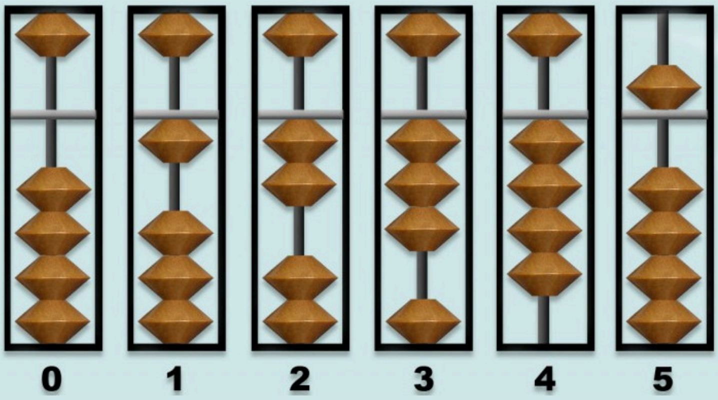
Marjan Divjak

Naravoslovna matematika



www.diameter.si

Marjan Divjak

Naravoslovna matematika

Kvantitativni jezik znanosti

www.diameter.si

Avtor	Marjan Divjak
Naslov	Naravoslovna matematika
Podnaslov	Kvantitativni jezik znanosti
Oblikovanje	Avtor
Prelom	Avtor
Naslovnica	Soroban, japonsko računalo. Shematično. Avtor anonimen.
Založba	Samozaložba
Izdaja	Prva izdaja, Ljubljana, 2019
	http://www.diameter.si/scimath/SCIMATH.pdf

Cena Brezplačna

Katiložni zapis o publikaciji (CIP) pripravili v
Narodni in univerzitetni knjižnici, Ljubljana
COBISS.SI-ID=299004416
ISBN 978-961-290-099-1 (pdf)

Vsebina

	Predgovor	5
	Vodila	7
Predšola	**1 Telesa in dogodki**	9
Nižja osnovna šola	**2 Naravna števila**	13
	3 Nebesni svod	21
Višja osnovna šola	**4 Ulomna števila**	27
	5 Potence in koreni	31
	6 Čas in kot	37
	7 Prostor	49
Srednja šola	**8 Relativna števila**	65
	9 Funkcije in grafi	73
	10 Posebne funkcije	81
	11 Diferenciali	91
	12 Integrali	99
Visoka šola	**13 Kompleksna števila**	105
	14 Vektorji in matrike	115
	15 Večkratne funkcije	127
	16 Krivulje in ploskve	137
	17 Prostorska polja	155
	18 Diferencialne enačbe	167
	19 Verjetnostni račun	177
	20 Numerika	197
	Glavni viri	209
	Viri slik	211
	Kazalo	213

Predgovor

Matematika je jezik in orodje za količinsko opisovanje sveta. Ukvarja se s števili (aritmetika), enačbami (algebra), funkcijami (analiza), prostorom (geometrija), populacijami (verjetnostni račun) in drugim. V pričujoči knjigi je podrobno prikazano, kaj točno so ti matematični objekti in kaj je o njih spoznanega.

Matematična področja med seboj niso neodvisna, ampak se prepletajo. Prav tako so do določene mere hierarhična: nekatera so "nižja" in druga "višja". Višja področja gradijo na nižjih. V človeški zgodovini so bila nižja razvita prej in višja kasneje. Tako so v knjigi tudi prikazana. Prikazovanje poteka torej od nižjega k višjemu, od posebnega k splošnemu in od starega k novemu. To je induktivna genetična pot.

Matematika kot celota tudi ni neodvisna od okolja. Prav nasprotno. Njena semena so v vsakdanjem življenju in znanosti, razrašča se samostojno, njeni plodovi pa spet ponikajo nazaj v življenje in znanost. Štetje teles in dogodkov, opazovanje neba ter potovanja po tleh in morjih, to so trije prvotni in najvažnejši izvori semen, iz katerih je matematika zrasla. Ta povezava med matematiko in okoljem, zlasti njen semenski del, je v knjigi poudarjeno prikazana. Plodovni del pa je večinoma prepuščen ustreznim področjem znanosti.

V knjigi je okrog 100 slik. Kakšnih 70 % je mojih. Okrog 10 % jih je v javni lasti, ker so bile objavljene pred letom 1923 oziroma je minilo več kot 70 let od smrti njihovih avtorjev. Približno 10 % je takih, ki posebnega dovoljenja za objavo ne potrebujejo, ker so tako odločili njihovi avtorji ali ker prvi avtorji niso znani. Za preostalih 10 % pa ocenjujem, da njihova objava zadošča zahtevam "fair use" – med drugim je nekomercialna in izobraževalna ter ne škoduje tržnim aktivnostim lastnikov licenc – in je zato dovoljena. Lastnikom licenc se vnaprej zahvaljujem za razumevanje in dobrohotnost.

Pričujoča knjiga, *Naravoslovna matematika*, je izvleček "matematičnih" poglavij in sekcij iz svoje večje sestre *Ustvarjanje znanosti*, ki vsebuje poleg tega še "fizikalna" in "tehnična" poglavja. Prepis je večinoma dobeseden. Naredil sem ga za lastne potrebe in v lastno zadovoljstvo. Upam, da se bo tako izluščena in "naravoslovno" predstavljena matematika pokazala zanimiva in koristna v očeh bralcev, predvsem študentov in učiteljev matematike, fizike in tehnike. Njim pa je seveda prepuščeno, da jo – kakor vedo in znajo – uporabijo na problemih, ki jih žulijo.

— MARJAN DIVJAK

Vodila

Merjenje

Če lahko to, o čemer govorite, izmerite in izrazite s števili, potem nekaj veste o tem; če pa ne znate tega meriti, če ne znate tega izraziti s števili, je vaše znanje borne in nezadostne vrste. — W. THOMSON

Jezik znanosti

Filozofija je napisana v tej veliki knjigi, ki je stalno pred našimi očmi – vesolju –, ampak ne moremo je razumeti, če se poprej ne naučimo jezika in ne spoznamo črk, s katerimi je napisana. Knjiga je napisna v matematičnem jeziku in črke so trikotniki, krogi in drugi geometrični liki; brez njih zastonj blodimo skozi temni labirint. — G. GALILEI

Pomen matematike

Matematika je jezik za količinsko opisovanje sveta … Napredovala je, kadar je bilo za matematike kaj resničnega dela, in je zastajala, kadarkoli je postala igrača v rokah skupine ljudi, odtujene od vsakdanjega življenja človeštva … Sedaj je postalo modno reči, da je matematika samo igra. Seveda nam to ne pove prav ničesar o njej. Nekaj nam pove le o kulturnih omejitvah nekaterih matematikov. Ko človek reče, da je matematika igra, se osebno izjavlja. Nekaj nam pove o sebi, o svojem lastnem odnosu do nje. Nič nam ne pove o javnem pomenu matematičnega jezika. — L. HOGBEN

Genetična pot

V svoji predstavitvi bom praviloma sledil genetični metodi. Bistvena zamisel te metode je, da je vrstni red, v katerem je človeštvo pridobilo znanje, tudi dober vrstni red za njegovo pridobivanje pri posamezniku … Vendar to ne pomeni, da moramo pri poučevanju znanosti ponoviti tisoč in eno napako iz preteklosti. — G. POLYA

1 Telesa in dogodki

Telesa – Oblika in snov – Snovna stanja – Lastnosti teles – Lega teles – Dogodki in dogajanja – Gibanje teles – Ples snovi

1.1 Telesa

Poimenovanje

Zamislimo si, da živimo kot prvobitni lovci in nabiralci! Spoznavanje narave začnemo z opazovanjem okolice in s poimenovanjem opaženega. Tako rečemo, na primer: tole je "človek" in tisto je "drevo". Oboje lahko primemo z roko in vidimo z očmi. Rečemo, da sta to *telesi*. Se pa na otip in pogled razlikujeta in ju zato tudi poimenujemo z različnima besedama. Svet okoli nas je poln teles. Ljudje, živali, rastline, kamni, gore – vse to so telesa. Vse lahko primemo in vidimo.

1.2 Oblika in snov

Oblika teles

Tudi kepa gline je telo. Z rokama jo lahko gnetemo in izdelamo, na primer, "kroglo" ali "kvader". Rečemo, da imata nastali telesi različno *obliko*. Če smo spretni, lahko izdelamo celo kipec v obliki človeka. Nasploh imajo telesa v naravi oblike, ki so si med seboj bolj ali manj *podobne* ali *različne*.

Snovi

Kipec človeka in pravo človeško telo imata sicer enako obliko, a se razlikujeta po tem, iz česa sta zgrajena. Prvi je iz gline in drugi iz kosti in mesa. Rečemo, da so to različne *snovi*. Nasploh so telesa zgrajena iz najrazličnejših snovi: kamni iz kamnin, drevesa iz lesa in gore iz marsičesa.

1.3 Snovna stanja

Trdnina

Glinasta krogla ostaja "okrogla", če je ne gnetemo; lesena palica ostaja "ravna", če je ne upognemo ali zlomimo: oblika mnogih teles se navadno ne spreminja, če jih pustimo pri miru. Rečemo, da so ta telesa *trdna* oziroma da je snov, iz katere so sestavljena, *trdnina*. Kadar se trdnina pod obremenitvijo ne spremeni zaznavno, jo proglasimo za *togo*, sicer pa za *deformabilno*.

Tekočina

Kaj pa jezero vode? Tudi to je telo, saj njegovo snov – vodo – lahko zajamemo v roko ali v posodo in jo vidimo. A voda ne ohranja svoje oblike, ampak se prilagodi vsakokratni obliki posode, v katero jo nalijemo. Pri tem vedno oblikuje *gladino*. Ko med dvema vodnima mlakama izkopljemo jarek, pa se voda *pretaka* iz ene mlake v drugo, dokler se gladini ne izravnata. Isto se zgodi, če mlaki povežemo s tunelom pod vodnima gladinama. Rečemo, da je voda *tekočina* oziroma da je jezero tekoče telo.

Plin

Ko stojimo v deroči reki, čutimo njen potisk. Podoben občutek imamo v močnem vetru. Očitno nas tudi tedaj potiska tok neke nevidne tekočine. To je zrak. Tega nenehno vdihavamo v pljuča in izdihavamo. Izdihanega zraka ne moremo natočiti v posodo, lahko ga pa ujamamo v kožni meh za vodo. S tem, ko se meh razpne v vse smeri, kaže, da zrak zasede vsak njegov kotiček. Pri tem ni videti nobene gladine. Pravimo, da je zrak *plin* in da je ozračje plinasto telo.

1.4 Lastnosti teles

Oblika in snov nista edino, po čemer se telesa med seboj razlikujejo.

Velikost

Kamen, ležeč ob skali, je *majhen* in skala je *velika*. Rečemo, da imata omenjeni (podobni) telesi različno *velikost*. Za izbrani predmet pa primerjava pokaže, ali je manj, bolj ali enako velik kot kakšen drug predmet.

Dolžina

Lovska puščica je *kratka* in kopje je *dolgo*. Rečemo, da imata omenjeni (podolgovati) telesi različno *dolžino*. Ko postavimo izbran predmet ob bok kakšnega drugega predmeta, pa vidimo, ali je manj, bolj ali enako dolg od slednjega. Za rastoča drevesa raje rečemo, da so bolj ali manj visoka.

Teža

Kos lesa v roki je *lahek*, kamen v drugi roki je *težek*. Rečemo, da imata telesi različno *težo*. Težkanje z rokama pokaže, ali je en predmet manj, bolj ali enako težek kot drugi. Ponavadi so večja telesa tudi težja: večji kos istega lesa je težji od manjšega. Je pa manjši kamen lahko težji od večjega polena lesa.

Temperatura

Voda v studencu je na dotik *hladna*, voda v mlaki je *topla* in kamen, na katerega pripeka sonce, je *vroč*. Rečemo, da imajo telesa različno *temperaturo*. Dotik pove, ali ima izbrano telo manjšo, večjo ali enako temperaturo kot kakšno drugo telo, oziroma ali je manj, bolj ali enako toplo.

Barva

Trava je na pogled *zelena*, morje *modro* in oblaki *beli*. Rečemo, da imajo telesa različno *barvo*. Barv je brez konca. Ne moremo jih pa razvrstiti v naraščajoče zaporedje kakor na primer dolžine, teže ali temperature. Prav tako opazimo, da je barva telesa odvisna od okoliščin: ponoči so vsa telesa črna in v jutranji zarji so rdečkasta.

1.5 Lega teles

Navpičnica

V lovskem taboru je navada, da meh za vodo obesimo z vrvjo na primerno drevesno vejo. Napeta vrv, v mislih podaljšana preko obeh koncev, oblikuje črto *navpičnico*. Ko vrv odvežemo, pade meh na tla vzdolž navpičnice. Tudi drevesa navadno rastejo vzdolž navpičnic. Rečemo, da so *navpična*. Če ni tako, jih imenujemo *poševna*; ena bolj, druga manj.

Horizontalna ravnina

Ko drevesa posekamo in padejo ter zaplavajo na vodni gladini, postanejo *vodoravna*. Namesto da ocenjujemo poševnost dreves glede na navpičnico, jo lahko določamo tudi glede na vodno gladino – *horizontalno ravnino*. Za navpičnico pri tem rečemo, da stoji *pravokotno* na gladino. Ko človek stoji, je navpičen, in ko se uleže, je vodoraven. Za poševne hribe pa rečemo, da so bolj ali manj strmi.

Smerne osi

Ko gledamo kakšnega lovca in njegov taborni šotor, vidimo naslednje. Lovec je *v* šotoru ali *izven* njega; *pred* ali *za* njim; *ob* njem ali *proč* od njega. Rečemo tudi, da je nebo *nad* šotorom in zemlja *pod* njim. Tako povemo *lego* lovca ali neba ali zemlje glede na šotor. Seveda velja povedano za vsakršna telesa, ne le za šotor. Posebej je odlikovano kar naše lastno telo. V tem primeru razlikujemo še, ali je kakšen predmet *desno* ali *levo* od nas. Vse to nas uči, da lego opazovanega telesa povemo z ozirom na kako drugo primerno telo, iz katerega štrlijo tri zamišljene osi: "gor-dol", "naprej-nazaj" in "levo-desno". Rečemo, da je to *izhodiščno telo* in da so to njegove *smerne osi*. Predmet, ki mu določamo lego, leži bolj ali manj tesno vzdolž ene izmed osi in je bolj ali manj oddaljen.

1.6 Dogodki in dogajanja

Dogodki

Ko lovec zapusti šotor, je to *dogodek*, in ko se vrne, prav tako. Vmes lovec išče in zalezuje divjad po okolici, in to je *dogajanje*. Rečemo, da se dogodek *zgodi*, dogajanje pa *traja*. Kakor ima pohodna palica začetek in konec, tako ima lovska odprava svoj odhod in prihod.

Svet je poln dogodkov in dogajanj. Plosk z rokama, štrbunk kamna v vodo in udarec strele iz oblaka v drevo, vse to so dogodki. Lov, postavljanje tabora ali spanje, to so pa dogajanja. Vsako dogajanje ima svoj začetek in konec.

Hkratnost

Če pes zalaja, ko stopi lovec iz šotora, rečemo, da sta oba dogodka *hkratna* ali *sočasna*. Lahko pa pes zalaja *prej* ali *kasneje*. Dva dogodka lahko zmeraj primerjamo po tem, ali ju zaznamo hkrati ali ne, in določimo, kateri je prejšnji in kateri je kasnejši. Dogodke ločimo na tiste, ki jih ravnokar zaznavamo, na tiste, ki se jih spominjamo, in na one, ki jih še pričakujemo. Rečemo, da so to *sedanji*, *pretekli* in *prihodnji* dogodki. V spominu hranimo celo zaporedje preteklih dogodkov.

Trajanje

Dva lovca naj zjutraj istočasno odideta na lov. Eden se naj vrne prej kot drugi. Potem rečemo, da je njegov lov trajal manj časa kot drugi. Drugi lov je pa trajal več časa. Če se lovca vrneta hkrati, pa rečemo, da sta lova trajala enako časa. Love – in vsakršna druga dogajanja – lahko torej primerjamo po trajanju, če se le začnejo ali končajo hkrati.

1.7 Gibanje teles

Premiki teles

V taboru je lovec zdaj tu, zdaj tam. Rečemo, da ni pri miru, ampak se *premika*. Premikajo se ljudje, živali, pa tudi mnogo drugih teles: listi padajo z dreves in plavajo po reki, kamni se valijo z gora in Sonce, Mesec ter zvezde nenehno plujejo po nebu. Svet teles je poln *gibanja*.

Hitrost

Vsi otroci radi tekajo. Včasih tekmujejo, kdo bo prej pretekel pot od tabora do oddaljenega drevesa. Začnejo hkrati. Tisti, ki pride najprej na cilj, je za izbrano pot potreboval najmanj časa. Rečemo, da je *najhitrejši*. Drugi so pa *počasnejši*. Kar velja za otroke, velja za telesa nasploh. Tisto telo, ki za isto pot porabi manj časa, ali ki v istem času opravi daljšo pot, je bolj hitro. Rečemo, da imajo telesa različne *hitrosti*.

1.8 Ples snovi

Življenje teles

Človek se rodi, živi in umre. Tudi druga telesa nastajajo, se spreminjajo in izginjajo. Na nek način tudi ona "živijo". Življenjska doba marsikaterega telesa, recimo okroglega kamna na bregu reke, pa je tako dolga in njegove spremembe tako počasne, da jih ne opazimo.

Snovni vrtinci

Kaj pa snovi, iz katerih so telesa zgrajena? Preden se je telo "rodilo", je bila njegova snov razpršena po okolici, in ko telo "umre", se snov spet vrne v okolico. To kaže, da je snov mnogo bolj dolgoživa kot telesa, ki jih gradi, in da morda obstaja od nekdaj in bo morda obstajala za vedno. Telesa so pa le začasni snovni vrtinci, dovolj ločeni od okolice in dovolj dolgotrajni, da si zaslužijo svoja imena. □

2 Naravna števila

Številčnost teles – Pisanje števil – Seštevanje – Odštevanje – Množenje – Deljenje – Računski zakoni

2.1 Številčnost teles

Množice

Kdo še ni videl, da se ptice zbirajo v jate in ovce v črede? Rekli bomo, da je opazovana jata ali čreda *množica*, posamične ptice ali ovce pa njeni *elementi*. Nasploh so množice lahko sestavljene iz različnih elementov. Posebej odlična je množica prstov na rokah, ki jo vedno nosimo s seboj.

Za vsako ovco v čredi lahko, kot pastirji, dvignemo svoj prst. Zgodi se naslednje: zmanjka prstov; preostane nekaj prstov; ali pa so vse ovce pregledane in vsi prsti dvignjeni. Ustrezno rečemo, da je ovc *več*, *manj* ali *enako mnogo* kot prstov. Rečemo tudi, da ima vsaka množica posebno lastnost, *številčnost*, in da je množica ovc bolj, manj ali enako številčna kot množica prstov.

Mala števila

Ko dvigujemo prste, s tem gradimo vedno nove množice dvignjenih prstov. Številčnost vsake naslednje množice je večja od predhodne. Posamične številčnosti poimenujemo, po vrsti: *nič*, *ena*, *dve*, *tri* … *devet*, *deset*. To so primerki *naravnih števil*. Številčnost poljubne množice (ovc v ogradi, ljudi v taboru) označujemo s temi števili. Rečemo, da elemente množice *štejemo*.

Slika 2.1 Štetje s prsti. Od leve proti desni so prikazana števila nič, ena, dve, tri, štiri in pet. (Anon)

Velika števila

S prsti lahko štejemo le do deset. Če je elementov več, si pomagamo tako, da delamo zareze v palico. Za vsak element naredimo eno zarezo. Zaradi večje preglednosti združimo zareze v skupine po deset – *desetice*, nato pa posebej preštejemo, koliko je teh desetic, in posebej, koliko je preostalih elementov, *enic*. Tako rečemo, na primer, dvanajst (dve nad deset) ali oseminpetdeset (osem in pet deset). Pri še večjih številčnostih združujemo tudi desetice v skupine po deset – *stotice*, in stotice v *tisočice*, ter štejemo posebej tisočice, stotice, desetice in enice. Kot pastirjem in poljedelcem nam to povsem zadostuje.

2.2 Pisanje števil

Številke

Z nastankom kmetijskih držav se uvede pobiranje davkov v pridelkih. Za to skrbijo državni uradniki. Ti morajo seveda vedeti, koliko vreč žita ali koliko vrčev olja imajo od vsakega podložnika že pobranih in shranjenih v skladiščih oziroma koliko jih ti še dolgujejo. Tudi prebivalstvo in njihovo živino je treba občasno prešteti. Zato, kot državni pisarji, izumimo za zapis števil posebne oznake, *številke*: 0 (nič), 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in 9 (devet). Če pozorno pogledamo, vidimo, da so to pravzaprav stilizirane slike sklenjene pesti, enega, dveh in treh iztegnjenih prstov, kvadrata iz štirih paličic in tako naprej. Pišemo na glinaste ploščice, pergament in papir.

Desetiški zapis

Z uvedenimi številkami zapišemo poljubno velika števila na zelo učinkovit način. Število dva tisoč trinajst, na primer, zapišemo kot 2013; pri tem posamične številke, od desne proti levi, označujejo število enic (tri), desetic (ena), stotic (nič) in tisočic (dve). To je desetiški mestni zapis števil. V njem ima vsaka številka dvojno vrednost: številčno (koliko enot označuje) in mestno (kakšne enote – enice, desetice itd. pomeni). Očitno lahko na ta način zapišemo še tako velika števila. Nekatera od njih tudi poimenujemo: tisoč tisočic proglasimo za *milijon* in tisoč milijonov za *milijardo*. Slednja enota, se zdi, bi v pošteni državi že morala zadostovati za vse potrebe.

2.3 Seštevanje

Združevanje množic

Ko se dve čredi ovac – dva davka – združita, nastane nova čreda. Pri tem samoumevno privzamemo, da ob združevanju nobena začetna ovca ne izgine oziroma da se ne pojavi nobena nova. Začetni čredi sta imeli vsaka svojo številčnost in združena čreda ima spet svojo številčnost. Kako jo določimo? S štetjem, seveda: bodisi ovac ali – lažje – njih nadomeščujočih prstov ali kamenčkov.

Združujemo lahko poljubne množice: ovce v ogradi, ljudi v hišah in drugo. Naj bo, na primer, številčnost prve množice 7 in druge 5. Številčnost združene množice je potem enolično določena s številčnostjo prvotnih dveh množic; simbolično jo označimo kot $7+5$ in preberemo "sedem in pet" oziroma "sedem plus pet". Ko združeno množico zares preštejemo, dobimo 12. Rečemo, da smo dve števili *sešteli* in dobili njuno *vsoto*, kar na kratko zapišemo kot $7+5=12$ in preberemo "sedem plus pet je dvanajst". Leva stran zapisa predstavlja *nakazano* vsoto in desna stran (s štetjem) *izračunano* vsoto. Povezuje ju znak za enakost.

Seštevanje enomestnih števil zlahka opravimo s prsti ali kamenčki. Sčasoma jih niti ne potrebujemo več in seštevamo kar v mislih. S štetjem dobljene vsote lahko tudi zberemo v tabelo *seštevanko*: $1+1=2$, $1+2=3$ … $9+9=18$ in si jo zapomnimo. Kdor hoče postati dober državni pisar, mu za to ne sme biti žal truda.

