MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#3

PRESEK LETNIK 49 (2021/2022) ŠTEVILKA 3

PRESEK

- DIOKLOVA CISOIDA
- OBLIKA VULKANOV
- MEDNARODNA OLIMPIJADA IZ ASTRONOMIJE IN ASTROFIZIKE
- O PREDSTAVITVI PODATKOV V RAČUNALNIKU: BESEDILO

ISSN 0351-6652

MATEMATIČNI TRENUTEK

Zaščita podatkov v kvantni dobi

Kadarkoli pošljemo e-pošto ali opravimo spletni nakup, se zanašamo na to, da do naših podatkov ne morejo dostopati nepooblaščene osebe. Standardni varnostni mehanizmi v kriptografiji temeljijo na matematičnih problemih, ki so prezahtevni za današnje računalnike, kot je, denimo, iskanje prafaktorjev zelo velikih števil. Toda v naslednjih desetletjih pričakujemo razvoj kvantnih računalnikov, ki naj bi tovrstne probleme rešili bistveno hitreje in s tem ogrozili varnost spletnega komuniciranja.

Zato nekatere ustanove že zdaj raziskujejo nova matematična orodja in algoritme, ki bodo odporni na kvantne računalnike. Ameriški NIST (National Institute of Standards and Technology) preiskuje varnost, hitrost in stroške različnih procesov s področja večdimenzionalnih mrež, linearnih kod za popravljanje napak, izogenij med eliptičnimi krivuljami in podobno. S tem želi najti kvantno-odporne algoritme za digitalno podpisovanje in šifriranje z javnim ključem, ki bi jih lahko standardizirali za vsakdanjo rabo. V prihodnjih letih naj bi kvantno-odporne metode sčasoma povsem zamenjale današnje varnostne mehanizme povsod, od vladnih računalnikov do telefonov v naših žepih.

Več informacij v članku *How the United States Is Developing Post-Quantum Cryptography*, Jeremy Hsu, IEEE Spectrum, 9. september 2019

Izvirno besedilo: Securing the Data in the Quantum Era, Mathematical moments from the AMS. Prevod in priredba: Boštjan Kuzman.

KOLOFON

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 49, šolsko leto 2021/2022, številka 3

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 633, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: info@dmfa-zaloznistvo.si

Naročnina za šolsko leto 2021/2022 je za posamezne naročnike 22,40 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 19,60 EUR, posamezna številka 6,00 EUR, stara številka 4,00 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 30 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

List sofinancira Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih poljudno-znanstvenih periodičnih publikacij.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Collegium Graphicum, Ljubljana

Naklada 1100 izvodov

ISSN 2630-4317 (Online)
ISSN 0351-6652 (Tiskana izd.)

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM PRESEKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps …), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **info@dmfa-zaloznistvo.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: V osrednji Javi v Indoneziji je veriga aktivnih ognjenikov, ki oblikujejo pokrajino in življenje ljudi. Kljub rednim in nevarnim izbruhom je to območje gosto poseljeno, saj rodovitna vulkanska prst in ugodna klima omogočata intenzivno kmetovanje. Pogosto se zgodi, da se kljub opozorilom vulkanologov pred izbruhi, kmetje nočejo umakniti iz pobočij ognjenikov. Na fotografiji je ognjenik Merapi. Foto: Andrej Guštin

Računalnik na pohodu

Andrej Likar, urednik za fiziko

→ Že kar nekaj časa sem urednik za fiziko pri reviji Presek, leta nazaj pa sem bil tudi Presekov odgovorni urednik. Kazalo bi se umakniti in prepustiti delo mlajšim. A ni prav velikega navala na to mesto. Če je s prispevki križ, pa sam kaj napišem, kar bralci gotovo niste spregledali.

Zakaj še vedno rad kaj napišem in naredim ustrezni poskus (glej sliko 1)? Predvsem zaradi izrednega napredka računalništva, malo pa tudi zaradi ljubezni do fizike. Ko sem bil mlad, smo morali prispevke tipkati na pisalnem stroju. Uveljavljeni starejši znanstveniki so imeli za tako delo svoje pridne tajnice, ki so bile izurjene v tipkanju in so tipkale ter pretipkavale ves svoj delovni čas. V znameniti knjigi nobelovcev A. Bohra in B. Mottelsona z naslovom Nuclear structure (izšla leta 1968) iz zahval izvemo, da je za organizacijo teksta več let skrbela Sophie Hellmann, ki se tudi po sedemdesetem rojstnem dnevu ni upokojila prav zaradi dela pri tej knjigi. Brez Lise Madsen knjige verjetno sploh ne bi bilo, saj je zapleteno in preko 1200 strani obsežno besedilo v dveh knjigah tipkala in pretipkavala v številnih novih in novih verzijah. Avtorja sta imela podporo tudi pri risanju slik, ki jih je prispeval Henry Olsen.

Pisanje na pisalni stroj mi je bilo skrajno mučno. Vsako napačno napisano črko si moral previdno zradirati in napisati pravilno. Ker strojepisja nisem obvladal, je bilo teh napak obilo. Kaj šele, če si se med tipkanjem domislil boljše formulacije misli, kot si jo imel na z roko napisanem konceptu. Papir ven in na novo! Rezanje in lepljenje je bilo takrat s škarjami in lepilom, ne s kliki na miški. Pri risanju slik iz skiciranih predlog so sem in tja sicer pomagali zunanji sodelavci, največkrat pa si bil prepuščen samemu sebi. Nič bolje ni bilo pri pripravi Preseka za tisk. Vse prispevke smo morali pretipkavati, k sreči so to delale strojepiske; sami tega ne bi zmogli.

In danes? Pisanje z računalnikom in z dobrim urejevalnikom je prav prijetno. Pišeš brez ročno napisanega koncepta naravnost v računalnik. Ta te opozori na napake, vrivanje besedila, popravljanje besed ali celih stavkov; urejanje končne oblike je smešno preprosto, še posebej, če si vajen svojega urejevalnika besedil, ki je pri meni pač Latex. Napredek računalništva je skrb za končni izgled besedila v veliki meri prevalil od poklicnih stavcev na pisce. Ne čudim se, da vsled tega izide v majhni Sloveniji veliko število novih naslovov, leposlovnih in strokovnih, seveda z ne zelo visoko naklado.

Ne le pri pisanju, računalnik je z višjenivojskimi programskimi jeziki, ki jih je danes na stotine, omogočil jasne slikovne ponazoritve teksta. Meni pri tem še vedno dobro služi dobri stari Fortran, seveda izpopolnjen in opremljen z grafičnimi primitivi, ki ga mladi niti ne poznajo več. Sedaj so v modi Python, C++, Mathematica. Računalniško programiranje je danes za mnoge vir veselja in kreativne izrabe prostega časa, denimo, pri ustvarjanju abstraktnih računalniških slik in grafik, pri ponazoritvi geometrijskih konstrukcij, trorazsežnih teles. Zavedati se moramo, da imamo danes na mizi napravo, ki večstokratno presega zmožnosti nekdaj velikih računalniških sistemov tako po spominu kot po hitrosti izvajanja.

Ne smemo pa pozabiti tudi drugih ugodnosti, ki jih nudi računalnik. Njega dni si po pošti, tisti staroveški, poslal svoj prispevek uredništvu, čakal na odgovor, upošteval pripombe, poslal ponovno. Danes gre pogovor z uredništvom preko elektronske pošte, hitro in udobno. Tu je tudi medmrežje-internet, ki je v veliko pomoč pri zbiranju podatkov; te bi sicer moral izbrskati iz knjig ali revij na papirju, ki jih nimamo vedno na voljo. Seveda pa niti približno ne velja, da je že vse na spletu. Tega se zavemo, ko se poglobimo v študij kakega pojava. Hitro uvidimo, kako so na redko posejane informacije na spletu, kako so tam povsem razumljive zadeve na dolgo in široko razložene, malo manj razumljivim pa se splet kar izogne. Tudi dostop do novejših člankov preko interneta ni vedno prost, dostikrat ga je potrebno plačati z naročnino ali članek kupiti. No, to je že bolj skrb raziskovalcev, avtorji prispevkov za Presek na internetu kar hitro pridemo do želenih podatkov in razlag. Do idej, kaj in kako napisati prispevek, pa mi internet ni kaj prida pomagal.

Ali se po vsem tem še kdo čudi, da sem pri Preseku še vedno urednik za fiziko? Morda bo tako še nekaj časa, saj se morajo mladi posvečati raziskovanju, ki prav zaradi razvoja računalnikov in zapletene laboratorijske opreme postaja vse bolj zahtevno, tako po miselnih naporih kot tudi časovno. Tudi profesorjem na srednjih šolah in učiteljem na devetletkah ne ostane kaj dosti prostega časa in volje, da bi še urednikovali in pisali za Presek. A mladih raziskovalcev in pedagogov ni tako malo in upam, da bo kmalu kdo od njih prevzel uredništvo. Sam pa bom vedno ostal zvest spremljevalec Preseka, edinstvenega lista za mlade ljubitelje matematike, fizike, računalništva in astronomije, saj je njemu podobnih tudi pri številčnejših narodih bore malo. Navdušuje pa me tudi tradicija, saj bo Presek kmalu praznoval že častitljivo petdesetletnico izhajanja.

SLIKA 1.
Z zvočnikom vzvalovana vodna gladina. Pri večjih amplitudah vzbujanja se na gladini tvorijo kapljice.

× × ×

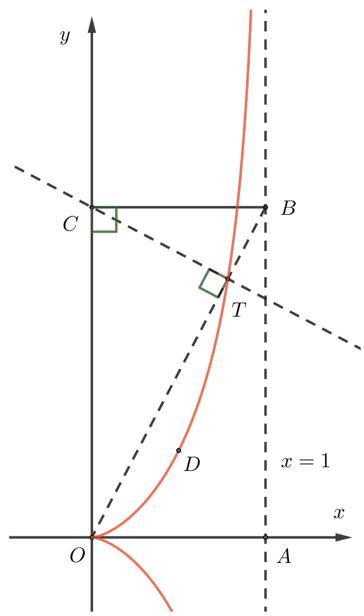
Dioklova cisoida in podvojitev, potrojitev, … kocke

↓↓↓
Marko Razpet

→ **Kako z neoznačenim ravnilom in šestilom določiti rob kocke, da bo njena prostornina dvakratnik prostornine dane kocke? To je znani antični problem podvojitve kocke. Če ima dana kocka rob a, iščemo tako kocko z robom b, da bo $b^3 = 2a^3$. To pomeni, da mora biti $b = a\sqrt[3]{2}$. Problem podvojitve kocke z neoznačenim ravnilom in šestilom ni rešljiv, kar so matematiki pravilno dokazali šele v 19. stoletju. Razlog je v tem, da števila $\sqrt[3]{2}$ ni mogoče izraziti s končnim številom osnovnih štirih aritmetičnih operacij in kvadratnih korenov nad racionalnimi števili.**

Že od antičnih časov pa so znani uspehi matematikov, ki so našli rešitev problema z drugačnimi pomagali, pogosto s posebnimi krivuljami, ne samo s premicami in krožnicami, ki jih rišemo z ravnilom in šestilom. Oglejmo si krivuljo, ki ji pravimo *Dioklova cisoida* in ki nam pomaga pri podvojitvi kocke. Pa ne le to, kocko lahko na podoben način tudi potrojimo, početverimo itd. *Diokles* (240–180 pr. n. št.) je bil starogrški matematik, ime krivulje pa izhaja iz grške besede *kissós*, kar pomeni *bršljan*. Kaj ima pri tem bršljan, bomo spoznali na koncu prispevka.

Do Dioklove cisoide bomo prišli z metodami analitične geometrije v ravnini, v katero vpeljemo pravokotni kartezični koordinatni sistem Oxy. V njem načrtamo najprej premico $x = 1$, ki preseka os x v točki $A(1,0)$. Na tej premici izberemo poljubno →



SLIKA 1.
Geometrijska konstrukcija točk Dioklove cisoide

točko $B(1,t)$, kjer je t od 0 različno realno število. Na sliki 1 je $t>0$. Točko B pravokotno projiciramo na os y, kjer dobimo točko $C(0,t)$. Nato C pravokotno projiciramo na premico skozi O in B, kjer dobimo točko $T(x,y)$.

Premica skozi O in B ima enačbo $y=tx$, pravokotnica skozi C nanjo pa smerni koeficient $-1/t$, zato enačbo $x+yt=t^2$. Rešitev sistema enačb

$$y=tx,\quad x+yt=t^2 \tag{1}$$

sta koordinati točke T:

$$x=\frac{t^2}{1+t^2},\quad y=\frac{t^3}{1+t^2}. \tag{2}$$

Za $t=0$ dobimo točko $O(0,0)$, za $t=1$ pa $D(1/2,1/2)$. Ko točka B preteče premico $x=1$, spremenljivka t (pravimo ji tudi *parameter*) preteče vsa realna števila, točka T pa opiše krivuljo, ki ji pravimo *Dioklova cisoida*. Enačbi (2) imenujemo *parametrični enačbi* cisoide.

Če si mislimo, da je parameter t čas, enačbi predstavljata sestavljeno gibanje točkaste mase v dveh med seboj pravokotnih smereh v koordinatni ravnini: v smeri osi x po pravilu prve enačbe, v smeri osi y pa po pravilu druge enačbe. Tirnica takega gibanja je cisoida. Podobno opišemo npr. tudi gibanje točkaste mase pri poševnem metu.

Iz prve enačbe v (2) razberemo, da za vsak t velja relacija $0\le x<1$. Zato je pravokotna projekcija cisoide na os x interval $[0,1)$. Ko zamenjamo t z $-t$, se x ne spremeni, y pa spremeni predznak. To pomeni, da je cisoida simetrična glede na os x. Hitro spoznamo tudi, da $x\to 1$ in $|y|\to\infty$, ko $|t|\to\infty$, kar pomeni, da je premica $x=1$ njena navpična asimptota. Cisoida poteka skozi točke $O(0,0)$, $D(1/2,1/2)$ in $D'(1/2,-1/2)$.

