jede Seite wieder ein gleichseitiges Dreieck.

Fig. 144.

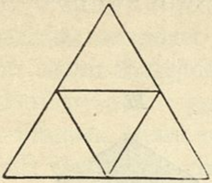
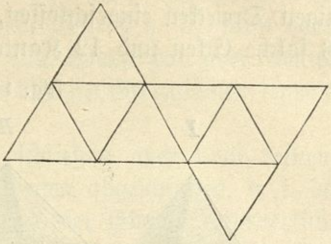


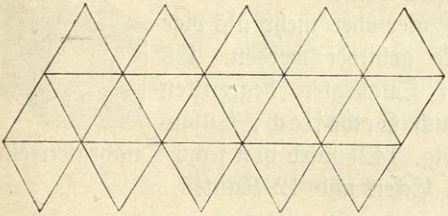
Fig. 145.



2. Das Netz eines Oktaeders (Fig. 145) wird erhalten, wenn man mit der Kante des Oktaeders zuerst das Netz eines Tetraeders zeichnet und dann an dieses ein zweites mit ihm congruentes Netz so anlegt, dass beide Netze eine Seite gemeinschaftlich haben.

3. Das Netz eines Ikosaeders (Fig. 146) erhält man, wenn man auf eine Gerade die Kante des Ikosaeders 5mal aufträgt, über diesen Strecken nach oben und unten gleichseitige Dreiecke construiert, dann alle Scheitel auf einer Seite durch eine Strecke verbindet, und längs derselben, nachdem sie verlängert wird, wieder gleichseitige Dreiecke zeichnet, so dass ihrer auf jeder Seite fünf erscheinen.

Fig. 146.



4. Das Netz des Würfels (Fig. 147) erhält man, wenn man die vier Quadrate, welche die Seitenoberfläche bilden, nebeneinander zeichnet und dann an den entgegengesetzten Seiten eines dieser Quadrate noch zwei Quadrate construiert.

Fig. 147.

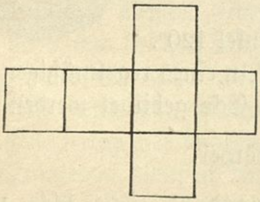
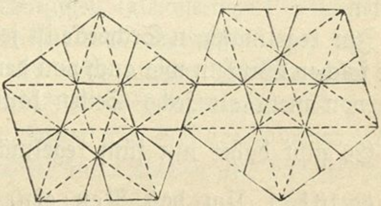


Fig. 148.



5. Um das Netz des Dodekaeders (Fig. 148) zu construieren, zeichne man mit der Kante des Dodekaeders ein regelmäßiges Fünfeck,

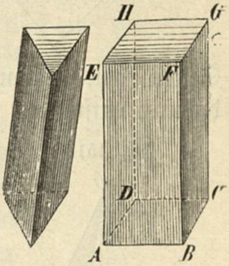
beschreibe über den Seiten desselben wieder regelmäßige Fünfecke (wobei man sich mit Vortheil der Verlängerung der Diagonalen bedient), und lege an dieses Netz ein zweites mit ihm congruentes so an, dass beide in einer Seite zusammenstoßen.

Das Prisma.

§. 162. Unter den unregelmäßigen Körpern kommen besonders zwei Arten sehr häufig vor; solche, welche sich über der Grundfläche in durchaus gleicher Weite ausdehnen, bei denen daher die Seitenkanten parallel sind, sie heißen Prismen; und solche, welche über der Grundfläche in eine Spitze zusammenlaufen, bei denen nämlich alle Seitenkanten in einem und demselben Punkte zusammentreffen, sie heißen Pyramiden.

Ein Prisma (Fig. 149) ist ein Körper, welcher von zwei congruenten und parallel gestellten Vielecken und von so vielen Parallelogrammen, als eines der Vielecke Seiten hat, begrenzt wird. Man kann sich ein Prisma ABCDEFGH dadurch entstanden denken, dass sich eine geradlinige Figur ABCD aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade und mit einander parallele Linien beschreiben.

Fig. 149.



Die Grundflächen eines Prisma sind congruente und parallel liegende Vielecke, die Seitenflächen sind Parallelogramme. Die Seitenkanten eines Prisma sind unter einander gleich und parallel. Der Abstand der beiden Grundflächen heißt die Höhe des Prisma.

Sieht man auf die Anzahl der Seitenkanten, so heißt das Prisma drei-, vier- oder mehrseitig, je nachdem es drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

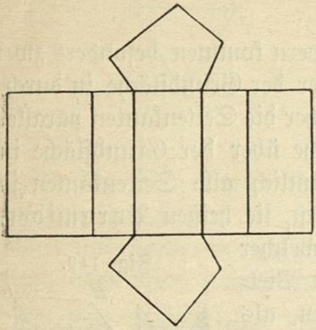
Nimmt man auf die Lage der Seitenkanten gegen die Grundfläche Rücksicht, so ist das Prisma ein gerades oder ein schiefes, je nachdem die Seitenkanten auf der Grundfläche senkrecht oder schief stehen. In einem geraden Prisma ist die Höhe gleich einer Seitenkante; die Seitenflächen sind Rechtecke.

Ein Prisma, dessen Grenzflächen Parallelogramme sind, heißt ein Parallelepiped. Dieses ist, wie jedes Prisma, entweder gerade oder schief.

Ein Prisma, dessen Grenzflächen Rechtecke sind, heißt ein rechtwinkliges Parallelepiped. Ein rechtwinkliges Parallelepiped muss immer auch ein gerades sein.

Ein Prisma, das von lauter Quadraten eingeschlossen wird, heißt ein **Würfel**, **Cubus**. Jeder Würfel ist ein rechtwinkliges Parallelepiped; es hat gleiche Kanten und congruente Grenzflächen.

Fig. 150.

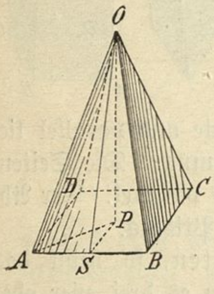


Um das Netz des Prisma (Fig. 150) zu erhalten, zeichne man die Parallelogramme (Rechtecke), welche die Seitenoberfläche bilden, so neben einander, dass je zwei eine gemeinschaftliche Seite haben, und construiere dann über und unter einem dieser Parallelogramme die Grundflächen.

Die Pyramide.

§. 163. Eine **Pyramide** (Fig. 151) ist ein Körper, der von irgend einem Vielecke und von so vielen Dreiecken, als das Vieleck Seiten hat, begrenzt wird. Man kann sich eine Pyramide OABCD dadurch entstanden denken, dass sich eine geradlinige Figur ABCD aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in stetig abnehmender Größe so fortbewegt, dass ihre Eckpunkte gerade und in einem Punkte zusammentreffende Linien beschreiben.

Fig. 151.



Die Grundfläche einer Pyramide ist irgend ein Vieleck, die Seitenflächen sind immer Dreiecke. Der Punkt, in welchem alle Seitenflächen zusammenstoßen, heißt der **Scheitel** oder die **Spitze**, die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die **Höhe** der Pyramide.

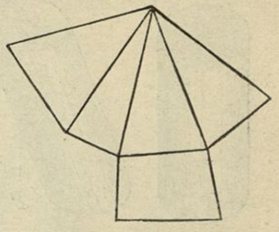
Eine Pyramide ist **drei-**, **vier-** oder **mehrseitig**, je nachdem sie drei, vier oder mehrere Seitenkanten hat.

Eine Pyramide, in welcher alle Seitenkanten gleich sind, heißt **gerade**, jede andere **schief**. Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Sehnenvieleck, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt der Höhe ist; die Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke.

Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist, heißt **regelmäßig**. Die Seitenflächen einer solchen Pyramide sind congruente gleichschenklige Dreiecke; die Höhe eines jeden derselben heißt die **Seitenhöhe** der regelmäßigen Pyramide. Die Seitenhöhe einer regelmäßigen Pyramide ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, welches den Abstand der Mitte der Grundfläche von einer Seite und die Höhe der Pyramide zu Katheten hat.

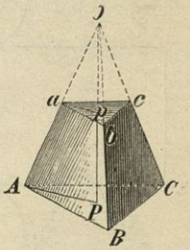
Das Netz einer Pyramide (Fig. 152) erhält man, wenn man zuerst die Seitendreiecke nebeneinander so construiert, dass sie den Scheitel gemeinschaftlich haben, und an eines dieser Dreiecke unten die Grundfläche anlegt.

Fig. 152.