Tabela 2.1 Seštevanka – tabela vsot za poljubni dve enomestni števili.

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Pisno seštevanje

Večja števila seštevamo v mislih tako, da prvemu številu prištevamo po vrsti vse desetiške enote drugega, začenši z najvišjo enoto. Za to zadostuje poznavanje seštevanke. Pri tem številke izgovarjamo, da si olajšamo pomnjenje. Rečemo, da seštevamo "ustno". Postopek lahko učinkovito organiziramo s pisanjem. Ravnamo takole. Oba seštevanca zapišemo drugega pod drugim tako, da stoje enice v isti navpičnici. Nato seštejemo enice, potem desetice itd. Če dobimo pri kaki desetiški enoti 10 ali več, zapišemo le enice, desetice pa prenesemo v naslednjo višjo desetiško enoto. Zgled:

```
  579
+ 43
  ───
  622
```

Tri in devet je dvanajst; zapišemo dve in prenesemo eno v stolpec desetic. (Prenešena) ena in štiri je pet in sedem je dvanajst; zapišemo dve in prenesemo eno v stolpec stotic. (Prenešena) ena in pet je šest; zapišemo šest.

Na enak način seštevamo tudi stolpec iz več kot dveh števil, le prenašati je treba večja števila.

2.4 Odštevanje

Ločevanje množic

Iz črede ovac lahko izločimo kakšno čredico. Začetna čreda, izločena čredica in preostala čreda, vsaka ima svojo številčnost. Naj bo, na primer, številčnost začetne črede 7 in številčnost odstranjene čredice 2. Potem nakažemo številčnost preostale črede kot $7-2$ in preberemo "sedem manj dve" oziroma "sedem minus dve". Ko čredo zares preštejemo, dobimo 5. Rekli bomo, da smo od prvega števila *odšteli* drugo število in dobili njuno *razliko*: $7-2=5$. Očitno je razlika tisto "dopolnilno" število, ki ga moramo prišteti okleščeni množici, da dobimo začetno množico.

Pisno odštevanje

Majhna števila odštevamo kar v mislih, podobno kot pri seštevanju: od prvega števila odštevamo po vrsti vse enote drugega števila, začenši z največjo. Za večja števila pa uporabljamo naslednji pisni postopek. Drugo število zapišemo pod prvo ter z dopolnjevanjem odštevamo posamične enote, pričenši z enicami. Če je zgornja številka manjša od spodnje, ji prištejemo deset, hkrati pa naslednjo spodnjo desetiško številko povečamo za ena. Zgled:

```
 739
−256
 ———
 483
```

Šest in koliko je devet? Zapišemo tri. Pet in koliko je trinajst? Zapišemo osem in prenesemo eno v naslednji stolpec. (Prenešena) ena in dve je tri; koliko je še do sedem? Zapišemo štiri.

2.5 Množenje

Združevanje enakih množic

Delavce, ki gradijo državne stavbe, je treba prehranjevati in to zahteva načrtovanje. Naj poje delavec na dan tri (majhne) hlebce kruha. Koliko hlebcev poje pet delavcev? Sešteti moramo torej pet trojk. Vsoto $3 + 3 + 3 + 3 + 3$ zapišemo na kratko kot $5 \cdot 3$ (ali tudi 5×3) in preberemo "pet krat tri". S tem definiramo *množenje* števila 3 s številom 5 oziroma *produkt* teh dveh *faktorjev*. To je nakazani produkt; s štetjem pa ga dejansko izračunamo: $5 \cdot 3 = 15$. Kar velja za seštevanje enakih množic hlebcev, velja tudi za seštevanje enakih množic poljubne vrste.

Pisno množenje

Za lažje računanje produktov si zabeležimo (s seštevanjem) dobljene produkte enomestnih števil, jih uredimo v tabelo *poštevanko* $1 \cdot 1 = 1$, $1 \cdot 2 = 2$ … $9 \cdot 9 = 81$ in si jo zapomnimo.

Tabela 2.2 Poštevanka – tabela produktov za poljubni dve enomestni števili.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Večja števila množimo z enomestnim številom tako, da prvi faktor razcepimo na vsoto desetiških členov, vsakega množimo z drugim faktorjem ter dobljene delne produkte seštejemo. Če je drugi faktor večmestni, a se da zapisati kot produkt enomestnih števil, množimo prvi faktor zaporedoma z njimi. Za to zadostuje znanje seštevanke in poštevanke. Splošni postopek pa učinkovito organiziramo takole. Oba faktorja zapišemo vštric. Nato z najvišjo enoto desnega faktorja množimo posamične enote levega faktorja, začenši z enicami. Če je kakšen rezultat dvoštevilčen, zapišemo samo enice in prištejemo zapomnjene desetice k produktu z naslednjo višjo enoto. Tako dobimo prvi delni produkt. Postopek ponovimo z vsako naslednjo nižjo enoto desnega faktorja in rezultat zapisujemo kot naslednji delni produkt pod prejšnjega, vendar vsakokrat zamaknjenega za eno mesto v desno. Na koncu vse delne produkte seštejemo. Zgled:

```
 539 · 27
_________
1078
 3773
_________
14553
```

Dva krat devet je osemnajst; zapišemo osem, zapomnimo ena. Dva krat tri je šest; plus (zapomnjena) ena je sedem; zapišemo sedem. Dva krat pet je deset; zapišemo deset. — Sedem krat devet je triinšestdeset; zapišemo tri, zapomnimo šest. Sedem krat tri je enaindvajset; plus (zapomnjena) šest je sedemindvajset; zapišemo sedem, zapomnimo dve. Sedem krat pet je petintrideset; plus (zapomnjena) dve je sedemintrideset; zapišemo sedemintrideset. — Seštejemo prvo in drugo vrstico.

2.6 Deljenje

Ločevanje v enake množice

V shrambi imamo petnajst hlebcev. Razdeliti jih hočemo na pet enakih kupov, po enega za vsakega delavca. Koliko hlebcev pride v tak kup? Najpreprosteje to ugotovimo tako, da iz shrambe jemljemo posamične hlebce in jih po vrsti nalagamo na prvi, drugi … peti kup. To delamo, dokler ne preostane v shrambi nič ali manj kot pet hlebcev, ki jih, celih, ne moremo več razdeliti. Potem preštejemo, koliko je hlebcev v kakem kupu. Rekli bomo, da smo število petnajst *delili* s številom pet, kar zapišemo kot $15 : 5$ (ali tudi $15 \div 5$) in preberemo "petnajst deljeno s pet". Rekli bomo tudi, da je to nakazani *kvocient* dveh števil, *deljenca* in *delitelja*. S štetjem ugotovimo dejanski kvocient, 3, ter zapišemo $15 : 5 = 3$. Očitno je kvocient tisto število, s katerim moramo pomnožiti delitelj (ter produktu prišteti morebitni ostanek), da dobimo deljenec.

Pisno deljenje

Večja števila delimo z enomestnim številom tako, da deljenec razcepimo v primerno vsoto – takšno, da je vsak njen člen deljiv z deliteljem brez ostanka, nakar člene delimo po vrsti ter dobljene kvociente seštejemo. Če je delitelj večmestni, a se da zapisati kot produkt enomestnih števil, delimo deljenec po vrsti z njimi. Pri tem nam zadostujeta seštevanka in poštevanka. Deljenje večmestnih števil je nasploh težko opravilo, zato je najbolje, da ga organiziramo po naslednjem postopku. Obe števili zapišemo vštric. Potem delimo vse desetiške enote deljenca, od največje proti najmanjši, z deliteljem, kakor pove naslednji zgled:

```
981 : 23 = 42
 61
 15 ostanek
```

Najvišja desetiška enota, devet, ni deljiva s triindvajset, najvišji dve, osemindevetdeset, pa že. — Triindvajset gre v osemindevetdeset (ugibamo) štirikrat, zapišemo štiri. — Kolikšen je ostanek? Štirikrat tri je dvanajst in koliko je osemnajst? Šest, zapišemo šest, ostane ena. Štirikrat dve je osem, plus (preostala) ena je devet in koliko do devet? Nič. Ostanek, šest, je torej manjši od triindvajset, kar je v redu. Če bi bil ostanek večji, je bilo ugibanje kvocienta napačno in ga je treba povišati. — K ostanku pripišem naslednjo desetiško enoto, eno. — Triindvajset gre v enainšestdeset (ugibamo) dvakrat, zapišemo dve. — Kolikšen je ostanek? Dvakrat tri je šest in koliko je enajst? Pet, zapišemo pet, ostane ena. Dvakrat dve je štiri, plus (preostala) ena je pet in koliko do šest? Ena, zapišemo ena. Ostanek, petnajst, je spet manjši od delitelja, kar je v redu. — Ker nimamo več desetiških enot za pripisovanje, končamo.

2.7 Računski zakoni

Lastnosti operacij

Seštevanje, množenje, odštevanje in deljenje bomo poimenovali osnovne *računske operacije*. Od teh sta prvi dve "direktni", drugi dve pa njima "obratni". Direktni operaciji imata nekatere lepe lastnosti, kot smo deloma že videli ali kot se lahko dodatno prepričamo s polaganjem kamenčkov. Če s črkami m, n in k označimo katerakoli naravna števila, velja:

$$\begin{aligned} &m + n = n + m \qquad (2.1)\\ &(m + n) + k = m + (n + k) = m + n + k\\ &m \cdot n = n \cdot m\\ &(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) = m \cdot n \cdot k\\ &k \cdot (m + n) = k \cdot m + k \cdot n\,. \end{aligned}$$

Oklepaji označujejo vrstni red operacij. Znak za množenje ponavadi kar izpuščamo. Z besedami rečemo, po vrsti, da je vsota komutativna in asociativna, produkt pa komutativen, asociativen in distributiven glede na vsoto. Naštete lastnosti, njih pet, poimenujemo *računske zakone*. Pravzaprav niso nič drugega kot odsev dejstva, da se pri združevanju in razdruževanju množic njihovi elementi ohranjajo, to je, da obstoječi elementi ne izginjajo, niti ne nastajajo novi. □

3 Nebesni svod

Sonce – Svetloba – Gnomon – Obzorni krog – Nebesna telesa – Zemljin sistem

3.1 Sonce

Dan in noč

Od vseh teles v naravi je najmogočnejše *Sonce*, velika žareča krogla na nebu. Prijeti ga sicer ne moremo, ker je predaleč, ga pa dobro vidimo. Sonce ni pri miru, ampak vzhaja izza obzorja, dosega vrh – *kulminira* – in zahaja nazaj za obzorje. Vsakič prinese s seboj svetlobo in toploto ter ju s seboj tudi odnese. Tako ustvarja zaporedje svetlih in temnih obdobij, (belih) *dnevov* in *noči*. Brez Sonca bi bila na Zemlji večna tema in mraz. Seveda ne bi bilo niti nas.

3.2 Svetloba

Sence in žarki

Ob sončnem dnevu mečejo drevesa po tleh *sence*. V notranjosti stavb, ki imajo odprtine v stenah, pa se rišejo svetle pege. Očitno izhaja iz Sonca nekaj, kar se širi na vse strani v ravnih črtah, če ni ovir. Tisto nekaj poimenujemo *svetloba*, Sonce pa *svetilo*. Svetila so nasploh telesa, ki sama od sebe sevajo svetlobo. Goreč les in zvezde, ki jih vidimo ponoči na nebu, so tudi svetila. Druga telesa vidimo le zato, ker na njih pada svetloba in se odbija v naše oko. Sončno svetlobo zaznavamo tudi s kožo: čutimo jo kot toploto. Ozkemu snopu svetlobe rečemo *žarek*. Predstavljamo si, da je to nekakšen curek svetlobnih delcev.

3.3 Gnomon

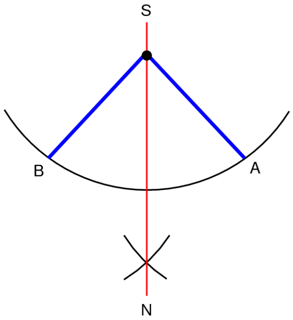
Jug in sever

Ko gledamo zaporedne kulminacije Sonca, se zdi, da se vedno dogajajo nad isto točko obzorja. Ker Sonca ne smemo neposredno gledati, da si ne poškodujemo oči, raje opazujemo senco, ki jo meče navpična palica po vodoravnih tleh. To je *gnomon*. Navpičnost dosežemo z obteženo vrvico – *grezilom*. Da so tla vodoravna, pa zagotovimo tako, da okrog gnomona izkopljemo jarek, vanj natočimo vodo in tla poravnamo z gladino.

Slika 3.1 Gnomon – navpična palica, ki meče senco na vodoravna tla. Ko je senca najkrajša, je poldan. Takrat kaže senca smer sever-jug. Gnomon je najstarejši človekov merilnik. Prej ali slej ga neodvisno iznajdejo vsa ljudstva. Tukaj merita dva domačina na Borneu. (Needham, 1995)

Ob kulminaciji je Sonce najviše na nebu in senca je najkrajša. Takrat kaže z enim koncem proti *jugu* in z drugim proti *severu*.

Smer sever-jug določimo natančneje tako, da začrtamo okrog gnomona z vrvico primerno velik krog. Senca, poslušna Soncu, se vrti, pri čemer se dopoldne krajša in popoldne spet daljša. Njen vrh se zato dvakrat dotakne kroga. Ti dve točki označimo, ju povežemo z vrvico in slednjo razpolovimo.



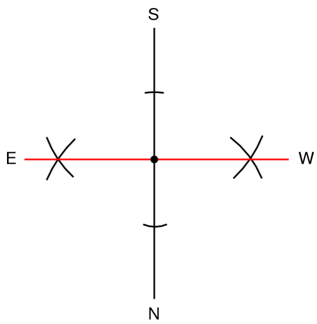
Slika 3.2 Določitev smeri sever-jug z gnomonom. Črni krožec je gnomon. Okrog njega je zarisan krožni lok. Enkrat dopoldne vrže gnomon senco do A, enkrat popoldne pa do B. Obe senci sta enako dolgi. Razdaljo med A in B razpolovimo z vrvico ali pa narišemo dva presečna loka iz A in B. S tem je določena črta NS od severa proti jugu.

Vzhodišče in zahodišče

Jug lahko določimo tudi drugače – iz obeh točk na obzorju, kjer Sonce na isti dan vzhaja in zahaja. To sta *vzhodišče* in *zahodišče*. Kje je vzhodišče, določimo in označimo z dvema koloma, ki ju zabijemo v zemljo. Ko vidimo kola poravnana, kažeta v ustrezno smer. Kol, ki je bliže očesu, poimenujemo *merek*, drugega pa *muha*. Podobno velja za zahodišče. Smer do tja označimo z že obstoječim merkom in z novo muho. Pridelani trije koli – merek in dve muhi – tvorijo *ogel* ali *kot*. Ta kot razpolovimo z vrvico in razpolovišče spet označimo s kolom-muho. Dobili smo smer proti jugu.

Vzhod in zahod

Na črto sever-jug določimo z vrvico pravokotnico, ki kaže *vzhod* in *zahod*. S tem smo določili glavne *strani neba*. Vmesne strani dobimo, ko razpolovimo kote med glavnimi smermi: med severom in vzhodom dobimo severovzhod in podobno drugod.



Slika 3.3 Določitev pravokotnice na črto NS skozi izbrano točko na njej. Iz točke narišemo dva krožna loka, ki sekata črto. Nato iz obeh presečišč narišemo na vsaki strani po dva presečna loka. S tem je določena pravokotnica EW od vzhoda proti zahodu.

Po označenih straneh neba opisujemo smeri potovanj. Z njimi tudi poimenujemo vetrove. V naših krajih, na primer v Ljubljani, piha veter večinoma od zahoda; rečemo mu zahodnik. Severni veter, severnik, je mrzel in južni veter, jugo, je topel. Takšni morajo biti tudi kraji, iz katerih pihata.

3.4 Obzorni krog

Letne dobe

Opazovanja zaporednih vzhodov in zahodov Sonca pokaže, da ostaja jug nespremenjen, vzhodišče in zahodišče pa se mu vsak na svoji strani počasi odmikata ali primikata. Hkrati se s tem spreminja tudi višina kulminacij Sonca med najnižjo in najvišjo vrednostjo. V dneh, ko je kulminacija visoka, so dnevi vroči; rečemo, da je takrat *poletje*. Kadar pa je kulminacija nizka, so dnevi mrzli in imamo *zimo*. Vmes umestimo še *pomlad* in *jesen*. Tako je gibanje Sonca združeno tudi z menjavo letnih dob. Pravzaprav je Sonce vzrok letnim dobam: čim više je na nebu, tem več svetlobe in toplote vpada na tla in jih tem bolj segreva.

Sončni koledar

Za poljedelce je življenjskega pomena, da vedo, kdaj sejati, zato – v vlogi njihovih svečenikov – postavimo neuničljive *obzorne kroge* iz kamnov, ki kažejo različna odlikovana vzhodišča in zahodišča Sonca.

Slika 3.4 Kamniti obzorni krog Stonehenge v Angliji. Kamni kažejo različne odlikovane smeri na obzorju, na primer najjužnejše vzhodišče Sonca. (National Geographic)

Posamezne točke na obzornem krogu kažejo, na kateri dan je treba kaj delati na polju. Rečemo, da predstavljajo *sončni koledar*. V njem so posebej odlikovani štirje dnevi. Prvi je spomladi takrat, ko Sonce vzhaja točno na vzhodu in zahaja točno na zahodu. To je *pomladansko enakonočje*. Drugi je jeseni, ko se dogaja isto. To je *jesensko enakonočje*. Sredi poletja je dan, ko Sonce vzhaja in zahaja najbolj severno, in pozimi dan, ko to počne najbolj južno. To sta *poletni obrat* in *zimski obrat*. Vsi ti dnevi so dobrodošel povod za velika slavja.

3.5 Nebesna telesa

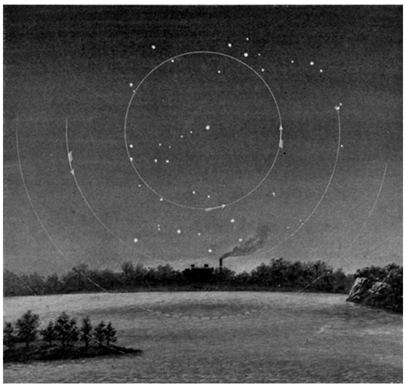
Mesec

Ponoči in včasih podnevi vidimo na nebu *Mesec*. Kakor Sonce tudi sam vzhaja, se giblje od vzhoda proti zahodu in zahaja. Pri tem od noči do noči počasi spreminja svojo obliko: od polno osvetljenega kroga – ščipa – preko čedalje bolj ozkega krajca do povsem temnega kroga – mlaja – in nazaj. Izboklina krajca je vedno obrnjena proti Soncu; kaže torej, da je Mesec velika krogla, ki ne seva sama, ampak jo osvetljuje Sonce.

Zvezde

Ponoči na nebu miglja množica *zvezd*. Ene so bolj, druge manj svetle. Tudi zvezde sledijo zgledu svojih dveh vzornikov: niso pri miru, ampak se gibljejo od vzhoda proti zahodu. Pri tem ne spreminjajo medsebojne lege, to je, oblika *ozvezdij*, ki jih tvorijo na nebu, se ne spreminja. Južnejša ozvezdja vzhajajo in zahajajo za obzorje. Severnejša pa opisujejo kroge okrog neke odlikovane točke, ki leži natanko nad severom. To je *severni nebesni pol*.

Njemu nasproti, pod obzorjem, leži *južni nebesni pol*. Tudi okrog njega krožijo zvezde, vendar jih ne vidimo, ker so pod obzorjem. Oba nebesna pola povezuje navidezna *nebesna os*. Prav ob severnem polu leži srednje svetla zvezda; ta ostaja pri miru in ponoči kaže, kje je sever. Poimenujemo jo *Severnica*. Tudi druge zvezde in ozvezdja poimenujemo z lepimi imeni. Znameniti ozvezdji sta *Veliki voz* in lepotica *Kasiopeja*, ki obe kažeta proti Severnici, ter lovec *Orion*, ki s svojim pasom kaže vzhod in zahod.



Slika 3.5 Kroženje zvezd okoli severnega nebesnega pola. Blizu pola leži svetla zvezda, Severnica. Pomorščakom in trgovskim karavanam v puščavah je ponoči zanesljiv kažipot. (Comstock, 1903)

Planeti

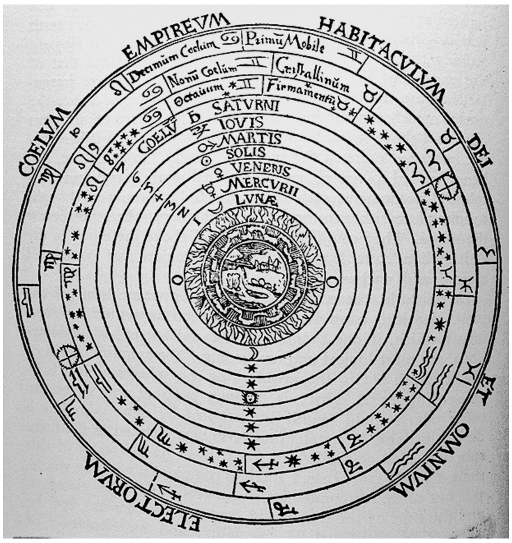
Opazovanja preko zaporednih noči pokažejo, da nekatere zvezde le niso čisto pri miru, ampak počasi spreminjajo svojo lego med preostalimi zvezdami. Takim potujočim zvezdam rečemo *planeti*. Poznamo in sledimo naslednje: *Merkur*, *Venero*, *Mars*, *Jupiter* in *Saturn*. Prva dva se zmeraj držita blizu Sonca in sta vidna le zjutraj pred vzhodom ali zvečer po zahodu, drugi pa tudi sredi noči. Venera je od vseh planetov najsvetlejša in spreminja svoj sijaj.

Sonce, Mesec in zvezde sicer vsi potujejo po nebu od vzhoda proti zahodu, vendar to ni vse. Mesec namreč med zvezdami dodatno in počasi leze od zahoda proti vzhodu: če določene noči vzide (ali kulminira) skupaj z neko zvezdo, bo naslednji dan za njo že kasnil. Pri svoji poti med zvezdami jih včasih tudi pokrije, kar pomeni, da je bližje od njih vseh. Prav tako kasni Mesec za Soncem: ob vsakem naslednjem zahodu Sonca je bolj zadaj. In celo Sonce samo rahlo kasni za zvezdami: ozvezdje, ki v zimskih dneh vzhaja tik po sončnem zahodu, je v pomladnih dneh že visoko na nebu, ko Sonce zaide. Katera ozvezdja so torej ponoči vidna na nebu, je odvisno od letne dobe – poleti so druga kot pozimi.

3.6 Zemljin sistem

Središče sveta

Opisane pojave na nebu si predstavljamo z naslednjo sliko. Zemlja je velika krogla v središču sveta. Okoli nje na različnih razdaljah krožijo nebesna telesa; najprej Mesec, potem notranja planeta Merkur in Venera, nato Sonce, za njim zunanji planeti Mars, Jupiter in Saturn, ter končno zvezde. Mesec in planeti svetijo zaradi odboja Sončeve svetlobe, zvezde pa same. Vsa telesa krožijo okrog osi, ki prebada Zemljo skozi njen severni in južni pol ter se nadaljuje na obeh straneh do ustreznih nebesnih polov med zvezdami. To je *geocentrični model sveta* (PTOLEMAJ).



