Geometrijski dokazi nekaterih trigonometrijskih enakosti

Alija Muminagić

→ V tem članku bomo predstavili geometrijske dokaze za nekatere trigonometrijske enakosti.

Naloga 1. Dokaži, da velja enakost

- $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ enakokraki, $AB = AC = 1$ in $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 20^\circ$. Na osnovnici BC določimo točki D in E tako, da je $BD = AB = 1$ in $DE = AD$. Hitro se prepričamo, da koti merijo toliko, kot je prikazano na sliki 1.

Naj bodo točke F, G in H nožišča višin iz oglišč B, D in E v enakokrakih trikotnikih $\triangle ABD$, $\triangle ADE$ in $\triangle AEC$. Potem je

- $AF = \cos 80^\circ$ (glej pravokotni trikotnik $\triangle ABF$) in $\mathrm{AD} = 2 \cdot AF = 2 \cdot \cos 80^\circ$(ker je $\triangle ABD$ enakokraki).

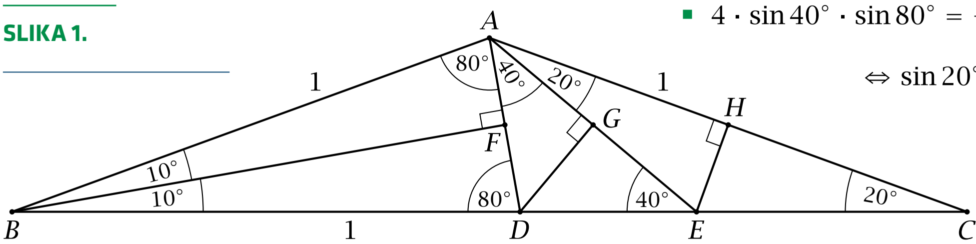
Na podoben način dobimo

- $$\begin{aligned} \mathrm{AG} &= AD \cdot \cos 40^\circ = 2 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ, \\ AE &= 2 \cdot AG = 4 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ, \\ AH &= AE \cdot \cos 20^\circ = 4 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ, \\ AC &= 2 \cdot AH = 8 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ, \end{aligned}$$

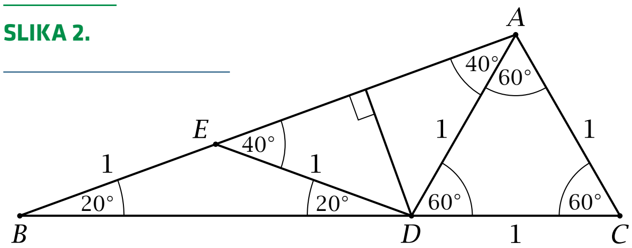
od tod pa zaradi $AC = 1$ sledi

- $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$ ■

SLIKA 1.



SLIKA 2.



Naloga 2. Dokaži, da je

- $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Dokaz. Opazujmo trikotnik $\triangle ABC$ s koti $\sphericalangle A = 100^\circ$, $\sphericalangle B = 20^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$ in stranico $AC = 1$. Naj bosta točki D in E na stranicah BC in AB takšni, da je $DC = ED = AC = AD = 1$. Tedaj so velikosti kotov kot na sliki 2 in $BE = 1$. (Pojasni!) Sedaj imamo

- $$\begin{aligned} AB = AE + EB &= 2 \cdot \cos 40^\circ + 1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos 40^\circ\right) = 2 \cdot (\cos 60^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ \\ &= 4 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ. \end{aligned} \tag{1}$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ in $\cos(90^\circ - x) = \sin x$. Z uporabo sinusnega izreka v trikotniku $\triangle ABC$ dobimo

- $$\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sin 20^\circ} \Leftrightarrow AB = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 20^\circ}. \tag{2}$$

Končno iz (1) in (2) dobimo

- $$4 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 20^\circ} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$ ■

Naloga 3. Dokaži, da je

- $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$.

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ pravokotni, $\sphericalangle C = 90^\circ$ in naj bo $\sphericalangle A = 70^\circ$ in $AC = 1$. Na kateti BC določimo točke D, E in F tako, da je $\sphericalangle BAD = 10^\circ$, $\sphericalangle DAE = 20^\circ$ in $\sphericalangle EAF = 30^\circ$. Sledi, da je $\sphericalangle FAC = 10^\circ$ in $\sphericalangle ABC = 20^\circ$ (glej sliko 3).