§. 164. Wird eine Pyramide parallel mit der Grundfläche durch eine Ebene geschnitten, so ist der Schnitt, da die Pyramide nach oben gleichförmig abnimmt, der Grundfläche ähnlich. Die Pyramide zerfällt durch einen solchen Querschnitt in zwei Theile, eine kleinere Pyramide und einen zwischen zwei parallelen Ebenen enthaltenen Körper, den man eine abgekürzte Pyramide oder einen Pyramidenstumpf nennt.

Fig. 153.



Ein Pyramidenstumpf ABCabc (Fig. 153) ist daher der Unterschied zwischen zwei Pyramiden OABC und Oabc, deren Grundflächen die untere und die obere Grundfläche der abgekürzten Pyramide sind, und deren gemeinschaftlicher Scheitel O in dem Durchschnitte der verlängerten Seitenkanten des Stumpfes liegt. Die Entfernung der beiden Grundflächen ist die Höhe des Pyramidenstumpfes. Die Seitenflächen eines Pyramidenstumpfes sind Trapeze. Ist der Pyramidenstumpf regelmäßig, so sind die Trapeze gleichschenklig und congruent; die Höhe eines solchen Trapezes heißt die Seitenhöhe des Stumpfes.

Der Cylinder.

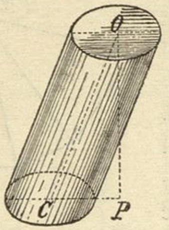
§. 165. Ein Cylinder ist ein Körper, welcher von zwei gleichen parallelen Kreisen und von einer gekrümmten Fläche begrenzt wird. Ein Cylinder kann als ein Prisma betrachtet werden, dessen Grundflächen Kreise sind. Man kann sich einen Cylinder dadurch entstanden denken, dass sich eine Kreisfläche aus ihrer Ebene heraus mit ihrer ursprünglichen Lage parallel in unveränderter Größe so fortbewegt, dass der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt.

Die gekrümmte Seitenfläche des Cylinders heißt der Mantel desselben. Die Gerade, welche die Mittelpunkte der beiden Kreisflächen verbindet, wird die Achse, und der Abstand der beiden Kreisflächen die Höhe des Cylinders genannt.

Steht die Achse auf der Grundfläche senkrecht, so heißt der Cylinder ein gerader (Fig. 154), sonst ein schiefer (Fig. 155). Einen geraden Cylinder kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein Rechteck um eine seiner Seiten herumdreht. In einem geraden Cylinder stellt die Achse zugleich die Höhe vor.

Fig. 154.

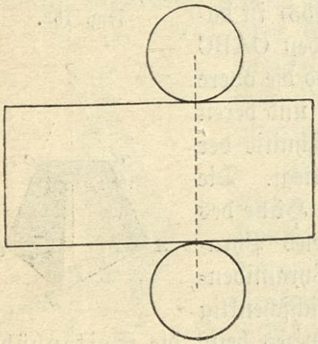
Fig. 155.



Ist in einem geraden Cylinder die Achse dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt er ein gleichseitiger Cylinder.

Denkt man sich die Mantelfläche eines geraden Cylinders vom Cylinder trennbar (z. B. als Papierhülle) und nach der Richtung einer Seite durchschnitten, so bildet dieselbe, wenn man sie auf eine Ebene ausbreitet, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist. Um daher das Netz eines geraden Cylinders (Fig. 156) zu construieren, zeichne man ein Rechteck, dessen Grundlinie $3\frac{1}{7}$ mal so groß ist als der Durchmesser der Grundfläche, und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist, und beschreibe sodann zwei der Grundfläche gleiche Kreise, von denen der eine die Grundlinie, der andere die gegenüberliegende Seite des Rechteckes berührt.

Fig. 156.



Der Kegel.

§. 166. Ein Kegel ist ein Körper, der von einem Kreise und von einer in einen Punkt auslaufenden gekrümmten Fläche begrenzt wird. Ein Kegel kann als eine Pyramide betrachtet werden, deren Grundfläche ein Kreis ist. Man kann sich einen Kegel dadurch entstanden denken, dass sich eine Kreisfläche aus ihrer Ebene heraus mit ihrer anfänglichen Lage parallel in stetig bis zu einem Punkte abnehmender Größe so fortbewegt, dass der Mittelpunkt stets in derselben Geraden bleibt.

Die gekrümmte Seitenfläche des Kegels nennt man den Mantel, und den Punkt, in welchen sie zusammenläuft, den Scheitel oder die Spitze des Kegels. Die Mantelfläche eines Kegels ist so beschaffen, dass jede Strecke, welche von der Spitze zum Umfange der Grundfläche gezogen wird, ganz in diese gekrümmte Fläche fällt. Eine solche Strecke heißt eine Seite des Kegels. Die Strecke von der Spitze zum Mittelpunkte der Grundfläche heißt die Achse, und die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche die Höhe des Kegels.

Ein Kegel, dessen Achse auf der Grundfläche senkrecht steht, heißt ein gerader (Fig. 157), jeder andere ein schiefer (Fig. 158). Einen geraden Kegel kann man sich dadurch entstanden denken, dass sich ein rechtwinkliges Dreieck um eine seiner Katheten herumdreht. In einem geraden Kegel ist die Achse gleich der Höhe und alle Seiten sind einander gleich. Die Seite eines geraden Kegels ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, welches den Halbmesser der Grundfläche und die Höhe des Kegels zu Katheten hat.

Fig. 157.

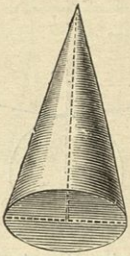
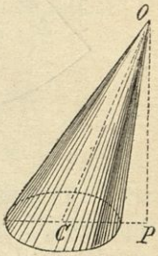


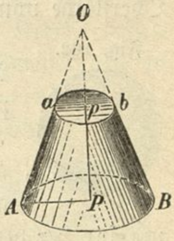
Fig. 158.



Ist in einem geraden Kegel die Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich, so heißt er ein gleichseitiger Kegel.

§. 167. Wird (Fig. 159) ein Kegel durch eine Ebene ab geschnitten, welche mit der Grundfläche parallel ist, so zerfällt er in zwei Körper, einen kleineren Kegel, und einen zwischen zwei parallelen Kreisflächen enthaltenen Körper, welcher ein abgekürzter Kegel oder ein Kegelstumpf genannt wird. Ein Kegelstumpf ABba ist daher der Unterschied zweier Kegel, welche die Grundflächen des Stumpfes zu ihren Grundflächen haben, und deren Scheitel der Punkt ist, in welchem die erweiterte Mantelfläche des Stumpfes zusammenläuft. Die Entfernung Pp der beiden Kreisflächen ist die Höhe des Kegelstumpfes. Eine Strecke, welche von dem Umfange der oberen Grundfläche längs der Mantelfläche bis zum Umfang der unteren Grundfläche gezogen wird, nennt man eine Seite des abgekürzten Kegels, z. B. aA.

Fig. 159.



§. 168. 1. Wird die Mantelfläche eines geraden Kegels auf eine Ebene ausgebreitet, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Halbmesser die Seite des Kegels, und dessen Bogenlänge der Umfang der Grundfläche des Kegels ist. Um daher das Netz eines geraden Kegels (Fig. 160) zu erhalten, zeichne man mit der Seite als Halbmesser einen Kreisausschnitt, dessen Bogenlänge eben so groß ist als der Umfang der Grundfläche des Kegels, und construiere dann einen der Grundfläche gleichen Kreis, welcher den Bogen des Kreisausschnittes berührt.

Fig. 160.

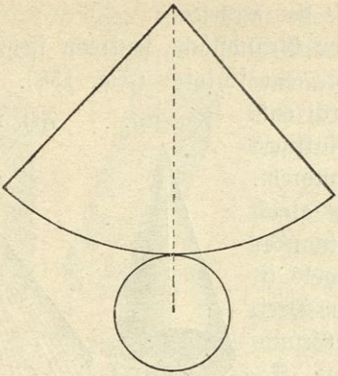
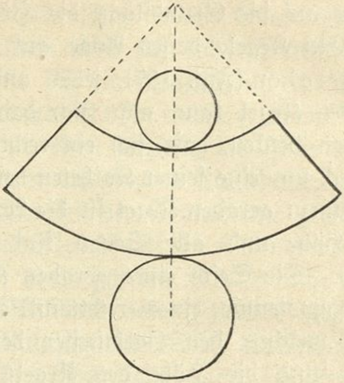


Fig. 161.