Slika 3.6 Zemlja kot krogla v središču sveta. Okrog nje krožijo Mesec, Sonce, planeti in zvezde. (Apian, 1524)

Mrki

Mesec, ki je Zemlji najbližji, pride včasih pred Sonce in ga deloma ali povsem zamrači; to je *sončni mrk*. Spet drugikrat pa zaide polni Mesec v senco, ki jo meče Zemlja, obsijana od Sonca. To je *lunin mrk*, delni ali popoln. Senca na Mesecu je vedno okrogla, kar potrjuje, da mora biti okrogla tudi Zemlja. Tudi oba notranja planeta bi morala kdaj "zamračiti" Sonce, vendar sta premajhna za to, na Sončevi ploskvi ju pa zaradi silne bleščave ne moremo videti.

Upoštevajoč vse povedano se zdi, da je geocentrični model sveta kar dober. Ohranili ga bomo, dokler ga morda nova spoznanja ne bodo ovrgla in nadomestila z drugim, boljšim. □

4 Ulomna števila

Deli celote – Ulomki – Računanje z ulomki – Decimalna števila – Računanje z decimalnimi števili

4.1 Deli celote

Pri gradnji templjev se svečeniki srečajo z mnogimi težavami. Med drugim morajo učinkovito načrtovati prehrano za delavce. Tipična prehrana so hlebci kruha ali sira in te je treba rezati na kose, jih razdeljevati ter o vsem voditi evidenco.

Rezanje hlebca

Kot svečeniki in pisarji (AHMES) se izziva lotimo postopno. Začnemo z najpreprostejšim primerom – z enim samim hlebcem. V mislih ali zares ga prerežemo na dva enaka kosa in enega ali oba položimo v košaro. Rečemo, da vsebuje košara eno ali dve *polovici* hlebca. Seveda lahko hlebec razrežemo tudi na drugačno število enakih kosov, na primer na tri, in potem v košaro denemo eno, dve ali tri *tretjine* hlebca. Kosi kruha v košari so množica, katere elementi niso več enote (hlebci), pač pa deli te enote (kosi hlebca). Velikost omenjenih množic zapišemo kot 1/2, 2/2, 1/3, 2/3 ali 3/3. Spodnje število pove, o kakšnih delih celote je govora, in zgornje, koliko je teh delov.

4.2 Ulomki

Ulomna števila

Nasploh lahko hlebec razrežemo na m enakih kosov in jih n položimo v košaro. Rekli bomo, da je v njej n/m hlebca in zapisani izraz proglasili za *ulomno število* oziroma *ulomek*. Z naravnimi števili opisujemo, koliko je v množici celih enot, z ulomnimi števili pa, koliko je njihovih delov. Tako štejemo, na primer, osminke hlebca kruha ali četrtinke vrča piva. Število m poimenujemo *imenovalec* in število n *števec* ulomka. Imenovalec pove, o kakšnih delih celote je govora, in števec, koliko je teh delov. Števec je lahko manjši, enak ali večji od imenovalca. V prvem primeru rečemo, da je ulomek *pravi*, in v drugih dveh, da je *nepravi*. Nepravi ulomek skriva v sebi eno ali več celih enot. Koliko jih je, določimo z deljenjem števca z imenovalcem: količnik pove število celih enot in preostanek pove število pravih ulomnih enot. Tako, na primer, velja $22/7 = 3 + 1/7$, kar na kratko zapišemo kot $3^1/_7$. Rekli bomo, da je to "mešano" število.

Razširjanje in krajšanje

Naj bo v košari n/m hlebca, torej n kosov, od katerih je vsak velik m-tino hlebca. Ko vsak kos kruha v košari razrežemo na k delov, dobimo $k \cdot n$ kosov, od katerih je vsak velik $(k \cdot m)$-tino hlebca, in velja izrek o *širjenju* oziroma *krajšanju* ulomkov:

$$\frac{n}{m} = \frac{k \cdot n}{k \cdot m}\,. \tag{4.1}$$

Ulomek se torej ne spremeni, če števec in imenovalec pomnožimo ali delimo z istim številom. Tako ulomek 6/10, na primer, zgoraj in spodaj delimo s številom 2 in dobimo lepšo obliko 3/5. Rečemo, da smo ulomek okrajšali.

Velikost ulomkov

Kakor je kos hlebca manjši od celega hlebca, tako je tudi vsak pravi ulomek očitno "manjši" od enote. Ulomkom kot novi zvrsti števil torej lahko pripišemo velikost. Od dveh ulomkov, ki imata enak imenovalec, je tisti z večjim števcem očitno večji. Kadar sta imenovalca različna, pa moramo oba ulomka razširiti v obliko z enakim imenovalcem; v najslabšem primeru je to produkt obeh izvornih imenovalcev. Potem tudi zanju postane razvidno, kateri je večji oziroma manjši.

4.3 Računanje z ulomki

Seštevanje in odštevanje

Združevanje kosov kruha iz dveh košar nas navaja na naslednjo definicijo seštevanja ulomkov: dva ulomka z istim imenovalcem se seštejeta tako, da se seštejeta oba števca, imenovalec pa pridrži. Kadar imata ulomka različne imenovalce, ju je potrebno najprej pretvoriti na skupni imenovalec. Podobno vodi odvzemanje kosov kruha iz košare do definicije za odštevanje ulomkov. Tako velja:

$$\frac{k}{m} \pm \frac{l}{m} = \frac{k \pm l}{m} \qquad (4.2)$$
$$\frac{k}{m} \pm \frac{l}{n} = \frac{kn \pm lm}{mn} \, .$$

Množenje

Združevanje k košar, od katerih je v vsaki n/m hlebca, vodi do skupka

$$k \cdot \frac{n}{m} = \frac{k \cdot n}{m} \, ; \qquad (4.3)$$

s tem smo definirali množenje ulomka z naravnim številom.

Razdelitev n/m hlebca na l delov izvedemo tako, da razdelimo vsak kos posebej in dobimo $(n/m) : l = (n : l)/m$. Ker n v splošnem ni deljiv z l brez ostanka, razširimo zapisani ulomek s faktorjem l v obliko $(n{:}l)/m = n/(ml)$. S tem smo definirali deljenje ulomka z naravnim številom:

$$\frac{n}{m} : l = \frac{n}{ml} \, . \qquad (4.4)$$

Ker ulomek k/l pomeni hkrati množenje enote s k in njeno deljenje z l, je ustrezno definirano tudi množenje ulomkov:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{k}{l} = \frac{nk}{ml} \, . \qquad (4.5)$$

Deljenje

Definirati hočemo še deljenje ulomkov n/m in k/l. Oba ulomka najprej razširimo na skupni imenovalec: nl/ml in mk/ml. Ker je imenovalec pri obeh enak, je očitno, da mora biti kvocient ulomkov kar enak kvocientu števcev: nl/mk. V tem kvocientu prepoznamo produkt prvega ulomka z "obrnjenim" drugim ulomkom. Tako torej velja

$$\frac{n}{m} : \frac{k}{l} = \frac{n}{m} \cdot \frac{l}{k} \,. \tag{4.6}$$

S tem je deljenje opredeljeno kar preko množenja.

Računski zakoni

Ulomki so razširitev naravnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer, ko je imenovalec enak ena, na primer $3 = 3/1$. Računske operacije nad njimi so – zaradi privzetih definicij – podložne istim zakonom (2.1) kot pri naravnih številih: vsota in produkt ulomkov sta komutativna in aditivna, produkt pa je še distributiven glede na vsoto. Poljubno ulomno število bomo odslej, kadar bo to potrebno, označevali s črkami p, q ali r.

4.4 Decimalna števila

Desetiški ulomki

Med ulomki so nekaj posebnega tisti, ki imajo za imenovalec 10, 100, 1000 in tako naprej. Imenujemo jih *desetiške ulomke*. Desetiški ulomki kar kličejo po tem, da jih zapišemo na podoben način, kakor naravna števila. Slednja zapisujemo z enicami E, deseticami D, stoticami S, tisočicami T itd; zakaj torej ne bi prvih zapisovali z desetinami d, stotinami s, tisočinami t itd? Drugače rečeno: naravna števila v desetiškem zapisu $TSDE$ razširimo z dodanim ulomnim delom v obliko $TSDE{,}dst$. Tako na primer zapišemo $3/10 = 0{,}3$, $5/100 = 0{,}05$ in $35/100 = 3/10 + 5/100 = 0{,}35$. Zapis opremimo z vejico, da ločimo celi del od ulomnega. To je *decimalni zapis* ulomkov in števila z decimalno vejico so *decimalna števila*. Številkam, ki sledijo decimalni vejici, rečemo *decimalke*.

Nedesetiški ulomki

Kaj pa nedesetiški ulomki? Tak ulomek poskušamo spremeniti v desetiškega z razširjanjem. Ker so vse desetiške enote sestavljene zgolj iz faktorjev 2 in 5 ($10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$), je razširjanje mogoče le, če je tudi imenovalec sestavljen samo iz faktorjev 2 in 5. Tako, na primer, velja $1/2 = 5/10 = 0{,}5$ in $3/25 = 12/100 = 0{,}12$. V ostalih primerih se je treba zadovoljiti s približno pretvorbo na željeno število decimalk. Zgled, na dve decimalki, je: $2/7 = (2/100) \cdot (100/7) \approx (2/100) \cdot 14 = 0{,}28$. Zadnja decimalka je negotova za $\pm\, 0{,}01$.

4.5 Računanje z decimalnimi števili

Ker so decimalna števila zapisana v mestnem desetiškem sistemu, računamo z njimi prav tako kot z naravnimi števili, le na decimalno vejico moramo paziti.

Seštevanje in odštevanje

Pri seštevanju poravnamo obe števili glede na decimalno vejico in seštevamo, kot da vejic ne bi bilo. V rezultatu potem postavimo vejico pod obe obstoječi. Podobno ravnamo pri odštevanju.

Množenje Pred množenjem dveh števil (v mislih) premaknemo decimalno vejico v prvem faktorju za toliko mest v desno, da ta postane naravno število, in prav tako naredimo v drugem faktorju. Tako smo nakazani produkt množili z dvema desetiškima enotama. Nato oba faktorja zmnožimo, ne meneč se za "izginuli" decimalni vejici. Izračunani produkt, ki je naravno število, moramo sedaj le še deliti z obema desetiškima enotama, da dobi pravo vrednost. To naredimo tako, da vanj postavimo decimalno vejico za toliko mest v levo, kolikor decimalk imata oba faktorja skupaj.

Deljenje Delimo tako, da najprej v delitelju premaknemo decimalno vejico za toliko mest v desno, da postane naravno število, in za prav toliko premaknemo tudi vejico v deljencu. S tem smo obe števili pomnožili z isto desetiško enoto in vrednosti količnika nismo spremenili. Nato števili delimo in ko pridemo do koraka, da moramo k tekočemu ostanku pripisati desetine, to v nastajajočem količniku obeležimo z vejico. Deljenje nadaljujemo, dokler ostanek ne postane nič oziroma ko dosežemo željeno število decimalk.

Računski zakoni Decimalna števila niso nič drugega kot (pravi ali nepravi) desetiški ulomki, zapisani v mestnem zapisu. Zato za računske operacije nad njimi – seštevanje, odštevanje, množenje in deljenje – veljajo isti zakoni kot za operacije nad kakršnimikoli ulomki, torej navsezadnje tisti zakoni (2.1), ki veljajo za operacije nad naravnimi števili. Decimalna števila so razširitev naravnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer z "neskončno" ničlami za decimalno vejico, na primer $3 = 3{,}0\ldots$ Tudi poljubno decimalno število bomo odslej, kadar bo to potrebno, označevali s črkami p, q ali r. □

5 Potence in koreni

Desetiške potence – Nenatančna števila – Potence – Koreni – Obrestni račun – Obrestno obrestni račun

5.1 Desetiške potence

Desetiške potence

Ko države rastejo, imajo njihovi uradniki opravka s čedalje večjimi števili. Pri tem se pojavi naslednja težava. Desetiške enote 10, 100, 1000 in naprej je čedalje težje pisati in brati, čim več ničel vsebujejo. Zato jih, kot domiselni uradniki, zapišemo na kratko v obliki 10, 10^2, 10^3 in tako dalje. Izraz 10^n pove, da je to desetiška enota, ki vsebuje n ničel. Hkrati je tudi okrajšava za produkt n enakih faktorjev 10. Število 10^n poimenujemo *desetiško potenco* in število n njen *eksponent*. Kot posebna primera zapišemo še $10^1 = 10$ in $10^0 = 1$.

Eksponentni zapis števil

Z desetiškimi potencami lahko na kratko in bolj pregledno zapišemo tudi druga velika števila. Tako, na primer, zapišemo število 1 600 000 kot $1{,}6 \cdot 10^6$. Podobno velja za majhna števila, recimo $0{,}0016 = 1{,}6/10^3$. Obakrat smo število zapisali kot produkt ali kvocient decimalnega števila in ustrezno velike desetiške potence. Rekli bomo, da je to *eksponentni zapis* števila. Najbolj pregledno je izbrati tak zapis, da znaša prvi faktor med ena in deset, eksponent pa je temu prilagojen. Dobro je tudi tako, da je eksponent omejen na mnogokratnik števila 3 ter prvi faktor ustrezno prilagojen.

Eksponentni zapis števil precej olajša računanje z njimi. Seštevamo tako, da vsa števila zapišemo z istimi desetiškimi potencami, nakar to potenco izpostavimo in seštejemo preostanek. Podobno ravnamo pri odštevanju. Pri množenju pa preprosto seštejemo eksponente in pri deljenju jih odštejemo oziroma okrajšamo: $10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5$ in $10^3/10^2 = 10^{3-2} = 10$.

5.2 Nenatančna števila

Napake pri štetju

Število ljudi v veliki državi gre v milijone. Kot državni pisarji jih moramo občasno prešteti. Pri tem ne gre brez napak: ene ljudi spregledamo, drugi se poskrijejo, tretji spet vmes umrejo, se rodijo, priselijo ali odselijo, delne vsote iz posamičnih pokrajin se narobe seštejejo in še marsikaj drugega se lahko zgodi. Število, do katerega po mukotrpnem delu pridemo, torej nikakor ni natančno. Pri štetju več milijonov ljudi so dobljene enice, desetice, stotice in verjetno celo tisočice nezanesljive. Kar je višjih enot, pa pričakujemo, da so zanesljive.

Značilne števke

Postavimo si odlično pravilo, da bomo pri rezultatu štetja ljudi (ali česarkoli drugega) zapisali le *zanesljiva mesta*. Tako zapišemo, na primer, 3 602 ooo: na nezanesljiva mesta smo postavili majhne ničle. Še boljši je eksponentni zapis: $3{,}602 \cdot 10^6$. Prvi faktor vsebuje zgolj zanesljiva mesta; ta so štiri. Več ko je zanesljivih mest, bolj natančno je število poznano.

Pri določanju, koliko zanesljivih mest vsebuje zapisano število, se ravnamo po naslednjih pravilih. — Vse neničelne številke so značilne. — Ničle med dvema neničelnima številkama so značilne. — Vodeče ničle niso značilne. — Repne ničle v naravnem številu so značilne, če so pisane z veliko ničlo, in neznačilne, če so pisane z majhno ničlo. — Repne ničle v decimalnem številu so značilne: 3,1 ni isto kot 3,10; prvo število je natančno zgolj na desetine, drugo pa na stotine. — Naravno število s samimi značilnimi številkami ustreza decimalnemu številu z neskončnim repom decimalnih ničel: 12 je isto kot 12,0…

Zaokroževanje števil

Kadar pri zelo natančnem številu – takšnem, ki ima veliko značilnih mest – dvomimo o zanesljivosti repnih številk, ali kadar nas ne zanimajo, jih preprosto odrežemo. Če je prva odrezana številka manjša od pet, pustimo zadnjo neodrezano številko nespremenjeno, sicer pa jo povečamo za ena. Rečemo, da smo število *zaokrožili*. Na ta način pri rezanju repa pridelamo najmanjšo napako.

Okrajšano računanje

Pri računanju z nenatančnimi števili v eksponentnem zapisu moramo paziti, da v rezultatu ne pridelamo večje natančnosti, kot jo dovoljujejo izvorna števila. Tako ima vsota le toliko značilnih decimalk, kot jih ima sumand z najmanjšim številom decimalk. Vsoto moramo zato primerno okrajšati. Še bolje pa je, da že pred začetkom seštevanja zaokrožimo ustrezni sumand. Za razliko velja isto. Produkt ima toliko značilnih mest, kolikor jih ima faktor z najmanjšim številom značilnih mest. Tudi v tem primeru moramo produkt ustrezno okrajšati ali pa že pred množenjem ustrezno okrajšamo preveč natančni faktor. Za kvocient velja isto. Pri vseh krajšanjih pred dejanskim računanjem je najbolje, da krajšamo na eno mesto manj, kot je potrebno, in šele rezultat dokončno in pravilno zaokrožimo.

5.3 Potence

Naravna potenca

Kar velja za potence števila 10, posplošimo za poljubno število p: produkt n enakih števil p na kratko zapišemo kot

$$pp\ldots p = p^n \tag{5.1}$$

in poimenujemo n-ta *potenca* števila p. S tem je definirano potenciranje števila. Rečemo, da je p *osnova (koren)* potence, n pa njen *eksponent (logaritem)*. Dober zgled je rezanje hlebca: koliko kosov nastane, ko ga prerežemo na pol, nato polovici spet na pol in tako dalje, skupaj štirikrat? Toliko: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$.

Računska pravila

Iz definicije potence takoj sledijo naslednji izreki za računanje z njimi:

$$p^m p^n = p^{m+n} \tag{5.2}$$
$$\frac{p^m}{p^n} = p^{m-n}$$
$$(pq)^n = p^n q^n$$
$$(\frac{p}{q})^n = \frac{p^n}{q^n}$$
$$(p^m)^n = p^{mn}.$$

Seveda veljata še posebna primera $p^1 = p$ in $p^0 = 1$. Odštevanje eksponentov je smiselno le, če je števec večji od imenovalca.

5.4 Koreni

Obrat potence

Potenciranje števila R na eksponent n je računska operacija, ki iz števila R naredi novo število, namreč $R^n = N$. Rečemo, da številu R "pripada" število N, ali da se R "preslika" v N: $R \rightarrow N$. Z enako pravico lahko tudi rečemo, da številu N pripada R, oziroma da se N preslika v R: $R \leftarrow N$. Vendar obstaja pomembna razlika med obema preslikavama. Če poznamo R, lahko N takoj izračunamo – tako, da ga pač n-krat množimo samega s sabo. Če poznamo N, pa pripadajočega R ne znamo neposredno izračunati. Lahko pa ga seveda poimenujemo: rekli mu bomo *koren* in zapisali ${}^n\sqrt{N} = R$. Velja torej:

$$R^n = N \Longleftrightarrow R = {}^n\sqrt{N}. \tag{5.3}$$

Zapis ${}^n\sqrt{N}$ je hkrati oznaka števila, ki potencirano da N: $({}^n\sqrt{N})^n = N$, je pa tudi oznaka posebne "operacije" – *korenjenja* – nad številom N.

Izračun korena

Poimenovanje korena kot ${}^n\sqrt{N}$ seveda še ni noben dokaz, da takšno število tudi obstaja, in še manj navodilo, kako ga najdemo. Vemo pa tole: čim večje je število, tem večja je njegova potenca, zato velja tudi: čim večje je število, tem večji je njegov koren. To izkoristimo za organizirano *ugibanje* iskanega korena. Izberemo primeren *približek* in ga potenciramo. Če dobimo preveč, izberemo ustrezno manjši približek, sicer večjega. Tako nadaljujemo, dokler ne pridelamo zadovoljive rešitve. Na ta način izračunamo, na primer, ${}^2\sqrt{2} = 1{,}41$ in ${}^2\sqrt{3} = 1{,}73$. Namesto znaka ${}^2\sqrt{}$ bomo odslej pisali kar $\sqrt{}$.

Za drugi koren iz N iznajdemo tudi naslednje dobro organizirano ugibanje. Izberemo začetni približek R_0 tako, da je $R_0{}^2$ blizu N. Naslednji boljši približek je $R_1 = (R_0 + N/R_0)/2$. Postopek ponavljamo in se hitro bližamo pravemu R.

Računska pravila

Koreni so v tesni zvezi s potencami. Pravzaprav je korenjenje obratna operacija k potenciranju. Od tod izvlečemo več pravil za računanje:

$$\begin{aligned}
(\sqrt[n]{p})^n &= \sqrt[n]{(p^n)} = p \\
\sqrt[n]{p^m} &= \sqrt[kn]{p^{km}} \\
\sqrt[n]{(pq)} &= \sqrt[n]{p}\,\sqrt[n]{q} \\
\sqrt[n]{\frac{p}{q}} &= \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}} \\
\sqrt[n]{\sqrt[m]{p}} &= \sqrt[nm]{p}\,.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Z uporabo teh pravil si dostikrat olajšamo računanje. Podkorensko število, na primer, zapišemo kot produkt faktorjev in korenimo vsakega posebej: $\sqrt{6} = \sqrt{(2 \cdot 3)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

5.5 Obrestni račun

Obrestna enačba

Razmah trgovine vodi do kovanega denarja in nekateri trgovci močno obogatijo. Drugi, ki nimajo denarja, a ga potrebujejo, si ga izposodijo pri bogataših. Pri tem obljubijo, da bodo izposojeni denar – *glavnico* G – čez nekaj časa vrnili, hkrati pa dodali še nekaj dodatnega denarja – *obresti* R – kot plačilo za uslugo. Ponavadi znašajo obresti določen delež glavnice: $R = npG$, pri čemer je n število let od posojila do vrnitve in p letna *obrestna mera*. Za več let kot si izposojamo, več denarja K bomo morali vrniti: $K = G + R$, torej $K = G + npG$, to je

$$K = G(1 + np)\,. \tag{5.5}$$

Zapisana *obrestna enačba* pove, kako izračunati *neznano količino* (*neznanko*) K, če poznamo *znane količine* (*parametre*) G, n in p. Tipična obrestna mera znaša $p = 0{,}05$. Če si izposodimo $G = 100$ denarjev za $n = 5$ let, moramo tedaj vrniti $K = 100(1 + 5 \cdot 0{,}05)$ denarjev, torej $K = 125$ denarjev. Očitno se posojilodajalcu izplača dajati posojila in pri tem bogateti brez dela. Tako se v družbi pojavijo poklicni posojilodajalci, bankirji.

Ugibanje neznanke

Kaj pa, če se – kot bankirji – vprašamo: kakšno obrestno mero p moramo zaračunati, če hočemo v 5 letih za posojilo 100 denarjev dobiti vrnjenih 150 denarjev? Za ta primer se obrestna enačba zapiše v obliki $150 = 100(1 + 5p)$ z neznanko p. Neznanka sedaj ne stoji sama na eni strani enačbe, ampak je zlepljena v nekakšen številski grozd. Naša naloga je, da določimo, za katero številsko vrednost neznanke je enačba *izpolnjena*, to je, da je njena leva stran enaka desni.