V pravokotnih trikotnikih $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle AEC$ in $\triangle AFC$ iz $AC = 1$ sledi $\operatorname{tg} 70^\circ = BC$, $\operatorname{tg} 60^\circ = DC$, $\operatorname{tg} 40^\circ = EC$ in $\operatorname{tg} 10^\circ = FC$. Če želimo dokazati enakost $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$, moramo dokazati, da je $BC = FC + EC + DC$, kar lahko zaradi $BC = BD + DC$ zapišemo

- $BD + DC = FC + EC + DC \Leftrightarrow BD = FC + EC.$ (3)

Na podaljšani kateti BC preko točke C določimo točko G tako, da je $\sphericalangle CAG = 10^\circ$. Iz skladnosti trikotnikov $\triangle FAC$ in $\triangle GAC$ sledi, da je $FC = CG$. Zato je enakost (3) ekvivalentna $BD = CG + EC \Leftrightarrow BD = EG$. Iz dokaza, da je $BD = EG$, bo torej sledilo, da je $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$.

Sinusni izrek v trikotniku $\triangle ABD$ nam da:

- $\dfrac{AB}{\sin 150^\circ} = \dfrac{BD}{\sin 10^\circ} \Leftrightarrow BD = \dfrac{AB \cdot \sin 10^\circ}{\sin 150^\circ}$,

od koder zaradi $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ dobimo

- $BD = 2 \cdot AB \cdot \sin 10^\circ.$ (4)

V enakokrakem trikotniku $\triangle ABG$ narišimo višino BH. Tako je (glej $\triangle ABH$)

- $\sin 10^\circ = \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AG}{2 \cdot AB} \Leftrightarrow AG = 2 \cdot AB \cdot \sin 10^\circ.$ (5)

Trikotnik $\triangle AEG$ je prav tako enakokraki, zato je

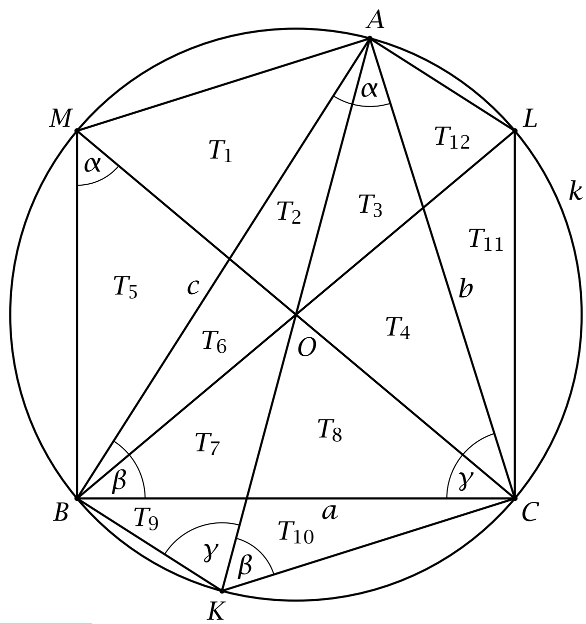
- $AG = EG.$ (6)

Končno iz (4), (5) in (6) dobimo $BD = EG$. ∎

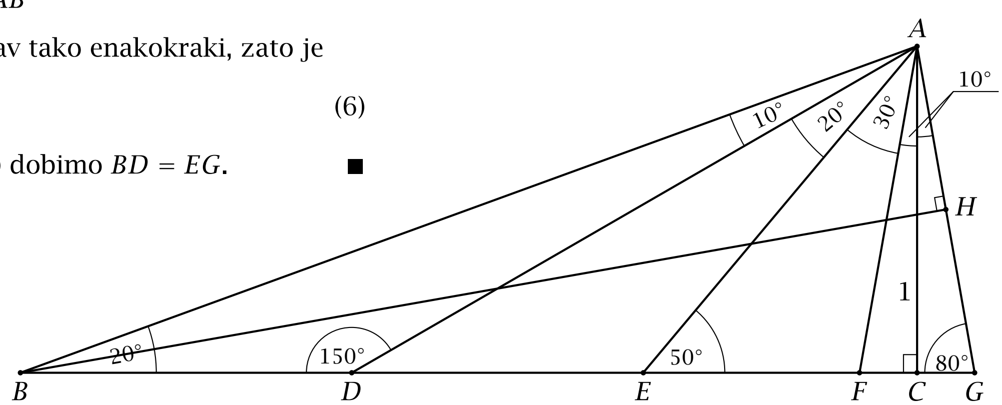
Naloga 4. Dokaži, da v (nepravokotnem) trikotniku velja enakost

- $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma$.

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ nepravokotni in naj bodo $BC = a$, $CA = b$ in $AB = c$ in α, β in γ notranji koti $\triangle ABC$. Naj bo točka O središče očrtane krožnice k okoli trikotnika $\triangle ABC$ in naj bodo točke K, L in M presečne točke smeri AO, BO in CO s krožnico k. Na ta način je šesterokotnik $AMBKCL$ razdeljen na 12 manjših trikotnikov, katerih površine so označene s $T_1, T_2, \ldots, T_{12}$ (glej sliko 4).



