PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **22** (1994/1995)
Številka 4
Strani 206–211

Jože Grasselli:

O KVADRATIH V ARITMETIČNEM ZAPOREDJU

Ključne besede: matematika, teorija števil, naravna števila, aritmetično zaporedje.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/22/1224-Grasselli.pdf

O KVADRATIH V ARITMETIČNEM ZAPOREDJU

Če je a naravno število, rečemo številu a^2 **kvadrat**. Kvadrati so tako: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$. Trije kvadrati $a^2 < b^2 < c^2$ so v **aritmetičnem zaporedju**, kadar je $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$. Za zgled navedimo

$$1 = 1^2, \quad 25 = 5^2, \quad 49 = 7^2, \tag{1}$$

kjer je razlika med sosednjima členoma 24.

Naj bo t naravno število. Ko množimo člene v (1) s t^2, dobimo trojico kvadratov

$$t^2, \quad (5t)^2, \quad (7t)^2, \tag{2}$$

ki sestavljajo aritmetično zaporedje z razliko $24t^2$. Ko teče t po naravnih številih, daje (2) neskončno trojic kvadratov v aritmetičnem zaporedju. Iz (2) se tudi vidi: Vsak kvadrat je prvi člen aritmetičnega zaporedja treh kvadratov. Npr. 100 je po (2) prvi člen v aritmetičnem zaporedju kvadratov 100, 2500, 4900.

V zaporedjih (2) je prvi člen 1 le, ko je $t = 1$. Ali obstaja še kakšno aritmetično zaporedje kvadratov

$$1, b^2, c^2$$

s prvim členom 1? Ker naj bo zaporedje aritmetično, mora biti $b^2 - 1 = c^2 - - b^2$. Od tod izhaja za b, c enačba

$$c^2 - 2b^2 = -1. \tag{3}$$

Hitro uganemo, da sta $b_1 = 5$, $c_1 = 7$ najmanjši različni naravni števili, ki rešita enačbo (3). Iz te rešitve pridemo na znani način - podrobnosti ne bomo opisovali - do rekurzijskih obrazcev

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3b_n + 2c_n \\ c_{n+1} &= 4b_n + 3c_n \end{aligned} \;; \quad b_1 = 5, c_1 = 7. \tag{4}$$

Pokažimo: Če števili b_n, c_n izpolnita enačbo (3), jo izpolnita tudi števili b_{n+1}, c_{n+1}, določeni s (4). Ker b_n, c_n ustrezata pogoju $c_n^2 - 2b_n^2 = -1$, je

$$c_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = (4b_n + 3c_n)^2 - 2(3b_n + 2c_n)^2 = c_n^2 - 2b_n^2 = -1$$

in trditev drži. Izhajajoč iz rešitve $b_1 = 5, c_1 = 7$ dobimo po (4) rešitev $b_2 = 3\cdot5+2\cdot7 = 29, c_2 = 4\cdot5+3\cdot7 = 41$, iz nje nato po (4) rešitev b_3, c_3 in tako naprej. Dognati je mogoče, da so s tem zajete vse od $b = c = 1$ različne naravne rešitve enačbe (3).

Obrazca (4) lahko še predrugačimo. Iz (4) izračunamo

$$\begin{aligned} 2c_{n+1} &= 3b_{n+1} - b_n \\ 4b_{n+1} &= 3c_{n+1} - c_n. \end{aligned}$$

Upoštevajmo ti izrazitvi za $2c_{n+1}, 4b_{n+1}$, ko zapišemo (4) za indeks $n+2$. Najdemo

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= 6b_{n+1} - b_n; \quad b_1 = 5, b_2 = 29 \\ c_{n+2} &= 6c_{n+1} - c_n; \quad c_1 = 7, c_2 = 41. \end{aligned} \tag{5}$$

Po obrazcih (4) oz. (5) je sestavljena naslednja preglednica, ki vsebuje začetne naravne rešitve enačbe (3):

n	1	2	3	4	5	6	7
b_n	5	29	169	985	5741	33461	195025
c_n	7	41	239	1393	8119	47321	275807

Iz prvih petih rešitev dobimo tele trojice kvadratov v aritmetičnem zaporedju:

1,	$5^2 = 25$,	$7^2 = 49$	razlika 24
1,	$29^2 = 841$,	$41^2 = 1681$	razlika 840
1,	$169^2 = 28561$,	$239^2 = 57121$	razlika 28560
1,	$985^2 = 970225$,	$1393^2 = 1940449$	razlika 970224
1,	$5741^2 = 32959081$,	$8119^2 = 65918161$	razlika 32959080