Enačbo lahko rešimo s poskušanjem: "v škatlico" p vstavljamo razna števila in pogledamo, ali so prava. Ugotovimo, da je takšno število 0,10. Tako smo našli *rešitev enačbe*; enačbo smo *rešili*.

Izračun neznanke

Morda lahko enačbo rešimo, ne da bi ugibali? To bi bilo vsekakor krasno. Postopamo takole. Levo in desno stran delimo s 100. S tem se enačba ne spremeni, vendar smo se na desni strani znebili enega faktorja in neznanko delno ogolili. Potem od leve in desne strani odštejemo 1; spet se enačba ne spremeni in neznanka se še bolj ogoli. Končno obe strani delimo s 5, ju zamenjamo med seboj (levo prestavimo na desno in desno na levo) ter dobimo rešitev: $p = (150/100 - 1)/5 = 0{,}10$.

Pravzaprav ni treba, da računamo s konkretnimi števili, ampak lahko rokujemo kar s splošnimi. Tedaj dobimo rešitev v obliki $p = (K/G - 1)/n$. Šele sedaj vstavimo konkretne vrednosti parametrov in dobimo konkreten rezultat. Tako vidimo, da z reševanjem splošne enačbe pravzaprav rešujemo neskončno množico konkretnih enačb – za vsak številski nabor parametrov po eno. Seveda lahko vsako količino v obrestni enačbi – K, G, n ali p – po potrebi obravnavamo kot neznanko in jo izrazimo s preostalimi. V vseh primerih nam to uspe. Izumili smo "algebrsko" reševanje enačb.

5.6 Obrestno obrestni račun

Obrestno obrestna enačba

Bankirji, ki dajo posojilo G, terjajo vrnitev kapitala K po znani obrestni enačbi (5.5). S tem pa niso zadovoljni. Pohlepno iščejo način, kako povečati dobiček. Razmišljajo takole. Ko sem A-ju posodil glavnico G po obrestni meri p za n let, sem se po prvem letu pravzaprav odrekel razpolaganju z $G(1 + p)$ denarja, kolikor bi ga dobil, če bi dal le enoletno posojilo. Ta denar bi lahko posodil B-ju in v naslednjem letu zaslužil $G(1 + p)(1 + p)$ denarja. Pravično je torej, da A-ju posojam tako, da nisem na opisani izgubi, torej pod pogojem, da po n letih vrne

$$K = G(1 + p)^n \,. \tag{5.6}$$

To je *obrestno obrestna enačba*. Koliko je poštena, ne bomo razglabljali. Dejstvo je, da predpisuje, kako izračunati K iz znanih G, n in p. Zmeraj naračuna več kot navadna obrestna enačba. Razlika je tem večja, čim bolj dolgoročno je posojilo. Marsikaterega dolžnika je spravila na kant ali celo na drugi svet.

Izračun neznank

Obrestno obrestna enačba povezuje štiri količine. Katerakoli izmed njih je lahko neznanka – odvisno pač od tega, kaj nas zanima. Pričakujemo, da je vsako mogoče eksplicitno izraziti s preostalimi tremi. Neznanka K je tako že izražena. Neznanko G izračunamo z deljenjem obeh strani enačbe: $G = K/(1 + p)^n$. Neznanko p izluščimo z obojestranskim deljenjem, korenjenjem in odštevanjem: $p = {}^n\sqrt{(K/G)} - 1$. Neznanke n pa se zaenkrat ne znamo lotiti.

Vrste enačb

Glede na to, katero "neznanko x" – K, G, p ali n – preučujemo, zavzame obrestno obrestna enačba eno izmed naslednjih treh oblik: $Ax = B$, $Ax^n = B$ in $A^x = B$. Prvo obliko imenujemo *linearna enačba*; drugi obliki rečemo *potenčna enačba*, ker neznanka nastopa kot osnova potence; in tretjo obliko, v kateri je neznanka eksponent potence, krstimo za *eksponentno enačbo*. Kako kakšno izmed teh enačb rešimo, že vemo: na obe strani vplivamo enako in sicer tako, da na eni strani pridelamo golo neznanko x. Za linearno enačbo dobimo $x = B/A$; za potenčno $x = {}^n\sqrt{(B/A)}$; za eksponentno enačbo pa bomo morali ustrezne računske operacije še odkriti oziroma izumiti. □

6 Čas in kot

Nebesni čas – Kotomerni krog – Deklinacija Sonca – Sončna ura – Nihalna ura – Časovna anomalija Sonca – Zvezdno nebo – Sonce in zvezde – Zemljepisna lega – Časovni pasovi

6.1 Nebesni čas

Merjenje časa

Sonce vzhaja, kulminira in zahaja; Mesec raste in upada; zasnežene zime nastopajo in minevajo. Med začetkom in koncem kakšnega dogajanja, recimo potovanja trgovske karavane preko puščave ali ladje preko morja, se zvrsti določeno število "sonc", "lun" ali "zim". Ko jih preštejemo, s tem trajanje/čas potovanja *izmerimo*. *Merilna priprava* je nebo, *merske enote* pa *dan* (d), *mesec* (mes) in *leto* (y). Zapis 5 d, na primer, bomo razumeli kot produkt merskega števila 5 in merske enote d, torej kot $5 \cdot \mathrm{d}$.

Časovna lega

Vsako dogajanje je omejeno z dvema dogodkoma: z njegovim začetkom in s koncem. Tudi med poljubnima dvema nepovezanima dogodkoma, recimo med rojstvom preroka Ješue (dogodek A) in smrtjo preroka Mohameda (dogodek B), potekajo razna dogajanja, to je kakršnokoli zaporedje sprememb v nas samih in v okolici. Rekli bomo, da čas teče. S tem hočemo na kratko povedati zgolj to, da se nam svet kaže kot zaporedje dogodkov. Ko izmerimo trajanje med dvema dogodkoma, s tem določimo, *kdaj* se je dogodek B zgodil z ozirom na dogodek A, to je, določimo njegovo *časovno lego*. Tako rečemo, da se je dogodek B zgodil 632 let po dogodku A, med obema dogodkoma pa je preteklo 632 let časa.

Razmerja enot

V mesecu je mnogo dni in v letu je mnogo mesecev in še več dni. Merjeno z dnevi so vsi meseci in vsa leta enako veliki: naštejemo 30 ± 1 dni v posamičnem mesecu in 365 ± 1 dni v posamičnem letu. Mesec merimo med dvema polnima menama, leto pa med dvema pomladnima enakonočjema. Nenatančnost pri merjenju izvira od tega, ker je težko določiti, na kateri dan je mena oziroma enakonočje. Lahko pa si pomagamo tako, da štejemo preko mnogo mesecev in let: v 100 mesecih naštejemo 2953 ± 1 dni in v 100 letih 36524 ± 1 dni. Tako vidimo, da je pravzaprav v mesecu 29,53 dni in v letu 365,24 dni, oboje z natančnostjo na dve decimalki.

Civilno leto

Za civilne potrebe proglasimo 365 dni za eno *civilno leto*, ki se začne, na primer, ob pomladnem enakonočju. Po nekaj civilnih letih pa seveda opazimo, da se prvi dan takega leta odmakne nazaj od pomladnega enakonočja za enega ali celo za več dni. Da ohranjamo začetek vsakega civilnega leta na dan pomladnega enakonočja ali vsaj v neposredni bližini, moramo zato civilnemu letu občasno dodati kakšen dan. V 100 letih moramo tako dodati 24 dni. Najbolje je, da vsakemu četrtemu civilnemu letu dodamo

1 dan; tako postane *prestopno* civilno leto s 366 dnevi. Vsakemu stotemu letu pa tega dne ne dodamo.

6.2 Kotomerni krog

Merjenje kota

Ob kulminaciji stoji Sonce včasih nižje in drugič višje nad južnim obzorjem. Dve namišljeni premici iz naših oči – do obzorja in do Sonca nad njim – oblikujeta navpični kot, ki je bolj ali manj razprt. Po tem kotu lahko zaporedno polagamo palce ali dlani iztegnjene roke in jih štejemo. Tako kot izmerimo. Podobno merimo tudi vodoravne kote po obzorju, recimo med jugom in vzhajališčem ali zahajališčem Sonca.

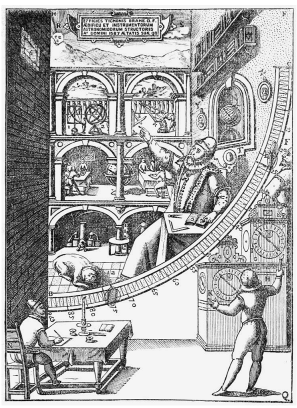
Astrolab

Za natančno merjenje kotov izdelamo *kotomer*: poljubno velik krog z vrtljivo namerilno palico skozi središče. Če ga lahko obesimo, mu rečemo *astrolab*. Njegov obod razdelimo na 360 *kotnih stopinj* (°). Ena stopinja, to je približno polovica širine palca na iztegnjeni roki. Z bistrim očesom razločujemo še kot 1/60 stopinje; poimenujemo ga *kotno minuto* (′).

Slika 6.1 Astrolab – viseči krog z namerilno palico za merjenje višine nebesnih teles nad obzorjem. Prikazana je replika instrumenta, ki je služil španskim jadrnicam pri prvih čezoceanskih plovbah. (National Maritime Museum, Greenwich)

Kvadrant

Namesto celotnega kroga je včasih bolj primerno uporabiti le njegovo četrtino. To je *kvadrant*.



Slika 6.2 Kvadrant – četrtina kotomernega kroga. Prikazan je velik zidni kvadrant, ki je stalno usmerjen proti jugu. S takim instrumentom se da meriti kotne višine Sonca, zvezd in planetov na ± 0,1° natančno. (Brache, 1598)

Za hitro in približno merjenje pa še naprej uporabljamo kar iztegnjeno roko: palec pokriva kot 2°, pest 8° in pedenj med palcem in mezincem 20°.

6.3 Deklinacija Sonca

Višina kulminacij

Zidni kvadrant, postavljen v smeri sever-jug, postane osnovni merilnik v nebesnih opazovalnicah po svetu. Zamislimo si, da smo v opazovalnici v Ljubljani! Tam izmerimo, da *kulminacijske višine* Sonca H nihajo med 20,4° in 67,4°. Drugače rečeno: kulminacije nihajo okrog srednje vrednosti H_0, ki znaša (20,4° + 67,4°)/2, torej 43,9°, za največ 23,5° navzgor (poleti) in navzdol (pozimi).

Kot H_0 poimenujemo *srednjo višino* Sonca. Odklon Sonca od srednje višine – navzgor ali navzdol – poimenujemo *deklinacijo* δ Sonca. Z njeno pomočjo natančneje določimo enakonočja in obrate. Obrat je na tisti dan, ko je opoldanska deklinacija največja ali najmanjša. Enakonočje pa je na tisti dan, ko je opoldanska deklinacija najbližja nič. V dnevih okrog enakonočja se spreminja deklinacija Sonca za 0,4° na dan. Na dan, ki ga proglasimo za enakonočje, je torej opoldanska deklinacija največ ± 0,2° odmaknjena od srednje višine.

Tabela deklinacij

Za vsak poldan v letu, začenši s pomladnim enakonočjem kot prvim dnevom, deklinacijo izmerimo in tabeliramo. To storimo v štirih zaporednih letih. V teh letnih tabelah se deklinacije na vsak izbrani dan med seboj rahlo razlikujejo. Smiselno je izračunati povprečne deklinacije, to je njihovo vsoto, deljeno s štiri.

Tabela 6.1 Povprečna deklinacija Sonca (δ) za izbrane dneve (N) v letu. Dan 0 je pomladno enakonočje. Povprečenje je izvedeno preko štirih zaporednih let. Znak N pomeni odmik navzgor (proti severu) od srednje vrednosti in znak S odmik navzdol (proti jugu) od nje.

N	δ [°]	N	δ [°]	N	δ [°]	N	δ [°]
0	0,0	113	22,1 N	187	0,2 S	295	22,1 S
1	0,4 N	125	20,0 N	192	2,2 S	306	20,1 S
6	2,4 N	133	18,2 N	197	4,1 S	314	18,2 S
11	4,3 N	141	16,0 N	202	6,0 S	321	16,2 S
16	6,2 N	147	14,3 N	208	8,3 S	327	14,4 S
21	8,1 N	153	12,3 N	213	10,1 S	333	12,3 S
27	10,3 N	159	10,3 N	219	12,2 S	339	10,1 S
32	12,0 N	165	8,2 N	225	14,2 S	345	8,1 S
39	14,3 N	170	6,3 N	231	16,1 S	350	6,3 S
45	16,1 N	176	4,0 N	238	18,1 S	355	4,3 S
53	18,2 N	181	2,1 N	246	20,0 S	360	2,4 S
61	20,1 N	185	0,6 N	257	22,0 S	364	0,8 S
73	22,1 N	186	0,2 N	276	23,4 S	365	0,4 S
92	23,4 N			277	23,4 S		
93	23,4 N						

Povprečne deklinacije so dober pokazatelj dejanskih deklinacij. Slednje se od povprečnih razlikujejo največ za $\pm 0{,}2°$ (okrog enakonočij) oziroma za $\pm 0{,}0°$ okrog obratov. Tiste dneve, ki niso zajeti v tabeli, določimo z *interpolacijo*. Primer: kolikšna je deklinacija na dan 221? Na dan 219 je 12,2 S; na dan 225 je 14,2 S. V 6 dneh se torej zniža za 2,0; v 2 dneh za $(2/6) \cdot 2{,}0 = 0{,}7$. Zato znaša $12{,}2\,\mathrm{S} + 0{,}7 = 12{,}9\,\mathrm{S}$.

Višina kulminacije Sonca H je torej odvisna od dneva N v letu. Simbolično zapišemo

$$H = H_0 \pm \delta(N)\,. \tag{6.1}$$

Oznaka $\delta(N)$ pomeni deklinacijo na dan N; njeno številsko vrednost razberemo iz deklinacijske tabele. Tabela se počasi spreminja: v stoletju se spremeni manj kot za desetinko stopinje.

6.4 Sončna ura

Nebesni poldnevnik

Skozi jug, nadglavišče (zenit) in sever poteka nebesni polkrog, ki ga poimenujemo *nebesni poldnevnik* ali nebesni meridian. Sonce ga vsak dan prečka in pri tem kulminira. Pravzaprav je poldnevnik s temi kulminacijami šele določen. Kulminacijska višina H je, kot vemo, vsak dan drugačna. Merimo jo od juga navzgor. Lahko jo pa merimo tudi od zenita navzdol; temu kotu rečemo *zenitna razdalja* Z. Očitno velja

$$H + Z = 90°\,. \tag{6.2}$$

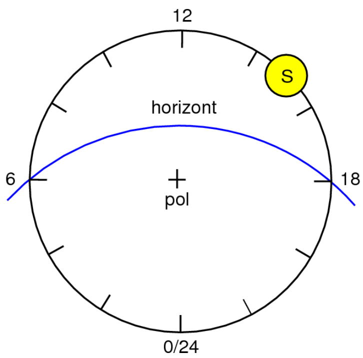
Nebesni ekvator

V enem dnevu zariše Sonce po nebu in pod obzorjem poln krog. Pozimi je krog manjši in poleti je večji. Zdi se, da imajo vsi krogi isto središče, pol, ki leži pod južnim obzorjem. To je južni pol. Nasproti njemu leži na nebu severni pol. Oba pola sta prav tista, okrog katerih krožijo tudi zvezde.

Posebej odlikovan krog je tisti, ki ima vrh pri srednji višini kulminacij Sonca: ta krog namreč poteka tudi skozi vzhodno in zahodno točko na obzorju, tako da ga je natanko polovica nad obzorjem in polovica pod njim. Rečemo mu *nebesni ekvator*. Približno po njem se ob enakonočjih giblje Sonce. Južni pol leži 90° pod vrhom ekvatorja, torej $90° - H_0$ pod obzorjem. Prav toliko nad severnim obzorjem stoji severni pol. Pri nas, v Ljubljani, znaša to 46,1°. Oba kroga – poldnevnik in ekvator – sta togo vezana na obzorje in delita nebo na vzhodno in zahodno ter na severno in južno polovico.

Sonce kot ura

Kot, ki ga Sonce prepotuje okrog južnega pola po kateremkoli krogu, recimo kar po ekvatorju, je merilo za trajanja, ki so krajša od enega dneva. Začenši z najnižjo točko razdelimo cel krog v mislih na 24 delov. Rečemo, da so to *ure* (h) v dnevu.



Slika 6.3 Sončni krog – zamišljeni nebesni krog, po katerem potuje Sonce. Krog ima središče v južnem polu in je razdeljen na 24 delov, ur. Sonce (S) s svojo lego kaže, "koliko je ura". Prikazan je krog ob enakonočju, ko Sonce vzhaja ob 6 h in zahaja ob 18 h.

Senca kot ura

Ker krogov ne moremo zares risati po nebu in ker Sonca ne moremo neposredno opazovati, ker je presvetlo, izdelamo ustrezen model – *sončno uro*. To je palica, usmerjena v južni in severni pol, in pravokotno nanjo nataknjena krožna plošča. Palica meče senco na ploščo in kaže čas (ARISTARH). Poleti je senca na zgornji ploskvi in pozimi na spodnji. Pravzaprav je sončna ura pomanjšana slika okrogle Zemlje – njenega središčnega preseka in polarne osi. Zaradi večje priročnosti lahko krožno ploščo nadomestimo kar s polovico obroča.

Slika 6.4 Ekvatorska sončna ura. Gnomonska palica je usmerjena v severni in južni nebesni pol. Ko nanjo sije Sonce, meče senco na obroč. Tam so narisane in oštevilčene ure. (Hungarian Geographic Museum, Erd)

Urni kot Sonca Ω okrog južnega pola, merjen od zgornje točke naprej ali nazaj, izkoristimo za merjenje časa. Tako definiramo *lokalni sončni čas*

$$LT = 12\,\mathrm{h} \pm \frac{1\,\mathrm{h}}{15°} \cdot \Omega\,. \tag{6.3}$$

Kot seveda merimo na sončni uri. Ob kulminaciji Sonca je $\Omega = 0°$ in zato $LT = 12\,\mathrm{h}$. Ko $\Omega = 90°$ nazaj, pa $LT = 12\,\mathrm{h} - (1\,\mathrm{h}/15°)90° = 6\,\mathrm{h}$.

6.5 Nihalna ura

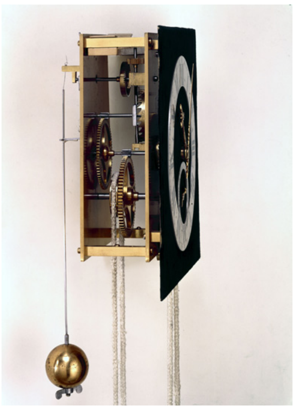
Dolžina dni

Pri merjenju časa smo potiho privzeli, da so vsi dnevi in vse ure enako veliki. Pa je res tako? Tega ne moremo ugotoviti, dokler nebesne ure ne bomo primerjali s kako drugo uro, to je s kakršnokoli pripravo, ki proizvaja zaporedne dogodke. Če se bo pokazala razlika, bomo eno izmed ur proglasili za bolj enakomerno od druge. Slabša bo tista, za katere neenakomernost bomo našli vzrok.

Težno nihalo

Priročen vir zaporednih dogodkov je na vrvico obešeno težko telo, recimo svinčena krogla. Ko jo odmaknemo iz navpične lege in izpustimo, začne nihati sem in tja. Boljša od vrvice je lahka in toga palica: to je *težno nihalo*. Odmiki nihala so enako veliki in nihanje ne zamre, če nihalo sproti vzbuja samo sebe preko primerne povratne vezi do padajoče uteži. Pri tem preko zobatih koles obrača še kazalni števec. To je *nihalna ura* (HUYGENS).

Kako dolg je nihajni čas ure, je odvisno od nastavitve uteži na nihalu: če jo premaknemo proti obesišču, se čas skrajša in obratno. Utež namestimo tako, da števec v enem dnevu – med dvema zaporednima kulminacijama Sonca, kakor ju pokaže sončna ura – odšteje natanko 24 ur, v vsaki uri 60 *minut* (min) in v vsaki minuti 60 *sekund* (s). Ena sekunda, to je približno en utrip človekovega srca.



Slika 6.5 Ura s težnim nihalom. Prikazana je replika prve uporabne nihalne ure, ki jo je skonstruiral C. Huygens. Natančna je bila na eno minuto v enem dnevu. Utež, ki uro poganja, je obešena na vrveh in ni vidna. (Science Museum, London)

Sučno nihalo

Namesto s težnim nihalom na padajočo utež merimo tudi s sučnim nihalom na navito polžasto vzmet (HUYGENS). Taki uri, če je natančna, rečemo *kronometer*. Dovolj majhen je, da ga lahko spravimo v žep. Primerjava sončne in nihalne ure pokaže, da so vsi dnevi v letu – merjeni z nihalno uro – enako dolgi z natančnostjo bolje kot na minuto.

Slika 6.6 Kronometer – ura s sučnim nihalom na polžasto vzmet. Prikazana je replika prvega uporabnega kronometra za morska potovanja, ki ga je izdelal J. Harrison. Natančen je bil na minuto v letu dni. (Royal Observatory, Greenwich)

Nihalna ura omogoči, da ponoči – ko je sončna ura neuporabna – določamo natančne čase kulminacij zvezd, planetov in Meseca, pa tudi mrke in druge nebesne dogodke. Ura tako stopi ob bok kotomeru, s katerim postaneta temeljni par nebesnih merilnikov.

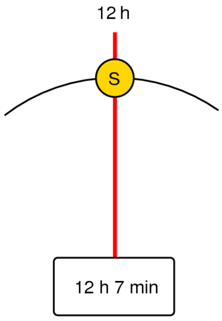
6.6 Časovna anomalija Sonca

Čas kulminacij

Kulminacijo Sonca težko določimo iz sence bolje kot na minuto natančno. Z dvema zaporednima kulminacijama definirane časovne enote – dan, minuta in sekunda – so zato določene z relativno natančnostjo $1:(24 \cdot 60)$, torej okrog $1:10^3$. Za naše potrebe bo to dovolj dobro.

Opoldne na dan pomladnega enakonočja nastavimo odličen kronometer na 12 h 0 min = 12;00 h. (Znak ; pomeni, da ulomni del ure ni zapisan decimalno – z desetinami, stotinami itd. – ampak s šestdesetinami.) Potem ga pustimo teči celo leto. S presenečenjem opazimo, da kulminacija Sonca včasih prehiteva in včasih zaostaja za kronometrovim poldnevom. Drugače rečeno: ko Sonce kulminira, kaže kronometer včasih manj in včasih več kot 12;00 h. Na dan naslednjega pomladnega enakonočja pa spet znaša točno 12;00 h.

Hočemo, da je vsota prehitevanj preko celega leta enaka vsoti kasnitev preko celega leta. To dosežemo tako, da na dan pomladnega enakonočja opoldne (po Soncu) naravnamo lego kronometrovih kazalcev ne na 12;00 h, pač pa na neko drugo vrednost. Pravšnja lega je 12 h 7 min = 12;07 h.