SLIKA 4.



SLIKA 3.

Na sliki 4 opazimo šest trikotnikov, ki imajo eno stranico enako premeru. Vsak od teh trikotnikov je razdeljen na dva manjša trikotnika z enakima površinama. (Zakaj?) Imamo torej:

- $T_3 + T_4 = T_8 + T_{10}$ $\quad T_2 + T_6 = T_3 + T_{12}$
  $T_2 + T_6 = T_7 + T_9$ $\quad T_7 + T_8 = T_5 + T_6$
  $T_7 + T_8 = T_4 + T_{11}$ $\quad T_3 + T_4 = T_1 + T_2$

Iz vsote vseh teh enakosti dobimo $2 \cdot (T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) = (T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) + (T_1 + T_5) + (T_9 + T_{10}) + (T_{11} + T_{12})$, oz. $T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8 = (T_1 + T_5) + (T_9 + T_{10}) + (T_{11} + T_{12})$, kar lahko, če z $[XYZ]$ označimo površino trikotnika $\triangle XYZ$, napišemo krajše

- $$[ABC] = [ABM] + [BCK] + [ACL]. \tag{7}$$

Iz skladnosti trikotnikov $\triangle OLC \cong \triangle OMB$ sledi

- $$LC = MB \text{ in podobno } KC = MA \text{ in } AL = BK. \tag{8}$$

Znano je, da je $[ACB] = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, kjer je R polmer očrtanega kroga, torej lahko zapišemo

- $$[ABM] = \frac{AM \cdot BM \cdot AB}{4R} = \frac{c \cdot AM \cdot BM}{4R},$$
  $$[BCK] = \frac{BC \cdot CK \cdot KB}{4R} = \frac{a \cdot CK \cdot KB}{4R},$$
  $$[ACL] = \frac{AC \cdot CL \cdot LA}{4R} = \frac{b \cdot CL \cdot LA}{4R}.$$

Enakost (7) lahko sedaj zapišemo:

- $$a \cdot b \cdot c = c \cdot AM \cdot BM + a \cdot CK \cdot KB + b \cdot CL \cdot LA. \tag{9}$$

Nadalje je $\sphericalangle CMB = \alpha$ (ker je to obodni kot nad BC) v pravokotnem trikotniku $\triangle CMB$ ($\sphericalangle CBM = 90°$, ker je to kot nad premerom), zato je

- $$\operatorname{tg} \sphericalangle CMB = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{BM} \text{ in podobno}$$
  $$\operatorname{tg} \sphericalangle AKC = \operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{KC} \overset{(8)}{=} \frac{b}{MA} \text{ in}$$
  $$\operatorname{tg} \sphericalangle AKB = \operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{BK} = \frac{c}{BK}. \tag{10}$$

Končno dobimo

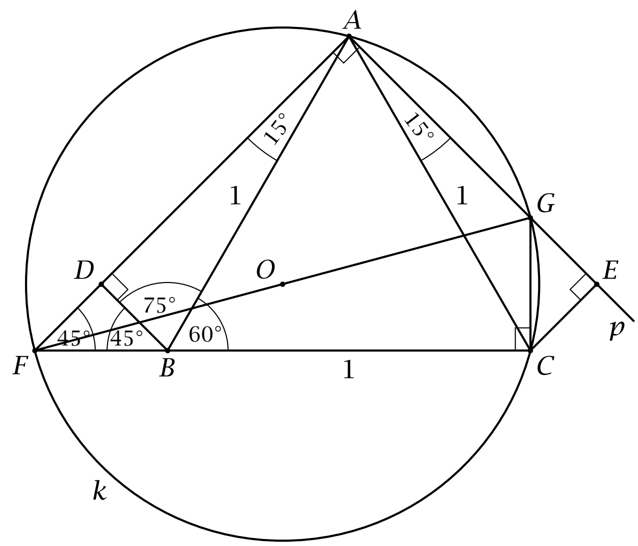
- $$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{BM} + \frac{b}{MA} + \frac{c}{BK} =$$
  $$= \frac{a \cdot MA \cdot BK + b \cdot BM \cdot BK + c \cdot BM \cdot MA}{BM \cdot MA \cdot BK}$$
  $$\overset{(8)}{=} \frac{a \cdot KC \cdot BK + b \cdot CL \cdot AL + c \cdot BM \cdot MA}{BM \cdot MA \cdot BK}$$
  $$\overset{(9)}{=} \frac{a \cdot b \cdot c}{BM \cdot MA \cdot BK} = \frac{a}{BM} \cdot \frac{b}{MA} \cdot \frac{c}{BK}$$
  $$\overset{(10)}{=} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma. \qquad \blacksquare$$