Vsakemu $n = 1, 2, 3, \ldots$ prek (4) oz. (5) pripada aritmetično zaporedje kvadratov

$$1, b_n^2, c_n^2 \quad \text{z razliko} \quad b_n^2 - 1. \tag{6}$$

Z vsakim naravnim t se iz (6) napravi aritmetično zaporedje kvadratov

$$t^2, (tb_n)^2, (tc_n)^2 \quad \text{z razliko} \quad (b_n^2 - 1)t^2. \tag{7}$$

Zato ugotovitvi (6) in (7) povesta: **Obstaja neskončno trojic kvadratov v aritmetičnem zaporedju in s prvim členom 1. Vsak kvadrat je prvi člen neskončno trojic kvadratov v aritmetičnem zaporedju.**

Omenimo naslednjo uporabo enačbe (3). Vprašujemo po pravokotnih trikotnikih, katerih dolžine stranic so naravna števila, kateti pa se razlikujeta za 1. Naj bosta x, y kateti, torej $y - x = 1, z$ hipotenuza. Po Pitagorovem izreku dobimo

$$2x^2 + 2x + 1 = z^2$$

in ko množimo z 2, smo pri enačbi

$$(2x + 1)^2 - 2z^2 = -1. \tag{8}$$

Postavimo

$$c = 2x + 1, \quad b = z \tag{9}$$

in enačba (8) preide v enačbo (3), zanjo pa so naravne rešitve opisane z obrazcema (4). Zaradi (9) je

$$x_n = \frac{1}{2}(c_n - 1), \; y_n = \frac{1}{2}(c_n + 1), \; z_n = b_n. \tag{10}$$

Zgornja preglednica, ki vsebuje začetne b_n, c_n, daje po (10) kateti x_n, y_n in hipotenuzo z_n:

n	1	2	3	4	5	6	7
x_n	3	20	119	696	4059	23660	137903
y_n	4	21	120	697	4060	23661	137904
z_n	5	29	169	985	5741	33461	195025

Z obrazci (10) so prek (4) zajeti vsi iskani pravokotni trikotniki.

Ko smo pokazali, kako se pride do vseh trojic kvadratov $1 < b^2 < < c^2$ v aritmetičnem zaporedju, iščemo sedaj vse kvadrate $a^2 < b^2 < c^2$, ki sestavljajo aritmetično zaporedje. Pogoj $b^2 - a^2 = c^2 - b^2$ lahko zapišemo

$$(b - a)(b + a) = (c - b)(c + b). \tag{11}$$

Če pomeni d največjo skupno mero števil $b - a, c + b$, je

$$b - a = du, c + b = dv \text{ in } \; u, v \text{ tuji naravni števili.} \tag{12}$$

Ko to vnesemo v (11), je

$$u(b+a)=v(c-b). \tag{13}$$

Ker sta u, v tuja, mora u deliti $c-b$ in v deliti $b+a$. Iz (13) potem izhaja

$$c-b=su,\ b+a=sv \tag{14}$$

pri naravnem številu s. Po (12) in (14) izračunamo

$$\begin{aligned} a&=\frac{1}{2}(-du+sv), & b&=\frac{1}{2}(du+sv)\\ c&=\frac{1}{2}(su+dv), & b&=\frac{1}{2}(-su+dv). \end{aligned} \tag{15}$$

Izraza za b kažeta, da je $du+sv=-su+dv$ oz. $(d+s)u=(d-s)v$ in zaradi tujosti u, v

$$d+s=kv,\quad d-s=ku$$

pri naravnem številu k. Torej je

$$d=\frac{k}{2}(u+v),\ s=\frac{k}{2}(-u+v). \tag{16}$$

Ko (16) upoštevamo v (15), pridemo do izrazitev

$$a=\frac{k}{4}(v^2-2vu-u^2),\ b=\frac{k}{4}(v^2+u^2),\ c=\frac{k}{4}(v^2+2vu-u^2).$$

Da bodo a, b, c naravna števila, vzamemo $k=4m$ pri naravnem številu m in je

$$a=m(v^2-2vu-u^2),\ b=m(v^2+u^2),\ c=m(v^2+2vu-u^2). \tag{17}$$

Vemo, da sta u, v tuja. Pri $v=u=1$ se iz (17) dobi $b=c$. To ne pride v poštev, saj hočemo $b^2<c^2$. Če v številih

$$v^2-2vu-u^2,\ v^2+u^2,\ v^2+2vu-u^2 \tag{18}$$

zamenjamo med sabo u in v, ostane srednje število nespremenjeno, prvo preide v nasprotno predznačeno tretje, tretje v nasprotno predznačeno prvo. Njihovi kvadrati se seveda ohranijo. Ker nas samo ti zanimajo, se smemo omejiti na $v > u$. Največja skupna mera D števil (18) deli razliko $(v^2 + 2vu - u^2) - (v^2 - 2vu - u^2) = 4vu$. Naj bo D' največja skupna mera števil D in u. Ker je $v^2 + u^2 = hD$ pri naravnem številu h in $D'|u, D'|D$, iz $v^2 = -u^2 + hD$ vidimo, da D' deli v^2. Zaradi tujosti u, v je $D' = 1$ in u, D sta tuja. Čisto enako ugotovimo, da sta v in D tuja. Potem sta tudi D in vu tuji števili. Ker D deli $4vu$ in je tuj vu, mora deliti 4. Torej je D ena od vrednosti 1, 2, 4. Ker sta v, u tuja, sta ali oba liha ali pa eden lih drugi sod. V prvem primeru je $D = 2$ in števila (18) so dvakratniki lihih tujih števil. Ko izpostavimo 2, imamo zapis (17) za $m = 2$, števila v oklepajih pri m pa so tuja. V drugem primeru, ko je od števil v, u eno sodo in drugo liho, je $D = 1$ in števila (18) so tuja.

Povzemimo: **Vse kvadrate $a^2 < b^2 < c^2$, ki so tuji in v aritmetičnem zaporedju, dobimo iz obrazcev**

$$a = |v^2 - 2vu - u^2|,\ b = v^2 + u^2,\ c = v^2 + 2vu - u^2, \qquad (19)$$

ko spreminjamo v in u po naravnih številih tako, da je $v > u$, v in u tuja, eden sod in drugi lih. Po množenju le teh z $2^2, 3^2, 4^2, \ldots$ pridemo do vseh netujih kvadratov, ki sestavljajo aritmetično zaporedje.

Nekaj vrednosti, dobljenih po (19), prikazuje preglednica:

v	u	$a = \|(v-u)^2 - 2u^2\|$	$b = v^2 + u^2$	$c = (v+u)^2 - 2u^2$
2	1	1	5	7
3	2	7	13	17
4	1	7	17	23
4	3	17	25	31
5	2	1	29	41
5	4	31	41	49
6	1	23	37	47
6	5	49	61	71
7	2	17	53	73
7	4	23	65	89
7	6	71	85	97

Iz (19) izračunamo, da je razlika

$$b^2 - a^2 = c^2 - b^2 = 4vu(v^2 - u^2). \tag{20}$$

Po zadnji vrstici preglednice npr.

$$85^2 - 71^2 = 7225 - 5041 = 2184 = 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (7^2 - 6^2)$$
$$97^2 - 85^2 = 9409 - 7225 = 2184$$

Pomudimo se na koncu še pri štirih kvadratih. Kvadrati $a^2 < b^2 < c^2 < d^2$ sestavljajo aritmetično zaporedje, če je $b^2 - a^2 = c^2 - b^2 = d^2 - c^2$. Dognano je, da takih kvadratov ni. Seveda tudi ni pet ali več različnih kvadratov, ki bi bili v aritmetičnem zaporedju.

Naloge.

1. Nadaljuj zadnjo preglednico do $v = 12$.
2. Iz (20) izhaja: Če so trije kvadrati v aritmetičnem zaporedju, njihova razlika ni praštevilo.
3. Po (10) je $c_n = 2x_n + 1$ in je zato drugo enakost v (5) mogoče pisati $2x_{n+2} + 1 = 6(2x_{n+1} + 1) - (2x_n + 1)$. Kateti x_n, y_n in hipotenuza z_n, ki so naravna števila in $y_n = x_n + 1$, se torej izražajo z rekurzijskimi obrazci
$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n + 2\ ;\ x_1 = 3, x_2 = 20,$$
$$y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n - 2\ ;\ y_1 = 4, y_2 = 21,$$
$$z_{n+2} = 6z_{n+1} - z_n\ ;\ z_1 = 5, z_2 = 29.$$
Določi x_{10}, y_{10}, z_{10}! (Do $n = 7$ imaš vrednosti v drugi preglednici.)
4. Poišči pet trojic kvadratov v aritmetičnem zaporedju s prvim členom: a) 100; b) 64.
5. Naj bo t sodo naravno število, a, c naravni števili. Če sta $a, a + t$ kateti, c hipotenuza pravokotnega trikotnika, števila $a, a + t, c$ nisto tuja.
6. Obstaja neskončno naravnih števil a, c tako, da sta $a, a + 7$ kateti, c hipotenuza pravokotnega trikotnika in $a, a + 7, c$ tuji. (Prepričaj se: Če je $a_1 = 8, c_1 = 17$ in
$$a_{n+1} = 3a_n + 2c_n + 7$$
$$c_{n+1} = 4a_n + 3c_n + 14,$$
sta $a_n, a_n + 7$ kateti in c_n hipotenuza pravokotnega trikotnika in $a_n, a_n + 7, c_n$ za $n = 1, 2, 3, \ldots$ tuja števila.)

Jože Grasselli