Slika 6.7 Kulminacija Sonca na dan pomladnega enakonočja. Rdeča črta je lokalni poldnevnik. Ob kulminaciji kaže sončna "ura" (po definiciji) čas 12 h, umerjeni kronometer pa čas 12 h 7 min.

Za tako uro rečemo, da kaže *lokalni kronometrski čas LMT* v našem kraju, torej v Ljubljani. Ura in Sonce torej ne "tečeta" enako. Uporaba različnih ur s težnimi in sučnimi nihali pokaže, da je krivo Sonce in ne ure. Sončevi dnevi torej med seboj le niso natančno enaki; njihove razlike, čeravno manjše od minute, se seštevajo in postanejo merljive. Razliko med *LMT* in *LT* poimenujemo *časovna anomalija* Sonca, τ.

Tabela anomalij

Časovno anomalijo izmerimo in tabeliramo za vsak dan v letu z začetkom ob pomladanskem enakonočju. To storimo za več zaporednih let in izmerke povprečimo. Posamične letne tabele se od povprečja razlikujejo manj kot ± 0,5 minute.

Tabela 6.2 Časovna anomalija Sonca (τ) za izbrane dneve (N) v letu. Dan 0 je pomladno enakonočje. Znak E pomeni, da Sonce zaostaja za uro (je vzhodno) in W, da prehiteva uro (je zahodno). Vmesne dneve določimo z interpolacijo.

N	τ [min]	N	τ [min]	N	τ [min]	N	τ [min]
0	7 E	94	2 E	171	2 W	279	0
4	6 E	104	4 E	177	4 W	280	0
11	4 E	118	6 E	182	6 W	284	2 E
18	2 E	127	6 E	188	8 W	288	4 E
25	0 W	137	6 E	194	10 W	292	6 E
26	0 W	149	4 E	200	12 W	297	8 E
36	2 W	157	2 E	208	14 W	303	10 E
56	4 W	164	0	220	16 W	309	12 E
74	2 W	165	0	227	16 W	321	14 E
84	0			235	16 W	327	14 E
85	0			246	14 W	334	14 E
86	0			252	12 W	347	12 E
				258	10 W	356	10 E
				262	8 W	363	8 E
				267	6 W		
				271	4 W		
				275	2 W		

Lokalni kronometrski časi kulminacij Sonca so torej odvisni od dneva N v letu. Simbolično zapišemo

$$LMT = LT \pm \tau(N)\,. \tag{6.4}$$

Oznaka $\tau(N)$ pomeni časovno anomalijo na dan N; njeno številsko vrednost razberemo iz tabele. Ob kulminaciji Sonca na dan 227 torej kaže sončna ura, da je lokalni sončni čas $LT = 12\,\mathrm{h}$, kronometer pa, da je lokalni kronometrski čas $LMT = 11\,\mathrm{h}\,44\,\mathrm{min}$. Sonce prehiteva. Ali obratno: ob "kulminaciji" kronometrske ure je $LMT = 12\,\mathrm{h}$, sončna ura pa kaže $LT = 12\,\mathrm{h}\,16\,\mathrm{min}$. Sonce prehiteva. Tabela se počasi spreminja: v stoletju se spremeni manj kot za minuto.

6.7 Zvezdno nebo

Kroženje zvezd

Ko Sonce zaide, se prikaže na nebu množica zvezd. Kot vemo, krožijo okrog nepremičnega severnega (južnega) pola, prav tistega, okrog katerega kroži Sonce, in pri tem ohranjajo medsebojno lego. Zvezde krožijo po nebu tudi podnevi, vendar jih zaradi Sončeve bleščave ne vidimo. Tiste, ki so blizu severnega pola, opišejo v enem dnevu nad obzorjem poln krog, od katerega je viden le nočni del. Rečemo jim *cirkumpolarne zvezde*. Zvezde na južnem delu neba pa opisujejo nad obzorjem le zgornji del kroga, preostanek pa je pod obzorjem. Te zvezde vzhajajo in zahajajo. Rečemo jim *zvezde vzhajalke*.

Pozimi, ko je noč dolga, kakšna cirkumpolarna zvezda prečka nebesni poldnevnik v temi dvakrat – nad in pod polom. S kvadrantom izmerimo obe višini nad obzorjem in njuna srednja vrednost poda višino pola. V Ljubljani je to 46,1°, kar je isto, kot pravijo meritve Sonca [6.4].

Deklinacija zvezd

Ko zvezda preide poldnevnik nekje med severnim in južnim polom, je za kot δ odmaknjena od nebesnega ekvatorja proti severu ali jugu. Rečemo, da je to njena deklinacija. Deklinacije zvezd se – v nasprotju s Soncem – ne spreminjajo. Vsaka zvezda ima lastno deklinacijo. Za zadnje desno kolo v Velikem vozu, Dubhe, na primer znaša 62° N. Deklinacije lahko zavzemajo vrednosti med 0 in 90° severno ali južno od ekvatorja.

Zvezde kot ura

Kulminacija zvezde se zgodi ob določenem kronometrskem času. Vsaka zvezda ima lastni čas kulminacije. Kronometrski čas med dvema zaporednima kulminacijama iste zvezde poimenujemo *zvezdni dan*, d^*. Ko isto zvezdo opazujemo več dni zapored, opazimo, da kulminira vsak dan okrog 4 minute prej. Njen zvezdni dan je torej za toliko krajši od kronometrskega dneva. To prehitevanje je – za vse zvezde – od dne do dne enako. Od enega enakonočja do drugega naraste za 24 ur, na dan torej $\mathrm{d} - \mathrm{d}^* = 24\,\mathrm{h}/365 = 4\,\mathrm{min}$.

Zvezdni dan (čas med dvema kulminacijama iste zvezde) razdelimo na 24 *zvezdnih ur* (h^*), vsako od njih na 60 *zvezdnih minut* (min^*) in vsako od njih na 60 *zvezdnih sekund* (s^*). Zvezdne časovne enote so za faktor $\mathrm{d}^*/\mathrm{d} = (1440 - 4)\,\mathrm{min} / 1440\,\mathrm{min} = 0{,}997$ "daljše" (torej so krajše) od kronometrskih. In kakor gibanje Sonca po nebu obravnavamo kot sončni časomer, tako lahko gibanje zvezdnega svoda obravnavamo kot zvezdni časomer.

6.8 Sonce in zvezde

Točka Gama

Na dan pomladnega enakonočja kulminira Sonce ob $12\,\mathrm{h} + \tau(0)$ po kronometru. Obenem s Soncem kulminirajo tudi nekatere zvezde, vendar jih ne vidimo. Zamislimo si nevidno zvezdo, imenovano Gama, ki je skrita za Soncem! Ta zvezda, skupaj s pravimi zvezdami, kroži okoli nebesnega pola in kulminira v presledkih enega zvezdnega dne. Na *N*-ti dan kulminira Gama ob kronometrskem času

$$LMT(\gamma) = 12\,\mathrm{h} + \tau(0) - N \cdot (\mathrm{d} - \mathrm{d}^*)\,. \tag{6.5}$$

Zapisani kulminacijski čas je natančen na ± 2 minuti – polovico od 4 minut, kolikor se pač preko ekvinokcijskega dne zakasnjujejo zvezde za Soncem. Na dan, ko hoče računani čas kulminacije pasti pod 0 h, mu dodamo 24 h. Za grobo orientacijo zadostuje dejstvo, da kulminira Gama vsak naslednji mesec dve uri prej. Ob poletnem obratu, na primer, kulminira že ob $12\,\mathrm{h} - 3 \cdot 2\,\mathrm{h} = 6\,\mathrm{h}$ zjutraj.

Rektascenzija zvezd

Ko Gama zapusti kulminacijo in potuje naprej, za njo kulminirajo zvezde druga za drugo. Naj zvezda A kulminira ob času

$$LMT\,(\mathrm{A}) = LMT\,(\gamma) + \alpha\,. \tag{6.6}$$

Potem rečemo, da ima zvezda *rektascenzijo* α. Tako definirano rektascenzijo lahko pustimo v kronometrskih urah ali jo izrazimo v zvezdnih urah. Običajno je slednje; pri tem moramo izmerjene ure ustrezno pretvoriti. V zvezdnih urah ima rektascenzija lepo zaokrožen interval vrednosti med 0 in 24.

Rektascenzijo zvezde določamo po definiciji. Na dan N vemo, kdaj po kronometru kulminira Gama. Izmeriti moramo le čas, ko kulminira zvezda. Seveda lahko določamo rektascenzije le tistih zvezd, ki kulminirajo ponoči. Ko poznamo rektascenzijo kake zvezde, lahko določimo rektascenzijo druge zvezde preprosto z merjenjem časa med obema kulminacijama. Kot primer navedimo, da znaša rektascenzija Dubhe $11\,\mathrm{h}^*\,3\,\mathrm{min}^*$ in torej na začetku pomladi kulminira okrog polnoči.

Rektascenzija zvezde se od leta do leta ne spreminja zaznavno. To pomeni, da je lega Game med zvezdami (kratkoročno) nespremenljiva. Deklinacija in rektascenzija zato skupaj tvorita par, ki enolično opisuje lego zvezde na nebu. Opazovanja preko mnogo let pa kažejo, da se Gama premika proti vzhodu za dobro stopinjo v sto letih.

Ko poznamo rektascenzijo kake zvezde A, lahko na N-ti dan ob njeni kulminaciji po enačbi (6.6) povemo, kakšen je čas. Z naborom primernih zvezd tako nadzorujemo in uravnavamo tek nihalnih ur.

Slika 6.8 Vrtljiva zvezdna karta. Kaže položaj zvezd ob vsaki uri na vsak dan v letu. Nebesni poldnevniki (lege z enako rektascenzijo) so narisani kot premice in nebesni vzporedniki (lege z enako deklinacijo) kot krogi. Črni zaslon z ovalnim oknom in z vrisanimi urami je vrtljiv preko zvezdnega ozadja z vrisanimi dnevi. (Celestial Products)

6.9 Zemljepisna lega

Potovanje z uro

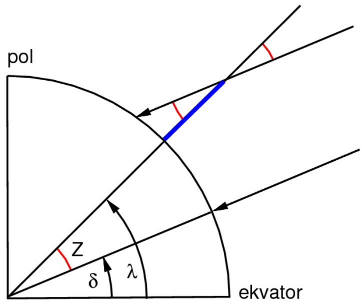
Ko se iz Ljubljane premaknemo proti jugu dovolj daleč v drug kraj, opazimo, da tam Sonce kulminira višje na nebu. Dalje ko potujemo proti jugu, večja je srednja višina kulminacij, nihanje deklinacij okrog nje pa ostaja enako. Podobno je pri potovanju proti vzhodu. Dalje ko potujemo, prej po naši prenosni uri kulminira Sonce, a nihanje anomalij okrog tega časa ostaja nespremenjeno. Vse to potrjuje, da je Zemlja res okrogla. V veljavi ostaja tudi slika, da okrog nje kroži Sonce na veliki oddaljenosti. Obkrožni časi pa niso vedno enaki, kar se kaže kot časovna anomalija. In zveznica Zemlja-Sonce je le ob enakonočjih pravokotna na os kroženja, drugače pa se nagiba proti severu ali jugu, kar se kaže kot deklinacija. Kaj bi bil vzrok takšnemu zapletenemu gibanju, pa slika ne pove.

Zemljepisna širina in dolžina

Z meritivami višin in časov kulminacij Sonca v različnih krajih lahko po Zemlji razpredemo mrežo poldnevnikov in vzporednikov. *Poldnevniki* so glavni krogi skozi oba pola; kraji na njih imajo enak čas kulminacije. *Vzporedniki* so krogi, ki oklepajo os vrtenja. Kraji na njih imajo enako višino kulminacije. Največji vzporednik, ki Zemljo deli na pol, poimenujemo *ekvator*. *Zemljepisno širino* λ opazovališča na severni polobli določimo preko srednje višine kulminacij H_0 kot

$$\lambda = 90° - H_0 \,. \tag{6.7}$$

Na ekvatorju je 0°, na severnem polu 90° in v Ljubljani 46,1°. Geografsko širino najhitreje določimo iz izmerjenega zenitnega kota kulminacije, ki mu prištejemo ali odštejemo deklinacijo za dotični dan. Na južni polobli ravnamo podobno.



Slika 6.9 Določanje zemljepisne širine iz kulminacijske višine Sonca. Čim bolj proti severu gremo, tem niže nad obzorjem kulminira sonce.

Zemljepisno dolžino φ krajev določamo glede na poljubno izbran poldnevnik. Dogovorimo se, da je to poldnevnik skozi opazovalnico v Greenwichu. Meritev dolžine temelji na razliki časov na lokalnem kronometru in na kronometru, prinešenem iz Greenwicha. Za vzhodne kraje velja

$$\varphi = \frac{LMT - GMT}{1\,\mathrm{h}} \cdot 15°\,\mathrm{E}\,. \tag{6.8}$$

Lokalni kronometer pravzaprav ni potreben; zadostuje že greenwiški. Vemo namreč tole. Opazovalec v Greenwichu na dan N izmeri kulminacijo Sonca ob $12\,\mathrm{h} \pm \tau(N)$ po svoji uri. Opazovalec v vzhodnem kraju X pa na isti dan, na "kopiji" greenwiške ure, izmeri kulminacijo Sonca prej: ob $12\,\mathrm{h} \pm \tau(N) - \Delta$. Pri tem $\Delta = LMT - GMT$. Za Ljubljano izmerimo $\Delta = 58\,\mathrm{min}$ in s tem vzhodno zemljepisno dolžino 14,5°. Za kraje zahodno od Greenwicha velja podobno:

$$\varphi = \frac{GMT - LMT}{1\,\mathrm{h}} \cdot 15°\,\mathrm{W}\,. \tag{6.9}$$

Na opisani način so prvi kopenski in morski raziskovalci začrtali zemljevid sveta. Pomorščaki pa še danes tako – z uro, kotomerom in tabelama deklinacije in anomalije Sonca – najpreprosteje določajo lego svojih ladij na odprtem morju.

Slika 6.10 Model zemeljske krogle z vrisanimi poldnevniki in vzporedniki. Poldnevniku skozi Greenwich pripišemo zemljepisno dolžino 0° in ekvatorju zemljepisno širino 0°. Razmak med narisanimi poldnevniki znaša 15° in med vzporedniki 15°. (Anon)

Namesto Sonca lahko za določevanje zemljepisne lege uporabimo katerokoli zvezdo, za katero poznamo deklinacijo in rektascenzijo. Čakamo, da kulminira, in takrat izmerimo njeno kotno višino ter čas po greenwiški uri.

6.10 Časovni pasovi

Uradni časi

V vsakem kraju na Zemlji si lahko mislimo uro, ki kaže tamkajšnji kronometrski čas. Vse te ure tečejo enako hitro, so pa med seboj bolj ali manj zamaknjene. To je zelo neprijetno, saj ima vsak kraj svoj čas. V prakso zato vpeljemo le 24 različnih ur: tiste, ki leže na prav toliko vzporednikih, razmaknjenih po 15° od Greenwicha. Med seboj se razlikujejo natanko za 1 h. Ure v krajih blizu teh poldnevnikov so nastavljene po njih. Rečemo, da tvorijo *časovne pasove*. Ko kaže ura v Greenwichu 12 h, kaže ura v Ljubljani že 12 h + 1 h = 13 h in v New Yorku šele 12 h − 5 h = 7 h. □

7 Prostor

Dolžina – Podobni trikotniki – Pravokotni trikotnik – Krog, lok in kot – Kotna razmerja – Triangulacija – Splošni trikotnik – Zemljemerstvo – Ploščina – Prostornina – Velikost Zemlje – Do nebesnih teles – Sončni sistem

7.1 Dolžina

Merjenje dolžine

Od dveh skupaj rastočih navpičnih dreves je eno krajše, daljše ali enako dolgo kot drugo. Ko kakšno drevo posekamo, pa se lahko vzdolž njega sprehodimo in pri tem štejemo korake. Tako njegovo dolžino l izmerimo. Merilna priprava so naše noge, dolžinska enota pa *korak*. Merimo tudi s *čevlji*, *sežnji*, *lakti*, *pedmi* in *palci*. Pri tem potiho privzamemo, da se uporabljana enota ne spreminja, ko jo premikamo z enega mesta drugam. Takšno merjenje povsem zadostuje lovcem in kmetovalcem.

Metrski etaloni

Z razvojem trgovine se pojavijo zahteve po uradni dolžinski enoti. Različne države izdelajo svoje etalone, to je trpežne palice izbrane dolžine, in jih shranijo v zakladnicah. Z njimi potem uradniki umerjajo druge merilne palice, metre. Tipični etalon je tako dolg kot vstran iztegnjena človeška roka od grodnice do konic prstov. Rekli bomo, da ima dolžino en *meter* (m).

Kratke dolžine merimo tako, da meter – kateregakoli pač že uporabljamo – razdelimo na 3 čevlje in čevelj na 12 palcev. Od daljših enot pa vpeljemo dvojni korak kot 5 čevljev in miljo kot 1000 dvojnih korakov.

Desetiška razdelba

Kmalu se pokaže, da je računanje z mešanimi dolžinskimi enotami nepregledno in težavno, zato raje razdelimo meter na 10 *deci*metrov (dm), 10^2 *centi*metrov (cm) ali 10^3 *mili*metrov (mm). Z njim tudi umerjamo daljše merilne vrvi. Razdaljo 10^3 metrov poimenujemo *kilo*meter (km). Večkilometrske razdalje merimo tako, da namesto polaganja palic po tleh raje vozimo kolo z izmerjenim obsegom in štejemo obrate s primernim števcem. Tako je mnogo bolj udobno.

Če so desetiške enote res tako primerne za računanje, zakaj jih potem nismo vpeljali tudi za čas in kot? V glavnem zato, ker se je merjenje časa in kotov začelo, še preden se je razvil decimalni zapis ulomkov, kasneje pa je bilo zatečeno stanje težko spremeniti. Bili so sicer poskusi, da bi dan razdelili na 10 ur, uro na 100 minut in minuto na 100 sekund, ter da bi četrtino kroga razdelili na 100 stopinj, vendar se žal niso uveljavili.

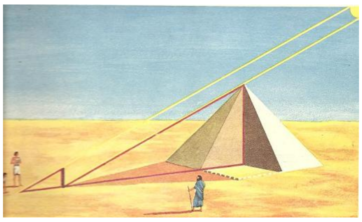
7.2 Podobni trikotniki

Dolžina sence

Navpično drevo in navpični gnomon hkrati mečeta po vodoravnih tleh vsak svojo senco. Drevo je višje od gnomona in meče daljšo senco. Ker so sončni žarki, ki obe senci rišejo, med seboj vzporedni, meče dvakrat višje telo po tleh tudi dvakrat daljšo senco. Drugače rečeno: razmerje med višinama b in b_0 dveh navpičnih teles je enako razmerju med dolžinama a in a_0 njunih vodoravnih senc, v kar se prepričamo z merjenjem:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0}\,. \tag{7.1}$$

Če izmerimo dolžini gnomona in njegove sence, lahko iz izmerjene sence drevesa izračunamo njegovo višino, ne da bi jo bilo treba dejansko meriti z metrsko palico. Rečemo, da smo višino izmerili posredno.



Slika 7.1 Merjenje višine piramide iz dolžine njene sence. Razmerje višin piramide in palice je enako razmerju dolžin njunih senc. (Hogben, 1960)

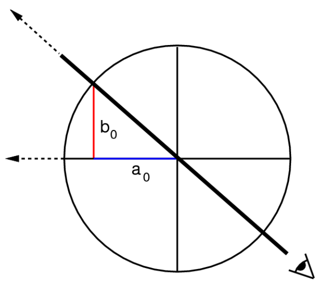
Spoznanje o razmerju višin in senc lahko posplošimo. Drevo, njegova senca in sončni žarki od vrha drevesa do vrha sence tvorijo *pravokotni trikotnik* s stranicami a, b in c. Isto velja za gnomon. Oba trikotnika sta si *podobna*, to je, imata enake kote. Pričakujemo, da so razmerja njunih istoležnih stranic enaka:

$$\frac{a}{a_0} = \frac{b}{b_0} = \frac{c}{c_0}\,. \tag{7.2}$$

To je *gnomonski izrek*. Velja tudi za poševne trikotnike. Tedaj mu rečemo *izrek o istoležnih stranicah* podobnih trikotnikov (TALES). Trditev dokažemo kar z merjenjem.

Viziranje teles

Ni treba čakati na senco, da ustvarimo podobne trikotnike za meritev višine drevesa. Na primernem mestu zabodemo v tla gnomon, ležemo in poiščemo tisto lego očesa, da se vrh gnomona in vrh drevesa pokrijeta. Rečemo, da smo vrh *vizirali*. Vlogo obeh senc prevzameta sedaj vodoravni oddaljenosti očesa od drevesa in od gnomona.



Slika 7.2 Astrolab kot vizirni trikotnik.

Še bolj priročno je, če namesto gnomona uporabimo astrolab. Postavimo se na primerno mesto in z namerilno palico astrolaba naciljamo vrh drevesa. Pri tem palica na obodu astrolabovega kroga označi točko, ki ima glede na astrolabovo središče vodoravno razdaljo a_0 in navpično razdaljo b_0. Rečemo, da sta to njeni *projekciji*. Projekciji tvorita pravokotni trikotnik, ki je podoben opazovanemu. K izračunani višini drevesa je potrebno dodati še višino astrolaba nad tlemi.

Namesto da po viziranju z astrolabom iz znane oddaljenosti drevesa izračunamo njegovo višino, lahko iz znane višine drevesa izračunamo njegovo oddaljenost. Tako tudi določimo, na primer, oddaljenost ladje na morju iz znane višine njenega jambora, ali oddaljenost ladje do pristanišča iz znane višine tamkajšnjega svetilnika.

7.3 Pravokotni trikotnik

Stranici a in b, ki v trikotniku oblikujeta pravi kot, imenujemo *kateti*. Povezuje ju tretja stranica c, *hipotenuza*, ki je od vseh najdaljša. Vsaka kateta oblikuje s hipotenuzo svoj ostri kot. Kot, ki leži nasproti stranici a, poimenujemo A, onega nasproti b pa B. Z dolžino katet sta oba ostra kota in dolžina hipotenuze enolično določeni.

Vsota kotov

Ko skozi oglišče B potegnemo vzporednico z nasproti ležečo stranico b, nastanejo tam trije koti, ki skupaj tvorijo iztegnjeni kot. Vidimo, da velja:

$$A + B = 90° . \tag{7.3}$$

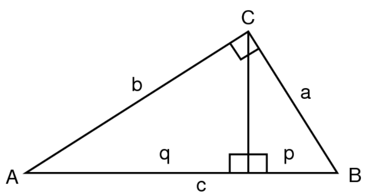
Če torej poznamo en kot, lahko drugega izračunamo.

Dolžina hipotenuze

V kmetijskih državah je potrebno zakoličevati polja. To delajo uradni zemljemerci. Njihovo osnovno orodje je dolga vrv z vozli v metrskih razmikih. Pri merjenjih – kot zemljemerci – opazimo, da je iz vrvi narejen trikotnik, katerega stranice merijo 3, 4 in 5 vozlov, pravokoten. Razmišljajoč o tem odkrijemo povezavo $3^2 + 4^2 = 5^2$. Mogoče velja takšna povezava za stranice v vsakem pravokotem trikotniku? Domnevamo torej

$$a^2 + b^2 = c^2 . \tag{7.4}$$

To je *hipotenuzni izrek* (PITAGORA). Če izrek drži, lahko iz katerekoli dvojice stranic izračunamo tretjo. Domnevo preverimo z meritvami in jo res potrdimo. S tem postane eksperimentalni zakon. Vendar nas to ne zadovoljuje in iščemo pot, kako bi ta zakon izpeljali iz kakšnih bolj osnovnih resnic. To tudi uspemo.



