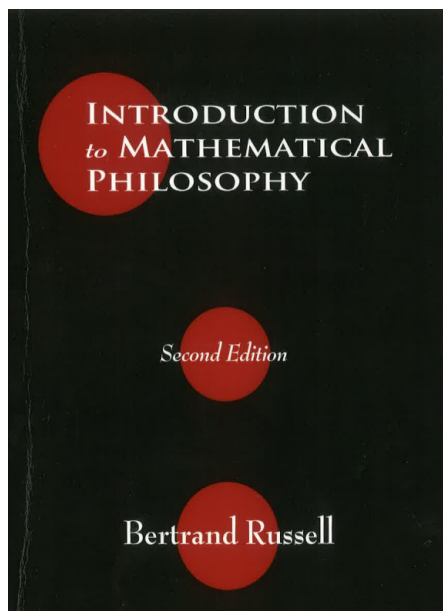


Bertrand Russell, Introduction to Mathematical Philosophy, Second Edition, 2014, Merchant Books, 208 strani.

Že Aristotel je učil, da pri vsakem dokazovanju potrebujemo določen nabor aksiomov (trditve, ki jih ne dokazujemo, ampak privzamemo kot resnične), saj bi se, če bi hoteli dokazati prav vse, dokazovanje nikoli ne končalo, ampak bi se nadaljevalo v neskončnost. Ta njegova misel je pomembno vplivala tako na filozofijo (tako je npr. filozof Spinoza svojo Etiko napisal v obliki aksiomatskega sistema) kot tudi na logiko in matematiko.

Čeprav je Evklidova aksiomska obravnava geometrije predstavljala model za vse nadaljnje matematične teorije, ki praviloma vsaj v svoji zreli fazi stremijo k zgledni aksiomatski predstavitvi, se je potreba po boljšem razumevanju in učvrstitvi samih temeljev matematike, ki je deloma nastopila že ob odkritju neevklidskih geometrij, v polni meri izkristalizirala šele po odkritju paradoksov v teoriji množic (in to ne samo v t. i. naivni Cantorjevi teoriji, ampak celo v Fregejevem aksiomatskem sistemu).¹

Eden od tistih, ki so se problema eliminacije paradoksov v teoriji množic lotili najtemeljiteje, je bil znani britanski filozof, logik, matematik, pisec, družbeni kritik in Nobelov nagrajenec Bertrand Russell (1872–1970), ki je skupaj z Alfredom Northom Whiteheadom napisal obsežno delo *Principia*



¹ Pojem *osnov matematike* (angl. foundations of mathematics) je v začetku 20. stoletja pomenil nekaj drugega kot danes. Po prvotni optimistični zamisli Hilberta in njegovih somišljenikov naj bi se namreč dalo celotno matematiko zgraditi na peščici neprotislovnih aksiomov, iz katerih naj bi po zakonih logike sledila bodisi resničnost bodisi neresničnost vsake matematične trditve. Da tega cilja ni mogoče uresničiti, je pokazalo šele delo avstrijskega logika Kurta Gödla. Odtlej od aksiomatskih sistemov v matematiki ne pričakujemo več »popolnosti« (v smislu dokazljivosti ali ovrgljivosti vsake trditve, izrazljive s pojmi danega aksiomatskega sistema), ampak samo še konsistentnost (neprotislovnost).

Mathematica (1903), v kateri zagovarja osnovno tezo *logicizma*, po kateri naj bi se dalo vso matematiko izpeljati iz logike. Verjetno ni treba posebej poudarjati, da je knjiga, ki po nekaj sto straneh zapletenih formul (med drugim) dokaže, da je $1 + 1 = 2$, vse prej kot lahko branje. Russell je vsekakor hotel biti razumljiv tudi širši javnosti.

Čeprav je od prve izdaje knjižice *Introduction to Mathematical Philosophy* (maja 1919) minilo že skoraj sto let, je Russellova poljudna, širšemu občinstvu namenjena knjižica o osnovah matematike (digitalizirana in natisnjena kot faksimile druge izdaje iz aprila 1920) še vedno vredna branja, tako zaradi vsebine same kot tudi po svoji miselni globini, jezikovni izbrušenosti in strukturni organizaciji besedila (čeprav po sedanjih standardih strogosti v matematiki ni povsem zadovoljiva, kar priznava tudi avtor sam, ki celo opozarja na posamezna vprašanja, ki v tistem času še niso bila zadovoljivo razrešena). Po eni strani osvetljuje, razlaga in analizira nekatere najosnovnejše matematične koncepte (kot so npr. število, indukcija, relacije, urejenost, limita, zveznost, ipd.), po drugi strani pa je dragocen zgodovinski dokument časa, v katerem je bila napisana. Prav v začetku XX. stoletja je bilo namreč vprašanje osnov matematike, tudi zaradi paradoksov, odkritih npr. v teoriji množic, zelo aktualno. Enega od njih, t. i. Russellov paradoks², je odkril prav avtor te knjižice, ki velja (poleg Fregeja in Wittgensteina) tudi za enega od utemeljiteljev analitične filozofije. Po drugi strani pa je bilo to obdobje vzpona matematične logike, iz katere so nekateri matematiki in filozofi želeli izpeljati vso klasično matematiko (potem ko je bilo dognano, da je vso klasično matematiko mogoče izpeljati iz teorije naravnih števil, katere aksiomatizacijo je okrog leta 1900 podal italijanski matematik in historični lingvist Giuseppe Peano (1858–1932).

Russell je v delu *Uvod v filozofijo matematike* (ki ga je napisal med šestmesečnim prestajanjem zaporne kazni zaradi svojih mirovniških nazorov) zasledoval cilj, predstaviti nekatere osnovne matematične pojme v kar se da netehničnem, tudi laikom razumljivem jeziku, hkrati pa na podobno razumljiv in enostaven način predstaviti tudi nekaj osnovnih konceptov in rezultatov matematične logike. Knjižica je bila po eni strani namenjena filozofom (ki naj bi se končno naučili, kaj pojmi, kot so npr. *zveznost*, *relacije* in *neskončnost*, pomenijo matematikom, ki jih pri svojem delu nenehno

²Russell naj bi ga odkril ob prebiranju Cantorjevega »diagonalizacijskega argumenta«
in ga uporabil za dokaz nekonsistentnosti Fregejevega aksiomatskega sistema.

uporabljajo), po drugi strani pa matematikom (ki dotlej niso imeli posebnega posluha za matematično logiko ter za filozofski vidik oziroma logične osnove matematike.)³

Da bi dobili neko okvirno prvo predstavo o načinu Russellovega razmišljanja in pisanja, na kratko povzemimo vsebino prvih dveh poglavij, v katerih poskuša odgovoriti na tipično filozofsko vprašanje: *Kaj je število?* oziroma si postavi za cilj definirati število z nekimi še bolj temeljnimi (logičnimi) koncepti. V tem osredotočanju na pojem števila oziroma na sam izvor matematične misli (ne pozabimo, da je npr. starogrški matematik in filozof Pitagora naravna števila imel ne samo za osnovo matematike, ampak celo vsega reda v vesolju oziroma kozmosu), ki se morda zdi sodobnemu ustvarjalnemu matematiku (angl. working mathematician), ki ga zanimajo predvsem daljne posledice aksiomov (dokazovanje težkih izrekov, izpeljava zapletenih formul, izumljanje naprednih računskih metod, ipd.) precej brezplodno vprašanje, Russell najde izvor izčiščevanja misli in odkrivanja novih obzorij. Matematikova orodja posrečeno primerja s teleskopom, filozofova oziroma logikova z mikroskopom: *Kot potrebujemo dve vrsti instrumentov, teleskop in mikroskop, za povečanje naših moči videnja, tako potrebujemo dve vrsti instrumentov za povečanje naših logičnih moči, ene, da nas peljejo naprej k višji matematiki, druge, da nas peljejo k logičnim temeljem stvari, ki jih v matematiki radi jemljemo za samoumevne.*