Če izrazimo t iz prve enačbe sistema (1) in vstavimo v drugo, dobimo po poenostavitvi enakovredni implicitni enačbi cisoide

$$x(x^2+y^2)=y^2,\quad (1-x)y^2=x^3. \tag{3}$$

Če v prvo vstavimo $x=r\cos\varphi$ in $y=r\sin\varphi$, vidimo, da v polarnih koordinatah velja zveza

$$r=\frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}. \tag{4}$$

Pri tem polarni kot φ teče po intervalu $(-\pi/2,\pi/2)$, polarni radij $r=|OT|$ pa zavzame vse nenegativne vrednosti. Zveza (4) je enačba cisoide v *polarni obliki*.

Kako sedaj uporabimo Dioklovo cisoido za podvojitev, potrojitev, početverjenje, … kocke? Pomagamo si s premico skozi točki A in C. Njena enačba je $y=t(1-x)$. Poiščimo njeno presečišče $E(x_E,y_E)$ s cisoido. Če upoštevajmo zadnjo enačbo v (3) desno, dobimo

$$(1-x)^3t^2=x^3.$$

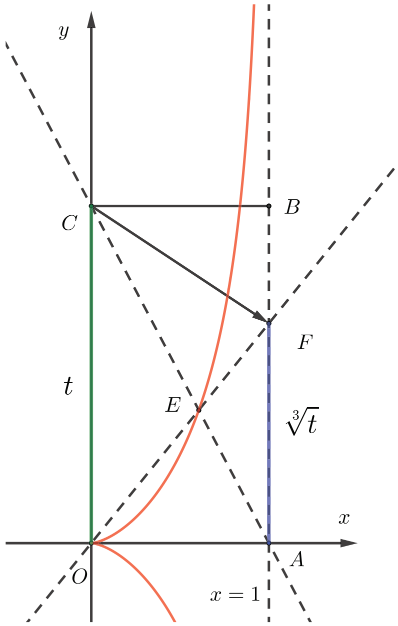
Obe strani korenimo in imamo preprosto enačbo za x:

$$(1-x)\sqrt[3]{t^2}=x.$$

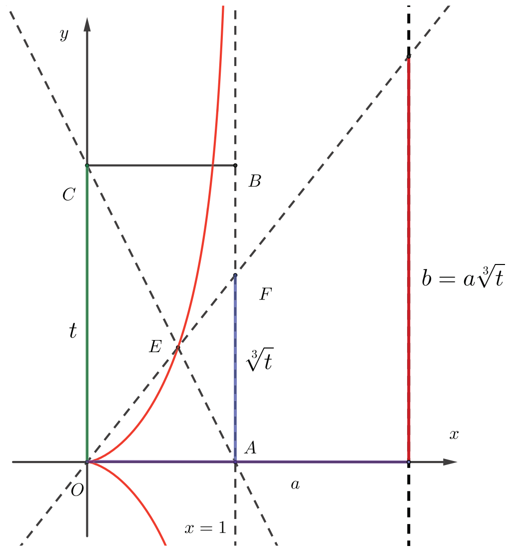
Iz te takoj sledi

$$x_E=\frac{\sqrt[3]{t^2}}{1+\sqrt[3]{t^2}},\quad y_E=t(1-x_E)=\frac{t}{1+\sqrt[3]{t^2}}.$$

Ker je smerni koeficient premice skozi O in E enak $y_E/x_E=\sqrt[3]{t}$, je njena enačba $y=x\sqrt[3]{t}$. Ta premica pa preseka premico $x=1$ v točki $F(1,\sqrt[3]{t})$ (slika 2).



SLIKA 2.
Geometrijska konstrukcija tretjih korenov



SLIKA 3.
Geometrijska konstrukcija robov $b = a\sqrt[3]{t}$

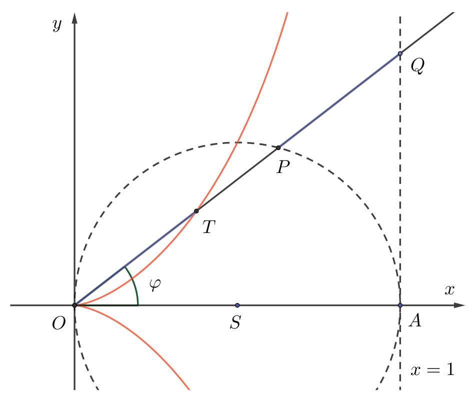
S tem smo našli preslikavo

- $C(0, t) \mapsto F(1, \sqrt[3]{t})$,

ki nam da tretje korene. S podobnostno transformacijo lahko za vsak rob a dane kocke najdemo rob $b = a\sqrt[3]{n}$ kocke, ki ima za prostornino n-kratnik prostornine dane kocke: $b^3 = na^3$, če vzamemo za n naravna števila $2, 3, 4, \ldots$ (slika 3). Za $n = 2$ imamo klasično podvojitev kocke, za $n = 3$ potrojitev, za $n = 4$ početverjenje itd.

Dioklovo cisoido lahko konstruiramo po točkah še na druge načine. Eden od teh je s pomočjo krožnice $x^2 + y^2 = x$, ki ima središče v točki $S(1/2, 0)$ in polmer $1/2$ (slika 4).

Iz koordinatnega izhodišča O načrtamo poltrak, ki preseka krožnico $x^2 + y^2 = x$ v točki P, cisoido v točki T, njeno asimptoto pa v točki Q. Dokažemo lahko, da velja enakost $|OT| = |PQ|$ za vsak Q na premici $x = 1$. To lahko elegantno naredimo v polarnih koordinatah. Pokažemo, da je na sliki 4 $|OP| = \cos\varphi$ in $|OQ| = 1/\cos\varphi$. Od tod izračunamo $|PQ| = |OQ| - |OP|$. Rezultat primerjamo z že izračunano vrednostjo za $|OT|$ (enačba (4)). Torej



SLIKA 4.
Določilna lastnost cisoide: $|OT| = |PQ|$

res velja enakost $|OT| = |PQ|$. To lastnost, ki je za cisoido določilna, lahko izkoristimo za njeno risanje po točkah.

Del cisoide, ki je znotraj krožnice $x^2 + y^2 = x$, omejuje z njo lik, ki spominja na list vrste bršljana. Od tod izhaja ime krivulje.

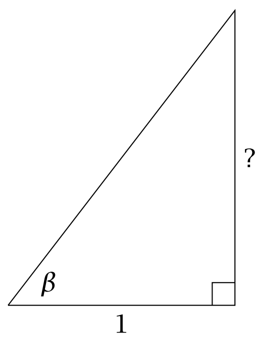
× × ×

Tangens $7\pi/24$ na tri načine

Dragoljub M. Milošević (prevod in priredba Boštjan Kuzman)

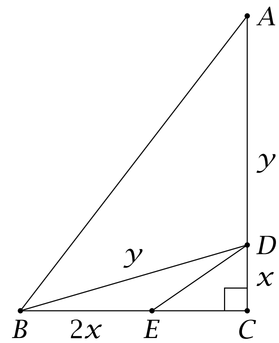
Za nekatere matematične probleme poznamo le eno rešitev. So kot gorski vrh, ki je dostopen le z ene strani. Pri nekaterih drugih pa lahko k reševanju pristopimo iz različnih smeri. Tako spodbujamo duh raziskovanja in pridobivamo matematično zrelost. Kot zgled naj služi naslednja naloga, ki jo bomo rešili na tri načine.

Naloga. V pravokotnem trikotniku ima ena od katet dolžino 1 in s hipotenuzo oklepa kot $\beta = \frac{7\pi}{24}$. Dokaži, da je dolžina druge katete enaka $2 + \sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$.



SLIKA 1.

1. način (enakokraki trikotniki in Pitagorov izrek). Označimo oglišča A, B, C kot na skici, tako da je kot pri B znani kot β, kot pri C pravi kot in ima stranica BC dolžino 1. Izberimo točko D na stranici AC tako, da bo trikotnik ABD enakokrak. Dolžini krakov označimo z y. Ker je $\sphericalangle ABD = \sphericalangle DAB$, je $\sphericalangle CBD = \pi/12 = 15°$. Nato izberemo še točko E na stranici BC tako, da bo trikotnik EBD enakokrak. Sledi, da je $\sphericalangle CED = \pi/6 = 30°$, zato je dolžina stranice $|ED|$ enaka dvakratniku dolžine $|CD|$, kar označimo z $2x$ in x. Zdaj uporabimo Pitagorov izrek v trikotniku CDE s katetama dolžin x in $1 - 2x$ ter hipotenuzo $2x$. Z rešitvijo kvadratne enačbe dobimo $x = 2 - \sqrt{3}$ (druga rešitev je prevelika, saj je $2x < 1$). Nato uporabimo še Pitagorov izrek v trikotniku BCD, da podobno dobimo $y = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. S kvadriranjem ni težko preveriti, da je zadnji izraz enak $y = \sqrt{6} - \sqrt{2}$, iskana dolžina pa je ravno $x + y$, kot smo želeli dokazati.



SLIKA 2.

2. način (trigonometrijske formule). Dolžina druge katete je enaka tangensu kota $\frac{7\pi}{24}$. Ker je $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$, lahko uporabimo formuli za tangens vsote $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$ in tangens polovičnega kota $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$. Z nekaj računanja dobimo rezultat. S podobnim izračunom bi dobili rezultat tudi iz zvez $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{8}$ ali $\frac{7\pi}{24} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{24}$.

3. način (kosinusni izrek). Kot prej označimo oglišča A, B, C in znana kota. Na stranici AB tokrat izberemo točko D tako, da je trikotnik BCD enakokrak z osnovnico 1. Potem je $\sphericalangle BDC = \frac{10\pi}{24} = 75°$ in s pomočjo kosinusnega izreka za ta kot lahko izrazimo kvadrat dolžine $|BD|$. Pri tem izračunamo $\cos 75° = \sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ z uporabo formule za sinus polovičnega kota. Označimo z E razpolovišče daljice BD in $x = |BE| = |BD|/2$. Iz doslej znanih podatkov lahko s Pitagorovim izrekom določimo še dolžino daljice $|CE| = y$. Ker je trikotnik BCE pravokoten, zaradi podobnosti sledi, da je iskana dolžina katete enaka $|CA| = \frac{y}{x}$. Bralke in bralce vabimo, da sami dodajo skico in manjkajoče podrobnosti.

× × ×

Matematični adventni koledar 2021

Martin Milanič, Jasna Prezelj in Martin Raič

V mesecu decembru se je tudi letos odvilo tradicionalno spletno tekmovanje Matematični adventni koledar, ki ga organiziramo na UP FAMNIT (Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije) že od leta 2015. Tekmovanje je namenjeno učenkam in učencem zaključnih razredov osnovne šole in vseh letnikov srednje šole, poteka pa tako, da v mesecu decembru na spletu vsake tri dni objavimo novo nalogo, za katero imajo reševalci 24 ur časa. Namen nalog je vzpodbuditi zanimanje za matematiko ter reševalkam in reševalcem pokazati zanimive probleme, ki pa včasih zahtevajo daljši razmislek. Bralce in bralke Preseka vabimo, da preizkusijo svoje možgane in tudi sami rešijo nekaj letošnjih nalog.

8. in 9. razred

1. naloga. Določi števko a, za katero bo število $17 \cdot 16a + 171 \cdot 716$ deljivo z 12.

2. naloga. Rok in Nika igrata naslednjo igro na logičnih izrazih, ki vsebujejo izjavne spremenljivke A, B, C in D. Najprej Rok izbere eno od spremenljivk in jo postavi na resnično, nato Nika izbere eno izmed še neizbranih in jo postavi na neresnično, nato spet Rok izbere eno izmed še neizbranih in jo postavi na resnično, preostala spremenljivka pa se postavi na neresnično. Če je celotni izraz resničen, je zmagal Rok, če je neresničen, je zmagala Nika. Za vsako formulo se izkaže, da ima eden od igralcev zmagovalno strategijo; če jo igra, zmaga ne glede na to, kako igra njegov nasprotnik. Za vsako od naslednjih formul določi, kdo ima zmagovalno strategijo:

- $A \wedge (B \vee C) \wedge D$,
- $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge D$,
- $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \wedge D$.

3. naloga. Fantje imajo tabor 240 m oddaljen od ravne glavne ceste, dekleta pa imajo tabor ob glavni cesti 400 m od tabora fantov. Ob glavni cesti želimo postaviti kuhinjo, ki naj bo od obeh taborov enako oddaljena. Kolikšna naj bo ta oddaljenost v metrih?

1. in 2. letnik

1. naloga. Turingov stroj je namišljena naprava, ki ima glavo in raven trak s celicami, ki se razteza levo in desno v neskončnost. Glava se pomika po traku levo in desno, ko miruje, pa je vselej na neki celici. V vsaki celici je lahko zapisana ničla ali enica, glava stroja pa je lahko v treh možnih stanjih, A, B in C. Stroj obratuje tako, da glava najprej prebere vsebino celice, na kateri se nahaja, nakar glede na njeno stanje in prebrano vsebino najprej v celico, na kateri se nahaja, zapiše novo vsebino, nato pa se pomakne za eno celico levo ali desno, preide v novo stanje in nadaljuje z naslednjim korakom. Stanje glave in prebrana vsebina celice pa lahko narekujeta tudi, da se stroj ustavi. Kaj stroj naredi, je natančno določeno s stanjem glave in vsebino celice. Razen primera, ko je glava v stanju C, prebere pa ničlo, je popolnoma znano, kaj stroj naredi, v omenjenem primeru pa je znano le, da se glava pomakne levo (in da se stroj ne ustavi):

	A	B	C
0	1, desno, B	1, levo, B	?, levo, ?
1	STOJ	0, desno, C	1, levo, A

Na začetku so na traku zapisane same ničle, stroj pa je v stanju A. Prvih nekaj korakov stroja je prikazanih spodaj. Dopolni, kaj mora narediti glava, ki v stanju C prebere ničlo, če naj se stroj nekoč ustavi, število pomikov glave pa je največje možno. Prvih nekaj korakov:

A
0

    B
1 0

B
1 1

    C
0 1

A
0 1

    B
1 1

        C
1 0 0

2. naloga. Populacijo testiramo s presejalnim testom – hitrim antigenskim testom. V populaciji imamo zdrave in obolele, rezultat testiranja pa je lahko pozitiven ali negativen. Naj bo a delež ljudi v populaciji, ki so bolni in so imeli pozitivni test, b delež ljudi, ki so zdravi in so imeli pozitivni test, c delež ljudi, ki so bolni in so imeli negativni test, ter d delež ljudi, ki so zdravi in so imeli negativni test. Količina $\frac{a}{a+c}$ se imenuje občutljivost, količina $\frac{d}{d+b}$ pa specifičnost. Naj bo občutljivost testa 95%, specifičnost 98% in naj število bolnih pozitivnih predstavlja 40% vseh pozitivnih. Kolikšen je delež obolelih v populaciji?