Slika 7.3 Pravokotni trikotnik za izpeljavo hipotenuznega izreka.

Postopamo takole. Iz pravega kota potegnemo navpičnico na hipotenuzo. Nastanejo trije pravokotni trikotniki, ki so si med seboj podobni. Po izreku o istoležnih stranicah (7.2) zato velja

$a/c = p/a$ in $b/c = q/b$. Iz prve enačbe izrazimo a^2, iz druge b^2 ter obe enačbi seštejemo, pri čemer upoštevamo še $p + q = c$. Izrek smo dokazali.

Hipotenuzni izrek vsebuje produkte dolžin samih s seboj, na primer $3\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m}$. V takšnem produktu množimo številske vrednosti med seboj in enote med seboj, torej za navedeni primer $3^2\,\mathrm{m}^2$. Podobno naj velja za deljenje, potenciranje in korenjenje. Izraz $\sqrt{}(25\,\mathrm{m}^2)$, na primer, znaša $5\,\mathrm{m}$.

7.4 Krog, lok in kot

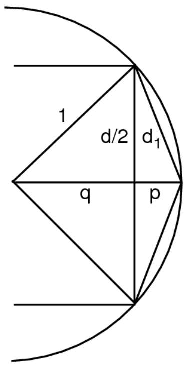
Obseg kroga

Kotomerni krog z večjim polmerom ima večji obseg. Če si mislimo krog sestavljen iz ozkih enakokrakih trikotnikov z vrhovi v središču, se njegovo povečanje pokaže kot podaljšanje krakov teh trikotnikov. Enakokraki trikotnik je sestavljen iz dveh enakih pravokotnih trikotnikov. Vsak podaljšani pravokotni trikotnik je podoben prvotnemu, zato je razmerje njunih kratkih stranic enako razmerju njunih hipotenuz. Če so trikotniki dovolj ozki, je vsota kratkih stranic trikotnikov kar enaka obsegu kroga. Obseg kroga C je zato sorazmeren s polmerom r oziroma s premerom $2r$:

$$C = 2\pi r\,. \tag{7.5}$$

Sorazmernostni koeficient π določimo z neraztegljivo vrvico, ki jo nekajkrat navijemo na okroglo cev znanega premera in ji nato izmerimo dolžino: $\pi \approx 3{,}1$.

Kaj pa, če bi v krog včrtali pravilni mnogokotnik in mu izračunali obseg? Čim več oglišč bi imel tak mnogokotnik, tem manj bi se njegov obseg razlikoval od krogovega. Razmerje med mnogokotnikovim obsegom in premerom pa bi bilo potem dober približek k številu π.



Slika 7.4 Računanje števila π. Čim več oglišč ima krogu včrtani mnogokotnik, tem bolj se njegov obseg približuje obsegu kroga. Z zaporednim razpolavljanjem stranic gradimo čedalje gostejše mnogokotnike.

V krog polmera $r = 1$ včrtamo pravilni četverokotnik, torej kvadrat. Njegova stranica, določena s hipotenuznim izrekom (7.4), znaša $d = \sqrt{2}$ in obseg 4-krat toliko. Ta obseg seveda še ni dovolj blizu krogovemu. Nad kvadratom zato začrtamo dvakrat gostejši mnogokotnik, torej osemkotnik, in skušamo izračunati njegovo stranico d_1 kot boljši približek proti obodu kroga. Ker

$q^2 = 1 - (d/2)^2$, $p = 1 - q$ in $d_1{}^2 = (d/2)^2 + p^2$, velja $d_1{}^2 = 2 - 2\sqrt{(1 - d^2/4)}$. Obseg je 8-krat tolikšen. Uspeli smo. Nova stranica je odvisna samo od prejšnje. Izračunamo jo in postopek ponovimo z novo stranico kot izhodiščem. To nekajkrat ponovimo in dobimo dovolj tesen približek h krogu ter s tem vrednost $\pi = 3{,}14$.

Redefinicija kota

Enačba za obseg kroga (7.5) omogoča, da kot redefiniramo preko razmerja med lokom l in polmerom r krožnega izseka:

$$\varphi = \frac{l}{r}\,. \tag{7.6}$$

Tako definiran kot ima vrednosti med 0 in 2π. Pravi kot znaša π/2 in iztegnjeni kot je enak π. S tem postane dosedanja stopinja kar okrajšava za število $° = 2\pi/360 \approx 0{,}0175$. Kot ni več neodvisna količina, temveč postane izpeljana.

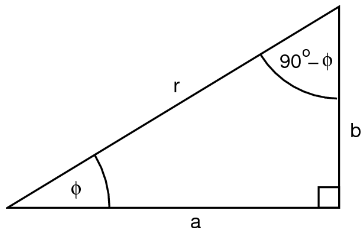
Lastnosti kroga

Ko se ukvarjamo z risanjem krogov in kotov, opazimo marsikakšno zanimivost. — Po obodu kroga nanašamo tetive, ki so enako dolge kot radij. Gre jih natanko šest. Tako krog razdelimo na šest enakih delov. — Nad premerom kroga narišemo trikotnik z vrhom kjerkoli na krožnici. Vsak tak trikotnik je pravokoten. Tako rišemo prave kote. — Nad tetivo narišemo trikotnik z vrhom v središču in drugega z vrhom na obodu. Središčni kot je dvakratnik obodnega. — Skozi tri točke, ki ne ležijo na isti premici, gre natanko en krog: točke povežemo v trikotnik, narišemo simetrale stranic in njihovo presečišče je središče tega kroga. Vse naštete izreke – in še mnoge druge – so ljudje uspeli dokazati, to je, jih izpeljati iz drugih, "bolj osnovnih" resnic (EVKLID). Nam zadostuje, da so eksperimentalno opažena dejstva.

7.5 Kotna razmerja

Kotne projekcije

Ko z astrolabom merimo višino drevesa, moramo določiti obe oddaljenosti (projekciji) a in b točke na obodu astrolabovega kroga s polmerom r od vodoravne in navpične osi skozi središče tega kroga.



Slika 7.5 Vizirni kot in pripadajoči pravokotni trikotnik. Razmerje med nasprotno stranico in hipotenuzo je enolično odvisno od kota.

Sinus, kosinus in tangens

To lahko naredimo vnaprej in enkrat za vselej za vsak kot φ. Najbolje je, da določimo razmerja b/r, a/r in b/a, saj so ta neodvisna od r. Simbolično zapišemo

$$\frac{b}{r} = \sin\varphi \qquad (7.7)$$
$$\frac{a}{r} = \cos\varphi$$
$$\frac{b}{a} = \tan\varphi\,,$$

s čimer definiramo *sinus*, *kosinus* in *tangens* kota. Sinus kota je torej razmerje med nasprotno stranico in hipotenuzo kateregakoli pravokotnega trikotnika, ki ga zgradimo nad tem kotom. Podobno velja za kosinus in tangens. Vsa tri razmerja poimenujemo s skupnim imenom *kotna razmerja*. Med seboj niso neodvisna, ampak so očitno povezana, upoštevajoč izreka (7.3) in (7.4):

$$\sin\varphi = \cos(90° - \varphi) \qquad (7.8)$$
$$\cos\varphi = \sin(90° - \varphi)$$
$$(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$$
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,.$$

Določitev kotnih razmerij

Ker kotna razmerja niso odvisna od velikosti kroga, narišemo s šestilom poljubno velik krog na papir, za izbrane kote z ravnilom izmerimo projekcije ter sestavimo ustrezno tabelo. Dovolj je, da izmerimo tabelo za sinus; kosinus in tangens izračunamo iz ustreznih povezav (7.8).

Tabela 7.1 Kotna razmerja za izbrane kote.

°	sin	cos	tan
0	0	1	0
10	0,174	0,985	0,176
20	0,342	0,940	0,364
30	0,500	0,866	0,577
40	0,643	0,766	0,839
45	0,707	0,707	1
50	0,766	0,643	1,19
60	0,866	0,500	1,73
70	0,940	0,342	2,75
80	0,985	0,174	5,67
90	1	0	∞

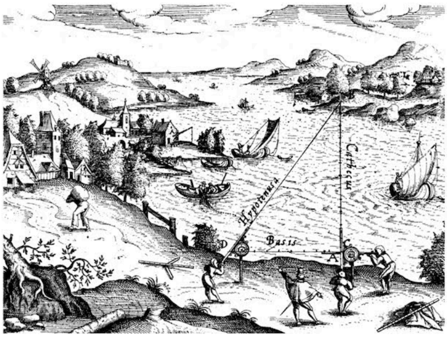
Nekatere vrednosti kotnih razmerij lahko kar uganemo, na primer tiste za sinus kotov 0° in 90°: to sta 0 in 1. Pri kotih 30°, 45° in 60° imamo opravka z enakokrakimi in enakostraničnimi trikotniki, iz katerih razmerja stranic izračunamo; za sinus dobimo 1/2, √2/2 in √3/2.

7.6 Triangulacija

Širina reke

S poznavanjem kotnih razmerij zlahka merimo nedostopne razdalje, recimo širino reke. Ravnamo takole.

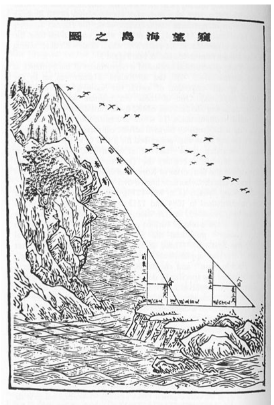
Na nasprotnem bregu poiščemo primerno drevo. Potem na našem bregu izberemo primerno opazovališče in v pravokotni smeri zakoličimo primerno dolgo osnovnico. Nato izmerimo kot, pod katerim vidimo drevo iz drugega krajišča osnovnice. Tangens tega kota pove, koliko je drevo oddaljeno.



Slika 7.6 Merjenje neprehodne razdalje preko reke. Razdalja je izračunljiva, če sta poznana dolžina pravokotne merilne črte – osnovnice – in kot na njenem koncu. (Frisius, 1533)

Višina hriba

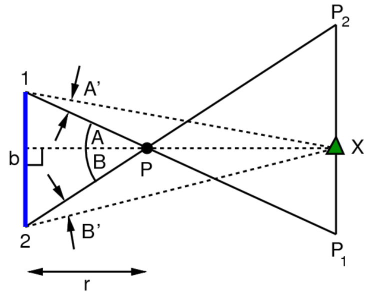
Podobno izmerimo tudi višino nedostopnega hriba. Na ravnini, proč od hriba, izberemo primerno dolgo vodoravno osnovnico d tako, da kaže natanko proti hribu. Iz vsakega krajišča osnovnice nato izmerimo kotno višino hriba. Potreben je še kratek račun in izvemo, koliko je hrib visok: $h/d = \tan\theta_1 \tan\theta_2 / (\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$. Tako z ladje na morju merimo višino vulkanskih otokov.



Slika 7.7 Določanje višine nedostopnega hriba. Potrebna je meritev dolžine osnovnice in dve meritvi kotov, vsaka z enega konca. (Liu Hui, 236)

Zvonik na ozadju

Ko gledamo cerkveni zvonik P iz krajišč 1 in 2 pravokotne osnovnice, vidimo, da je njegova lega na hribovitem ozadju premaknjena. Iz krajišča 1 izmerimo med referentnim hribom X in zvonikom P_1 vodoravni kot A'. Podobno iz krajišča 2 izmerimo med istim referentnim hribom in zvonikom P_2 kot B'.



Slika 7.8 Paralaksa telesa. Iz opazovalnih mest 1 in 2 vidimo opazovano telo P na oddaljenem ozadju v legah P_1 in P_2 glede na referentno telo X.

Če je ozadje mnogo bolj oddaljeno kot zvonik, velja $A \approx A'$ in $B' \approx B$. Vsota $A' + B' \approx A + B = \gamma$ pa je kot, pod katerim iz zvonika vidimo osnovnico. Če je ta kot majhen, to je, če je dolžina osnovnice b mnogo krajša od oddaljenosti r do zvonika, velja

$$\frac{b}{r} = \gamma \,. \tag{7.9}$$

Z meritvijo *paralakse* zvonika γ na oddaljenem ozadju je torej razdalja do zvonika enolično določena. Kadar osnovnica ni pravokotna na vizirno smer, pa moramo izmeriti njen odklon φ od te smeri ter kot dolžino upoštevati projekcijo $b \sin \varphi$.

7.7 Splošni trikotnik

Pri viziranju teles, recimo ladje na morju, ni zmeraj mogoče izbrati osnovnice, ki bi bila pravokotna na vizirno smer. Tedaj je treba uporabiti splošni trikotnik.

Splošni trikotnik s stranicami a, b in c ter z njim nasproti ležečimi koti A, B in C je popolnoma določen, če poznamo: vse tri stranice; dve stranici in kot, ki ga oklepata; ali eno stranico in oba priležna kota. Ugotoviti moramo, kako se iz poljubnih dveh podatkov izračuna tretjega.

Vsota kotov

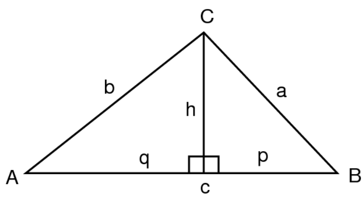
Če skozi ogel B potegnemo vzporednico k nasproti ležeči stranici b, vidimo, da za nastale tri kote velja:

$$A + B + C = 180° \,. \tag{7.10}$$

To je *izrek o vsoti kotov* trikotnika. Če poznamo dva kota, je tretji z njima enolično določen.

Sinusni izrek

Po zgledu hipotenuznega izreka potegnimo pravokotnico h iz oglišča C na stranico c. Rečemo, da je to višina trikotnika nad ustrezno stranico. Prvotni trikotnik razpade na dva pravokotna trikotnika.



Slika 7.9 Trikotnik za izpeljavo sinusnega in kosinusnega izreka.

Velja $\sin A = h/b$ in $\sin B = h/a$. Iz vsake enačbe izrazimo h, ju izenačimo in dobimo (ko postopek ponovimo še na drugih stranicah):

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}\,. \tag{7.11}$$

To je *sinusni izrek*. V zapisani obliki velja le, če so vsi koti ostri. Kadar je kakšen notranji kot, recimo A, večji od 90°, moramo namesto sinusa tega kota (ki ni definiran) izračunati sinus "suplementarnega" kota, ki prvega dopolnjuje do 180°: namesto $\sin A$ torej pišemo $\sin(180° - A)$. Izpeljava je podobna.

Kosinusni izrek

V splošnem trikotniku velja $h^2 = a^2 - p^2$ in $h^2 = b^2 - q^2$. Izenačimo desni strani, malo poračunamo, upoštevamo $p + q = c$ in $p = b\cos A$ ter dobimo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A\,. \tag{7.12}$$

To je *kosinusni izrek*. Iskana stranica je podana z drugima dvema stranicama in s kotom med njima. Seveda velja to za vsako stranico. Izrek velja v zapisani obliki, če je kot A oster. Kadar je treba računati kosinus kota, večjega od 90° (ki ni definiran), računamo kosinus suplementarnega kota in mešani člen prištejemo, ne odštejemo: namesto $-2bc\cos A$ torej pišemo $+2bc\cos(180° - A)$. Izpeljava je podobna.

7.8 Zemljemerstvo

Osnovni trikotnik

Oboroženi z navedenimi izreki določimo oddaljenost hriba takole. Izberemo in neposredno izmerimo primerno osnovnico na ravnini. Nato na vsakem koncu s kotomerom izmerimo vodoravni kot med njo in hribom. Uporabljamo poseben vizir v obliki navpične špranje. Iz obeh kotov po (7.10) izračunamo tretji kot (pod tem kotom iz hriba vidimo osnovnico) in s sinusnim izrekom (7.11) še obe stranici. Z dodatnim merjenjem navpičnih kotov pa določimo še višino hriba.

Mreža trikotnikov

Iz iste osnovnice lahko seveda izmerimo dve ali več tarč, recimo gorskih vrhov v okolici. Ko sta dve tarči izmerjeni, postane njuna medsebojna razdalja nova osnovnica, iz katere lahko nadaljujemo merjenja. Tako razpredemo po okolici mrežo trikotnikov in jo premerimo. To je tudi način, kako države izdelujejo svoje zemljevide.

7.9 Ploščina

Pravokotnik

Kakor polagamo merske daljice vzdolž ravne ceste, tako lahko pravokotno polje v mislih tlakujemo z merskimi kvadrati, to je s pravokotniki, katerih vse stranice so enako dolge. Izberemo kvadrate s tako dolgo stranico l, kakršno natančnost želimo, recimo 1 m. Če znaša dolžina polja a in njegova širina b, ga tlakuje $(a/l) \cdot (b/l)$ kvadratov. Rečemo, da ima polje *ploščino*

$$S = ab\,. \tag{7.13}$$

S tem je definirana tudi enota za ploščino, *kvadratni meter* (m^2). Ploščino vrta $10\,\mathrm{m} \times 10\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{m}^2$ na kratko poimenujemo 1 *ar* in ploščino pašnika $100\,\mathrm{m} \times 100\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{ar}$ poimenujemo 1 *hektar*. Če je ploskev majhna ali če zahtevamo večjo natančnost, merimo z manjšimi enotami, na primer s kvadratnimi decimetri (dm^2). Ni nam treba tlakovati zares, ampak le izmerimo obe stranici ter njuni dolžini zmnožimo.

Pravokotni trikotnik

Po diagonali prerezan pravokotnik razpade na dva enaka pravokotna trikotnika. Ploščina takega trikotnika znaša zato polovico ploščine izvornega pravokotnika:

$$S = \frac{1}{2}\,ab\,. \tag{7.14}$$

Poševni trikotnik

Polje, ki je omejeno s samimi ravnimi črtami, lahko vedno razrežemo na trikotnike, ki pa v splošnem niso pravokotni, marveč poševni. Kakšna je ploščina poševnega trikotnika? Pravokotni trikotnik v mislih razrežemo v ozke pasove, vzporedne z bazo, nato pa jih strižno zamaknemo. Tako iz pravokotnega trikotnika nastane poševni z višino h, ploščina posamičnih trakov in s tem celotna ploščina trikotnika pa se ohrani:

$$S = \frac{1}{2}\,ah\,. \tag{7.15}$$

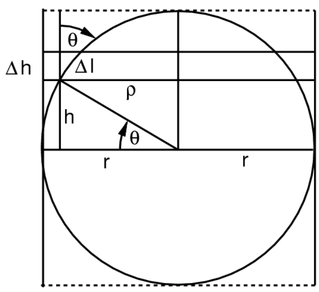
Krog, valj in stožec

Kadar je polje omejeno s krivo črto, ga je treba rezati na zelo drobne pravokotnike ali trikotnike, da dosežemo željeno natančnost. Krog, na primer, razrežemo na ozke enakokrake trikotnike z vrhom v središču in z bazo na krožnici, jih zložimo v kvadrat s stranicama πr in r ter tako dobimo ploščino (Arhimed).

$$S = \pi r^2\,. \tag{7.16}$$

Plašč valja razvijemo v ravnino. Dobimo pravokotnik s stranicama $2\pi r$ in h ter s tem njegovo ploščino. Tudi plašč stožca lahko razvijemo v ravnino. Nastane izsek kroga z radijem $l^2 = r^2 + h^2$ in kotom $\varphi = 2\pi r/l$. Njegova ploščina je torej $\varphi/2\pi$-ti del od πl^2.

Krogla



Slika 7.10 Računanje površine krogle. Površina krogle je enaka ploščini plašča valja, ki kroglo oklepa.

Površine krogle ne moremo razviti v ravnino. Postopamo takole. Kroglo razrežemo na tanke vodoravne rezine z debelinami Δh. Vsaka rezina ima obliko prisekanega stožca s stranico Δl. Stožec pri elevacijskem kotu θ je na višini $h = r\sin\theta$ nad ekvatorjem krogle ter ima polmer $\rho = r\cos\theta$. Njegova stranica je nagnjena za kot θ od navpičnice.

Če je Δh majhen, je ploščina stožčastega obroča enaka $2\pi\rho \cdot \Delta l$, torej $2\pi r\cos\theta \cdot \Delta h / \cos\theta$ oziroma $2\pi r\Delta h$. To pa ni nič drugega kakor ploščina obroča na plašču valja, ki kroglo oklepa! Vsak obroč na krogli je torej ploščinsko enak ustreznemu obroču na valju! To pomeni, da je površina krogle kar enaka ploščini valja s polmerom r in višino $2r$, torej (ARHIMED)

$$S = 4\pi r^2 \,. \tag{7.17}$$

Vidimo, da je površina krogle štirikrat tolikšna kot ploščina njenega preseka – kroga – skozi središče.

7.10 Prostornina

Kvader

Skladišče v obliki kvadra lahko v mislih zapolnimo s kockastimi zaboji. Če so stranice skladišča dolge a, b in h, definiramo njegovo *prostornino* kot

$$V = abh \,. \tag{7.18}$$

S tem je določena tudi njena enota, na primer *kubični meter* (m^3). Manjše prostornine merimo z ustreznimi manjšimi enotami. Enoti $1\,\mathrm{dm}^3$ pravimo tudi *liter*, l.

Piramida

Visoka zgradba, ki jo je najlažje zgraditi, ima obliko "ošpičenega" kvadra; to je piramida. Risba ali model iz lesa pokažeta, da njena prostornina znaša:

$$V = \frac{1}{3}\,abh \,. \tag{7.19}$$

Poševna piramida ima enako prostornino kot pokončna. Razmislek je prav tak kot pri ploščini poševnega in pravokotnega trikotnika.

Valj, stožec in krogla

Prostor, ki je omejen s krivimi ploskvami, razkosamo na zelo drobne kvadre ali piramide, da dosežemo željeno natančnost, ter seštejemo njihove prostornine. Valj razrežemo na kvadre, stožec na piramide in kroglo na piramide z vrhom v središču ter dobimo (ARHIMED)

$$V = \pi r^2 h \tag{7.20}$$
$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h$$
$$V = \frac{4\pi r^3}{3} \,.$$

Če v valj, katerega višina je enaka premeru osnovne ploskve, včrtamo kroglo in stožec, je razmerje njihovih prostornin enako 1:2:3. Kaj ni to zanimivo?

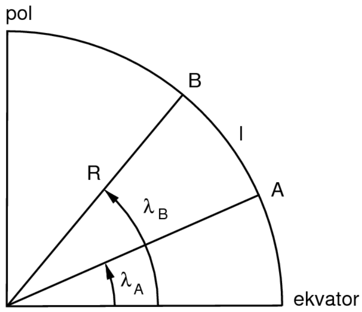
Menzura

Prostornino "nepravilnega" telesa določimo tako, da ga potopimo v valjasto posodo z vodo, menzuro, in izmerimo, koliko se dvigne gladina. S tem je določena prostornina izpodrinjene vode, to je prostornina vrinjenega telesa. Predpostavljamo, da se prostornina vode pri tem ne spreminja.

