PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **31** (2003/2004)
Številka 5
Strani 264–265

Branislav Čabrič, priredil Marjan Jerman:

TRISEKCIJA KOTA

Ključne besede: matematika, geometrija, konstrukcijske naloge, ravnilo, šestilo, trisekcija kota.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/31/1569-Cabric-Jerman.pdf

TRISEKCIJA KOTA

S konstrukcijskimi nalogami so se veliko ukvarjali starogrški matematiki. Le-ti so večino problemov, ki jih danes rešujemo z algebraičnimi metodami, reševali geometrijsko. Pri tem je bila dovoljena le uporaba ravnila (brez običajne skale v centimetrih) in šestila, le premica in krožnica sta namreč veljali za popolni krivulji. Že v tistem času pa so starogrški matematiki naleteli na konstrukcije, za katere se je zdelo, da so na ta način nerešljive. Nekatere izmed njih so postale zelo znane; ena od njih je *trisekcija kota*. Govorimo seveda o problemu, kako samo s pomočjo ravnila in šestila dani kot razdeliti na tri enake dele. Da tega ni mogoče storiti, je prvi dokazal francoski matematik in akademik Pierre Laurent Wantzel (1814–1848) leta 1837. Dotlej so mnogi znani matematiki, pa tudi laiki, skušali rešiti ta konstrukcijski problem. Slednji pogosto zato, ker so bile za rešitev problema razpisane visoke nagrade. Zanimivo je, da ta problem še danes skuša rešiti veliko nepoznavalcev matematike. Trisekcija kota pa je možna z drugimi orodji, s katerimi je mogoče narisati bolj zapletene algebrajske krivulje (npr. s kvadratriso, ki jo najdete v Razpetovi knjigi Ravninske krivulje – Sigma št. 65). Samo s šestilom in ravnilom je moč trisekcijo kota izvesti le približno, vendar s poljubno natančnostjo.

Ta znameniti problem, ki je od nekdaj zanimal matematike in laike, bo verjetno še dolgo zaposloval vse, ki ne poznajo vseh dejstev, znajo pa ravno dovolj matematike, da problem razumejo in jih vznemirja dejstvo, da je še vedno "nerešen". V tej luči je zanimiva odločitev pariške akademije znanosti iz leta 1775, češ da se v bodoče ne bodo več ukvarjali z obravnavo rešitev problemov *kvadrature kroga* (krogu je potrebno poiskati ploščinsko enak kvadrat), *trisekcije kota* in *podvojitve kocke* (kako skonstruirati stranico kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kocke z dano stranico). V tej objavi akademija tudi odločno zanika, da je za katerokoli rešitev omenjenih problemov razpisana finančna nagrada: "Ves čas so žive govorice, da je francoska vlada namenila veliko nagrado tistemu, ki reši enega od navedenih problemov. Ljudje brez ustreznega matematičnega znanja še vedno verjamejo tem govoricam in se predajajo brezplodnemu raziskovanju, pri tem pa zanemarjajo svoje pravo delo in družino. Njihova trma prehaja v norost, ki je toliko težje ozdravljiva, kolikor so raziskovalci, ki nimajo pojma o pravem smislu problema in so nesposobni dojeti, za kaj gre, prepričani, da jih je Previdnost določila, da iščejo in najdejo rešitev problemov, pri tem pa jih vodi inspiracija, ki je nimajo pravi znanstveniki."

Odgovor na vprašanje, ali je mogoča konstrukcija iskane daljice samo s pomočjo ravnila in šestila, nam da analitična geometrija, ki nas pouči o rešitvah polinomskih enačb. Vsak konstrukcijski problem lahko prevedemo na končno zaporedje korakov, pri katerih nove točke dobimo kot preseke dveh premic, premice in krožnice ali pa kot presek dveh krožnic. Pri tem morajo premice potekati skozi že znane točke, prav tako morajo biti znana središča in polmeri krožnic.

Premice so v analitični geometriji določene z linearno enačbo oblike

$$ax + by + c = 0\,, \tag{1}$$

krožnice pa s kvadratno enačbo oblike

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0\,. \tag{2}$$

Zato je iskanje presekov premic in krožnic ekvivalentno reševanju sistema dveh enačb, od katerih je vsaka oblike (1) ali (2).

Ko rešujemo problem trisekcije kota, pridemo do znane trigonometrijske enakosti

$$\cos\alpha = 4\cos^2\tfrac{\alpha}{3} - 3\cos\tfrac{\alpha}{3}\,,$$

ki po zamenjavi spremenljivk

$$a = \cos\alpha\,, x = \cos\tfrac{\alpha}{3}$$

preide v enačbo

$$4x^3 - 3x - a = 0\,.$$

Pokažemo lahko, da enačbe (3) za splošen a ni mogoče prevesti na sistem dveh enačb tipa (1) ali (2), zato trisekcija kota nasploh ni mogoča samo z ravnilom in šestilom. Zanimivo je, da pa je mogoča v posebnih primerih, ko je kot α oblike $\frac{90^\circ}{2^n}$, kjer je n naravno število.

V naslednjih številkah Preseka bomo pokazali zanimive metode, kako lahko z bolj zapletenimi orodji pridemo do rešitev omenjenih "nemogočih problemov".

Branislav Čabrić
priredil Marjan Jerman