3. naloga. Naj ima $ABCD$ kvadrat s stranicami AB, BC, CD in DA ploščino 25. Naj bo M tista točka na stranici AB, pri kateri je dvakratnik dolžine stranice AM enak dolžini stranice BM. Naj bo F presečišče premice skozi D in M s premico skozi B in C. Naj bo E točka na sredi daljice DF. Kolikšna je razdalja med točkama A in E? Odgovor zapiši zaokrožen na dve decimalki. Uporabi decimalno vejico.

3. in 4. letnik

1. naloga. Določi največje celo število k, pri katerem 3^k deli $10^{3^{2021}} - 1$.

2. naloga. Poišči 10-mestno število s samimi različnimi števkami $abcdefghij$, za katerega velja:

a je deljivo z 1.
ab je deljivo z 2.
abc je deljivo s 3.
$abcd$ je deljivo s 4.
$abcde$ je deljivo s 5.
$abcdef$ je deljivo s 6.
$abcdefg$ je deljivo s 7.
$abcdefgh$ je deljivo z 8.
$abcdefghi$ je deljivo z 9.
$abcdefghij$ je deljivo z 10.

3. naloga. Anja je na tablo napisala vsa števila od 1 do 300. Zanimajo jo vse neurejene trojice teh števil, pri katerih je vsota števil deljiva s 3 in števila niso nujno različna. Koliko takih trojic bi Anja lahko sestavila?

× × ×

Oblika vulkanov

Andrej Likar

Osamljeni vulkani imajo značilno obliko. Ni jih mogoče zamenjati z gorami, ki so nastale z gubanjem zemeljskega plašča.

Na sliki 1 vidimo obris še delujočega vulkana Mayon na otoku Luzonu na Filipinih. Oblika je povsem krožno simetrična, kot plašč stožca, le da je pobočje pri vrhu strmo, potem pa strmina z oddaljenostjo od kraterja počasi pada. Evropska Etna (glej sliko 2), nima tako pravilnega obrisa, je pa še vedno povsem jasno, da gre za vulkan. Tudi Vezuv ne more skriti vulkanskega porekla, izdaja ga desno pobočje (glej sliko 3). Pravilno, skoraj parabolično obliko pobočja vidimo tudi pri Nanosu, o čemer smo v Preseku že poročali [1]. Tam smo privzeli, da se kamenje pobočja giblje tem hitreje, čim večja je njegova strmina. Kaj, ko bi poskusili s tem privzetkom opisati pobočje vulkanov?

Iz kraterja na vrhu delujočega vulkana prihajajo na dan lava in kamni vseh mogočih oblik ter velikosti. Valeč se po pobočju gradijo vulkan. Spet bomo privzeli, da je ploskovna gostota masnega toka valečih se kamnov j, to je masa kamnov, ki v sekundi preidejo skozi dan okvir s ploščino S, sorazmerna s strmino pobočja, torej naj za

SLIKA 1.
Vulkan Mayon na filipinskem otoku Luzonu (vir: Wikipedija)

SLIKA 2.
Vulkan Etna (vir: Wikipedija)

SLIKA 3.
Vulkan Vezuv (vir: Wikipedija)

$$j = \frac{m}{tS}$$

velja

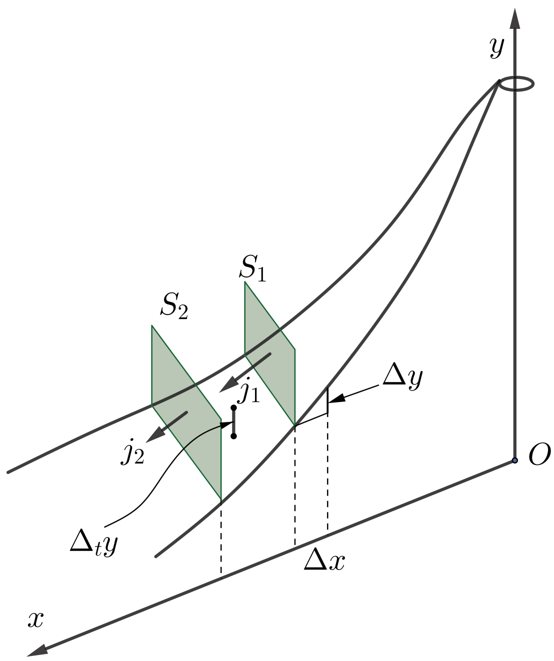
$$j = \alpha y' .$$

Strmino smo označili z y', da lažje računamo, naj strmina pomeni padec višine pobočja Δy na vodoravni razdalji enega metra:

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Pri nevelikih strminah je taka definicija smiselna, le pri zelo velikih strminah, kjer bi se nagib bližal 90°, bi kazalo strmino definirati kot sinus nagiba. A pri vulkanih tako velikega nagiba ni. Sorazmernostnega faktorja α sicer ne poznamo, a ga bomo določili na podlagi slik pobočij.

Privzetek o masnem toku spominja na ploskovno gostoto toplotnega toka, ki je prav tako sorazmerna s temperaturnim gradientom, torej s kvocientom temperaturne razlike ΔT in debeline plasti d, skozi katero teče ta tok.



SLIKA 4.
K izpeljavi enačbe za določanje oblike pobočja

Strmina se z oddaljenostjo od žrela vulkana zmanjšuje, pa tudi izbruhana snov zavzema vse večji prostor, zmanjšuje se tudi masni tok j. Dokler vulkan raste, se del izbruhane mase nalaga na pobočju. Tako vulkan raste v višino in tudi v širino.

Koliko je tega nalaganja, izvemo s pomočjo slike 4. Na njej je prikazan del pobočja, kamor priteka snov s tokom j_1 skozi ploskev S_1, odteka pa skozi ploskev S_2 s tokom j_2. Zaradi ohranitve mase mora torej veljati

- $(j_1S_1 - j_2S_2)\Delta t \propto \Delta_t y\,.$

Z $\Delta_t y$ označimo prirastek vulkana v višino na danem mestu x v času Δt. Privzeli smo, da dotoka snovi z bokov ni ali pa se izravna z odtokom. Ker je navpični prerez skozi sredino vulkana neodvisen od tega, kje ga prerežemo, je $S_2 > S_1$. Ploskovna gostota masnega toka se torej manjša zaradi nalaganja snovi na pobočje in zaradi širitve na vse večji prostor. Če bi na robu vulkana snov po vsem obsegu primerno odstranjevali, bi se oblika vulkana ustalila.

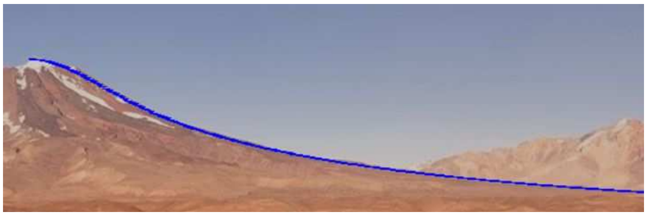
Enačbo naraščanja vulkana torej imamo, pri računanju moramo le še poskrbeti za dotok mase iz kraterja in določiti sorazmernostno konstanto tako, da kar najbolje ujamemo dejansko obliko vulkana. Na sliki 5 smo kar dobro ujeli obliko vulkana Mayona.

Ko vulkan ugasne, se njegova oblika še naprej spreminja, le da s kraterja ni dotoka snovi. Najbolj opazno je zaobljanje na vrhu, kar vidimo na sliki 6 nekega ugaslega vulkana. Zaobljenje pa opazimo tudi pri nevulkanskih vzpetinah, ko je ta posledica erozijskih dejavnikov, kot so veter, dež, zmrzali. Tudi obdelovanje zemlje lahko v precejšnji meri pripomore k oblikovanju vzpetin. Lep primer najdemo na Cerkljanskem, kjer je holmec z domačim imenom Kouk presenetljivo zaobljen (glej sliko 7).

SLIKA 5.
Primerjava izračunanega obrisa vulkana Mayon (modra krivulja) z dejansko

Na slikah 8, 9 in 10 vidimo postopno zaobljanje vulkana skozi daljša časovna obdobja. Vulkani, ki so ugasnili pred več sto miljoni let, so danes po obliki komaj razpoznavni.

Za konec naredimo še vulkanski poskus. Ne bomo se trudili z nasipavanjem peska, pač pa bomo naredili poskus z računalnikom. Kroglice bomo spuščali z določene višine na ravna vodoravna tla. Spuščene

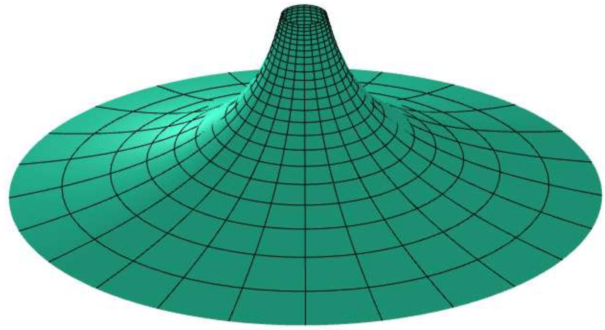


SLIKA 6.
Izračunani obris nedavno ugaslega vulkana (modra krivulja) – vrh postaja zaobljen

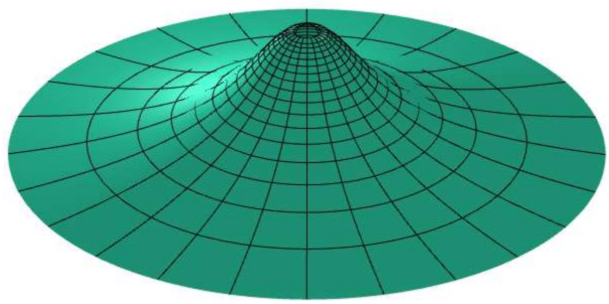
SLIKA 7.
Grič Kouk na Cerkljanskem je zaobljen zaradi kmetijske dejavnosti. (Foto M. Razpet)

kroglice naj se neelastično odbijajo od tistih že na tleh. Opazovali bomo, kako raste kup, in njegovo obliko primerjali z obliko vulkana. Eden od kupov je prikazan na sliki 11. Vidimo, da oblika spominja na obliko vulkanov. Od tod sklepamo, da se kroglice pri neelastičnem odboju gibljejo tako, kot smo privzeli zgoraj.

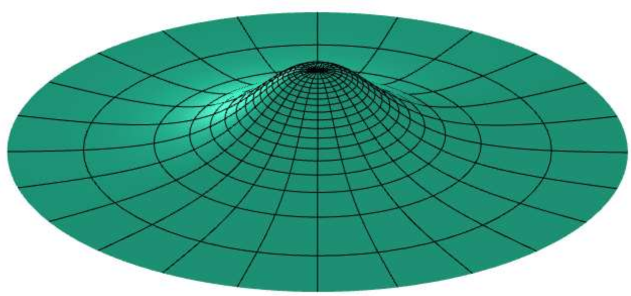
Še besedo o neelastičnem trku med kroglicami. Elastični trk smo v Preseku že obravnavali, bralci se morda še spomnijo te vsebine. Kroglici sta ravno v stiku, enotski vektor, ki povezuje njuni središči, je $\vec{e}$. Po elastičnem ali neelastičnem trku se obema kroglicama spremeni gibalna količina, prvi za $-G\vec{e}$, drugi pa za $G\vec{e}$. Da določimo velikost G gibalne količine $G\vec{e}$, upoštevamo, da se skupna kinetična energija pri



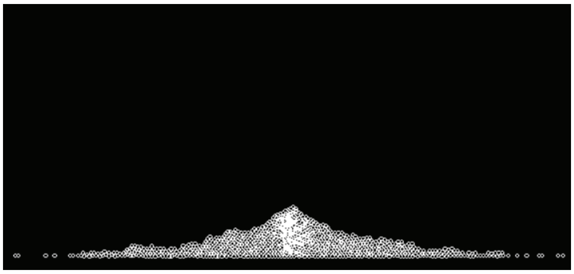
SLIKA 8.
Obris delujočega vulkana



SLIKA 9.
Po daljšem času neaktivnosti je vulkan vidno zaobljen



SLIKA 10.
Pred kakimi stotimi milijoni let ugasli vulkan izgubi značilno vulkansko obliko



SLIKA 11.
Kup, ki se nabere ob spuščanju kroglic na ravna vodoravna tla. Oblika kupa je zelo podobna obliki vulkanov.

elastičnem trku ohrani, pri neelastičnem pa se nekaj začetne kinetične energije izgubi na račun segrevanja kroglici, torej

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}m(\vec{v}_1 - \frac{G}{m}\vec{e})^2 + \frac{1}{2}m(\vec{v}_2 + \frac{G}{m}\vec{e})^2 + Q\,.$$

Na levi strani smo zapisali kinetično energijo ploščic pred trkom, na desni pa po njem. S primerno izbiro izgubljene kinetične energije Q izračunamo G in iz tega hitrosti kroglic po trku. Izgubljena energija Q je odvisna od trka. Pri centralnem trku, ki ga največkrat obravnavajo, je Q največja, pri robnem trku, ko se kroglici le bežno dotakneta, pa je zanemarljiva. Da pridemo do smiselnih vrednosti za Q, najprej izračunamo G pri elastičnem trku:

$$\frac{G}{m} = \vec{e} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\,,$$

nato pa ga za določen del zmanjšamo. Če ga zmanjšamo na polovico, dobimo povsem neelastični trk. Pri centralnem trku bi se tedaj kroglici sprijeli in potovali dalje z enako hitrostjo. Pri našem računu oblike kupa smo privzeli povsem neelastične trke. Če dodamo nekaj elastičnosti, dobimo nekoliko bolj razpršene kupe.