7.11 Velikost Zemlje

Poldnevniški lok

Kot, pod katerim v mislih iz središča Zemlje s polmerom R vidimo krožni lok l na poljubnem poldnevniku, je enak razliki zemljepisnih širin njegovih krajišč: $l/R = \Delta\lambda$. To nam omogoča, da izmerimo velikost Zemlje. V puščavi izberemo lego severnega krajišča in nato odpotujemo proti jugu za primerno razdaljo. V obeh krajiščih nato z gnomonom izmerimo zemljepisno širino ter izračunamo polmer Zemlje. Dobimo okrog 42oo aktualnih milj (po 1000 dvojnih korakov) (ERATOSTEN).



Slika 7.11 Merjenje velikosti Zemlje. Njen polmer je določen z dolžino loka med dvema geografskima širinama na istem poldnevniku.

Meritev izboljšamo takole. V ne preveč hriboviti pokrajini izberemo severno krajišče. Južno krajišče izberemo s prenosno uro, ki kaže čas severnega krajišča: ko kaže ura poldan z dodano ali odvzeto anomalijo, mora Sonce kulminirati. Vmesni lok med krajiščema pa določimo s triangulacijo na zaporednih trikotnikih. S tem sta določena polmer in obseg Zemlje v aktualnih miljah.

Redefinicija metra

Rezultat uporabimo za novo definicijo metra kot $1/10^6$ dolžine zemeljskega kvadranta, to je četrtine obsega. S tem se znebimo dosedanje navezanosti na človeško velikost. Novi meter se od starih razlikuje za manj kot desetino in ga na novo utelesimo.

Slika 7.12 Meter – palica za merjenje dolžine. Prikazan je javni etalon, izdelan na podlagi meritev poldnevniškega loka skozi Francijo. Etalon je vzidan v pročelje hiše v Parizu. (Anon)

Z novim metrom premerjena Zemlja ima polmer $6{,}4 \cdot 10^3$ kilometrov. Za pomorščake je kot dolžinska enota bolj priročen poldnevniški lok, ki ustreza kotu 1 kotne minute; to je 1 *morska milja* (NM) in znaša 1,8 kilometra.

Morsko obzorje

Zaradi ukrivljenosti Zemlje ne vidimo oddaljenih ladij, ker so skrite pod obzorjem. Prav tako z ladij ne vidimo oddaljenih otokov. Višina h obzorne ravnine nad krogelno morsko gladino z radijem R narašča z oddaljenostjo l: $h = l^2/2R$. Pri razdalji 100 km znaša že 0,8 km. Ladijski opazovalci zato sedijo v košari na jamboru, da vidijo dlje.

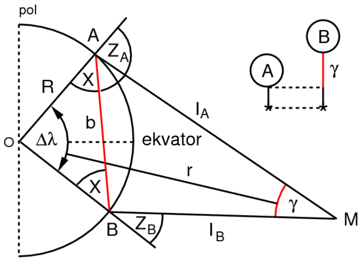
Z gorske višine h vidimo ukrivljeno morsko gladino za kot α pod vodoravnico. Ta kot – depresijo obzorja – zlahka izmerimo z astrolabom. Skica in račun pokažeta, da je z obema količinama takole določen polmer Zemlje: $R/h = \cos\alpha/(1 - \cos\alpha)$. Ko z višine 0,8 km izmerimo kot 0,9°, dobimo za radij $6{,}4 \cdot 10^3$ km.

7.12 Do nebesnih teles

Razdalja do Meseca

Kakor merimo oddaljenost zvonika na hribovitem ozadju, tako poskušamo izmeriti oddaljenost Meseca na zvezdnem nebu. Dva opazovalca na istem poldnevniku, med seboj čimbolj oddaljena, opazujeta Mesec ob kulminaciji. Recimo, da istočasno kulminira tudi kakšna zvezda "pod" njim. Opazovalca izmerita navpični kot med to zvezdo in Mesecem. Razlika obeh kotov je kot, za katerega je Mesec premaknjen glede na zvezdno ozadje, torej njegova paralaksa. S paralakso γ in osnovnico b je oddaljenost r enolično določena. Osnovnico najpreprosteje določimo kar z risanjem.

Z nekaj truda lahko osnovnico tudi izračunamo. — Kot X določimo iz vsote notranjih kotov $\Delta\lambda + 2X = 180°$. — Kot Y_A je podan preko suplementarnosti kotov $X + Y_A + Z_A = 180°$. — Osnovnico b določimo iz sinusnega izreka $\sin X/R = \sin\Delta\lambda/b$. — Razdaljo I_B izvemo iz sinusnega izreka $\sin\gamma/b = \sin Y_A/I_B$. — Oddaljenost r pa je, končno, določena s kosinusnim izrekom $r^2 = {I_B}^2 + R^2 + 2 I_B R \cos Z_B$.



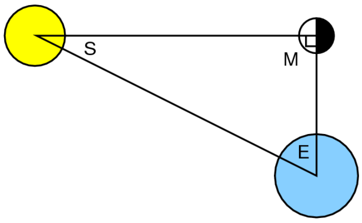
Slika 7.13 Merjenje oddaljenosti Meseca s paralakso.

Meritve so uspešne tudi ob milejših pogojih: z dveh (bližnjih) poldnevnikov in glede na (ne preveč) kasnečo ali prehitevajočo referentno zvezdo. Primeren je tudi Sončev mrk, pri čemer Sonce prevzame vlogo zvezdnega ozadja. Tako dobimo pri osnovnici z redom velikosti Zemljinega polmera paralakso okrog ene kotne stopinje in ugotovimo, da je Mesec oddaljen od Zemlje za 60 njenih polmerov (HIPARH).

Oddaljenost in kotni premer Meseca povesta, kakšna je njegova velikost (7.6). Kotni premer izmerimo neposredno s kotomerom ali preko časa, ki ga potrebuje, da se skrije za navpični rob stavbe. Dobimo 0,5°. Mesec ima zato polmer $1{,}7 \cdot 10^3$ km, torej približno tretjino Zemljinega. Kotni premer se s časom ne spreminja zaznavno, kar pomeni, da se Mesec giblje okrog Zemlje vedno pri enaki oddaljenosti, torej po krogu.

Razdalja do Sonca

Ko Mesec spreminja svoje faze, je enkrat osvetljen natanko do polovice. Takrat tvorijo Zemlja, Sonce in Mesec pravokotni trikotnik s pravim kotom pri Mesecu. Če tedaj uspemo izmeriti kot med Soncem in Mesecem, lahko iz tega izračunamo kot, pod katerim opazovalec na Soncu vidi obe preostali telesi. Kosinus tega kota je enak razmerju oddaljenosti Meseca in Sonca od Zemlje.



Slika 7.14 Merjenje oddaljenosti Sonca. Prikazana je medsebojna lega Zemlje, Sonca in Meseca, kadar je ta osvetljen do polovice. Z merjenjem kota med Soncem in Mesecem je določena tudi razdalja do Sonca.

Meritev potrebnega kota je nenatančna, ker je težko določiti, kdaj je Mesec osvetljen natanko do polovice; ker je ta kot le malo manjši od pravega; in ker majhna merilna napaka pri kotu povzroči veliko napako pri razdalji. Ocenimo, da je iskani kot večji od 87°. Iz tega sledi, da je Sonce od Zemlje oddaljeno najmanj 20-krat toliko kot Mesec (ARISTARH).

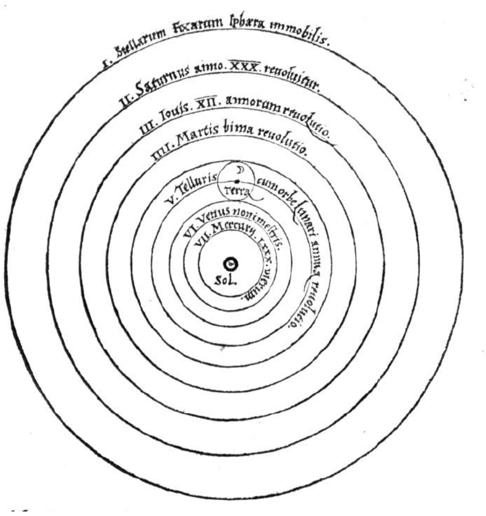
Izmerimo še Sončev premer, podobno kot pri Mesecu. Zaradi varnosti gledamo skozi zakajeno stekleno šipo. Dobimo 0,5°, kar je slučajno enako kot pri Mesecu. To pomeni, da mora biti Sonce vsaj 5-krat večje od Zemlje. Morda je še mnogo večje in mnogo bolj oddaljeno!

7.13 Sončni sistem

Kako lahko okoli majhne Zemlje kroži tako veliko Sonce pri tako veliki oddaljenosti? Saj morajo biti razdalje, ki jih prepotuje v enem dnevu, gromozanske. Mar ni bolj verjetno, da se Zemlja vrti okrog svoje osi in je gibanje Sonca po nebu zgolj navidezno?

Središče sveta

To nas vodi do nove, pravilnejše slike sveta kot *sončnega sistema* (ARISTARH, KOPERNIK). V središču sveta je Sonce. Okrog njega krožijo planeti, vsi v približno isti ravnini, a pri različnih oddaljenostih. Rečemo, da zarisujejo svoje *orbite*. Bližnji planeti obkrožijo Sonce prej kot oddaljeni. Zemlja je tudi planet, tretji po vrsti. Sonce obkroži v enem letu. Pri tem se hkrati vrti okoli svoje osi; en zavrtljaj se kaže kot en dan. Os vrtenja ni pravokotna na ravnino kroženja, marveč nagnjena za 23,5°, in kaže vedno v isto smer med zvezde. S tem so pojasnjene deklinacije Sonca in letne dobe.



Slika 7.15 Heliocentrični sistem sveta. Sonce je v središču, okrog njega krožijo planeti. Luna kroži okoli Zemlje. (Kopernik, 1543)

Okrog Zemlje kroži Mesec. Ko zaide med Zemljo in Sonce, nastane Sončev mrk. Ko zaide za Zemljo, v njeno senco, nastane Mesečev mrk. Morda imajo tudi drugi planeti svoje lune.

Ker je Zemljina orbita velikanska, bi morale zvezde na nebu kazati paralakso. Tega ne opazimo, zato morajo biti silno daleč. Morda so tudi one sonca? □

8 Relativna števila

Relativna števila – Računanje s skalarji – Skalarna potenca – Logaritem – Desetiški logaritem – Logaritemska tabela – Drsno računalo

8.1 Relativna števila

Predznačeni premik

Prebivalcem na morski obali je dobro znano, da gladina morja ni zmeraj enako visoka: včasih je višja in včasih nižja. To se lepo vidi na lesenem pomolskem kolu, ki je zabit v morsko dno. Če v les naredimo vodoravno zarezo na primernem mestu, lahko višino gladine podamo z njeno razdaljo od te zareze – navzgor ali navzdol. Razdaljo na primer 0,5 metra navzgor zapišemo kot $+0{,}5\,\mathrm{m}$ in navzdol kot $-0{,}5\,\mathrm{m}$. Vpeljana predznaka "+" in "−" povesta, ali je gladina povišana (povečana) ali znižana (zmanjšana) glede na izhodiščno zarezo.

Pozitivne in negativne vrednosti količin

Podobno kot označujemo višinski odmik (v metrih) morske gladine, lahko opisujemo še marsikaj drugega: časovni odmik (v letih) kakega dogodka od izbranega izhodiščnega dogodka, recimo rojstva preroka Ješue; kotni odmik opoldanskega Sonca (v stopinjah) nad ali pod nebesnim ekvatorjem; in, seveda, prihodek-odhodek denarja ter stanje trgovske blagajne. Tako pravimo: znamenita bitka pri Termopilah se je zgodila leta −480; deklinacija Sonca ob zimskem obratu znaša −23,5°; in stanje v blagajni je padlo, žal, na −300 denarjev. Rekli bomo, da so vse to – čas, kot, blagajniško stanje in drugo – relativne količine, ki imajo *pozitivno* ali *negativno* vrednost (Brahmagupta).

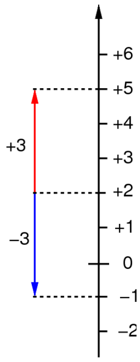
Relativna števila oziroma skalarji

Odmislimo za trenutek merske enote količin in se zanimajmo le za njihove številske vrednosti. Simbolično jih označimo s $+p$ ali z $-p$, pri čemer je p poljubno decimalno število. S tem vpeljemo *relativna števila* oziroma *skalarje* kot "predznačena" decimalna števila. Skalarji so torej razširitev decimalnih števil in slednja vsebujejo kot poseben primer v obliki pozitivnih skalarjev. Kadar nas ne zanima predznak skalarja, ampak le njegova velikost, definiramo še *absolutno vrednost* kot $|\pm p| = p$.

8.2 Računanje s skalarji

Seštevanje

Gladina morja naj ima neko višino, pozitivno ali negativno, $\pm p$. Glede na to višino lahko morje potem naraste ali upade. Porast višine označimo kot $+q$ in upad gladine kot $-q$. Porast in upad sta pravzaprav dve strani istega kovanca in ju zato združimo v skupen pojem, *spremembo*: porast je pozitivna sprememba in upad je negativna sprememba. Nato rečemo, da se je ta sprememba dodala oziroma prištela k obstoječemu stanju. S tem je postavljen model za seštevanje relativnih števil.



Slika 8.1 Seštevanje skalarjev. Vsoto določimo tako, da prvemu sumandu dodamo ali odvzamemo absolutno vrednost drugega sumanda: $(+2)+(+3)=(+5)$ in $(+2)+(-3)=(-1)$. Oklepaje in pozitivne predznake ponavadi kar izpuščamo: $2+3=5$ in $2+(-3)=-1$. Na sliki je prvi sumand pozitiven. Če je prvi sumand negativen, je postopek enak.

Relativna števila torej seštevamo tako, da k prvemu sumandu dodamo ali od njega odvzamemo absolutno vrednost drugega sumanda – dodamo tedaj, če je slednji pozitiven, in odvzamemo, če je negativen:

$$\begin{aligned}(\pm p)+(+q)&=(\pm p)+q \\ (\pm p)+(-q)&=(\pm p)-q\,.\end{aligned} \tag{8.1}$$

Odštevanje

Naj ima morje spet višino $\pm p$, pred tem pa je doživelo spremembo $+q$ (je naraslo) ali $-q$ (je upadlo). Kakšno je bilo morje pred to spremembo? Takšno, kot je obstoječe stanje z odvzeto/odšteto spremembo. S tem je postavljen model za odštevanje relativnih števil:

$$\begin{aligned}(\pm p)-(+q)&=(\pm p)-q \\ (\pm p)-(-q)&=(\pm p)+q\,.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Relativna števila torej odštevamo tako, da od prvega člena odvzamemo ali mu dodamo absolutno vrednost drugege člena – odvzamemo tedaj, če je slednji pozitiven, in dodamo, če je negativen.

Pri seštevanju in odštavanju lahko od pozitivnega skalarja odštejemo več, kot je sam velik, in dobimo negativni skalar. K negativnemu skalarju pa tudi lahko prištejemo več, kot je sam velik, in dobimo pozitiven skalar. V množici skalarjev postane odštevanje vedno mogoče.

Množenje

Višina morja se lahko spremeni n-krat za enako spremembo. S tem je definirano množenje skalarja z naravnim številom: $n\cdot(\pm q)=\pm nq$. To nas nujno sili na naslednje definicije za množenje dveh skalarjev:

$$\begin{aligned}(+p)(+q)&=+pq \\ (+p)(-q)&=-pq \\ (-p)(-q)&=+pq\,.\end{aligned} \tag{8.3}$$

Prvi dve definiciji sta samoumevni, saj pozitivni skalar $+p$ upošteva, kot posebne primere, naravna števila n. Tretji produkt pa mora po velikosti tudi znašati pq, le za njegov predznak se moramo odločiti. Ker $-p$ in $-q$ ne moreta tvoriti enako predznačenega produkta kot $+p$ in $-q$, marveč morata tvoriti nasprotno predznačenega, je odločitev na dlani.

Deljenje

Deljenje je obratna operacija od množenja in to sorodnost hočemo ohraniti. Zato so z definicijami za množenje hkrati postavljene tudi definicije za deljenje: kvocient je pozitiven, če imata deljenec in delitelj oba enaka predznaka, sicer pa je negativen.

$$
\begin{aligned}
(+p)/(+q) &= +p/q \\
(+p)/(-q) &= -p/q \\
(-p)/(-q) &= +p/q\,.
\end{aligned}
\tag{8.4}
$$

S tem so definirane štiri osnovne računske operacije nad skalarji. Definicije zagotavljajo, da še naprej veljajo vsi računski zakoni (2.1), prav kakor so doslej veljali za naravna in za decimalna števila. Skalarje bomo odslej, kadar bo potrebno, označevali z oznakami a, b in c. V takšni oznaki sta torej skrita decimalno število in njegov predznak.

8.3 Skalarna potenca

Negativna potenca

Zaporedje potenc $p, p^2, p^3, p^4 \ldots$ kaže, da je vsaka potenca dobljena z množenjem predhodne s p, in da je vsak eksponent dobljen z povečanjem predhodnega za 1. Seveda velja tudi obratno: vsaka predhodna potenca je dobljena z deljenjem s p in vsak predhodni eksponent je zmanjšan za 1. To nas kar sili, da zapisano vrsto raztegnemo v levo: $\ldots p^{-2}, p^{-1}, p^0, p^1, p^2 \ldots$ in na ta način vpeljemo potence z *negativnim eksponentom*

$$
p^{-n} = \frac{1}{p^n}\,. \tag{8.5}
$$

Z uvedbo negativnih naravnih eksponentov je odpravljena omejenost pravila za deljenje potenc z isto osnovo preko odštevanja njihovih eksponentov: to odštevanje je sedaj vedno izvršljivo. Prav tako lahko majhna števila zapišemo v eksponentni obliki na lepši način, na primer $6{,}4/10^3 = 6{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Ulomna potenca

Drugi koren od p^2 je p; od p^4 je p^2; od p^6 je p^3; nasploh se pri korenjenju sodi eksponenti zmanjšajo na polovico. Prisiljeni smo torej posplošiti, da to velja tudi za preostale, lihe eksponente: koren od p^3 je $p^{3/2}$, od p^5 je $p^{5/2}$ in tako dalje. Podoben razmislek velja za tretji koren in za vse višje korene, ter nas vodi do naslednje definicije potence z *ulomnim eksponentom*:

$$
p^{m/n} = \sqrt[n]{p^m}\,. \tag{8.6}
$$

Skalarna potenca

Definiciji za negativno potenco in za ulomno potenco zajamemo v razširjeni definiciji za negativno ulomno potenco:

$$
p^{-m/n} = \frac{1}{p^{m/n}}\,. \tag{8.7}
$$

S tem je definirana *skalarna potenca*: njena baza je (pozitivno) decimalno število in njen eksponent je poljuben skalar. Za takšno potenco ostajajo v veljavi vsa računska pravila kot za "navadno" potenco z naravnim eksponentom (5.2). Prav tako nam ponuja mamljivo možnost, da pozabimo na dosedanje korenske oznake in na pravila za računanje s koreni (5.4), ter namesto obojega uporabljamo kar ulomne eksponente.

8.4 Logaritem

Obrat potence

Vrednost potence $b^L = N$ je odvisna od njene osnove b in eksponenta L. Naj bo osnova znana, recimo 2 ali 10. Potem k vsakemu L pripada nek N, ki ga znamo izračunati. Vendar tudi k vsakemu N pripada ustrezajoč L. Poimenujmo ga *logaritem* baze b "za tvorbo" N in označimo kot $\log_b N$. Velja torej:

$$b^L = N \Longleftrightarrow L = \log_b N\,. \tag{8.8}$$

Pravila logaritmiranja

Pri iskanju logaritma za dano število smo zaenkrat omejeni zgolj na posebne primere. Tako vemo, na primer, da $2^{1/2} = 1{,}41$, zato $\log_2 1{,}41 = 1/2 = 0{,}5$. Takih primerov nam hitro zmanjka. Na srečo se lahko opremo na naslednja pravila, ki vsa sledijo iz pravil za računanje s potencami:

$$\log pq = \log p + \log q \tag{8.9}$$

$$\log \frac{p}{q} = \log p - \log q$$

$$\log p^a = a \log p\,.$$

Oznako za bazo smo kar izpustili. Če torej poznamo logaritme za posamezna števila, poznamo tudi logaritme za njihove produkte, kvociente in potence. S tem precej razširimo nabor števil, katerim znamo izračunati logaritme.

8.5 Desetiški logaritem

Zaradi desetiškega zapisa števil so posebej odlikovane potence z osnovo 10. Tako zapis $10^L = N$ enolično določa eksponent L, ki "pripada" številu N. Rečemo, da je L *desetiški logaritem* števila N in zapišemo $\log_{10} N = L$. Namesto oznake $\log_{10}$ bomo raje pisali na kratko:

$$\lg p = \log_{10} p\,. \tag{8.10}$$

Kjer ne bo škode, bomo pridevnik "desetiški" kar izpuščali.

Celi in polceli logaritmi

Ker $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$ in $10^3 = 1000$, že poznamo logaritme števil 1, 10, 100, 1000; to so: 0, 1, 2, 3. Podobno velja za vse predznačene naravne potence. Kakšni pa so logaritmi drugih števil? Ali poznamo morda kakšen L, da znamo izračunati 10^L? Da, 1/2. Z zaporednim korenjenjem izračunamo:

Tabela 8.1 Zaporedni koreni števila 10.

	10^L	N
$10^{1/2}$ =	$10^{0,500}$ =	3,162
$10^{1/4}$ =	$10^{0,250}$ =	1,778
$10^{1/8}$ =	$10^{0,125}$ =	1,334
	$10^{0,063}$ =	1,155
	$10^{0,031}$ =	1,075
	$10^{0,016}$ =	1,037
	$10^{0,008}$ =	1,018
	$10^{0,004}$ =	1,009
	$10^{0,002}$ =	1,005
$10^{1/1024}$ =	$10^{0,001}$ =	1,002

Tako smo ugotovili logaritme števil 3,162, 1,778 itd; to so 0,500, 0,250 itd. Pa ne samo teh! Če namreč poznamo logaritma L_1 in L_2 od dveh števil N_1 in N_2, poznamo tudi logaritem od števila $N_1 \cdot N_2$; to je $L_1 + L_2$. Tako je na primer logaritem števila $3{,}162 \cdot 1{,}778 = 5{,}622$ enak $0{,}500 + 0{,}250 = 0{,}750$.

S tem se pokaže pot, kako izračunati logaritem poljubnega števila N. Število N zapišemo kot produkt $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \ldots$ tistih števil, katerih logaritme že poznamo, nakar te logaritme seštejemo.