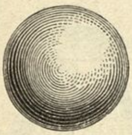


2. Wird die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes auf eine Ebene abgewickelt, so erscheint sie als ein Theil eines Kreisringes. Fig. 161 stellt das Netz eines geraden Kegelstumpfes dar.

Die Kugel.

§. 169. Eine Kugel (Fig. 162) ist ein Körper, welcher von einer einzigen gekrümmten Fläche so begrenzt wird, dass jeder Punkt der Oberfläche von einem innerhalb liegenden Punkte gleich weit absteht.

Fig. 162.



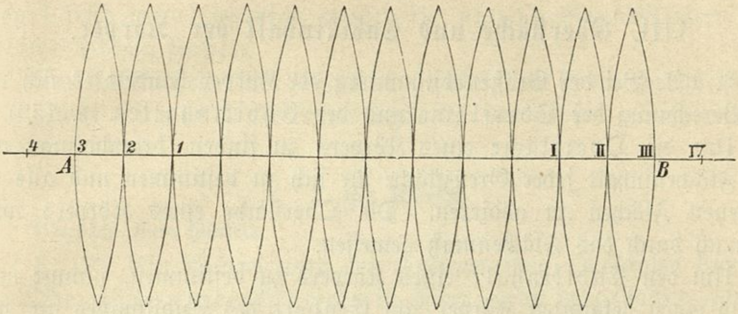
Dieser innerhalb der Kugel liegende Punkt heißt der Mittelpunkt derselben. Eine Strecke, welche vom Mittelpunkte bis an die Oberfläche gezogen wird, heißt ein Halbmesser; eine Strecke, welche von einem Punkte der Oberfläche durch den Mittelpunkt bis zu dem entgegengesetzten Punkte der Oberfläche geht, wird ein Durchmesser der Kugel genannt.

Man kann sich jede Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um den Durchmesser entstanden denken. Dieser Durchmesser heißt dann die Achse, und dessen Endpunkte sind die Pole der Kugel. Die einzelnen Lagen der sich drehenden Kreislinie heißen Meridiane und die Kreislinien, welche die einzelnen Punkte der sich drehenden Kreislinie beschreiben, Parallelkreise.

Die Oberfläche der Kugel läßt sich, da sie doppelt gekrümmt ist, nicht in eine Ebene ausbreiten; daher kann von der Kugelfläche auch kein vollkommen genaues Netz construiert werden. Ein angenähertes Netz der Kugel (Fig. 163) erhält man durch folgendes Verfahren:

Man theile eine Strecke AB, welche $3\frac{1}{7}$mal so groß ist als der Durchmesser der Kugel, in 12 gleiche Theile und trage auf deren Ver-

Fig. 163.



längerungen über A und B hinaus noch je 9 solche Theile auf. Beschreibt man dann mit einem Halbmesser von 10 solchen Theilen aus den Punkten 1, 2, 3, ..., und ebenso aus den Punkten I, II, III, . . . Kreisbogen, welche die Gerade AB schneiden, so erhält man 12 gleiche Zweiecke, welche gehörig zusammengebogen ziemlich genau die Kugelfläche geben.

§. 170. Schneidet man eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Schnittfläche ein Kreis, welcher um so größer ist, je näher am Mittelpunkte der Schnitt gemacht wird. Am größten wird er, wenn die Schnittfläche durch den Mittelpunkt geht; ein solcher Kreis, dessen Mittelpunkt im Mittelpunkte der Kugel liegt, dessen Halbmesser also so groß ist als der Halbmesser der Kugel, heißt ein größter Kreis der Kugel.

Fig. 164.

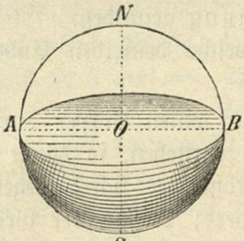
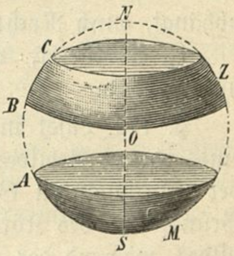


Fig. 165.



Durch den Schnitt einer Kugel durch eine Ebene zerfällt die Kugel in zwei Theile, welche man Kugelabschnitte nennt, und welche unter einander gleich oder ungleich sind, je nachdem die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel oder außerhalb desselben geht; im ersten Falle heißt jeder der beiden Kugelabschnitte eine Halbkugel (Fig. 164). Die gekrümmte Oberfläche eines Kugelabschnittes ASM (Fig. 165) heißt eine Kugelmütze oder Calotte.

Wird eine Kugel durch zwei parallele Ebenen durchschnitten, so heißt der zwischen ihnen befindliche Theil der Kugel eine Kugelschicht, und der dazu gehörige Theil BCZ (Fig. 165) der Kugeloberfläche eine Kugelzone (Gürtel).

XIII. Oberfläche und Cubikinhalt der Körper.

§. 171. Bei der Größenbestimmung der Körper handelt es sich um die Berechnung der Oberfläche und des Cubikinhaltes (§. 159).

Um die Oberfläche eines Körpers zu finden, braucht man nur den Flächeninhalt jeder Grenzfläche für sich zu bestimmen und alle gefundenen Flächen zu addieren. Die Oberfläche eines Körpers wird demnach durch das Flächenmaß gemessen.

Um den Cubikinhalt eines Körpers zu bestimmen, nimmt man irgend einen bekannten Körper als Einheit des Cubikmaßes an, und untersucht, wie oft derselbe in dem zu bestimmenden Körper enthalten ist. Die Zahl, welche dieses angibt, heißt die Maßzahl für den Cubikinhalt des Körpers.

Als Einheit des Cubikmaßes nimmt man einen Würfel oder Cubus an, dessen Kante der Längeneinheit gleich ist, und welcher ein Cubikmeter (m^3), ein Cubikdecimeter (dm^3), . . . heißt, je nachdem die entsprechende Längeneinheit ein Meter, ein Decimeter, . . . ist.

Einen Körper messen heißt also untersuchen, wie viel Cubikmeter, Cubikdecimeter u. s. w. in demselben enthalten sind. Es würde zu mühsam und in vielen Fällen unausführbar sein, diese Untersuchung durch wirkliches Neben- und Aufeinanderlegen der Cubikeinheit vorzunehmen; einfacher wird der Cubikinhalt eines Körpers mittelbar aus dem Maße der Linien und Flächen, von denen die Größe desselben abhängt, durch Rechnung gefunden.

Zwei Körper, welche denselben Cubikinhalt haben, heißen inhaltsgleich.

§. 172. Läßst man einen Körper durch die Parallelbewegung eines ebenen Gebildes entstehen, so hängt sein Cubikinhalt ab: 1. von der ursprünglichen Größe des sich bewegenden Gebildes, d. i. von der Grundfläche des Körpers; 2. von der Größe des sich bewegenden Gebildes während des Verlaufs der ganzen Bewegung, und 3. von der Entfernung der letzten Stellung des Gebildes von der ursprünglichen Stellung, d. i. von der Höhe des Körpers.

Bleibt die Größe der Grundfläche während der Parallelbewegung unverändert, wie bei dem Prisma und dem Cylinder, oder nimmt sie stetig ab, bis sie in einem Punkte verschwindet, wie bei der Pyramide und dem Kegel, so hängt dann der Cubikinhalt bloß von der Grundfläche und von der Höhe ab. Daraus folgt:

Zwei Prismen, zwei Cylinder, zwei Pyramiden oder zwei Kegel sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben.

Der Cubikinhalt einer Kugel hängt bloß von ihrem Halbmesser ab.

Zwei Kugeln sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Halbmesser haben.

1. Der Würfel.

Oberfläche eines Würfels.

§. 173. Ein Würfel wird von 6 congruenten Quadraten begrenzt; die Oberfläche eines Würfels ist daher gleich dem 6fachen Flächeninhalte einer Grenzfläche.

Bezeichnet s die Maßzahl einer Seite, so ist s^2 die Maßzahl für den Flächeninhalt einer Grenzfläche, daher die Oberfläche

$$0 = 6\ s^2, \text{ und umgekehrt } s = \sqrt{\frac{0}{6}}.$$

Cubikinhalt eines Würfels.

§. 174. Ist die Länge der Seite eines Würfels 2 *dm*, so beträgt die Grundfläche $2 \times 2\,dm^2 = 4\,dm^2$. Es lassen sich demnach auf der Grundfläche 4 dm^3 auflegen, und zwar bis zu einer Höhe von 1 *dm*, und von da bis zur Höhe von 2 *dm* liegt noch eine Schichte von 4 dm^3; also enthält der Würfel

$$4 \times 2\ dm^3 = 2 \times 2 \times 2\ dm^3 = 8\ dm^3.$$

Um dieses zu versinnlichen, schneide man sich 8 kleine und gleiche Würfel aus, und lege diese gehörig neben und auf einander.