Za izhodišče svoje raziskave izbere zaporedje števil $0, 1, 2, 3, \dots$. Pravi, da je to zaporedje mogoče izbrati za izhodišče filozofskega analiziranja osnovnih pojmov matematike in njihovega izpeljevanja iz še preprostejših prvin šele na razmeroma visoki stopnji civilizacije. Tako na primer stari Grki in Rimljani niso poznali števila 0. Odkritje, da je tudi 1 število, prav tako ni bilo lahko. Na neki zgodnejši stopnji civilizacije bi bilo treba razmišljanje o osnovah matematike začeti s čim še preprostejšim. Vsekakor pa je zaporedje $0, 1, 2, 3, \dots$ zelo pomembno, in sicer iz naslednjih dveh razlogov: 1) vso tradicionalno matematiko, vključno z analitično geometrijo, je mogoče prevesti na trditve o naravnih številih, 2) teorijo naravnih števil je mogoče aksiomatizirati s petimi Peanovimi aksiomi in tremi Peanovimi osnovnimi pojmi: »0«, »število« in »naslednik« (to je bila, kot pravi Russell, skrajna

³Matematikom tudi danes ni lahko pojasniti, zakaj je proučevanje osnov matematike pomembno. Morda se je odnos matematikov v zvezi z osnovami matematike vendarle začel spreminjati tudi po zaslugi novejših uspehov s področja avtomatskega dokazovanja izrekov s pomočjo računalnikov, ki temelji prav na aksiomatizaciji posameznih teorij.

izpolnitev programa »aritmetizacije« matematičnega). Za razliko od formalistov (npr. Hilberta), ki jih sama narava entitet, ki zadoščajo Peanovim aksiomom, ni zanimala (tem aksiomom zadoščajo vse »progresije«, torej vsa neskončna zaporedja brez ponovljenih členov, torej tudi npr. 101, 102, 103, 104, ... ali pa 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, ...), Russell poudarja, da ne smemo pozabiti, da so naravna števila namenjena ne le dokazovanju izrekov o njih, ampak tudi tako preprosti operaciji, kot je štetje. To misel sijajno izrazi takole: *Hočemo imeti deset prstov in dve očesi in en nos. Sistem, v katerem »1« pomeni 100, in »2« pomeni 101, in tako dalje, je morda čisto v redu za čisto matematiko, vendar ne bi ustrezal našemu vsakodnevni življenju.*

Nato nadaljuje z natančno jezikovno in miselno analizo pojma števila ter nazadnje predstavi definicijo števila s pomočjo preprostejših konceptov logike, kar je podvig, ki ga je prvi izpeljal nemški filozof, logik in matematik Gottlob Frege (1848–1925), katerega delo je bilo sodobnikom razmeroma neznano, kasnejšim generacijam logikov in filozofov pa sta ga predstavila šele Russell in Peano. Nazadnje definira število kot *razred množic, ki imajo vse enako število elementov*. To pa ni krožna definicija, čeprav se na prvi pogled tako zdi, saj pojem *enako število elementov* definira brez uporabe pojma števila, z uporabo (današnjim) matematikom dobro znanega načela bijektivne korespondence.⁴

Na podoben način obravnava še druge matematične pojme in jih reducira na logične pojme na način, ki je današnjemu študentu matematike precej domač, pred 100 leti pa je bilo takšno razmišljanje precej novo in napredno.

Med številnimi zanimivostmi v knjigi je treba omeniti npr. vsaj še Russellovo argumentiranje, da je ustaljeno prepričanje matematikov, da v zaporedju številskih množic $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, vsaka naslednja množica vsebuje prejšnjo, (vsaj s filozofskega stališča) zgrešeno: če pustimo ob strani dejstvo, da se da vsako od množic naravno vložiti v naslednjo, pri čemer se običajni računski zakoni ohranjajo, gre namreč v vseh teh primerih za, konceptualno gledano, povsem različne entitete! Tako je npr. število, po Russellu, razred (ekvipolentnih) množic, medtem ko je ulomek a/b , kot ga interpretira oziroma definira on, v bistvu relacija, torej nekaj čisto drugega kot naravno število.

⁴Danes uveljavljena vpeljava naravnih števil s pojmi teorije množic ne sledi Russellovi poti, ki pa je, čeprav jo doživljamo kot zastarelo, vsekakor zanimiva vsaj zgodovinsko. Vsekakor si je Russell prizadeval, da bi njegova definicija kar se da ustrezala naši intuitivni predstavi o tem, kaj so naravna števila.