Literatura

[1] A. Likar, *Pobočje Nanosa*, Presek **30** (2002/2003) 4, str. 196.

× × ×

Barvni sudoku

V 8 × 8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2 × 4) nastopalo vseh osem števil.

		8	4			5	
2				8		3	
	4				1		
3						7	
			5				7
			1				8
						1	5
1	2				7		

REŠITEV BARVNI SUDOKU

6	3	8	4	7	2	5	1
2	5	1	7	8	4	3	6
5	4	7	8	3	1	6	2
3	1	6	2	5	8	7	4
8	6	2	5	1	3	4	7
4	7	3	1	6	5	2	8
7	8	4	3	2	6	1	5
1	2	5	6	4	7	8	3

× × ×

Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike 2021

Vid Kavčič

Uvodnik

Zaradi izrednih razmer je Mednarodna olimpijada iz astronomije in astrofizike (MOAA) 2021 potekala na daljavo v organizaciji gostujoče države Kolumbije.

Slovenski mladi astronomi so si izborili kar nekaj kosov žlahtnih kovin. **Simon Bukovšek** (Gimnazija Kranj) in **Peter Andolšek** (Gimnazija Bežigrad) sta prejela **zlati medalji**, **Vid Kavčič** (Gimnazija Bežigrad) in **Domen Lisjak** (Gimnazija Bežigrad) sta prejela **srebrni medalji**, **Urban Razpotnik** (Gimnazija Bežigrad), **Vito Levstik** (II. gimnazija Maribor), **Tian Strmšek** (II. gimnazija Maribor) in **Urša Mati Djuraki** (Gimnazija Bežigrad) so prejeli **bronaste medalje**, **Miha Brvar** (Gimnazija Bežigrad) je prejemnik **pohvale**, **Marija Judež** (Srednja elektro šola in tehnična gimnazija Novo mesto) se je častno spoprijela z zelo zahtevnimi astronomskimi in astrofizikalnimi alogami.

Uspeh slovenske astronomske ekipe je res izjemen, saj se je glede na žlahtnost prejetih medalj uvrstila tudi med najboljših pet držav udeleženk tekmovanja.

Posebne zahvale gredo vodji olimpijske ekipe **Andreju Guštinu**, mentorjema **Krištofu Skoku** in **Dunji Fabjan** ter članoma spremljevalne ekipe **Roku Kovaču** in **Jonu Judežu.** Najžlahtnejše zahvale pa gredo tudi **Bojani Ukmar**, ki je ves teden skrbela za izjemno slastno prehrano na kmečkem turizmu v Avberju na Krasu, kjer so udeleženci preživljali svoje olimpijske dni.

V prispevku predstavljamo pet rešenih nalog s **teoretičnega dela tekmovanja**, ki so ga tekmovalci pisali **pet polnih ur.** Predstavljene naloge so različnih težavnosti, poudarimo pa naj, da je za razumevanje tako nalog kot tudi rešitev potrebno poglobljeno znanje osnov astronomije in astrofizike.

SLIKA 1.
Astronomska falanga v Avberju (foto: Andrej Guštin)

Bralcu želimo prijetno trenje astronomskih orehov in obilo zabave!

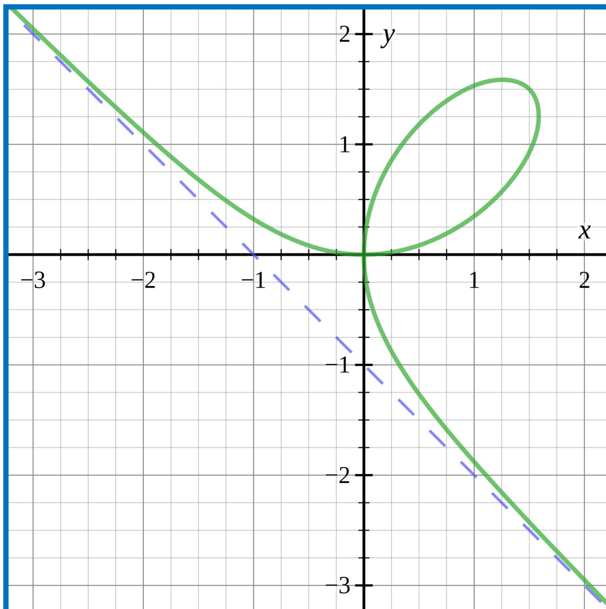
Naloga 5. Pod pritiskom

Magnetna polja na Soncu stalno oblikujejo strukture in različne pojave v Sončevi atmosferi. Znotraj vsake strukture magnetno polje (B) prispeva k celotnemu tlaku plina. Ta t. i. magnetni tlak je funkcija višine z in ga lahko izrazimo kot

$$P_{mag}(z) = \frac{B^2(z)}{2\mu_0}.$$

18 nadaljevanje na strani

Nagradna križanka



Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis pretium arcu ligula, quis lacinia sapien semper vel. Praesent accumsan sed lectus vel semper. Praesent pellentesque venenatis arcu ac tristique. Aliquam aliquet accumsan velit in fringilla. Sed ut efficitur est, ac cursus est. Fusce eget rhoncus nunc. Praesent at est quam. In feugiat ante rhoncus turpis luctus, eu luctus lorem congue.

In fermentum justo ac ipsum ornare scelerisque. Donec vitae ligula tincidunt, tempor tortor eu, posuere ante. Maecenas nec ipsum in mauris luctus tempor. Maecenas elementum arcu sed dui volutpat sodales. Aliquam erat volutpat. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Pellentesque eleifend dapibus ex ac placerat. Etiam pharetra sem non turpis porta fermentum. Sed quam dolor, tempor vehicula aliquet auctor, interdum eget tellus. Suspendisse efficitur luctus nunc quis sagittis. Nullam a mollis felis, vitae cursus turpis. Curabitur tempus ullamcorper maximus. Nunc sit amet tellus consequat, gravida ante vitae, volutpat odio.

Aenean pretium mauris vel tortor egestas euismod. In aliquam, enim vel blandit pellentesque, elit nibh scelerisque tortor, quis condimentum est risus id nulla. Proin sed turpis tempus, auctor urna at, vehicula sem. Duis vel interdum est. Vivamus lacus velit, luctus vel tellus id, porttitor sollicitudin massa. Curabitur sed rutrum velit. In quis leo consequat, ultrices mi non, eleifend ex.

AMERIŠKI PREDSTAVNIK KONCEPTUALNE IN MEDIJSKE UMETNOSTI (JOHN)
ITALIJAN. KOMEDIOGRAF (LUDOVICO)
BARVNA KOVINA
ŠEATOV ŠPORTNI TERENEC
OPAZOVALNE ALI STRELNE ODPRTINE V ZIDU
2
ODMERJANJE ZDRAVILA
RIMSKI FILOZOF

LASTNICA KAPITAL. DELEŽA GOSPODAR. DRUŽBE
ALPSKA REKA V ŠVICI, PRITOK AARE
SNEŽENI MOŽ
KOSITER
LEGENDARNA KAVARNA V MARIBORU
RDEČI KRIŽ
ČEŠKO MESTO
PO NJEJ PIŠE PREDAVATELJ

AVTOR: MARKO BOKALIČ
POKRAJINA V SRED. DELU VIETNAMA
VEROSLOVEC
SKUPNI JEZIK STARIH GRKOV
DOLOČITEV VIŠINE DAJATVE
NAŠE IME REKE TAGLIAMENTO V SEVEROZAHODNI ITALIJI
KRIVULJA V OBLIKI OSMICE
JUDOISTKA TRSTENJAK
3
PERZIJSKI SVETI SPIS
DRUGO VRATNO VRETENCE

NAŠA TV VODITELJICA (ALENKA)
GIBANJE ZRAČNIH MAS
URAD, PISARNA
GAŠPER TIČ

SAMOSTOJNEŽ
RAZŠIRJEN KEMIJSKI ELEMENT
MLAD OČE

PREŽIVNINA
NAJVEČJA TELESNA ŽILA
SEČ
STAROSTA NAŠIH MATEMATIKOV (JOSIP)
NEBESA, PARADIŽ
LUTECIJ

TEMNA ZRNATA MAGMATSKA KAMNINA
LJUDSTVO NA SV SIBIRIJE
BRAZILSKA DRŽAVA
PLOVILO V OBLIKI DESKE ZA VESLANJE STOJE
ŽENSKO VOLNENO OGRINJALO

GRAFIČNO OBLIKOVANJE MATEVŽ BOKALIČ
AMERIŠKI IGRALEC (RICHARD)
KEPA PRSTI
NEKDANJI RUSKI VLADAR
IGRALKA ŽELEZNIK
1
KONJSKI TEK
FIZIK STRNAD
MESTO PRI LONDONU
JULIJIN LJUBIMEC

GUSTAV IPAVEC
ŽILA ODVODNICA, UTRIPALNICA
OBDOBJE
URADNE, DELOVNE, GOVORILNE ?
JUPITROVA LUNA
NAJVIŠJI GERMANSKI BOG

SISTEMATSKA KATEGORIJA ŽIVIH BITIJ
OKRASNI ALI ZELENJAVNI NASAD PRI HIŠI
JOPIČ
OBMEJNI KRAJ V DOLINI POD ČRNIM KALOM
HUMANO DEJANJE
POTENCA ŠTEVILA DESET

RIBIŠKI PLEN
VELIKA PAPIGA ŽIVIH BARV
URŠKA HROVAT
ORGAN VOHA
SPLETNA DOMENA SLOVENIJE
ZLITINA BAKRA IN CINKA
REPUBLIKA SLOVENIJA
6
GLASBILO IZ DRUŽINE PIHAL
2. OSEBA EDNINE

VAS OB AVTOCESTI PRI VODICAH
SKLATENJE LETALA S STRELNIM OROŽJE

PISATELJICA CHRISTIE
dMFA
PRISTOJBINA ZA IZPOSOJO

PLOČEVINKA | VERGILOV EP | EGIPČANSKI BOG SONCA | ITALIJAN. MATEMATIK, KI JE OSNOVAL AKSIOME MNOŽICE NARAVNIH ŠTEVIL (GIUSEPPE) | VITKA PTICA UJEDA | PODROČJE MATEMATIKE | JEZERO V NEMŠKIH ZEMLJEPISNIH IMENIH | MOČVIRSKA RASTLINA Z VOTLIM STEBLOM

SLOJ

ŠVICARSKI MATEMATIK (LEONHARD)

ZVEZDNI SESTAV

INDIJSKA SVETA REKA

TURISTIČNA OBALA

HIDROKSILNA SKUPINA V KEMIJI

HRUP, NEMIR, ŽIVŽAV

BODLJAJ

OBJEKTIV, KI DA SLIKO BREZ ASTIGMATIZMA

ZBIRKA LISTIN

RTV VODITELJICA ŠIRCA ROŠ

TELUR | NASAD PIVOVARSKE SUROVINE | GRŠKI BOG VETROV | OKSIDNA PREVLEKA NA POVRŠINI ŽELEZA | FAKULTETA ZA STROJNIŠTVO | BLAZINJAK BREZ STRANIC, DIVAN | NARODNI ALI VERSKI ODPADNIK | NAJDALJŠA REKA V MAROKU

PIKTOGRAM NA RAČUN. ZASLONU

GEOMETR. TELO

ANGLEŠKI FIZIK (ERNEST)

IGRALEC DIESEL

NAJVIŠJI ŠAHOVSKI NASLOV

KOSTARIŠKI DRŽAVNIK (OSCAR)

5

JUŽNOAM. INDIJANEC

UNIVERZA V NEW HAVNU

PEROCI

BELGIJSKI PISATELJ (CAMILLE)

3. OSEBA ŽEN. SPOLA

REKA NA PELOPONEZU

OJDIPOV OČE

SESTAVNI DELEC MOLEKULE

IRSKI FIZIK (JOHN)

STAROIT. ŽUPAN, PODESTA

BESEDA, KI OZNAČUJE POSAMEZNIKA, IZDELEK ALI ZEMLJEPISNI POJEM

SPODNJA PLOSKEV ALI NAJNIŽJI DEL

BRITANSKA PEVKA (RITA)

GLAVNO MESTO SAMOE V POLINEZIJI

7

GLASBNEIK PILETIČ

GR. UTEMELJITELJ GEOMETRIJE

PISATELJ JANČAR

TONE KUNTNER

NAKUP

STARO MESTECE V DELTI SOČE, ANTIČNA AKVILEJA

OTROK, OTROČAJ

POBIRALEC MITNINE

NIZOZEM. SORTA KROMPIRJA

ODBOJ ZVOKA

LADIJSKI MERILNIK HITROSTI

CELJSKI ŽUPAN ŠROT

NAŠA KOŠARKARICA (EVA)

4

OČE

OPRIJEM NASPROTNIKA PRI BOKSU

GOZD PO GORENJSKO

TOPEL IN SUH VETER Z GORA

ŠVEDSKI NARAVOSLOVEC (CARL)

ZVOK GLASBILA

KAZALNI ZAIMEK

RADIJ

SPLETNA DOMENA KITAJSKE

ČAROVNIK

LAHEK NASIČEN OGLJIKOVODIK

EVROPSKA ORGANIZACIJA ZA JEDRSKE RAZISKAVE

NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **1. februarja 2022**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli **knjižno nagrado**.

× × ×

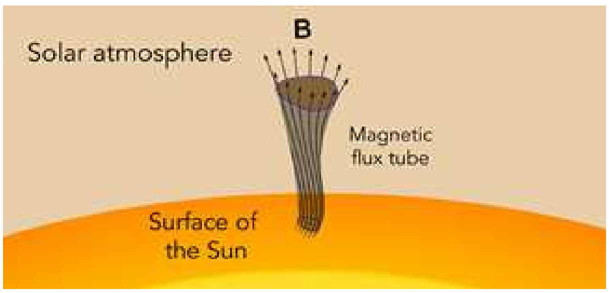
→ 15 nadaljevanje s strani

Po drugi strani je plin v hidrostatičnem ravnovesju in zato tlak plina pada eksponentno od začetne vrednosti tlaka P_0 z naraščajočim z. Izrazimo lahko

- $P_{gas}(z) = P_0 e^{-z/H}$,

pri čemer je H skalirna višina, tj. višina, na kateri tlak pade na $\frac{P_0}{e}$.

Obravnavaj magnetno cev, ki se dviguje od Sončevega površja v nemagnetno okolje (glej sliko 2). Predpostavi, da je celoten tlak snovi v cevi v ravnovesju s snovjo izven cevi.



SLIKA 2.

1. Izpelji izraz za gostoto magnetnega polja kot funkcijo višine z.

2. Če je gostota magnetnega polja na dnu cevi 0,3 T in je skalirna višina H v Sončevem modelu 150 km, na kateri višini bo gostota polja enaka 0,03 T?

Rešitev.

1. Tlak znotraj magnetne cevi je enak tlaku plina v okolici. Tlak znotraj magnetne cevi je enak vsoti tlaka plina znotraj magnetne cevi in magnetnega tlaka. Zapišemo enačbi za ravnovesje tlakov na površju Sonca in v splošnem na neki višini z:

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0} = p_{0,\text{zunaj}} - p_{0,\text{znotraj}} \qquad (1)$$

$$\frac{B(z)^2}{2\mu_0} = e^{-z/H}\left(p_{0,\text{zunaj}} - p_{0,\text{znotraj}}\right). \qquad (2)$$

Če zgornji dve enačbi zdelimo, dobimo

$$\frac{B(z)^2}{B_0^2} = e^{-z/H}$$

$$B(z) = B_0 e^{-z/2H}.$$

2. Iz zgoraj dobljene enačbe izrazimo z in dobimo

$$z = 2H \ln\frac{B_0}{B(z)} = 2 \cdot 150\ \text{km} \ln\frac{0{,}3}{0{,}03}$$

$$\therefore z = 690\ \text{km}.$$

Naloga 8. Logotip IOAA

Logotip IOAA 2021 sestavlja akronim IOAA, kjer je prva črka silhueta zgradbe Državnega astronomskega observatorija (OAN) Kolumbije, najstarejšega observatorija v Ameriki. Ta observatorij se nahaja v mestu Bogotá, kjer je bil ustanovljen leta 1803. Glavno mesto Kolumbije omejujeta dve znani gori, Monserrate in njena soseda Guadalupe, ki sta ikoni mestne pokrajine in krasita ozadje logotipa.

SLIKA 3.

1. Oceni oddaljenost (v km) med točkama 2 (Guadalupe) in 3 (Monserrate) v tabeli 1.

2. Oceni kotno razdaljo (v stopinjah) med Guadalupe (2) in Monserrate (3), kot jo opazijo iz Državnega astronomskega observatorija v Kolumbiji (1) v tabeli 1.

3. Iz OAN so 21. septembra ob 20.00 opazovali Luno v smeri vzhodnega gorovja (med Monserrate in Guadalupe). Izmerjeni ekliptični koordinati (dolžina in višina) Lune sta prikazani v tabeli 2. Določi ekvatorialne koordinate Lune ob času opazovanja.

Opomba. Azimut merimo od severa proti vzhodu.

Točka	Širina	Dolžina	Nadmorska višina (m.a.s.l)
1	$4°35'53''N$	$74°04'37''W$	2607
2	$4°35'30''N$	$74°03'15''W$	3296
3	$4°36'18''N$	$74°03'19''W$	3100

TABELA 1.

Lokalni čas: 20.00
$Az: +90°42'59''$ / $Alt: +19°01'42''$
$\lambda: +12°20'16''$ / $\beta: -04°24'14''$

TABELA 2.

Rešitev.

1. Ker so razdalje med kraji zelo majhne, lahko predpostavimo, da površje Zemlje na tem delu ni sferično. Če za polmer Zemlje vzamemo $R = 6378$ km, lahko za razdalje po komponentah izračunamo

   - $$\begin{aligned}\Delta x &= R \cdot (4°39'18'' - 4°35'30'') \cdot \frac{\pi}{180}\\ &= 1{,}4842 \text{ km}\\ \Delta y &= R \cdot (74°3'19'' - 74°3'15'') \cdot\\ &\quad \frac{\pi \cdot \cos(4°35'54'')}{180} = 0{,}1237 \text{ km}\\ \Delta z &= 3{,}100 \text{ km} - 3{,}296 \text{ km} = -0{,}196 \text{ km}.\end{aligned}$$

   Razdaljo izračunamo kot

   - $$d_{2-3} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2} = 1{,}502 \text{ km}.$$

2. Na isti način kot prej izračunamo tudi

   - $$\begin{aligned}d_{1-2} &= 2{,}722 \text{ km},\\ d_{1-3} &= 2{,}580 \text{ km}.\end{aligned}$$

   Kotno oddaljenost med krajema 2 in 3 za opazovalca v 1 izračunamo s pomočjo kosinusnega izreka

   - $$\cos\theta = \frac{d_{1-2}^2 + d_{1-3}^2 - d_{2-3}^2}{2d_{1-2}d_{1-3}} \approx 0{,}841$$
     $$\therefore \theta = 32{,}78°.$$

3. Pretvorbo iz ekliptičnih v ekvatorialne koordinate podajata spodnji enačbi, iz katerih dobimo

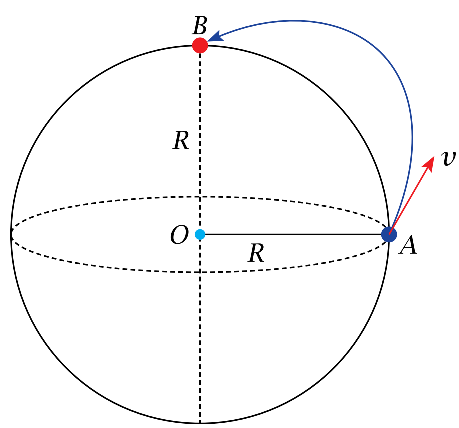
   - $$\begin{aligned}\operatorname{tg}\alpha &= \frac{-\sin\beta\sin\epsilon + \cos\beta\cos\epsilon\sin\lambda}{\cos\beta\cos\lambda}\\ \therefore \alpha &= 12°43'3'' = 0 \text{ h } 50 \text{ min } 52 \text{ s}\\ \sin\delta &= \sin\beta\cos\epsilon + \cos\beta\sin\epsilon\sin\lambda\\ \therefore \delta &= 1°33'43''.\end{aligned}$$

   V tabeli so podane tudi horizontske koordinate, tako da bi lahko ekvatorialne koordinate preračunali tudi iz njih.

Naloga 11. Minimalna hitrost izstrelka

Kolikšna je najmanjša hitrost, s katero moramo izstreliti izstrelek s površja Zemlje na ekvatorju, da bo padel na severni pol? Izračunaj ekscentričnost trajektorije izstrelka.

Zanemari vrtenje Zemlje in privzemi, da je Zemlja krogla.

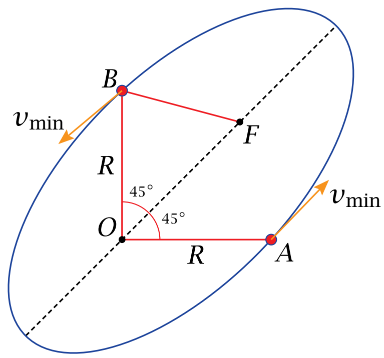


SLIKA 4.

Rešitev. V točkah A in B je hitrost v enaka. Če je torej vrednost v minimalna, mora biti tudi skupna energija orbite minimalna:

$$-\frac{GMm}{R}+\frac{1}{2}mv^2=-\frac{GMm}{2a},$$

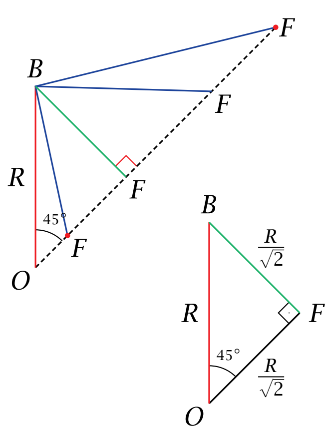
kjer je a velikost velike polosi elipse. Če mora biti torej energija orbite minimalna, mora biti vrednost $2a$ minimalna.



SLIKA 5.

Če označimo z O središče Zemlje, ki je tudi eno gorišče elipse, in z F drugo gorišče, potem velja

$$|OB|+|BF|=2a,$$



SLIKA 6.

torej mora biti vrednost $|OB|+|BF|$ minimalna. Da bo temu tako, mora biti daljica BF pravokotna na daljico OF. Od tod sledi, da je najmanjša vrednost $2a$ enaka

$$2a=|OB|+|BF|=R+\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Iz zgornjega izraza lahko izrazimo minimalno hitrost in dobimo

$$v=\sqrt{\frac{2GM}{(1+\sqrt{2})R}}$$
$$\therefore v=7195\ \mathrm{m/s}.$$

Ker je $|OF|=2ea$, lahko numerično ekscentričnost elipse e izrazimo kot

$$\frac{R}{\sqrt{2}}=2\cdot e\cdot\frac{R}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$e=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\approx 0{,}414.$$

Naloga 13. Lucy – prva misija do Trojanskih asteroidov

CCD kamere na vesoljskih sondah so zelo občutljive in izpostavljene vplivom vesoljskega vremena. Močno sevanje v silicijevih čipih kamere ustvari pare **elektron-vrzel**. Hitrost nastajanja teh parov je pomemben parameter med delovanjem kamer in jo je mogoče izračunati za sevanje katerekoli dane energije.

Delec velikih energij ali foton, ki gre skozi CCD, tam z vsakim ustvarjenim parom elektron-vrzel pusti nekaj energije. **Absorpcijsko moč** silicija je mogoče izmeriti za določeno vrsto delca kot energijo na površinsko gostoto (površinska gostota je masa na enoto površine), ki jo silicij *odvzame* od delca v preletu.

Nasina misija Lucy bo prva proučevala **asteroide Trojance** in bo naredila pravo revolucijo v razumevanju nastanka Osončja. Eden od inštrumentov na krovu vesoljske sonde bo L'LORRI (Lucy LOng Range Reconnaissance Imager), katerega del bo občutljiv CCD detektor, namenjen snemanju podrobnih slik Trojancev. Na žalost je sevanje okoli Jupitra zelo močno in lahko ustvari veliko *šuma* na svetlobnih elementih (pikslih) CCD.

Predpostavimo, da ima nabit delec, ujet v Jupitrovem magnetnem polju, v povprečju energijo 15 MeV in je tok takih delcev v tem območju približno enakovreden 600 elektronom s^{-1} cm^{-2}. Poleg tega lahko predpostavimo, da vsak delec, ki zadane svetlobni element, v njem pusti natanko toliko energije, kot je je potrebno za nastanek para elektron-vrzel. Ko v posameznem slikovnem elementu nastane kritično število parov elektron-vrzel, postane element zasičen in v njem ne morejo več nastati novi pari elektron-vrzel. Morebitno preostalo energijo delec v preletu preda naslednjemu slikovnemu elementu in tako dalje.

Uporabi spodnje podatke za čip CCD v kameri L'LORRI in odgovori na sledeča vprašanja.

1. Koliko slikovnih elementov na CCD bo *nasičil* en tak delec, ki bo v bližini Jupitrove orbite zadel kamero?
2. Glede na podani tok delcev v bližini Jupitra izračunaj, koliko odstotkov od vseh slikovnih elementov bo zasičenih.

Tehnični podatki za CCD:

- čas osvetlitve enega posnetka = 30 ms
- število slikovnih elementov na CCD = 1024×1024
- površina CCD = 13 mm × 13 mm
- debelina CCD čipa = 0,06 cm
- gostota silicija, $\rho = 2{,}34$ g cm^{-3}
- potrebna energija za nastanek enega para elektron-vrzel = 2,36 eV
- število parov elektron-vrzel, ki pomenijo zasičenost enega slikovnega elementa = 250 parov
- *absorpcijska moč* silicija za elektron z energijo 15 MeV = 3,012 MeV g^{-1} cm^2

Rešitev.

1. En sam elektron na detektorju CCD pusti sledečo količino energije:
   - $E_\mathrm{d} = 3{,}012\ \dfrac{\mathrm{MeVcm}^2}{\mathrm{g}} \cdot 2{,}34\ \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot 0{,}06\ \mathrm{cm} = 422{,}9\ \mathrm{keV}.$

   Ker elektron z energijo 15 MeV dovede 422,9 keV energije, moramo izračunati število parov elektron-vrzel
   - $422{,}9\ \mathrm{keV} \cdot \dfrac{1}{2{,}36\ \mathrm{eV}} = 1{,}79 \cdot 10^5\ \dfrac{\mathrm{elektron}}{\mathrm{vrzel}}.$

   Izračunamo število slikovnih elementov, ki jih bo lahko nasičilo $1{,}79 \cdot 10^5$ parov elektron-vrzel:
   - $1{,}79 \cdot 10^5 \cdot \dfrac{1}{250} = 716.$
2. Število elektonov, ki vstopijo na detektor, je enako
   - $600\ \dfrac{\mathrm{elektronov}}{\mathrm{cm}^2\mathrm{s}} \cdot (1{,}3 \cdot 1{,}3)\ \mathrm{cm}^2 \cdot 0{,}03\ \mathrm{s} = 30\ \mathrm{elektronov}.$

   Približno 30 elektronov vstopi na površino detektorja, hkrati pa vemo, da en elektron nasiči 716 slikovnih elementov, zato je skupno število nasičenih slikovnih elementov enako
   - $716 \cdot 30{,}42 = 2{,}18 \cdot 10^4.$

   Ker ima detektor skupno $1024 \cdot 1024 = 1{,}048 \cdot 10^6$ slikovnih točk, je delež nasičenih slikovnih točk enak $\sim 2{,}08\,\%$.

Naloga 14. Nastanek Venus-2

Komet z maso αm se giblje (»pada«) radialno proti Soncu. Znano je, da je skupna mehanska energija kometa nič. Komet trči v Venero, katere masa je m. Nadalje predpostavi, da je orbita Venere pred trkom krožna s polmerom R_0. Po strmoglavljenju tvorita komet in Venera en sam objekt, imenovan »Venus-2«.

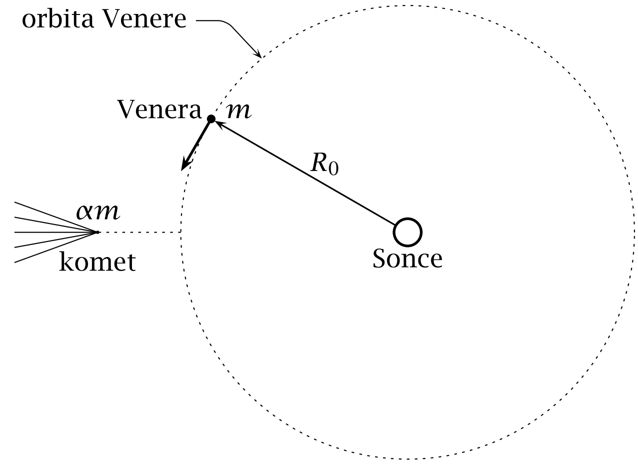
Kolikšna naj bi bila vrednost α, da bi po trku orbita telesa Venus-2 povzročila njegovo strmoglavljenje na Sonce? To vrednost bomo imenovali α_c.

Rešitev. Naj bo $M_\odot$ masa Sonca. Venera se okoli Sonca giblje s hitrostjo

- $v_0 = \sqrt{\dfrac{GM_\odot}{R_0}},$

→

→



SLIKA 7.

skupna mehanska energija Venere pred trkom je enaka energiji krožne (torej eliptične) orbite

$$E_i = -\frac{GM_\odot}{2R_0},$$

skupna mehanska energija kometa pa, glede na to, da potuje po parabolični orbiti, enaka 0, iz česar za njegovo hitrost v_c sledi

$$v_c = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{R_0}}.$$

Ker se komet, ko je daleč stran, giblje radialno proti Soncu, je njegova vrtilna količina enaka nič. Iz ohranitve vrtilne količine pred (samo vrtilna količina Venere) in po (vrtilna količina Venusa-2) lahko izrazimo tangentno komponentno hitrosti Venusa-2:

$$\begin{aligned} R_0 m v_0 &= R_0(m+\alpha m)v_\theta \\ v_\theta &= \frac{v_0}{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Radialno komponento hitrosti Venusa-2 v_r dobimo iz ohranitve gibalne količine v radialni smeri. Upoštevamo, da je hitrost kometa pred trkom enaka v_c. Velja

$$\begin{aligned} \alpha m v_c &= (m+\alpha m)v_r \\ v_r &= \frac{\alpha}{1+\alpha}v_c. \end{aligned}$$

Skupno mehansko energijo Venusa-2 izrazimo kot

$$\begin{aligned} E_f &= W_p + W_k \\ &= -\frac{GM_\odot m(1+\alpha)}{R_0} + \frac{1}{2}m(1+\alpha)\left(v_\theta^2 + v_r^2\right) \\ &= -(1+\alpha)\frac{GM_\odot m}{R_0} + \frac{1}{2}(1+\alpha)\cdot \\ &\quad \cdot \left[2\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \frac{1}{(1+\alpha)^2}\right]\frac{GM_\odot m}{R_0} \\ &= -\frac{GMm}{2R_0}\left(\frac{1+4\alpha}{1+\alpha}\right) \\ \therefore E_f &= \left(\frac{1+4\alpha}{1+\alpha}\right)E_i. \end{aligned}$$

Ker se je energija orbite očitno spremenila, orbita Venusa-2 očitno več ne bo krožna. Ker je energija negativna, mora biti eliptična. Iz razmerja energij orbit pred in po trku izrazimo veliko polos nove orbite:

$$a_f = \frac{E_i}{E_f}R_0 = R_0\frac{1+\alpha}{1+4\alpha}.$$

Da bo Venus-2 trčil s Soncem, mora biti njegova oddaljenost od središča Sonca v periheliju orbite enaka

$$r_p = R_\odot = 6{,}955 \cdot 10^8 \text{ m} = 0{,}00643R_0,$$

razdalja v afeliju pa mora biti enaka $r_a = R_0$. Od tod sledi

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{r_p + r_a}{2} = 0{,}5032R_0 \\ \frac{a_c}{R_0} &= 0{,}5032 = \frac{1+\alpha_c}{1+4\alpha_c} \\ \therefore \alpha_c &= 0{,}4905. \end{aligned}$$

Če torej želimo, da Venus-2 strmoglavi v Sonce, mora biti masa kometa enaka približno polovici mase Venere.

Naj pa na koncu vendarle priznamo, da smo si drznili tole nalogo nekoliko preurediti in jo izčistiti dolgočasnih pomožnih vprašanj. Hkrati pa naj se zahvalimo Simonu Bukovšku, ki je prijazno priskrbel znaten del slikovnega gradiva tega članka.

× × ×

O predstavitvi podatkov v računalniku: besedilo

Jure Slak

Velik del podatkov, ki jih shranjujemo na računalniku ali pošiljamo prek interneta, je sestavljen iz običajnega besedila: elektronska pošta, klepet, dokumenti, spletne strani. Vsaka prikazana vrstica besedila, ki jo vidite na zaslonu, pa je morala biti tudi nekje shranjena kot zaporedje ničel in enic. Kot se pogosto zgodi, lahko besedilo shranimo na več kot en način; ti različni načini pa med sabo niso kompatibilni. Če ste kdaj npr. pri podnapisih pri filmu videli élovek namesto človek, ali pa morda kar potegav��ina namesto potegavščina, potem ste naleteli na takšno nekompatibilnost med načini kodiranja.

ASCII

Ko so v angleško govorečih državah v 60-ih letih prejšnjega stoletja začeli z bolj resnim računalništvom, so potrebovali način zapisovanja besedila. Naravno so se odločili, da bodo besedilo zapisovali znak po znak, vsak znak pa bo predstavljen s fiksnim številom bitov. Da bi ugotovili, koliko bitov potrebujemo, moramo prešteti, koliko različnih znakov potrebujemo. Za začetek potrebujemo velike in male črke (dvakrat po 26), števke (10), nekaj ločil za pisanje, finance in matematiko (npr. +−*/.?!@#$%^'" &*()\~), znake za prazen prostor (*white space*), kot so presledek, znak za novo vrstico, znaki za zamike. Na koncu so pristali na 128 znakih, kar lahko spravimo ravno v sedem bitov ($2^7 = 128$); ta standard so poimenovali ASCII (American Standard Code for Information Interchange), kar preberemo áski. Natančno je to kodiranje napisano v tabeli 1. Opazimo lahko, da imamo do znaka 32 kontrolne znake in znake za prazen prostor (ali t. i. bele znake). Znak 32 je npr. presledek (*space*), znak 10 je znak za novo vrstico (*line feed*), znak 7 je zvonec (*bell*), ki je ob izpisu povzročil, da se je oglasil zveneč ding v računalniku. Tudi dandanašnji lahko z nekaj truda računalnike še vedno prisilimo v to. Za razlago vseh znakov se je najbolje posvetovati s kakšno knjigo [6] ali Wikipedijo [1], marsikateri od njih niso več v redni rabi. Po kontrolnih in belih znakih pa sledi rahlo čudna mešanica: nekaj ločil, nato številke, nato spet nekaj ločil, pa velike črke in spet ločila, nato male črke in še malo ločil. Zakaj ne bi dali vsa ločila na kup? Odgovor se najde v dvojiškem zapisu: če pogledamo kode za 0 do 9, vidimo, da imajo po vrsti kode 011**0000** do 011**1001**. Če ignoriramo predpono 011, so to ravno dvojiški zapisi za števila od 0 do 9. Podobno velja pri velikih črkah: A ima kodo 10**00001**, B ima kodo 10**00010** itd. Če ignoriramo predpono 10, je kodiranje zelo naravno: A kodiramo kot 1, B kot 2; tako nadaljujemo do Z kot 10**11010** oz. 26. Tako je mogoče tudi iz dvojiškega zapisa relativno enostavno razbrati besedilo. Podobno velja za male črke, le da imajo predpono 11 namesto 10. Za ločila, za katera ni tako pomembno, kako so zakodirana, so porabili preostale proste kode. Dodatni lepi lastnosti ASCII kodiranja sta, da lahko male črke med seboj primerjamo po abecedi tako, da le primerjamo njihove številske vrednosti, in da lahko malo črko spremenimo v veliko s spremembo enega samega bita.

Divji zahod stoterih standardov

Sočasno s širjenjem računalnikov po svetu se je širila tudi potreba po podpori za druge znake, kot npr. za germanske ä, ö, ü, slovanske ć, č, ś, š, ź, ž, romansko ç in podobno. Poleg tega so računalniki standardno delali z velikostjo bajta, osem bitov, kar pomeni, da je bilo na voljo dodatnih 128 znakov, če bi velikost kodiranja povečali iz sedem na osem bitov.

BIN	DEC	znak	BIN	DEC	znak	BIN	DEC	znak
0000000	000	NUL	0101011	043	+	1010110	086	V
0000001	001	SOH	0101100	044	,	1010111	087	W
0000010	002	STX	0101101	045	-	1011000	088	X
0000011	003	ETX	0101110	046	.	1011001	089	Y
0000100	004	EOT	0101111	047	/	1011010	090	Z
0000101	005	ENQ	0110000	048	0	1011011	091	[
0000110	006	ACK	0110001	049	1	1011100	092	\
0000111	007	BEL	0110010	050	2	1011101	093	]
0001000	008	BS	0110011	051	3	1011110	094	^
0001001	009	HT	0110100	052	4	1011111	095	_
0001010	010	LF	0110101	053	5	1100000	096	`
0001011	011	VT	0110110	054	6	1100001	097	a
0001100	012	FF	0110111	055	7	1100010	098	b
0001101	013	CR	0111000	056	8	1100011	099	c
0001110	014	SO	0111001	057	9	1100100	100	d
0001111	015	SI	0111010	058	:	1100101	101	e
0010000	016	DLE	0111011	059	;	1100110	102	f
0010001	017	DC1	0111100	060	<	1100111	103	g
0010010	018	DC2	0111101	061	=	1101000	104	h
0010011	019	DC3	0111110	062	>	1101001	105	i
0010100	020	DC4	0111111	063	?	1101010	106	j
0010101	021	NAK	1000000	064	@	1101011	107	k
0010110	022	SYN	1000001	065	A	1101100	108	l
0010111	023	ETB	1000010	066	B	1101101	109	m
0011000	024	CAN	1000011	067	C	1101110	110	n
0011001	025	EM	1000100	068	D	1101111	111	o
0011010	026	SUB	1000101	069	E	1110000	112	p
0011011	027	ESC	1000110	070	F	1110001	113	q
0011100	028	FS	1000111	071	G	1110010	114	r
0011101	029	GS	1001000	072	H	1110011	115	s
0011110	030	RS	1001001	073	I	1110100	116	t
0011111	031	US	1001010	074	J	1110101	117	u
0100000	032	SP	1001011	075	K	1110110	118	v
0100001	033	!	1001100	076	L	1110111	119	w
0100010	034	"	1001101	077	M	1111000	120	x
0100011	035	#	1001110	078	N	1111001	121	y
0100100	036	$	1001111	079	O	1111010	122	z
0100101	037	%	1010000	080	P	1111011	123	{
0100110	038	&	1010001	081	Q	1111100	124	|
0100111	039	'	1010010	082	R	1111101	125	}
0101000	040	(	1010011	083	S	1111110	126	~
0101001	041	)	1010100	084	T	1111111	127	DEL
0101010	042	*	1010101	085	U			

TABELA 1.
Kodirna tabela ASCII.

Najbolj priljubljena izmed razširitev je bila Windows-1252, ki je dodala večino znakov, potrebnih za evropske jezike, nekaj dodatnih ločil in matematičnih simbolov. Dodani so bili naslednji znaki:

€‚ƒ„…†‡ˆ‰Š‹ŒŽ‘’“”•–—˜™š›œžŸ¡¢£¤¥¦§¨©ª«¬®¯
°±²³´µ¶·¸¹º»¼½¾¿ÀÁÂÃÄÅÆÇÈÉÊËÌÍÎÏÐÑÒÓÔÕÖ×
ØÙÚÛÜÝÞßàáâãäåæçèéêëìíîïðñòóôõö÷øùúûüýþÿ

Opazite lahko, da so od slovenskih črk dodane š, Š, ž, Ž, ne pa č in Č. Kljub temu se je Windows-1252 prijel in je bil privzet način kodiranja na sistemih Windows vse do leta 2018. Še zdaleč pa ni bil Windows-1252 edini standard kodiranja, ki je razširil ASCII. Nam bližje je bil standard Windows-1250, ki je vseboval vse slovenske črke. Ta je ASCII razširil z naslednjimi znaki:

€‚„…†‡‰Š‹ŚŤŽŹ‘’“”•–—™š›śťžźˇ˘Ł¤Ą¦§¨©Ş«¬®Ż
°±˛ł´µ¶·¸ąş»Ľ˝ľżŔÁÂĂÄĹĆÇČÉĘËĚÍÎĎĐŃŇÓÔŐÖ×Ř
ŮÚŰÜÝŢßŕáâăäĺćçčéęëěíîďđńňóôőö÷řůúűüýţ˙

Nesrečno slaven je primer znaka č, ki mu je v Windows-1250 tabeli dodeljena enaka številka kot znaku é v Windows-1252, od koder prihajajo težave s prikazovanjem č pri podnapisih. Če predvajalnik dobi zaporedje bajtov

- 01110000 01101111 11101000 01100101 01110000.

lahko to interpretira na dva načina. Če ga interpretira v privzetem kodiranju Windows-1252, bo znak s kodo 11101000 (232) predstavljal é in bo besedo poéep, če pa interpretira v kodiranju Windows-1250, pa bo znak s kodo 232 enak č in bo besedo prikazano kot počep. Ena možna rešitev, da se znaki é pri podnapisih prikazujejo kot č, je, da se v predvajalniku nastavi privzeto kodiranje na Windows-1250.

Ko program dobi podatke, ki so zapisani kot zaporedje ničel in enic, ter mora to pretvoriti v besedilo, ne ve, katero kodiranje uporabiti. Privzeto kodiranje ni vedno pravilno, če je bila datoteka npr. prinešena s sistema z drugačnim privzetim kodiranjem ali pa če je prišla od uporabnika na drugem koncu sveta. To povzroči težave, saj je datoteka interpretirana v najboljšem primeru z nekaj napačnimi znaki, v najslabšem pa je povsem neberljiva. Mnogo medsebojno nekompatibilnih standardov, ki so bili posledica tega, da 256 mest še vedno ni bilo dovolj niti za vse evropske jezike (kaj šele azijske), je en razlog za uvedbo enega samega standarda, ki bi zadovoljil vse.

Unicode

V letu 1991 je bil ustanovljen Konzorcij Unicode[4], ki je neprofitna organizacija, v kateri danes sodeluje mnogo dovolj vplivnih podjetij, kot so Adobe, Apple, Facebook, Google, IBM, Microsoft, Netflix in SAP. Njihova naloga je, da določajo, kateri znaki bodo na voljo v Unicode naboru znakov in kako naj se znaki obnašajo pri urejanju, pri pretvarjanju v velike črke in podobno.

Unicode podpira 159 pisav[3] (latinico, cirilico, grške, kitajske, arabske znake) in mnogo simbolov, kot so ločila, števke, matematični in tehnični simboli, puščice, glasbeni simboli. Vsak znak ima standardno ime, številko in opis, znake pa lahko raziskujemo s pomočjo spletne strani `www.compart.com/en/unicode/`.

Celotna zbirka znakov je razdeljena na bloke, ki predstavljajo zaključene celote znakov, ki sodijo skupaj. Prvi blok, s številkami od 0 do 127, je Osnovna latinica (*ang.* Basic Latin), ki vsebuje natanko enake znake kot ASCII. Nato sledi blok Dodatek latin-1 (latin-1 supplement), ki vsebuje naslednjih 128 mest z nekaj dodatnimi znaki, kot so ± in ü. Sledi blok Razširitev latinice-A (*ang.* Latin Extended-A), kjer je veliko črk z različnimi okraski, med drugim tudi slovenske čšž. Če želimo, da naša izbrana pisava podpira znake čšž, moramo izbirati med pisavami, ki podpirajo blok Razširitev latinice-A. Vseh blokov v trenutnem standardu (14.0) je 308, vseh znakov pa 144.697. Vseh mest, ki so na voljo, je 1 112 064.

Poglejmo nekaj primerov znakov, ki bodo zanimivi kasneje. Kode znakov se pogosto navaja v šestnajstiškem zapisu oblike U+1234, kjer (če zapis vidimo izven konteksta) predpona U+ pove, da gre za zapis Unicode kode znaka (*Unicode code point*).

znak A

Formalni opis: latinična velika črka A.
Verzija: dodano v verziji 1.1 (Junij 1993).
Blok: osnovna latinica.
Pisava: latinica.
Kategorija: velike črke.
Dvosmerno pisanje: iz leve proti desni.
Številka: 65 (U+0041).

znak λ

Formalni opis: mala grška črka lambda.
Verzija: dodano v verziji 1.1 (junij 1993).
Blok: grški in koptski znaki.
Pisava: grška.
Kategorija: male črke.
Dvosmerno pisanje: od leve proti desni.
Številka: 955 (U+03BB).

znak ࠇ

Formalni opis: samarijanska črka it.
Verzija: dodano v verziji 5.2 (oktober 2009).
Blok: samarijanski znaki.
Pisava: samarijanska.
Kategorija: druge črke.
Dvosmerno pisanje: od desne proti levi.
Številka: 2055 (U+0807).

znak ♪

Formalni opis: glasbeni simbol za noto osminko.
Verzija: dodano v verziji 3.1 (marec 2001).
Blok: glasbeni simboli.
Pisava: nedoločena.
Kategorija: drugi simboli.
Dvosmerno pisanje: od leve proti desni.
Številka: 119136 (U+1D160).

znak 😱

Formalni opis: obraz, kričoč v strahu
Verzija: dodano v verziji 6.0 (marec 2010).
Blok: emotikoni.
Pisava: nedoločena.
Kategorija: drugi simboli.
Dvosmerno pisanje: nedoločeno.
Številka: 128561 (U+1F631).

Trenutni standard 14.0 je izšel septembra 2021 in je dodal 838 znakov, med drugim emotikon obraz s poševnimi usti.

UTF-8

Do sedaj smo opisali, kako je strukturiran nabor znakov Unicode, nismo pa povedali, kako se te znake dejansko predstavi oz. kodira z biti. Obstaja več načinov kodiranja znakov Unicode, od katerih je najbolj priljubljen UTF-8, ki ga trenutno uporablja 97 % vseh spletnih strani[1].

Najenostavnejši način, glede na to, da je vseh možnih znakov 1 112 064, bi bil, da uporabimo štiri bajte (32 bitov), oštevilčimo znake po vrsti in vsakega predstavimo s svojo številko. Slaba stran tega je, da bi obstoječe besedilo z ASCII znaki sedaj potrebovalo štirikrat več prostora, saj bi za A namesto 01000001 morali napisati 0000000000000000000000001000001.

Kodiranje UTF-8 to težavo reši tako, da različne znake zakodiramo z različnim številom bajtov. Prvih 128 znakov zakodiramo z enim samim bajtom, popolnoma enako kot v kodiranju ASCII. To pomeni, da so obstoječe ASCII datoteke že veljavne UTF-8 datoteke in ni potrebnega nobenega spreminjanja vsebine ali velikosti – to je lastnost, ki je bila ključna za uspešno širitev in splošno uporabo standarda. Pojavi pa se vprašanje, kako vemo, ali moramo za dekodiranje znaka prebrati en bajt, dva, tri ali še več.

Odgovor na to je skrit v prvem bajtu samem: pogledati moramo število vodilnih enic. Če bajt nima vodilnih enic (in se torej začne z 0), ni treba prebrati nič dodatnih bajtov in je znak predstavljen s samo enim bajtom. Primer tega je znak A: **0**1000001. Če se bajt začne na dve enici, moramo prebrati še en naslednji bajt, če se začne na tri, moramo prebrati še naslednja dva bajta, če se značne na štiri enice, preberemo še naslednje tri. Drugače povedano, veljavna zaporedja bajtov so oblike

```
0xxxxxxx
110xxxxx 10xxxxxx
1110xxxx 10xxxxxx 10xxxxxx
11110xxx 10xxxxxx 10xxxxxx 10xxxxxx
```

Bajti, ki sledijo npr. 1110xxxx, se začnejo z 10, zato da vemo, da spadajo v kontekst več bajtov, tudi če jih pogledamo same po sebi, saj se noben drug bajt ne začne z 10.

Vzemimo npr. zaporedje bajtov

- 01110000 01101111 11000100 10001101 01100101 01110000.

Prvi bajt se začne na 0 in sam predstavlja črko, ki je enaka svoji ASCII vrednosti p. Enako velja za dru-

[1] w3techs.com/technologies/cross/character_encoding/ranking

gega, ki je za 1 manjši in predstavlja o. Nato sledi bajt, ki se začne na dve enici, in bo torej naslednji znak predstavljen z dvema bajtoma, zato preberemo še enega. Bajta 110**00100** 10**001101** predstavljata znak z vrednostjo 00100001101 (vrednost smo dobili tako, da smo skupaj zložili bite, ki ležijo na mestih, označenih z x), kar je 269, oz., če bi pogledali v Unicode tabelo, je to č. Sledita še dva bajta, ki se vsak začne z 0 in predstavljata ASCII črki e in p. Ponovno smo zakodirali besedo počep, ki pa je v nasprotju z Windows-1250 porabila en bajt več za kodiranje č, kar pa je majhna cena za to, da imamo eno kodiranje za vse. Žal pa tukaj naletimo tudi na prvo nekompatibilnost: UTF-8 in Windows-1250 posebne znake predstavita različno, celo tako različno, da zapis besede počep v Windows-1250 kodiranju ni veljaven UTF-8 in bi pri branju sprožil napako. V prehodnem času, ko se je Unicode še uveljavljal, je to uporabnikom povzročalo kar nekaj težav, saj so operacijski sistemi imel pogosto težave z napačnim interpretiranjem Unicode datotek. Da bi bilo lažje prepoznati Unicode datoteke, so uvedli BOM (*byte order mark*), poseben znak s kodo U+FEFF, ki ga je bilo v nekaterih kodiranjih (ne pa v UTF-8) obvezno dati na začetek datoteke. Dandanes se tega ne počnemo več in ta znak opuščamo v UTF-8 kodiranju, saj povzroča nekompatibilnosti z ASCII, večina programske opreme pa se je tudi posodobila za delo z UTF-8. Ima pa BOM zanimivo vlogo na spletu in v UTF-16 datotekah [2].

Tudi za grško črko lambda s kodo 955 velja, da jo lahko zakodiramo z dvema bajtoma, samarijanska črka it s kodo 2055 pa potrebuje že tri bajte. Znaki, ki so še bolj proti koncu tabele, kot npr. nota osminka, razne pismenke in emotikoni, pa potrebujejo štiri bajte. Kot primer, emotikon obraz, kričoč v strahu s kodo 128561 (binarno 11111011000110001) se zakodira kot

- 11110000 10011111 10011000 10110001.

Še ena lepa lastnost UTF-8 kodiranja je, da majhno število posebnih znakov le malo spremeni velikost datoteke, saj je tisti znak zapisan z več bajti, ostali pa zavzamejo enako prostora kot prej. To pri različnih računalniških sistemih ne velja vedno. Primer tega so SMS sporočila: čim vključimo samo en poseben znak, se celotno sporočilo kodira v drugačnem (UCS-2) kodiranju kot običajno, in vsi znaki zavzamejo 16 bitov, število preostalih znakov, ki jih lahko napišemo v isti SMS, pa se kar naenkrat močno zmanjša. Nekateri narodi, predvsem azijski, katerih znaki, ki jih redno uporabljajo, so bolj proti koncu Unicode tabele, morajo kljub temu skoraj za vsak znak porabiti štiri bajte.

Poleg UTF-8, sta znana načina kodiranja Unicode tabele še UTF-16 in UTF-32. UTF-16 kodira večino znakov s 16 biti, tiste bolj proti koncu pa z dvema paroma 16 bitov. Kot posledica kodiranja s 16 biti pride nekompatibilnost z ASCII, zato na spletu kodiranje ni priljubljeno, ga pa kljub temu uporabljamo za interno predstavitev nizov v programskih jezikih Java in Javascript. UTF-32 je enostavno kodiranje fiksne širine, kjer vsak znak zakodiramo z 32 biti. Je najbolj enostavno izmed vseh, vendar ga zaradi potratnega prostora redko uporabljamo.

Dodatne lastnosti

Poleg nabora znakov standard Unicode opisuje tudi, kako se posamezni znaki kombinirajo, kako so med seboj povezani in kako se jih izriše. Primer tega so razne arabske pisave, ki nimajo koncepta črk, kot jih imamo mi, poleg tega pa se besedilo piše od desne proti levi. Nam najbližja razlaga kombiniranja je, da lahko znak č napišemo kot kombinacijo znaka c in strešice. Seveda lahko č napišemo direktno kot 11000100 10001101, toda Unicode podpira tudi, da ga napišemo kot kombinacijo c (koda 99) in strešice (koda 708), ali z biti:

- 01100011 11001100 10001100.

Oba načina sta veljavna za zapis znaka č in bosta prikazana enako. Kljub temu pa nista enaka. Ena razlika je, da če pri kombiniranem zapisu zbrišemo zadnji znak s tipko vračalko (*Backspace*), se odstrani samo strešica, pri prvem pa celotna črka. Prav tako nista enaka, če ju primerjamo direktno, kot zaporedje bitov. Nalsednja Python koda to demonstrira:

```
>>> c1 = bytes([0b01100011, 0b11001100,
        0b10001100]).decode('utf-8')
>>> c1
'č'
>>> c2 = bytes([0b11000100, 0b10001101]).
        decode('utf-8')
```

```
>>> c2
'č'
>>> c1 == c2
False
```

Za smiselno delo z nizi, ki vsebujejo Unicode znake, moramo uporabljati posebne knjižnice, ki podpirajo več zapisov pomensko enake črke. Prav tako je potrebno te knjižnice uporabljati za pravilno pretvarjanje med malimi in velikimi črkami, za urejanje in podobno, saj naivne rešitve zaradi raznolikosti svetovnih jezikov skoraj nikoli niso pravilne.

Kljub temu, da Unicode vsebuje mnogo znakov, so del kodne tabele namenoma pustili prazen, kjer lahko uporabniki definirajo svoje znake (smiselno pa je zraven dodati tudi pisavo, ki te znake tudi dejansko vsebuje). Primer uporabe te lastnosti Unicode standarda je ZRCola [5], ki definira svoje fonetične simbole.

Literatura

[1] *ASCII – Wikipedia*, dostopno na `en.wikipedia.org/wiki/ASCII`, ogled 7. 12. 2021.

[2] *The byte-order mark (bom) in html*, dostopno na `www.w3.org/International/questions/qa-byte-order-mark`, ogled 7. 12. 2021.

[3] *Supported scripts*, dostopno na `www.unicode.org/standard/supported.html`, ogled 7. 12. 2021.

[4] *Unicode – The World Standard for Text and Emoji*, dostopno na `home.unicode.org/`, ogled 7. 12. 2021.

[5] *ZRCola 2 – Vnašalni sistem za jezikoslovno rabo*, dostopno na `zrcola.zrc-sazu.si/`, ogled 7. 12. 2021.

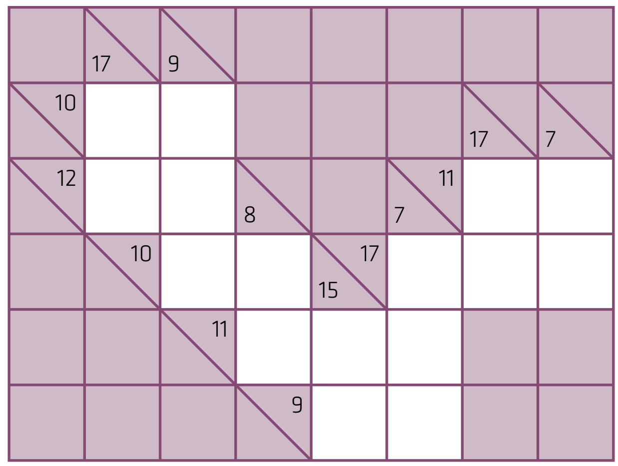
[6] Unicode Consortium. The Unicode standard 5.0. Addison-Wesley, version 5.0 edition, 1991-2006. Bibliografija: 1411–1417 Kazalo.

× × ×

Križne vsote

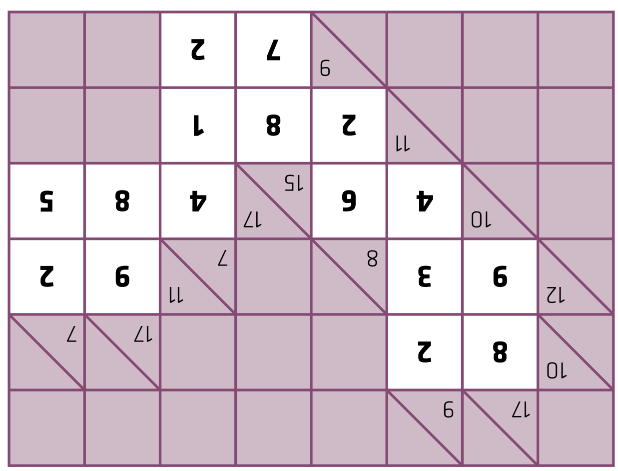
↓↓↓

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



↓↓↓

REŠITEV KRIŽNE VSOTE



× × ×

Ponazoritev zveznosti funkcije

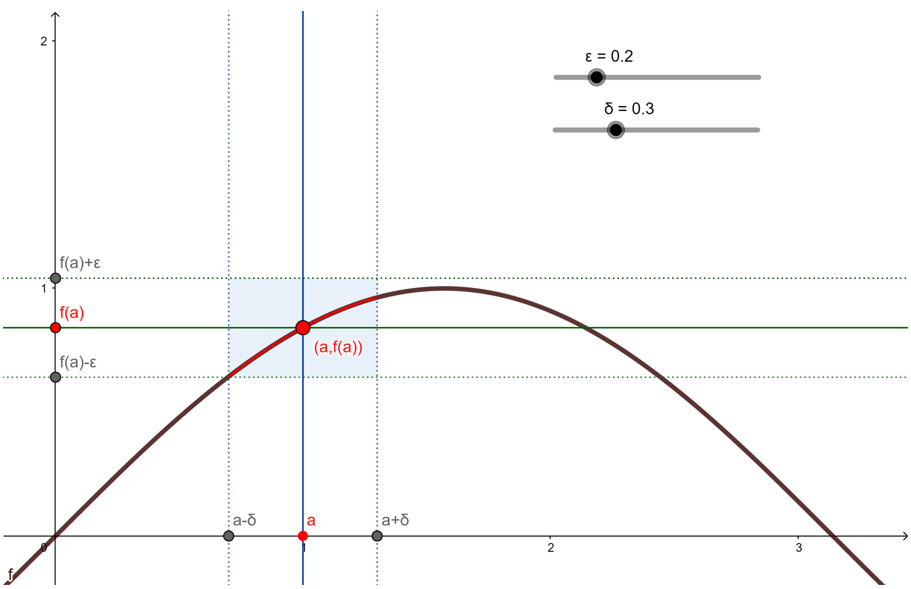
Boštjan Kuzman

Tokratni prispevek je namenjen predvsem tistim, ki se srečujejo z učenjem ali poučevanjem matematike v srednji šoli ali v začetnih letnikih naravoslovnih študijskih programov. Pri obravnavi realnih funkcij običajno omenimo pojem zveznosti. Za marsikoga v praksi povsem zadošča naivna definicija, da je funkcija na nekem intervalu zvezna, če je njen graf »nepretrgana« krivulja, oz. če lahko graf skiciramo, ne da bi dvignili svinčnik s papirja. Natančnejšo definicijo zveznosti s pomočjo količin ε in δ pa je v sodobni jezik matematične analize vpeljal nemški matematik Karl Weierstrass (1815-1897), ki je nadaljeval delo Augustina Louisa Cauhyja (1789-1857) in Bernarda Bolzana (1781-1848). Ta precej bolj abstraktna definicija mnogim povzroča preglavice, zato jo bomo ponazorili z izdelavo ustreznega apleta v GeoGebri. Tovrstne ponazoritve seveda danes zlahka najdemo že izdelane na spletu, vendar ima samostojna izdelava svoj čar, posebej, če se je dijaki in študentje lotijo sami.

Weierstrassova definicija zvezne funkcije se glasi takole. Naj bo $I \subseteq \mathbb{R}$ neki odprti interval in naj bo $f : I \to \mathbb{R}$ neka realna funkcija, definirana na tem intervalu. Funkcija je *zvezna v točki* $a \in I$, če za vsako pozitivno število $\varepsilon > 0$ obstaja tako pozitivno število $\delta > 0$, da za vsak $x \in I$ z lastnostjo $|x - a| < \delta$ velja $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definicijo bomo najprej ponazorili na primeru funkcije $f(x) = \sin(x)$.

- V kot risalne površine postavimo drsnika ε in δ, ki zavzameta vrednosti od 0 do 1 z majhnimi koraki 0,01.



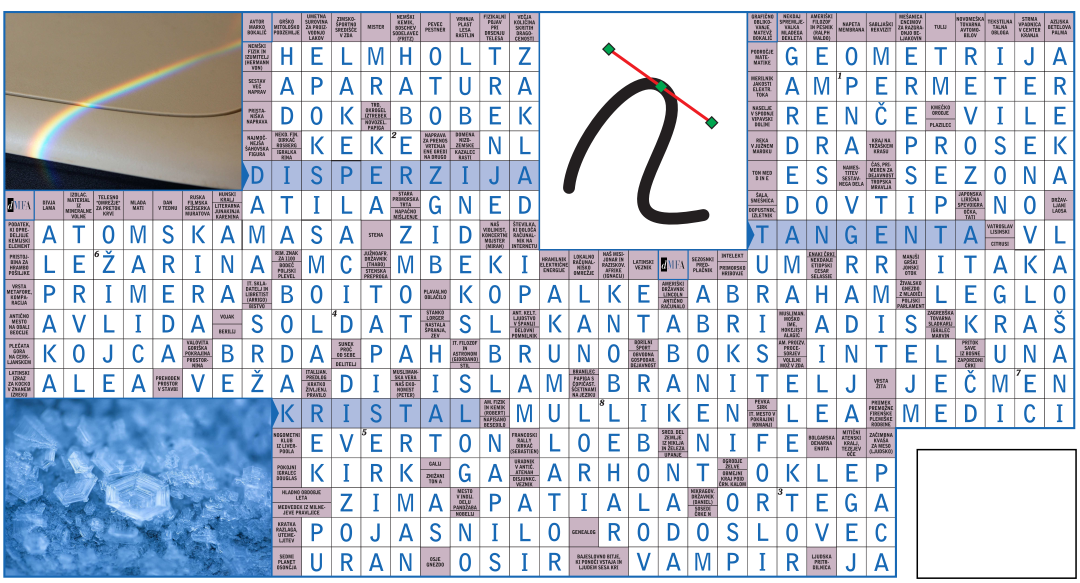
SLIKA 1.
Na sliki je graf funkcije $f(x) = \sin(x)$. Za vrednost $\varepsilon = 0.2$ v označeni točki $a = 1$ zadošča izbrati vrednost $\delta = 0.3$, pa bo za vsak x v modrem pasu (kjer je $|x - a| < \delta$) vrednost $f(x)$ ležala v zelenem pasu (kjer je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$). Za manjši $\varepsilon = 0.1$ pa je potrebno nekoliko zmanjšati tudi δ, sicer rdeči segment funkcije uide iz zelenega pasu.

- Vnos `f(x)=sin(x)` nariše graf funkcije (lahko poskusimo tudi s kakšno drugo funkcijo).
- Z orodjem *Dodaj točko* izberemo poljubno točko A na x-osi. Njeno x koordinato označimo z `a=x(A)`. Nato označimo `b=f(a)` in ustvarimo novi točki `B=(0,b)` in `C=(a,b)`, ki ležita na osi y oz. na grafu funkcije. Prikaz imen točk A, B, C zamenjamo z napisi a, $f(a)$ in $(a, f(a))$.
- Narišimo tri navpične premice z ukazi `x=a`, `x=a+`δ, `x=a-`δ, in 3 vodoravne premice z ukazi `y=b`, `y=b+`ε, `y=b-`ε. Premice lahko obarvamo tako, da so navpične modre, vodoravne zelene, srednja pa je črtkana.
- Pravokotnik s koordinatami $(a-\varepsilon, b-\delta)$, $(a+\varepsilon, b-\delta)$, $(a+\varepsilon, b+\delta)$, $(a-\varepsilon, b+\delta)$ narišemo z ukazom `Mnogokotnik` in nekoliko osenčimo.
- Z dodajanjem točk in ustreznim označevanjem lahko označimo tudi vrednosti $a \pm \delta$ in $f(a) \pm \varepsilon$ na koordinatnih oseh.
- Vnos `If(a-`δ`<x<a+`δ`,f)` nariše segment funkcije f, definiran na intervalu $(a-\delta, a+\delta)$, ki ga lahko pobarvamo z drugo barvo.

Zdaj preizkusimo delovanje ponazoritve tako, da za izbrano točko a na osi x pri različnih vrednostih ϵ poiščemo ustrezen δ, da je izpolnjen pogoj iz definicije.

Če smo aplet izdelali po teh navodilih, lahko zdaj v algebrskem oknu na enostaven način spremenimo predpis za funkcijo $f(x)$ in opazujemo obnašanje še drugih funkcij, npr. kvadratne funkcije `f(x)=x`^{2} ali stopničaste funkcije `f(x)=If(x<0,1,0)`, ki je nezvezna v $a = 0$. Že izdelani aplet, pri katerem lahko z drsnikom izbirate med nekaj pripravljenimi funkcijami, lahko preizkusite na spletnem naslovu `www.geogebra.org/m/ywvearkd`.

× × ×



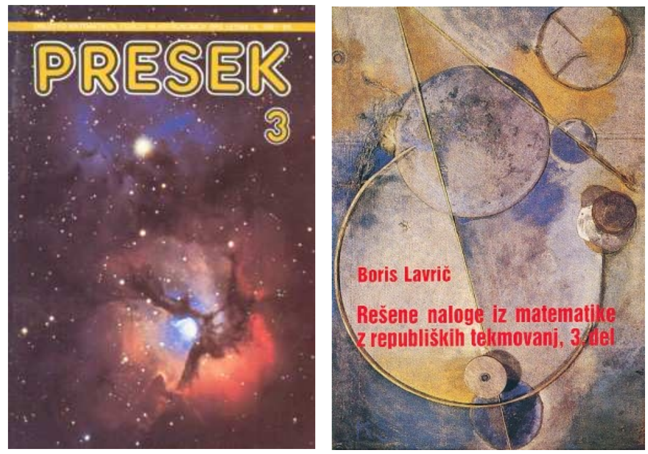
REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 49/2

Pravilna rešitev nagradne križanke iz druge številke Preseka letnika 49 je **Pet dežel**. Med pravilnimi rešitvami smo izžrebali naslednje reševalce: Anžeta Mihelčiča iz Kresnic, Igorja Veselinovića iz Ljubljane in Marijano Marinšek iz Celja, ki bodo nagrade prejeli po pošti.

× × ×

Za slovo od leta 1987

V starejših letnikih revije Presek so pogosto objavljali tudi kratke uganke in probleme, ki so jih prispevali tako uredniki revije kot tudi njeni bralci. V 3. številki letnika 1987/1988 je Boris Lavrič, profesor matematike na Univerzi v Ljubljani in tedanji urednik revije, objavil naslednjo zanimivo uganko o oštevilčenih ogliščih mnogokotnika. Uganka ni pretežka, povsem enostavna pa tudi ni. Njeno rešitev lahko z nekaj brskanja najdete tudi v spletnem arhivu revije Presek. Pa bi jo znali, današnji bralci in bralke, rešiti tudi brez interneta? Poskusite.



SLIKA 2.

ZA SLOVO OD LETA

V ogliščih pravilnega mnogokotnika, ki pa ni trikotnik, so naravna števila, katerih vsota je 1987. Vsote poljubnih treh števil iz zaporednih (sosednih) oglišč so med seboj enake. Kateri mnogokotnik je to?

Je odgovor isti, če drugi pogoj nadomestimo z naslednjim: vsote poljubnih štirih števil iz zaporednih oglišč so med seboj enake? Bi znali posplošiti nalogo in jo rešiti?

Boris Lavrič

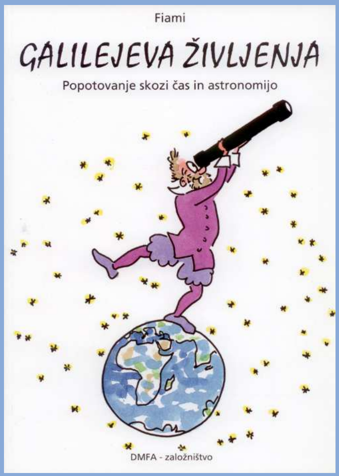
SLIKA 1.

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.dmfa-zaloznistvo.si/

Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 633.