Man überzeugt sich auf gleiche Weise, dass ein Würfel, dessen Seite 3 *dm* ist, $3 \times 3 \times 3\ dm^3 = 27\ dm^3$,
„ 4 *m* „ $4 \times 4 \times 4\ m^3 = 64\ m^3$,
„ 5 *cm* „ $5 \times 5 \times 5\ cm^3 = 125\ cm^3$, u. s. w. enthält.

Der Cubikinhalt eines Würfels wird also gefunden, indem man die Maßzahl einer Seite (Kante) dreimal als Factor setzt oder zur dritten Potenz erhebt.

Darum wird auch im Rechnen die dritte Potenz einer Zahl der Cubus derselben genannt.

Bezeichnet s die Länge einer Seite und c den Cubikinhalt eines Würfels, so ist $c = s^3$.

Heißt S die Seite und C der Cubikinhalt eines zweiten Würfels, so ist $C = S^3$, daher

$$C : c = S^3 : s^3; \text{ d. h.}$$

die Cubikinhalte zweier Würfel verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Seiten.

Ein Würfel, dessen Seite 10 *dm* beträgt, hat

$$10 \times 10 \times 10\ dm^3 = 1000\ dm^3.$$

Ein solcher Würfel ist nun 1 Cubikmeter; also ist

$$1\ m^3 = 1000\ dm^3.$$

Eben so folgt $1\ dm^3 = 1000\ cm^3$,

$$1\ cm^3 = 1000\ mm^3.$$

1 Cubikdecimeter heißt als Hohlmaß ein Liter; 100 Liter = 1 Hektoliter.

§. 175. Aufgaben.

1. Berechne die Oberfläche und den Cubikinhalt eines Würfels, dessen Seite ist:
   a) 12 *dm*, b) 2 *m* 4 *dm*, c) 1·35 *m*,
   d) 27 *cm*, e) 1 *m* 3 *dm* 5 *cm*, f) 0·575 *m*.
2. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 398·535 cm^2; wie groß ist a) die Seite, b) der Cubikinhalt desselben?
3. Es soll ein würfelförmiges, oben offenes Gefäß von 0·38 *m* Kantenlänge angefertigt werden; wie viel m^2 Kupferblech braucht man?
4. Eine Seitenfläche des Würfels beträgt 3 m^2 61 dm^2; wie groß ist a) die Kante, b) der Cubikinhalt?
5. Ein würfelförmiges Gefäß hat 4·8 *dm* innere Weite; wie viel Liter fasst es?
6. An einem Würfel von Granit beträgt jede Seite 1·4 *m*; wie viel wiegt der Würfel, wenn 1 dm^3 Granit 2·7 *kg* wiegt?
7. Die Seiten zweier Würfel sind 4 *cm* und 12 *cm*; wie verhalten sich a) ihre Oberflächen, b) ihre Cubikinhalte?

2. Das Prisma.

Oberfläche eines Prisma.

§. 176. Man berechnet zuerst die Seitenflächen als Parallelogramme, ihre Summe gibt die Seitenoberfläche; dazu addiert man noch die doppelte Grundfläche.

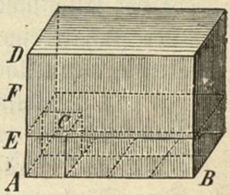
In einem geraden Prisma bildet die Seitenoberfläche, wenn man sich dieselbe auf eine Ebene abgewickelt denkt, ein Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche, und dessen Höhe der Seitenkante des Prisma gleich ist. Man findet daher die Seitenoberfläche eines geraden Prisma, indem man den Umfang der Grundfläche mit einer Seitenkante multipliciert.

In einem rechtwinkligen Parallelepiped sind je zwei gegenüberliegende Rechtecke congruent, daher die Oberfläche doppelt so groß als die Summe der in einer Ecke zusammentreffenden drei Grenzflächen.

Cubikinhalt eines Prisma.

§. 177. Es sei zunächst der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds (Fig. 166), in welchem die Länge AB = 4 *dm*, die Breite AC = 2 *dm*, und die Höhe AD = 3 *dm* ist, zu bestimmen. Da die Grundfläche $4 \times 2\ dm^2 = 8\ dm^2$ enthält, so läßt sich auf ihr ein dm^3 8mal auflegen; das Parallelepiped enthält also bis zu einer Höhe von 1 *dm* eine Schichte von 8 dm^3; zu der Höhe EF gehört eine neue Schichte von 8 dm^3, und zu der Höhe FD wieder eine Schichte von 8 dm^3. Das ganze Parallelepiped hat daher 3mal 8 dm^3 oder $4 \times 2 \times 3\ dm^3 = 24\ dm^3$. — Allgemein lassen sich auf der Grundfläche jedesmal so viele Cubikeinheiten aufstellen, als dieselbe Quadrateinheiten enthält, und es erscheinen so viele solcher Schichten von Würfeln über einander, als die Höhe Längeneinheiten enthält. Man muss daher, um den Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds zu erhalten, die Grundfläche mit der Höhe, oder was gleichviel, die Länge, Breite und Höhe mit einander multiplicieren. Daraus folgt:

Fig. 166.



Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds wird gefunden, indem man die Maßzahlen seiner Länge, Breite und Höhe, oder indem man die Maßzahlen seiner Grundfläche und Höhe multipliciert.

Kürzer sagt man gewöhnlich:

Der Cubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds ist gleich dem Producte aus der Länge, Breite und Höhe oder dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Da jedes Prisma mit einem rechtwinkligen Parallelepiped, das mit ihm gleiche Grundfläche und dieselbe Höhe hat, inhaltsgleich ist (§. 172), so folgt allgemein:

Der Cubikinhalt eines jeden Prisma ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Bezeichnet g die Maßzahl der Grundfläche, h die Maßzahl der Höhe und c den Cubikinhalt eines Prisma, so ist

$$c = g \cdot h, \qquad g = \frac{c}{h}, \qquad h = \frac{c}{g}.$$

1. Berechne die Oberfläche und den Cubikinhalt folgender rechtwinkliger Parallelepipede:

a)	Länge	24 *dm*,	Breite	18 *dm*,	Höhe	36 *dm*;
b)	"	1·26 *m*,	"	1·05 *m*,	"	0·84 *m*;
c)	"	12 *m* 1 *dm* 4 *cm*,	"	1 *m* 7 *dm* 5 *cm*,	"	8 *m* 3 *dm*.

2. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Prisma, dessen Grundfläche 5 dm^2 46 cm^2 und dessen Höhe 3 *dm* 9 *cm* ist?
3. Die Grundfläche eines 6 *dm* hohen geraden Prisma ist ein Quadrat, dessen Seite 5 *dm* 4 *cm* beträgt; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?
4. Der Inhalt eines Prisma ist 5·85 m^3, die Höhe 1·3 *m*; wie groß ist die Grundfläche?
5. In einem rechtwinkligen Parallelepiped ist die Grundfläche 7·3 *dm* lang und 2·4 *dm* breit; wie groß ist die Höhe, wenn der Inhalt 61·32 dm^3 beträgt?
6. Eine Säule mit quadratischer Grundfläche hat 40·353 dm^3 Inhalt und 7·5 *dm* Höhe; wie groß ist eine Grundkante?
7. Eine vierseitige Schachtel, welche 3 *dm* lang, 1·5 *dm* breit und 1·6 *dm* hoch ist, soll mit buntem Papier überzogen werden; wie viel dm^2 Papier braucht man dazu?
8. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt eines vierkantigen Holzes von 2·3 *m* Länge, 0·8 *m* Breite und 0·2 *m* Dicke?
9. Wie viel Hektoliter Getreide kann ein Getreidekasten aufnehmen, wenn die Länge desselben 2 *m*, die Breite 1·3 *m* und die Höhe 1·4 *m* beträgt?
10. Ein Wasserbehälter ist, von außen gemessen, 2 *m* lang, 8 *dm* breit und 5 *dm* hoch; wie viel Liter kann er fassen, wenn die äußeren Wände und der Boden 1 *dm* dick sind?
11. Die Grundfläche eines prismatischen Gefäßes ist ein Rechteck von 2 *m* Länge und 1·2 *m* Breite; wie tief muß das Gefäß sein, wenn es 12 Hektoliter fassen soll?
12. Die Länge einer Mauer ist 21 *m*, die Höhe 2 *m* 5 *dm*, die Dicke 9 *dm*; wie viel Ziegel braucht man, um diese Mauer aufzuführen, wenn ein Ziegel sammt Verbindungsmittel 30 *cm* lang, 15 *cm* breit und 7 *cm* hoch anzunehmen ist?
13. Ein rechteckiger Kasten von 3 *m* Länge, 2 *m* Breite und 1·2 *m* Höhe wird mit Steinkohlen gefüllt; wie groß ist das Gewicht dieser Steinkohlen, wenn 1 m^3 davon 1275 *kg* wiegt?
14. 1 cm^3 reines Wasser wiegt 1 *g*; wie viel wiegt ein mit Wasser

gefülltes Blechkästchen von 1·5 *dm* Länge, 1·2 *dm* Breite und 8 *cm* Höhe, wenn das leere Blechkästchen 155 *g* wiegt?

15. Der Dachraum einer Scheune bildet ein dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche 5·6 *m* zur Grundlinie, 3 *m* zur Höhe hat, und dessen Höhe (Länge des Daches) 8·4 *m* beträgt; wie viel *kg* Heu kann dieser Raum aufnehmen, wenn 1 m^3 Heu 114 *kg* wiegt?

16. Ein Balken ist 4 *m* lang und hat zu Grundflächen zwei gleiche Trapeze, in denen die Parallelseiten 4 *dm* und 3 *dm* sind und die Höhe 1·5 *dm* beträgt; wie groß ist der Cubikinhalt?

17. Ein Kasten von 1·2 *m* Länge und 0·7 *m* Breite war zum Theil mit Wasser gefüllt; als man in denselben einen Stein von unregelmäßiger Form legte, stieg das Wasser um 1 *dm* und bedeckte den Stein; wie groß ist der Cubikinhalt des Steines?

3. Die Pyramide und der Pyramidenstumpf.

Oberfläche einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfes.

§. 178. In der Pyramide bestimmt man zuerst die Seitenflächen als Dreiecke und addiert zu ihrer Summe die Grundfläche.

Ist die Pyramide eine regelmäßige, so braucht man nur ein Seitendreieck zu berechnen und dessen Fläche mit der Anzahl der Seitenkanten zu multiplicieren; dazu wird noch die Grundfläche addiert.

In dem Pyramidenstumpfe bestimmt man zuerst die Seitenflächen als Trapeze und addiert zu ihrer Summe die beiden Grundflächen.

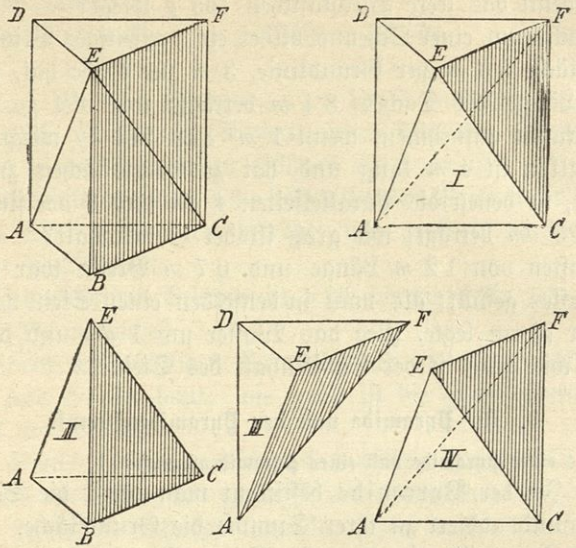
Cubikinhalt einer Pyramide und eines Pyramidenstumpfes.

§. 179. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei inhaltsgleiche dreiseitige Pyramiden zerlegen (Fig. 167).

Legt man in dem dreiseitigen Prisma ABCDEF durch die Punkte E, A, C eine Ebene, so zerfällt dasselbe in die vierseitige Pyramide I und die dreiseitige Pyramide II. Legt man dann in der vierseitigen Pyramide I durch die Punkte E, A F einen zweiten ebenen Schnitt, so erhält man die beiden dreiseitigen Pyramiden III und IV. Das Prisma ABCDEF läßt sich also in die drei Pyramiden II, III und IV zerlegen. Die beiden Pyramiden II und III haben nun die gleichen Grundflächen ABC und DEF und gleiche Höhen; die Pyramiden III und IV haben die gleichen Grundflächen ADE und ACE und auch gleiche Höhen; die drei Pyramiden II, III und IV sind also inhaltsgleich (§. 172).

Jede dreiseitiige Pyramide ist demnach der dritte Theil eines Prisma von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

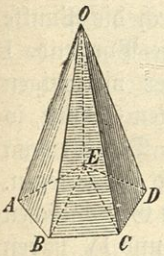
Fig. 167.



Da der Cubikinhalt eines Prisma gleich ist dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe, so folgt: *Der Cubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.*

Jede mehrseitige Pyramide OABCDE (Fig. 168) läſst sich in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche mit ihr dieselbe Höhe haben. Der Cubikinhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich der Grundfläche multipliciert mit dem dritten Theile der Höhe; daher ist der Cubikinhalt aller dreiseitigen Pyramiden, d. i. der Cubikinhalt der mehrseitigen Pyramide gleich der Summe der Grundflächen aller dreiseitigen Pyramiden, d. i. der Grundfläche der mehrseitigen Pyramide, multipliciert mit dem dritten Theile der gemeinschaftlichen Höhe.

Fig. 168.



Es gilt also allgemein der Satz:

Der Cubikinhalt einer Pyramide ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theil der Höhe.

§. 180. Um den Cubikinhalt eines *Pyramidenstumpfes* zu finden, bestimme man die Inhalte der beiden Pyramiden, deren Unterschied der Pyramidenstumpf ist, und subtrahiere den Inhalt der kleineren Pyramide von dem der größeren.

Kürzer gestaltet sich die Berechnung nach folgendem Satze:

Der Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes wird gefunden, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Producte derselben mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert.

Annäherungsweise findet man den Cubikinhalt eines Pyramidenstumpfes, indem man die halbe Summe der beiden Grundflächen mit der Höhe des Stumpfes multipliciert.

§. 181. Aufgaben.

1. Die Grundfläche einer regelmäßigen Pyramide ist ein Quadrat von 6 *dm* Seitenlänge, die Seitenhöhe beträgt 12·37 *dm*; wie groß ist ihre Oberfläche?
2. Berechne den Cubikinhalt folgender Pyramiden:
   a) Grundfläche 13 dm^2, Höhe 8 *dm*;
   b) „ 2·34 dm^2, „ 6·3 *dm*;
   c) „ 1 m^3 85 dm^3, Höhe 5 *dm* 6 *cm*.
3. Der Inhalt einer Pyramide ist 0·6264 m^3, die Höhe 0·9 *m*; wie groß ist die Grundfläche?
4. Der Inhalt einer Pyramide ist 9 m^3 261 dm^3, die Grundfläche 4 m^2 41 dm^2; wie groß ist die Höhe?
5. In einer Pyramide ist die Grundfläche ein Rechteck von 3 *dm* 4 *cm* Länge und 1 *dm* 9 *cm* Breite, und der Cubikinhalt 17 dm^3 955 cm^3; wie groß ist die Höhe?
6. Die Kante eines Tetraeders beträgt 2 *dm*; bestimme a) den Abstand des Mittelpunktes einer Fläche (als Grundfläche) von einer Seite (§. 135), b) die Höhe eines Seitendreieckes, c) die Höhe des Tetraeders, d) die Oberfläche, e) den Cubikinhalt des Tetraeders.
7. Es soll eine Pyramide, deren Grundfläche 1 m^2 15 dm^2, und deren Höhe 2 *m* beträgt, aus Eisen gegossen werden; wie viel wird sie wiegen, da 1 dm^3 Eisen 7·21 *kg* wiegt?
8. Wie groß ist das Gewicht einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide aus Marmor, wenn die Höhe 3 *m*, eine Seite der Grundfläche 5 *dm* beträgt und 1 dm^3 Marmor 2·72 *kg* wiegt?
9. Die Grundflächen eines regelmäßigen Pyramidenstumpfes sind Quadrate mit den Umfängen 1 *m* 6 *dm* und 1 *m* 2 *dm*, die Höhe eines Seitentrapezes beträgt 2 *m* 8 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

10. In einem Pyramidenstumpfe, dessen Grundflächen Quadrate sind, beträgt eine Seite der unteren Grundfläche 2 *dm* 5 *cm*, eine Seite der oberen Grundfläche 1 *dm* 9 *cm*, die Höhe 2 *dm*; berechne den Cubikinhalt desselben nach jeder der drei in §. 181 angeführten Methoden.
11. Wie viel wiegt ein Pyramidenstumpf aus Marmor, dessen Grundflächen Quadrate von 1·2 *m* und 1 *m* Seitenlänge sind und 1·5 *m* von einander abstehen? (1 dm^3 Marmor wiegt 2·72 *kg*.)
12. Wie viel Liter fasst ein 6·2 *dm* tiefes Gefäß von der Form eines Pyramidenstumpfes, dessen Grundflächen Quadrate von 4·8 *dm* und 3·2 *dm* Seitenlänge sind?

4. Der Cylinder.

Oberfläche eines Cylinders.

§. 182. Um die Oberfläche eines Cylinders zu erhalten, berechnet man die beiden Grundflächen als Kreise, dann die krumme Mantelfläche und bringt diese Flächen in eine Summe.

In einem geraden Cylinder findet man die Mantelfläche, indem man den Umfang der Grundfläche mit der Höhe multipliciert. Denn die Mantelfläche läſst sich in ein Rechteck abwickeln, welches mit dem Cylinder gleiche Höhe hat, und dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche des Cylinders gleich ist.

Cubikinhalt eines Cylinders.

§. 183. Da jeder Cylinder als ein Prisma, dessen Grundflächen Kreise sind, betrachtet werden kann, so gilt der Satz:

Der Cubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und der Höhe.

Häufig ist der Cubikinhalt einer cylindrischen Röhre zu berechnen. So nennt man einen Körper, welcher zwischen den Mantelflächen zweier Cylinder liegt, die eine gemeinschaftliche Achse haben. Um den Cubikinhalt einer cylindrischen Röhre zu finden, braucht man nur den Cubikinhalt der beiden Cylinder, von welchen der kleinere dem größeren ausgeschnitten ist, zu berechnen, und den Inhalt des kleineren Cylinders von jenem des größeren zu subtrahieren.

§. 184. Aufgaben.

1. Die Grundfläche eines geraden Cylinders hat 4·5 *dm* zum Halbmesser; seine Höhe ist 8·4 *dm*; wie groß ist a) die Mantelfläche, b) die ganze Oberfläche, c) der Cubikinhalt des Cylinders?

2. Berechne die Oberfläche und den Cubikinhalt folgender gerader Cylinder:
   a) Durchmesser der Grundfläche 23 *cm*, Höhe 15 *cm*;
   b) Halbmesser " " 8·25 *dm*, " 5·23 *dm*;
   c) Umfang " " 1 *m* 2 *dm* 9 *cm* " 1 *m* 8 *dm* 8 *cm*.
3. Wie groß ist die Oberfläche eines geraden Cylinders, in welchem die Höhe 3 *dm* 4 *cm* und der Inhalt der Grundfläche 8 dm^2 beträgt?
4. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders ist 62·8 dm^2, der Durchmesser der Grundfläche 4 *dm*; wie groß ist die Höhe?
5. Der Cubikinhalt eines Cylinders ist 3·36 m^3, der Durchmesser der Grundfläche 1·4 *m*; wie groß ist die Höhe?
6. Der Inhalt eines Cylinders ist 6 dm^3, die Höhe 1 *dm* 6 *cm*; wie groß ist die Grundfläche?
7. Bestimme den Halbmesser der Grundfläche eines Cylinders, dessen Höhe 4 *dm* und dessen Inhalt 9 dm^3 496 cm^3 beträgt.
8. Ein gleichseitiger Cylinder hat 2·4 *dm* zur Seite; suche a) seine Mantelfläche, b) die ganze Oberfläche, c) den Cubikinhalt.
9. Die Mantelfläche eines geraden Cylinders beträgt 7·04 dm^2, der Umfang der Grundfläche 1·76 *dm*; wie groß ist der Cubikinhalt des Cylinders?
10. Wie viel dm^2 Eisenblech braucht man für eine Ofenröhre, welche 5 *m* lang ist und 2 *dm* im Durchmesser hat?
11. Ein cylindrisches Gefäß soll 1 Liter halten: wie hoch muss es sein, wenn der innere Durchmesser 108·4 *mm* beträgt?
12. Wie groß ist der Durchmesser eines cylindrischen Gefäßes, das 5·031 *dm* hoch ist und 1 *hl* hält?
13. In ein cylindrisches Gefäß von 4 *dm* Durchmesser, welches zum Theile mit Wasser gefüllt war, wurde ein unregelmäßiger Körper gesenkt, so dass ihn das Wasser bedeckte; das Wasser stand dann 36 *cm* hoch. Nachdem man den Körper herausgenommen hatte, stand das Wasser noch 24 *cm* hoch; welchen Cubikinhalt hat der Körper?
14. Der innere Durchmesser eines runden Thurmes ist 4·2 *m*, die Mauer ist 1·2 *m* dick; wie viel m^3 enthält die Mauer, wenn die Höhe des Thurmes 14·5 *m* beträgt?
15. Wie viel Ziegel braucht man, um ein Thor zu verlegen, welches mit vollem Bogen geschlossen ist, wenn die Weite im Lichten 2·4 *m*, die Höhe bis zum Schlusssteine 3·6 *m*, die Dicke der Mauer 8 *dm* ist, und wenn auf 1 m^3 Mauerwerk 264 Ziegel gerechnet werden?

5. Der Kegel und der Kegelstumpf.

Oberfläche eines Kegels und eines Kegelstumpfes.

§. 185. 1. Die Oberfläche eines Kegels findet man, indem man zuerst die Grundfläche, dann die Mantelfläche berechnet und beide addiert.

Bei einem geraden Kegel wird die Mantelfläche gefunden, indem man den Umfang der Grundfläche mit der halben Seite des Kegels multipliciert. Denn, wenn man sich die Mantelfläche des geraden Kegels abgewickelt denkt, so erscheint sie als ein Kreisausschnitt, dessen Bogen dem Umfange der Grundfläche, und dessen Halbmesser der Seite des Kegels gleich ist; nun ist der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes gleich der Länge des Bogens multipliciert mit dem halben Halbmesser; folglich ist die Mantelfläche eines geraden Kegels gleich dem Umfange der Grundfläche multipliciert mit der halben Seite.

2. Die Mantelfläche eines geraden Kegelstumpfes wird gefunden, indem man die Summe der Umfänge seiner Grundflächen mit der halben Seite desselben multipliciert. Denkt man sich nämlich in dem Mantel des Stumpfes unzählig viele Seiten gezogen, so zerfällt derselbe in Figuren, die man als ebene Trapeze ansehen kann; es ist daher die Mantelfläche des Kegelstumpfes gleich der Summe aus den Flächen aller dieser Trapeze, also der Summe ihrer Parallelseiten, d. i. der Summe der Umfänge der beiden Grundkreise, multipliciert mit der halben Höhe der Trapeze, d. i. mit der halben Seite des Kegelstumpfes.

Cubikinhalt eines Kegels und eines Kegelstumpfes.

§. 186. 1. Da ein Kegel als eine Pyramide, deren Grundfläche ein Kreis ist, betrachtet werden kann, so folgt:

Der Cubikinhalt eines Kegels ist gleich dem Producte aus der Grundfläche und dem dritten Theile der Höhe.

2. Der Cubikinhalt eines Kegelstumpfes wird auf dieselbe Weise, wie der Inhalt eines Pyramidenstumpfes, berechnet, indem man die Summe der beiden Grundflächen und der Quadratwurzel aus dem Producte derselben mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert.

In der Praxis begnügt man sich häufig mit einer angenäherten Bestimmung des Cubikinhaltes eines Kegelstumpfes, indem man diesen als einen Cylinder berechnet, dessen Grundfläche gleich ist der halben Summe der beiden Grundflächen des Stumpfes, und dessen Höhe die Höhe des Stumpfes ist.

§. 188. Aufgaben.