Naloga 5. Dokaži, da je

- $$\frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} = \sqrt{3}.$$

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ enakostranični ($AB = BC = CA = 1$). Na podaljšku stranice BC preko točke B izberimo točko F tako, da je $\sphericalangle FAB = 15°$ (glej sliko 5). Naj bo k krožnica, očrtana trikotniku $\triangle AFC$. Skozi točko A povlečimo premico p, ki krožnico k seče v točki G tako, da je $\sphericalangle CAG = 15°$. Tako je $\sphericalangle FAG = 90°$ ($15° + 60° + 15° = 90°$) in FG premer krožnice k. (Zakaj?) Sledi, da je $\sphericalangle FCG = 90°$. Naj bo D nožišče normale iz točke B na AF. V pravokotnem trikotniku $\triangle ADB$ zaradi $AB = 1$ velja $AD = \cos 15°$ in $BD = \sin 15°$. Trikotnik $\triangle DFB$ je enakokraki ($\sphericalangle DFB = \sphericalangle DBF = 45°$), zato je $DF = BD = \sin 15°$. Nadalje je

- $$AF = AD + DF = \cos 15° + \sin 15°. \tag{11}$$



SLIKA 5.

Z E označimo nožišče normale iz točke C na premico p. V trikotniku $\triangle AEC$ je $AE = \cos 15°$ in $CE = \sin 15°$. Nadalje je $\sphericalangle GFC = \sphericalangle CAG = 15°$ (kot obodni koti nad CG), in je $\sphericalangle FGC = 75°$. Zaradi $\sphericalangle BFD = 45°$ je $\sphericalangle GFA = 30°$ $(45° - 15°)$, sledi, da je $\sphericalangle AGF = 60°$ (glej $\triangle AFG$). Sedaj, zaradi $\sphericalangle AGF + \sphericalangle FGC + \sphericalangle CGE = 180° \iff 60° + 75° + \sphericalangle CGE = 180° \iff \sphericalangle CGE = 45°$ dobimo, da je $\triangle GEC$ enakokraki. Zaradi $AC = 1$ (glej $\triangle ACE$) je $AE = \cos 15°$, $EC = GE = \sin 15°$ in imamo

$$AG = AE - GE = \cos 15° - \sin 15°. \quad (12)$$

V pravokotnem trikotniku $\triangle AFG$ je

$$\operatorname{tg} \sphericalangle AGF = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3} = \frac{AF}{AG} \overset{(11),(12)}{=\!=} \frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°},$$

kar je bilo potrebno dokazati. ■

Verjetno bi se le redki lotili reševanja teh nalog na prikazan način, razen če ni izrazito zahtevana geometrijska rešitev (kar se ne zgodi pogosto). Obravnavane naloge imajo verjetno tudi druge geometrijske rešitve, zato priporočam bralcem, da jih poskušajo najti.

V vsakem primeru je to zanimivo za »zbiralce« neobičajnih rešitev. Za te je ta članek tudi napisan.

Literatura

[1] Opgavehjørnet 1983–1993, Jens Carstensen og Matematikloererforeningen, 1993.

[2] J. Carstensen in A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle **1** (1997) 2, Udružnje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 87–88.

[3] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo 2006, 205–214 (9 dokazov za primer 2).

[4] J. Carstensen in A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Matematičko-fizički list **LIII** (2002–2003) 3, 210–213.

× × ×

49. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

Klavdija Cof Mlinšek

→ Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj so se v soboto 20. aprila 2013 pomerili v osmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti do 1% vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija.

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V sedmem razredu smo podelili 64, v osmem 65 in v devetem 64 zlatih Vegovih priznanj.

Učenci, ki na tekmovanju Mednarodni matematični Kenguru dosežejo najboljši uspeh in hkrati dosežejo vsaj polovico točk na državnem tekmovanju, se udeležijo nagradnega izleta. V tem šolskem letu smo za najboljše učence zadnjih treh razredov osnovne šole organizirali nagradni izlet v Benetke. Povabili smo 112 najboljših učencev. S panoramsko ladjo smo se odpeljali do otoka Burano in Murano ter do glavnega trga sv. Marka. Ogledali smo si kako izdelujejo okrasje iz muranskega stekla, znamenitosti mesta ter se spopadli z gnečo v ozkih beneških ulicah. Izlet je bil nepozabno doživetje, marsikdo od učencev pa je spoznal tudi kakšnega novega prijatelja.

Nagrade, ki so bile podeljene v Cankarjevem domu, so prejeli najboljši tekmovalci, in sicer: