PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **8** (1980/1981)
Številka 3
Strani 146–150

Milan Hladnik:

NENAVADNI ULOMEK

Ključne besede: matematika, ulomki.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/8/492-Hladnik.pdf

MATEMATIKA

NENAVADNI ULOMEK

V srednji šoli sem nekoč pri reševanju raznih nalog naletel na ulomek z zanimivo lastnostjo. Treba je bilo pokazati naslednjo enakost:

$$\frac{10100101}{11000011} = \frac{101010101}{110010011}$$

Problem sam seveda ni bil zahteven in kaj hitro sem ga ugnal ob upoštevanju dejstva, da sta dva ulomka a/b in c/d enaka natanko takrat, ko velja $ad = bc$.

Naloga 1: Tudi sami se prepričajte, da res velja zgornja enakost!

Ko sem ulomka malo bolje pogledal, sem opazil, da se desni ulomek od levega razlikuje po tem, da ima v števcu in imenovalcu na sredini vrinjeno enojko. Da kljub temu velja med njima enakost, se mi je zdelo zanimivo, zato sem poskusil v števcu in imenovalcu namesto ene vriniti dve enojki. Presenečenje! Spet sem ugotovil enakost med ulomkoma. Potem sem raziskal še primere s tremi, štirimi in več enojkami. Vedno znova se mi je na koncu računa nasmehnila enakost dveh ulomkov.

Naloga 2: Prepričajte se npr., da je $\frac{10100101}{11000011} = \frac{1010111110101}{1100111110011}$

Problem me je začel seveda močno zanimati in povsem naravno sem si zastavil vprašanje, ali morda ne velja splošno:

"Vrednost ulomka $\frac{10100101}{11000011}$ se ne spremeni, če števcu in imenovalcu v sredini dodamo enako mnogo (npr. n) enojk."

Spominjam se, da mi vprašanje ni dalo miru, dokler se mi po nekaj neuspelih poskusih ni posrečilo dokazati splošne veljavnosti zgornje trditve, se pravi, dokler nisem ugotovil, kaj tiči za to nenavadno lastnostjo. Ali lahko to storite tudi vi?

Naloga 3: Dokažite, da za vsako naravno število n velja enakost

$$\frac{10100101}{11000011} = \frac{1010\overbrace{11\ldots 1}^{n}0101}{1100\underbrace{11\ldots 1}_{n}0011}$$

V pomoč pri reševanju naj izdam, da je treba upoštevati enakost $1010 + 0101 = 1100 + 0011 = 1111$. Kako to dejstvo uporabimo, pa uganite sami!

Če boste pravilno rešili nalogo 3, potem boste gotovo spoznali, zakaj se opisani ulomek tako nenavadno obnaša. In če boste to vedeli, potem vam prav gotovo ne bo težko poiskati še druge ulomke z isto lastnostjo, saj jih je zelo veliko.

Naloga 4: Napišite še nekaj ulomkov, katerih vrednost se ne spremeni, če na določenem mestu v števcu in imenovalcu vrinemo isto število enojk!

Morda se bo komu zahotelo poiskati vse ulomke z opisano lastnostjo. Naj poskusi; toda takoj naj pristavim, da je tako zastavljen problem težji in zahteva kar precej spretnosti, zlasti pri reševanju diofantskih enačb. Je namreč poseben primer iskanja matematičnih nepak, o katerih je Presek že pisal |1|.

Pač pa je precej lažji podoben problem, če namesto enojk dodajamo ničle.

Naloga 5: Poiščite vse ulomke oblike ab/cd z lastnostjo

$$\frac{ab}{cd} = \frac{a\overbrace{00\ldots 0}^{n}b}{c\underbrace{00\ldots 0}_{n}d}$$ za poljubno naravno število n. Pri tem so a, b, c, d naravna števila ali 0 (izraz ab seveda pomeni $10^k a + b$, če za število b, ki se lah

ko začne tudi z ničlami, rezerviramo k mest; podobno velja za c in d).

Za konec rešite še dve nalogi, ki predstavljata določeni posplošitvi naloge 3!

Naloga 6: V ulomku $\frac{10100101}{11000011}$ nastopata samo cifri 0 in 1, zato si lahko mislimo, da je zapisan v številskem sistemu s poljubno osnovo. Prepričajte se, da zanj v vsakem primeru velja nenavadna lastnost iz naloge 3!

Naloga 7: Napišite nekaj ulomkov, katerih vrednost se ne spremeni, če na določenem mestu v števcu in imenovalcu vrinemo isto število enakih cifer (ne nujno enojk) ali skupin cifer (večmestnih števil)!

Vabim vas, da tudi sami poskusite najti kakšno posplošitev ali da sestavite kakšno podobno nalogo o ulomkih. Pišite nam!

|1| A. Suhadolc, *Matematične napake*, Presek 4 (1976/77), str. 4 in 67.

Milan Hladnik

REŠITVE NALOG

NENAVADNI ULOMEK - REŠITVE NALOG S STRANI 131

1. -

2. -

3. Pišimo $10101\underbrace{11\ldots11}_{n}0101 = 1010.10^{n+4} + \underbrace{111\ldots11}_{n}.10^4 + 101 =$

$= 1010(10^{n+4}-1) + \underbrace{111\ldots11}_{n+4} = 1010(10^{n+4}-1) + \frac{1}{9}(10^{n+4}-1) =$

$= 9091 . \frac{1}{9}(10^{n+4}-1)$. Podobno dobimo $11001\underbrace{11\ldots11}_{n}0011 =$

$= 9901 . \frac{1}{9}(10^{n+4}-1)$. Torej za vsako naravno število n velja

$$\frac{10101\overbrace{11\ldots11}^{n}0101}{11001\underbrace{11\ldots11}_{n}0011} = \frac{9091}{9901}$$

4. Opisano lastnost imajo npr. vsi ulomki $\frac{ab}{cd}$, kjer je $a+b = c+d$ = število, sestavljeno iz toliko enojk, kot smo za b ali d rezervirali mest (za obe števili enako). V prilogi 3 je tako $a = 1010$, $b = 0101$ (4 mesta) , $c = 1100$. $d = 0011$ (4 mesta) in $a+b = c+d = 1111$. Po zgornji metodi lahko poiščemo poljubno mnogo ulomkov z dano lastnostjo, npr. $\frac{803}{704}$ (a=8, b=003, c=7, d=04), $\frac{73038}{6105}$ (a=73, b=038, c=6, d= 105) itd. Pristaviti pa je treba, da nikakor niso vsi ulomki take vrste. Ulomek $\frac{228}{336}$ (a=2, b=28, c=3, d=36) npr. zadošča vsem zahtevam naloge 4, vendar ga ne moremo dobiti po zgornji metodi.

5. Nalogo rešijo ulomki $\frac{ab}{cd}$, pri katerih velja $10^p ad = 10^q bc$, kjer je p (q) število mest pri b (d) . Ta pogoj takoj sledi iz zahtevane enakosti

$$\frac{a10^{n+p} + b}{c10^{n+q} + d} = \frac{a10^{p} + b}{c10^{q} + d}$$

(prav za prav je njej ekvivalenten). Pogoj $10^p ad = 10^q bc$ lahko krajše izrazimo tudi takole $a(0,d) = c(0,b)$; cifre števil b in d pišemo takoj za decimalno vejico. Primeri ulomkov z iskano lastnostjo so $\frac{23}{69}$ $(a=2,\ b=3,\ c=6,\ d=9)$, $\frac{309}{721}$ $(a=3,\ b=09,\ c=7,\ d=21)$, $\frac{45105}{24056}$ $(a=45,\ b=105,\ c=240,\ d=56)$ itd.

6. Dokaz je povsem analogen dokazu naloge 3, le namesto 10 vzamemo novo osnovo b $(b > 1)$. Tako dobimo

$$1010\overset{n}{111\ldots1}10101 = (1010(b-1)+1)\ \frac{b^{n+4}-1}{b-1} \quad \text{in}$$

$$1100\overset{n}{111\ldots1}10011 = (1100(b-1)+1)\ \frac{b^{n+4}-1}{b-1} \quad .$$

7. Sledimo isti ideji kot v nalogah 3 in 4 s to razliko, da se daj namesto enojke vrivamo m-mestno število x. Za b in d dopustimo mk mest in zahtevajmo $a+b = xxx\ldots xx$ (k x-ov) , pa lahko pišemo

$$a\underbrace{xx\ldots x}_{n}b = a10^{m(n+k)} + \overbrace{xx\ldots x}^{n}.10^{mk} + b = a(10^{n(n+k)}-1) +$$

$$+ \underbrace{xx\ldots x}_{n+k} = a(10^{m(n+k)}-1) + x\ \frac{10^{m(n+k)}-1}{10^{m} - 1} =$$

$$= (a(10^{m}-1) + x)(10^{m(n+k)} - 1):(10^{m}-1) \quad \text{in podobno}$$

$c\underbrace{xx\ldots x}_{n}d = (c(10^{m}-1)+x)(10^{m(n+k)}-1):(10^{m}-1)$. Primer takega ulomka je $\frac{507}{903}$ $(a=5,\ b=07,\ c=9,\ d=03,\ x=12,\ m=2)$. Nadaljne primere si lahko izmislite sami.

Milan Hladnik