1. In einem geraden Kegel ist
   a) Durchmesser der Grundfläche 4 *m*, eine Seite 6 *m*;
   b) Halbmesser „ „ 5·6 *dm*, „ „ 8·4 *dm*;
   c) Umfang „ „ 1 *m* 1 *dm* 7 *cm*, „ „ 3 *m* 2 *cm*;
   wie groß ist der Mantel, und wie groß ist die ganze Oberfläche?
2. Berechne den Cubikinhalt folgender Kegel:
   a) Halbmesser der Grundfläche 6·2 *dm*, Höhe 7·5 *dm*;
   b) Durchmesser „ „ $14\frac{1}{2}$ *cm*, „ $23\frac{2}{5}$ *cm*;
   c) Umfang „ „ 1 *m* 1 *dm* 8 *cm*, Höhe 2*m* 4 *dm* 6 *cm*.
3. Der Cubikinhalt eines Kegels ist 26 dm^3 225 cm^3, die Grundfläche 4 dm^2 25 cm^2; wie groß ist die Höhe?
4. Der Inhalt eines Kegels ist 1·088052 m^3, die Höhe 1·8 *m*; wie groß ist die Grundfläche?
5. Die Seite eines geraden Kegels ist 3·33 *dm*, die Mantelfläche 1759·296 cm^2; wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche?
6. Wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche eines Kegels, dessen Höhe 3·5 *dm* und dessen Inhalt 55·894 dm^3 beträgt?
7. Suche a) die Seite, b) die Mantelfläche eines geraden Kegels, dessen Höhe 3 *m* 9 *dm* ist und dessen Grundfläche 8 *dm* zum Halbmesser hat.
8. Wie groß ist a) die Höhe, b) der Cubikinhalt eines geraden Kegels, dessen Seite 2·4 *dm* beträgt und dessen Grundfläche 2 *dm* zum Halbmesser hat?
9. Die Mantelfläche eines geraden Kegels ist 2·85 dm^2, der Halbmesser der Grundfläche 5 *cm*; wie groß ist der Cubikinhalt?
10. Bestimme die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Seite 1 *m* 4 *dm* beträgt.
11. In einem gleichseitigen Kegel ist die Seitenlänge 7·5 *dm*; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Inhalt?
12. Ein zugespitzter Trichter hat 2 *dm* Durchmesser und 2·4 *dm* Länge; wie viel dm^2 Blech ist daran?
13. In einem kegelförmig aufgeschütteten Getreidehaufen beträgt der Umfang der Grundfläche 2 *m* 5 *dm* und die Höhe 1 *m*; wie viel *hl* Getreide enthält der Haufen?
14. Ein Heuschober hat 2·6 *m* Durchmesser und 4·5 *m* Höhe; wie viel *kg* Heu enthält er, wenn das m^3 Heu 114 *kg* wiegt?
15. Welchen Wert hat eine Tanne, welche 12·6 *m* hoch ist und unten 2·2 *m* im Umfange hat, wenn das m^3 Holz mit 8 fl. 40 kr. bezahlt wird?

16. Aus einem kegelförmigen, mit Wasser gefüllten Gefäße von 21 *cm* Durchmesser und 15 *cm* Höhe wird das Wasser in ein cylindrisches Gefäß von 13 *cm* Durchmesser gegossen; wie hoch wird das Wasser in diesem Gefäße stehen?

17. Die Seite eines geraden Kegelstumpfes ist 6 *dm*, die Durchmesser der Grundflächen betragen 9 *dm* und 7 *dm*; wie groß ist die Oberfläche?

18. Bestimme die Oberfläche eines geraden Kegelstumpfes, dessen Seite 1·5 *m* ist und dessen Grundflächen 2·8 m^2 und 2·2 m^2 Flächeninhalt haben.

19. Wie groß ist der Cubikinhalt eines Kegelstumpfes, dessen Grundflächen 3 *m* und 2 *m* zu Durchmessern haben und 1·2 *m* von einander abstehen?

20. Ein Bottich hat 1 *m* unteren und 1·4 *m* oberen Durchmesser und 1·2 *m* Tiefe; wie viel Hektoliter hält derselbe?

21. Wie viel m^3 Scheitholz gibt ein Baumstamm von 5 *m* Länge, der an dem einen Ende 7 *dm*, an dem andern 6 *dm* Durchmesser hat, wenn man annimmt, daß 1 m^3 Stammholz $1\frac{1}{2}$ m^3 Scheitholz gibt?

6. Die Kugel.

Oberfläche einer Kugel.

§. 188. Die Oberfläche einer Kugel ist, wie jedoch hier noch nicht nachgewiesen werden kann, gleich dem vierfachen Flächeninhalte eines größten Kreises derselben.

Bezeichnet man den Halbmesser der Kugel durch r und die Oberfläche derselben durch o, so ist $r^2\pi$ der Flächeninhalt eines größten Kreises, folglich $o = 4r^2\pi$.

Man kann daher auch sagen:

Die Oberfläche einer Kugel wird gefunden, indem man das Quadrat des Halbmessers mit der 4fachen Ludolfischen Zahl multipliciert.

Wenn man umgekehrt aus der bekannten Oberfläche einer Kugel den Halbmesser derselben finden will, darf man nur die Oberfläche durch die 4fache Ludolfische Zahl dividieren; der Quotient stellt das Quadrat des Halbmessers dar; zieht man daraus die Quadratwurzel, so erhält man den Halbmesser selbst. Es ist demnach

$$r = \sqrt{\frac{o}{4\pi}}$$

Heißt R der Halbmesser und O die Oberfläche einer zweiten Kugel, so ist auch $O = 4R^2\pi$, daher

$$O : o = 4R^2\pi : 4r^2\pi = R^2 : r^2;$$ d. h.

die Oberflächen zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halbmesser.

Cubikinhalt einer Kugel.

§. 189. Legt man durch den Durchmesser AB (Fig. 169) sehr viele größte Kreise, und senkrecht darauf mehrere Parallelkreise CD, EF, GH . . ., so zerfällt die Oberfläche der Kugel in lauter Vierecke und Dreiecke, welche man für eben und geradlinig ansehen kann, wenn die Anzahl jener Kreise sehr groß angenommen wird. Zieht man nun von allen Durchschnittspunkten der Oberfläche gerade Linien zum Mittelpunkte der Kugel und denkt sich durch je zwei benachbarte Strecken eine Ebene gelegt, so erscheint die Kugel aus lauter Pyramiden zusammengesetzt, welche alle ihre Grundflächen an der Kugeloberfläche und ihren Scheitel im Mittelpunkte haben; ihre gemeinschaftliche Höhe ist daher der Halbmesser der Kugel. Der Cubikinhalt einer Pyramide aber wird gefunden, indem man die Grundfläche mit dem dritten Theile der Höhe multipliciert; daher ist der Cubikinhalt aller jener Pyramiden zusammengenommen, d. i. der Inhalt der ganzen Kugel, gleich der Summe aller Grundflächen, d. i. der Kugeloberfläche, multipliciert mit dem dritten Theile des Halbmessers.

Fig. 169.

Der Cubikinhalt einer Kugel ist also gleich dem Producte aus der Oberfläche derselben und dem dritten Theile des Halbmessers.

Bezeichnet man durch r den Halbmesser, durch o die Oberfläche und durch c den Cubikinhalt einer Kugel, so ist

$$o = 4r^2\pi, \text{ daher } c = 4r^2\pi \cdot \frac{r}{3} = \tfrac{4}{3} \cdot r^3\pi;$$ d. h.

der Cubikinhalt einer Kugel ist gleich dem Cubus des Halbmessers multipliciert mit $\frac{4}{3}$ der Ludolfischen Zahl.

Heißt R der Halbmesser und C der Cubikinhalt einer zweiten Kugel, so ist $C = \frac{4}{3} \cdot R^3\pi$, daher

$$C : c = \tfrac{4}{3} \cdot R^3\pi : \tfrac{4}{3} \cdot r^3\pi = R^3 : r^3;$$ d. h.

die Cubikinhalte zweier Kugeln verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer Halbmesser.

§. 190. Aufgaben.

1. Berechne die Oberfläche und den Cubikinhalt einer Kugel, deren Halbmesser a) 1 *dm*, b) 1·4 *m*, c) 1 *m* 15 *cm*, d) $17\frac{1}{2}$ *cm* ist.
2. Der Durchmesser einer Kugel ist a) 5 *dm*, b) 4·3 *cm*, c) 1 *dm* 4 *cm* 8 *mm*; wie groß ist die Oberfläche, wie groß der Cubikinhalt?
3. Der Umfang eines größten Kugelkreises sei 279·6 *cm*; berechne die Oberfläche und den Cubikinhalt der Kugel.
4. Der größte Kreis einer Kugel hat 855·3 cm^2 Flächeninhalt; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Cubikinhalt?
5. Die Oberfläche einer Kugel ist a) 22 dm^2, b) 88·2443 cm^2; wie groß ist der Halbmesser, wie groß der Cubikinhalt?
6. Wie groß ist die Oberfläche der Erde, wenn man diese als eine Kugel betrachtet, deren Halbmesser 6368·96 *km* beträgt? (π = 3·141593.)
7. Der Durchmesser eines Erdglobus ist 4 *dm*; wie verhält sich dessen Oberfläche zur Oberfläche der Erde?
8. Man will einen Luftballon machen, dessen Durchmesser 3·2 *m* beträgt; wie viel *m* Taffet von 92 *cm* Breite wird man dazu brauchen?
9. Ein kugelrunder Thurmknopf von 1·2 *m* Durchmesser soll vergoldet werden; wie hoch kommt die Vergoldung, wenn für 1 m^2 Vergoldung 48 fl. 80 kr. zu zahlen ist?
10. In einen gleichseitigen Cylinder von 1 *dm* Halbmesser werden eine Kugel und ein gerader Kegel eingeschrieben a) wie groß ist der Cubikinhalt jedes dieser drei Körper; b) wie verhalten sich die Inhalte des Kegels, der Kugel und des Cylinders zu einander?
11. Eine Kugel, ein gleichseitiger Cylinder und ein Würfel haben gleiche Oberfläche, nämlich 10 dm^2; wie groß sind die Cubikinhalte dieser drei Körper?
12. Um eine Kugel von 1 *dm* Halbmesser werden ein gleichseitiger Cylinder und ein gleichseitiger Kegel beschrieben; wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Inhalte dieser drei Körper?
13. Wenn man den Durchmesser der Erde = 6368·96 *km* und die Höhe ihrer Luftschichte = 63 *km* setzt; wie viel km^3 beträgt der Inhalt der Luftschichte?

7. Inhalt der Fässer.

§. 191. Ein Fass nähert sich in der Form einem Cylinder; nur ist es in der Mitte bauchig und sein Durchmesser daselbst größer als der Durchmesser seiner Grund- oder Bodenfläche. Man begeht übrigens keinen erheblichen Fehler, wenn man den Inhalt eines Fasses dem Inhalte eines Cylinders gleichsetzt, dessen Höhe gleich ist der Länge des Fasses, und dessen Grundfläche den dritten Theil aus dem doppelten Bauch- und dem einfachen Bodendurchmesser zum Durchmesser hat.

Am zweckmäßigsten werden die Maßlängen nach Decimeter ausgedrückt, da dann das Fass so viel Liter hält, als der Cubikinhalt desselben Cubikdecimeter hat.

Aufgaben.

1. Wie groß ist der Inhalt eines Fasses, dessen Durchmesser am Bauche 6·2 *dm*, am Boden 4·9 *dm*, und dessen Länge 10·6 *dm* beträgt?
2. Ein Bierfass hat 8·4 *dm* Bauchdurchmesser, 7·2 *dm* Bodendurchmesser und 13 *dm* Länge; wie viel Liter hält es?
3. Bestimme den Inhalt folgender Fässer:

	Bauchdurchmesser	Bodendurchmesser	Länge
a)	7·2 *dm*,	5·4 *dm*,	11·2 *dm*;
b)	6·5 *dm*,	5 *dm*,	10·4 *dm*;
c)	6 *dm*,	4·8 *dm*,	9·8 *dm*.

4. Ein Fass von 6 *dm* Bauch- und 4·5 *dm* Bodendurchmesser soll 1 Hektoliter fassen, welche innere Länge muss man ihm geben?

8. Bestimmung des Cubikinhaltes durch das Gewicht.

§. 192. Der Cubikinhalt eines Körpers lässt sich auch durch das Gewicht bestimmen.

Die Größe des Druckes, den ein Körper von beliebigem Rauminhalte auf seine Unterlage ausübt, heißt das absolute Gewicht des Körpers. Das Gewicht, das eine Cubikeinheit, z. B. ein Cubikdecimeter, des Körpers hat, nennt man dessen specifisches Gewicht. Z. B. 1 dm^3 Silber wiegt 10·51 *kg*; diese sind das specifische Gewicht des Silbers für 1 dm^3 als Cubikeinheit.

Da 1 dm^3 destilliertes Wasser 1 *kg* wiegt, so zeigt das specifische Gewicht eines Körpers für 1 dm^3 auch an, wie vielmal so groß als das Gewicht eines bestimmten Raumtheiles reinen Wassers das Gewicht eines ebenso großen Raumtheiles des betreffenden Körpers ist.

Hier folgen die specifischen Gewichte einiger Körper.

1 Cubikdecimeter.

Bernstein	wiegt 1·08 *kg*	Eichenholz.	wiegt 0·86 *kg*
Blei	„ 11·35 „	Eisen, geschmiedet	„ 7·79 „
Buchenholz	„ 0·74 „	„ gegossen . .	„ 7·21 „

Elfenbein	wiegt 1·83 *kg*		Platin	wiegt 21·45	*kg*
Gold	„ 19·36	„	Quecksilber	„ 13·60	„
Granit (Mittel) . .	„ 2·70	„	Silber	„ 10·51	„
Kalkstein	„ 2·46	„	Steinkohle (im Mittel)	„ 1·30	„
Korkholz	„ 0·24	„	Stahl	„ 7·82	„
Kupfer, gegossen .	„ 8·79	„	Zink	„ 7·19	„
Marmor	„ 2·72	„	Zinn	„ 7·29	„
Messing (Mittel) .	„ 8·40	„	Zucker	„ 1·50	„

Es sei z. B. der Cubikinhalt eines Silberbarrens, der 32 *kg* wiegt, zu bestimmen.

Da 1 dm^3 Silber 10·51 *kg* wiegt, so nehmen 32 *kg* Silber so viel dm^3 Raum ein, wie oft 10·51 *kg* in 32 *kg* enthalten sind; man hat daher

$$32 : 10{\cdot}51 = 3{\cdot}045\ dm^3.$$

Der Cubikinhalt eines Körpers in Cubikdecimetern wird demnach gefunden, indem man das absolute Gewicht desselben in Kilogrammen durch das specifische Gewicht für 1 Cubikdecimeter dividiert.

Hiernach kann man auch den Inhalt eines Gefäßes durch das Gewicht bestimmen. Man wägt das leere Gefäß ab, füllt es mit Wasser, bestimmt dann das Gewicht des so gefüllten Gefäßes, und subtrahiert das erste Gewicht von dem zweiten. So viel Kilogramm der Gewichtsunterschied beträgt, so viel Cubikdecimeter oder Liter hält das Gefäß.

Umgekehrt findet man aus dem Cubikinhalte eines Körpers das absolute Gewicht desselben, indem man dessen specifisches Gewicht mit der Maßzahl des in Cubikdecimetern ausgedrückten Cubikinhaltes multipliciert.

Ist z. B. das absolute Gewicht von 346 dm^3 Steinkohlen zu bestimmen, so hat man:

1 dm^3 Steinkohlen wiegt 1·3 *kg*

346 „ „ wiegen 1·3 *kg* × 346 = 449·8 *kg*.

§. 193. Aufgaben.

1. Wie viel m^3 enthält ein Balken a) Eichenholz, b) Tannenholz, der 135 *kg* wiegt?
2. Eine Goldstange wiegt 28·5 *kg*; welchen Cubikraum nimmt sie ein?
3. Welchen Cubikinhalt haben 3450 *kg* Blei?
4. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel von Blei, welche 18½ *kg* wiegt?
5. Ein Gefäß wiegt leer 1·45 *kg*, mit Wasser gefüllt 10·95 *kg*; wie viel Liter hält es?

6. Wie viel *kg* wiegt das Wasser, das in einem Gefäße von 165 *cm* Länge, 85 *cm* Breite und 7 *dm* Tiefe enthalten ist?
7. Eine Walze von Messing soll 20 *kg* wiegen und 3 *dm* lang sein; welchen Durchmesser muss sie haben?
8. Wie viel *kg* wiegt eine Stange Stabeisen, die 6 *m* lang, 1 *dm* breit und 0·25 *dm* dick ist?
9. Wie viel *kg* wiegt eine vierseitige Pyramide von Granit, wenn eine Seite der quadratischen Grundfläche 0·6 *m* lang ist und die Höhe 3 *m* beträgt?
10. Wie viel wiegt eine Kugel
    a) von Elfenbein, deren Durchmesser 6 *cm* beträgt?
    b) „ Marmor, „ „ 3·1 *dm* „ .
11. Welches Gewicht hat ein Zuckerhut von 2 *dm* Bodendurchmesser und 4 *dm* Höhe?
12. Wie viel wiegt das in einem Rahmen von 1 m^2 aufgeschichtete Buchenholz von 80 *cm* Scheitlänge, wenn man für die leeren Zwischenräume $\frac{1}{3}$ des Inhaltes in Abzug bringt?

Druck von Greßner & Schramm, Leipzig.