8.6 Logaritemska tabela

Izdelava tabele

Izračunajmo logaritme naravnih števil med 1 in 10! Logaritem ena je nič. Kakšen je logaritem števila dve? Število razcepimo na faktorje iz zgornje tabele. Prvi faktor mora biti manjši in čim bliže 2; to je 1,778. Drugi faktor bi moral biti $2/1{,}778 = 1{,}125$. Takega faktorja v tabeli ni. Prvi od njega nižji je 1,075. To je torej drugi faktor. Tretji faktor bi moral biti 1,125/1,075 in tako naprej. Dobimo: $2 = 1{,}778 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}037 \cdot 1{,}009$. Ustrezni logaritem je: $0{,}250 + 0{,}031 + 0{,}016 + 0{,}004 = 0{,}301$. S tem določimo logaritem 2, pa tudi logaritme $4 = 2 \cdot 2$, $8 = 4 \cdot 2$, $16 = 8 \cdot 2$, $1{,}6 = 16/10$ itd. Podobno izračunamo še logaritme 3, 5 in 7. Vse preostale logaritme določimo iz že izračunanih. Končna tabela, zaokrožena na dve decimalki, je naslednja:

Tabela 8.2 Osnovni desetiški logaritmi.

N	lg N
1	0,00
2	0,30
3	0,48
4	0,60
5	0,70
6	0,78
7	0,84
8	0,90
9	0,95
10	1,00

To je tabela desetiških logaritmov med 1 in 10 s korakom po 1. Omogoča nam poiskati približni logaritem kateregakoli števila, na primer $\lg 35 = \lg 3{,}5 + \lg 10 = 1{,}54$. Pri iskanju logaritma števila 3,5, ki ga ni v tabeli, smo si pomagali z interpolacijo [6.3] med 3 in 4. Z računanjem večjega števila zaporednih korenov in na več decimalk lahko logaritemsko tabelo še mnogo bolj zgostimo, recimo na korak $1 \cdot 10^{-3}$ ali celo na $1 \cdot 10^{-6}$.

Uporaba tabel

Zakaj je dobro imeti podrobno tabelo logaritmov? Zato, ker z njimi lažje izračunamo produkte, kvociente in ulomne potence (torej tudi korene) dolgih števil. Produkt dveh števil izračunamo tako, da poiščemo njuna logaritma, ju seštejemo in nato poiščemo dobljenemu logaritmu ustrezajoče število. Delimo tako, da logaritma odštevamo. Potenciramo pa tako, da logaritem množimo z ulomnim eksponentom. Uporaba logaritmov torej prevede množenje na seštevanje, deljenje na odštevanje in potenciranje na množenje oziroma deljenje. Zakaj si ne bi olajšali življenja, če si ga lahko?

8.7 Drsno računalo

Logaritemske tabele so neudobne za prenašanje. Zato iščemo, kako bi logaritme na kakšen drug način izkoristili za udobno množenje in deljenje. Domnevamo, da bo pri tem osrednjo vlogo igralo pravilo, da je logaritem produkta/kvocienta dveh števil enak vsoti/razliki logaritmov teh dveh števil (8.9). To nam da misliti.

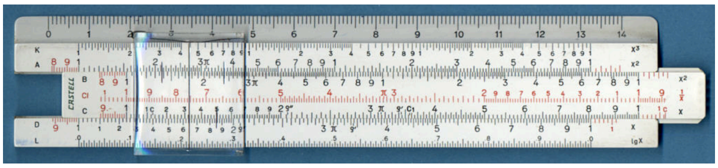
Logaritemske palice

Kaj ko bi imeli deset palic, označenih s številkami od 1 do 10, in z dolžinami $\lg 1$, $\lg 2$ … $\lg 10$ metra? Ko bi staknili palico 2 (z dolžino $\lg 2$) in palico 3 (z dolžino $\lg 3$), bi dobili sestavljeno palico, ki bi bila dolga $\lg 2 + \lg 3$. Ker vemo, da je to enako $\lg(2 \cdot 3) = \lg 6$, bi morala biti sestavljena palica enako dolga kot palica številka 6. Množenje $2 \cdot 3$ bi torej lahko izvedli z "logaritemskimi" palicami takole: na konec palice 2 bi nataknili začetek palice 3 ter pogledali, s katero palico se sestavek ujema. Oznaka te palice bi bila iskani produkt.

Podobno bi izvedli deljenje $6 : 3$. Od konca palice 6 bi položili palico 3 nazaj in pogledali, s katero palico se ujema nepokriti preostanek. Oznaka te palice, to bi bil iskani kvocient.

Logaritemska skala

Seveda ni treba, da snop palic zares izdelamo, ampak jih raje narišemo, kot zareze, na eno samo ploščato palico, "logaritemsko skalo". Na skalo spravimo mnogo več zarez kot deset in jih na primeren način označimo. Tudi ni treba, da je skala dolga en meter, ampak je lahko krajša. Za računanje potem potrebujemo dve taki skali, ki ju premikamo drugo ob drugi. Tako smo izumili *drsno računalo*.



Slika 8.2 Drsno računalo. Osnovni skali sta D in drseči C. Računalo kaže produkt $1{,}24 \cdot 1{,}32 = 1{,}64$. Hkrati kaže kvocient $1{,}64/1{,}32 = 1{,}24$. Skala A je kvadrat skale D in kaže $1{,}64^2 = 2{,}7$ oziroma $\sqrt{2{,}7} = 1{,}64$. Podobno velja za skalo K, ki je kub skale D. Skala L pa je logaritem skale D in kaže $\lg 1{,}64 = 0{,}215$. (Anon)

Z drsnim računalom udobno množimo in delimo, le za lego decimalne vejice v rezultatu moramo poskrbeti sami. Natančnost računanja je tem večja, čim daljši sta obe skali. Pri dolžini 25 cm je dosežena natančnost na 2–3 značilna mesta, kar je mnogokrat povsem dovolj. Uporabnost računala še povečamo, če nanj narišemo druge skale, ki služijo za izračunavanje kvadratov (in korenov), kubov (in kubičnih korenov), logaritmov, kotnih razmerij (sinusov, kosinusov, tangensov) in še marsičesa. □

9 Funkcije in grafi

Funkcije – Zapisi funkcij – Sorazmernost – Obratna sorazmernost – Potenčne funkcije – Polinomske funkcije – Druge funkcije – Prileganje podatkom

9.1 Funkcije

Spremenljivke

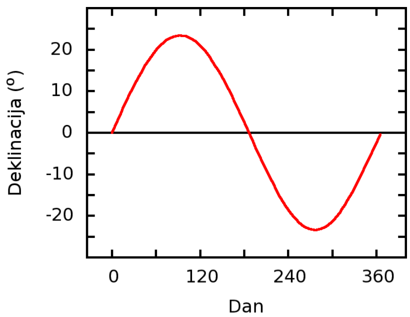
Dnevi se nizajo drug za drugim in štejejo čas, ki je potekel od izbranega dne v preteklosti. Rečemo, da je pretečeni čas t spremenljiva količina oziroma *spremenljivka*. Sonce vsak dan kulminira in njegova deklinacija (kotni odmik od nebesnega ekvatorja) je tudi spremenljivka: od dne do dne se spreminja. V svetu je očitno polno spremenljivk.

Odvisnost spremenljivk

Začenši z dnevom spomladanskega enakonočja lahko za vsak dan v letu izmerimo Sončevo deklinacijo in rezultate zapišemo v *tabelo*. Takšna tabela – ki jo že poznamo [6.3] – kaže, kako se deklinacija spreminja s časom. Deklinacija je odvisna od časa. Rečemo, da je čas *neodvisna spremenljivka* oziroma *argument* in deklinacija *odvisna spremenljivka* oziroma *funkcija*. Kakšna je njuna medsebojna odvisnost, pa kaže tabela.

Graf funkcije

Tabela, ki opisuje medsebojno povezavo dveh spremenljivk, ni posebno pregledna. Mnogo bolj nazorno jo prikažemo z *grafom*: vrednosti neodvisne spremenljivke predstavimo z razdaljami vzdolž vodoravne *abscisne osi*, vrednosti funkcije pa z odmiki vzdolž navpične *ordinatne osi*. Dolžinski enoti vzdolž obeh osi sta poljubni in ju priročno izberemo.



Slika 9.1 Graf deklinacije Sonca v odvisnosti od časa. Čas, merjen v dnevih od pomladnega enakonočja, je neodvisna spremenljivka ali argument. Deklinacija, merjena v stopinjah, pa je odvisna spremenljivka ali funkcija.

Enačba funkcije

Tudi razsežnosti teles so "spremenljive". Tako, na primer, si lahko predstavljamo kroge različnih polmerov. Polmer kroga je tedaj neodvisna spremenljivka. Vemo pa, da je z njegovo izbiro določen tudi obseg: $C = 2\pi r$. Obseg kroga je torej funkcija polmera. Funkcijska odvisnost pa ni podana niti s tabelo, niti z grafom, marveč na posebno odličen način, z *enačbo*. Ko v enačbo vstavimo vrednost za polmer, znamo iz nje izračunati, kakšen je pripadajoči obseg. Na ta način lahko zgradimo ustrezno tabelo in iz nje narišemo graf.

Kar velja za obseg kroga, velja tudi za njegovo ploščino – je funkcija polmera: $S = \pi r^2$. Funkcijska odvisnost pa je sedaj drugačna. In končno je tudi prostornina krogle funkcija polmera: $V = (4\pi/3)r^3$. Očitno obstaja med lastnostmi teles še mnogo funkcijskih povezav.

9.2 Zapisi funkcij

Oblike funkcij

Odmislimo tip spremenljivk (čas, kot, razdalja itd.) in označimo kakršnokoli neodvisno spremenljivko z x in odvisno spremenljivko z u. Kar preostane, so zgolj različne oblike funkcijskih odvisnosti; iz navedenih konkretnih primerov (za krog in kroglo) tako izluščimo naslednje oblike: $u = ax$, $u = ax^2$ in $u = ax^3$, pri čemer je a poljubno, a nespremenljivo število. Takšnemu številu rečemo konstanta ali parameter. Seveda si lahko zamislimo tudi neomejeno mnogo drugačnih oblik.

Eksplicitni in implicitni zapis

Enačba, ki opisuje funkcijsko odvisnost dveh količin, vsebuje dve spremenljivki. Kot že vemo, se enačba ne spremeni, če na levi in desni strani izvedemo isto operacijo. Zato lahko vsako – dovolj pohlevno – funkcijsko odvisnost zapišemo na različne, med seboj enakovredne načine, na primer: $u = ax^2$, $x = \sqrt{(u/a)}$ in $u - ax^2 = 0$. Prvi in drugi obliki rečemo *eksplicitna* in zadnji *implicitna*. Za obe eksplicitni obliki tudi rečemo, da sta druga drugi *obratni*. Splošno povezavo dveh skalarnih količin u in x pa zapišemo simbolično kot $u = f(x)$ ali $x = g(u)$ ali $F(x,u) = 0$.

Funkcije več spremenljivk

Nikjer ni zahtevano, da mora biti funkcija odvisna zgolj od ene neodvisne spremenljivke. Lahko je odvisna od več njih, kakor kaže zgled za prostornino valja: ta je odvisna od njegovega polmera in višine: $V = \pi r^2 h$. Na splošno bomo tako za dve neodvisni spremenljivki zapisali eksplicitno $u = f(x,y)$ (ali katero izmed obeh obratnih oblik) in implicitno $F(x,y,u) = 0$.

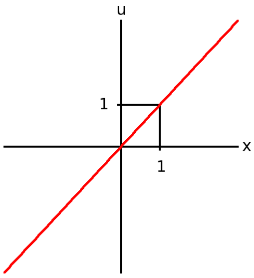
9.3 Sorazmernost

Kadar je kvocient dveh soodvisnih spremenljivk zmeraj enak, kakor na primer kvocient med obsegom poljubnega kroga in njegovim polmerom, imamo opravka s *sorazmernostjo*:

$$u = ax\,. \tag{9.1}$$

Premica

Graf te funkcije narišemo tako, da v primerno izbranih točkah abscise izračunamo ustrezne ordinate in dobljene točke med seboj povežemo. Nastane *premica*. Pravzaprav je dovolj, da določimo le dve točki: $u(0) = 0$ in $u(1) = a$, ter skoznju potegnemo premico. Tako vidimo, kakšen pomen ima koeficient a: označuje nagibni kot φ premice glede na abscisno os, $|a| = \tan\varphi$. Zato mu rečemo tudi smerni koeficient. Večji kot je, bolj strma je premica. Kadar je negativen, je premica padajoča.



Slika 9.2 Sorazmernost dveh količin $u = ax$. Graf je premica skozi izhodišče. Slika velja za koeficient $a = 1$. Večji kot je, bolj strma je premica. Če je koeficient negativen, je premica prezrcaljena preko abscisne osi, torej padajoča.

Obratna funkcija k sorazmernosti je tudi sorazmernost: $x = u/a$. Le smerni koeficient je zdaj drugačen, namreč $1/a$. Ni treba risati novega grafa, ampak že obstoječega pogledamo "od strani": ne torej vzdolž osi x, na katero so nataknjene ordinate, ampak vzdolž osi u, na katero so nataknjene abscise. Kogar to moti, lahko graf zavrti v nasprotni smeri urinega kazalca za 90°. Os x postane navpična in os u vodoravna. Da kaže v levo namesto v desno, pa je zanimiva poživitev.

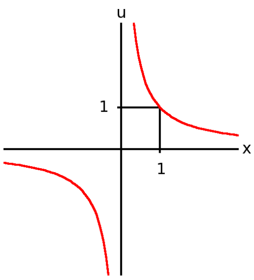
9.4 Obratna sorazmernost

Kadar je produkt dveh soodvisnih spremenljivk zmeraj enak, kakor na primer produkt med silo in potjo pri dvigu bremena po poljubnem klancu na dano višino, imamo opravka z *obratno sorazmernostjo*:

$$u = \frac{a}{x} \,. \tag{9.2}$$

Hiperbola

Izračunamo ordinate v primernih pozitivnih abscisnih točkah, na primer 0, 1/2, 1, 2 in ∞ (neskončno), ter jih povežemo. Enako storimo za ustrezne negativne točke. Nastane *hiperbola*. Definirana je v vsaki abscisni točki razen v izhodišču, kjer je neskončna. Rečemo, da ima tam *pol* oziroma da je ordinatna os *navpična asimptota* hiperbole. Daleč proč od izhodišča pa se čedalje tesneje približuje abscisni osi. Rečemo, da je ta *vodoravna asimptota*. Koeficient a določa, koliko je teme hiperbole oddaljeno od izhodišča.



Slika 9.3 Obratna sorazmernost dveh količin $u = a/x$. Graf poimenujemo hiperbola. Slika velja za koeficient $a = 1$. Večji koeficient pomeni večji odmik temena hiperbole od izhodišča. Če je koeficient negativen, je graf prezrcaljen preko abscisne osi.

Obratna funkcija k obratni sorazmernosti je tudi obratna sorazmernost: $x = a/u$. Še celo koeficient je isti. Funkcijo vidimo, ko obstoječi graf pogledamo "od strani".

9.5 Potenčne funkcije

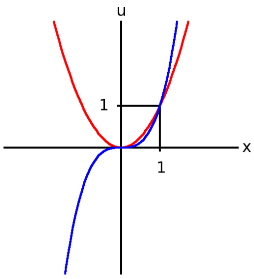
Naslednja vrsta funkcij, srečanih doslej, so naravne potence, na primer odvisnost med ploščino kroga in njegovim polmerom, ali med prostornino krogle in njenim polmerom:

$$u = ax^n\,. \tag{9.3}$$

Parabole

Graf kvadratne potence $u = ax^2$ poteka iz točke $u(0) = 0$ skozi $u(1) = a$ in naprej s čedalje večjo strmino. Graf je simetričen glede na ordinatno os: $u(-x) = u(x)$. Negativni koeficient a pomeni, da graf iz izhodišča pada, ne raste. Vse druge sode potence – njihovi eksponenti so mnogokratniki števila dve – imajo podobne grafe. Rečemo jim *sode parabole*.

Tudi graf kubne potence $u = ax^3$ poteka iz točke $u(0) = 0$ skozi $u(1) = a$ in naprej čedalje bolj strmo. Vendar je sedaj graf simetričen glede na izhodišče: $u(-x) = -u(x)$. Negativni koeficient a pomeni, da graf skozi izhodišče pada, ne raste. Vse druge lihe potence – tiste, ki niso sode – imajo podobne grafe. Rečemo jim *lihe parabole*.



Slika 9.4 Potenčna odvisnost količin $u = ax^2$ (rdeča) in $u = ax^3$ (modra). Grafa imenujemo paraboli, kvadratno in kubno. Slika velja za koeficienta $a = 1$. Večji koeficient pomeni bolj strmo naraščanje. Če je koeficient negativen, je graf prezrcaljen preko abscisne osi.

Obratne funkcije k potenčnim so korenske funkcije. Njihovi grafi so "od strani gledani" grafi potenčnih funkcij. Lihi koreni so definirani za vse vrednosti argumenta, sodi pa le za pozitivne. Grafi slednjih so tudi dvolični: eni vrednosti argumenta ustrezata kar dve vrednosti funkcije, namreč pozitivni in negativni koren.

9.6 Polinomske funkcije

Linearna funkcija

V dosedanjih funkcijah so nastopali le produkti in kvocienti spremenljivk in parametrov (naravne potence so pravzaprav tudi le produkti). Vpeljimo še vsote in razlike! Najpreprostejša tovrstna funkcija je

$$u = ax + b\,. \tag{9.4}$$

Rečemo ji *linearna funkcija*. Od sorazmernosti se razlikuje po dodatnem členu b. Zato je njen graf že poznana premica, vendar premaknjena iz izhodišča paralelno vzdolž ordinatne osi za b; navzgor, če je pozitiven, in navzdol, če je negativen.

Kje premica seka ordinatno os, izračunamo tako, da v enačbo vstavimo $x = 0$ in izračunamo u. Seveda dobimo $u = b$. Presečišče premice z abscisno osjo pa dobimo tako, da v enačbo vstavimo

$u = 0$, s tem pridelamo *linearno enačbo* $ax + b = 0$ in iz nje izračunamo $x = -b/a$.

Kvadratna funkcija

Naslednja po vrsti je *kvadratna funkcija*:

$$u = ax^2 + bx + c\,. \tag{9.5}$$

Kakšen je njen graf? Če $b = 0$, je očitno že znana parabola, premaknjena vzdolž ordinatne osi za c gor ali dol. Linearni člen bx pa vse skupaj zaplete. Bi se ga morda lahko znebili? Da, s pretvorbo funkcije v "temensko" obliko $u = a(x + b/2a)^2 - (b^2/4a) + c$, torej v kvadratno funkcijo $u = aX^2 + D$ z novo neodvisno spremenljivko $X = x + b/2a$ in z novim konstantnim členom $D = c - b^2/4a$. To pa že znamo narisati: teme ima pri $X = 0$, to je pri $x = -b/2a$, in premaknjeno je po navpičnici za D.

Presečišče parabole z ordinatno osjo določimo tako, da izračunamo vrednost kvadratne funkcije za $x = 0$. Dobimo $u = c$. Določitev presečišč z abscisno osjo pa vodi do *kvadratne enačbe* v temenski obliki; po ločitvi členov in korenjenju dobimo dve formalni rešitvi:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \surd(b^2 - 4ac)}{2a}\,. \tag{9.6}$$

Dve dejanski rešitvi – skalarja – dobimo le tedaj, ko je podkorenski izraz pozitiven.

Višji polinomi

Z dodajanjem čedalje višjih potenc lahko nadaljujemo v nedogled. Tako dobimo *polinomske funkcije* višjih stopenj. Linearna funkcija je polinom prve stopnje in kvadratna funkcija je polinom druge stopnje. V polinomu stopnje n, daleč proč od izhodišča, prevladuje člen ax^n: po absolutni vrednosti je večji od vseh ostalih. Tako se graf tudi vede: daleč proč od izhodišča je podoben ustrezni potenčni funkciji. Blizu izhodišča pa seveda vijuga po svoje. Ker ima linearna funkcija največ eno ničlo, kvadratna pa dve, predvidevamo, da ima tak polinom največ n ničel.

9.7 Druge funkcije

Gradnja funkcij

Polinome lahko med seboj seštevamo, odštevamo, množimo in delimo. V prvih treh primerih spet dobimo polinom. V zadnjem primeru pa dobimo *racionalne* funkcije in njim ustrezajoče grafe ter enačbe. Posebno preprost primer je že poznana obratna sorazmernost. Če jih še korenimo, pa dobimo prav hude *iracionalne* funkcije. Vse skupaj – polinome, racionalne in iracionalne funkcije – poimenujemo algebrajske funkcije. S tem pravzaprav izrazimo pričakovanje, da morda obstajajo še druge, recimo jim *transcendentne* funkcije. Če bomo katero kdaj srečali in bo pomembna, se ji bomo posvetili tedaj.

Preoblikovanje grafov

Risanje grafov za linearno in kvadratno funkcijo nam kaže, kako lahko dani graf $u = f(x)$ preoblikujemo in dodelujemo. — Premaknemo ga vzdolž abscisne osi: $x \to x - a$ in vzdolž ordinatne osi: $u \to u - a$. Če je a pozitiven, je premik usmerjen v desno (naprej), sicer v levo (nazaj). — Raztegnemo ga vzdolž abscisne osi: $x \to x/a$ in vzdolž ordinatne osi: $u \to u/a$. Če je a večji od ena, se graf raztegne, sicer skrči. — Prezrcalimo ga preko abscisne osi: $x \to -x$ ali preko ordinatne osi: $u \to -u$. Funkcije, za katere velja $f(-x) = f(x)$, so torej simetrične glede na ordinatno os; po zgledu sodih potenc jih poimenujemo *sode funkcije*. Funkcije $f(-x) = -f(x)$ so simetrične glede na izhodišče in jim iz podobnega razloga rečemo *lihe funkcije*.

Reševanje enačb

Reševanje linearne in kvadratne enačbe nam ponuja tudi zgled, kako reševati poljubno enačbo $F(x,a) = 0$, pri čemer smo z a označili enega ali več njenih parametrov. Cilj nam je, da enačbo preoblikujemo v obliko $x = f(a)$, pri čemer je $f(a)$ izračunljiv števislki izraz. Enačba se pri tem ne spremeni, če nad levo in desno stranjo uporabimo enako operacijo: kaj prištejemo ali odštejemo; s čim pomnožimo ali delimo; potenciramo; korenimo; in podobno. Seveda pa ni nobenega zagotovila, da bo vsaka enačba, ki jo bomo kdaj srečali, tudi rešljiva.

9.8 Prileganje podatkom

Interpolacija

Funkcija, ki je opisana s tabelo, je poznana zgolj v posameznih točkah. Kakšne pa so vrednosti med dvema točkama $u_1 = u(x_1)$ in $u_2 = u(x_2)$? Najlažje je, če tam aproksimiramo funkcijo s premico. V vmesni točki x ima funkcija potem vrednost $u = u_1 + (x - x_1)(u_2 - u_1)/(x_2 - x_1)$. To je *linearna interpolacija*. Ne da bi kaj dosti premišljevali, smo jo doslej že večkrat uporabili: pri tabelah sončnih deklinacij [6.3] in anomalij [6.6] ter pri tabelah kotnih razmerij [7.5] in logaritmov [8.6]. Zdaj, ko smo spoznali linearno funkcijo, smo interpolacijski obrazec tudi zapisali.

Enačba grafa

Če je funkcija podana z enačbo, izračunamo in narišemo njen graf bolj ali manj zlahka. Obratna pot je mnogo težja: če poznamo kakšen graf, s katero enačbo bi ga opisali? Ne gre drugače, kot da ga primerjamo z grafi že poznanih funkcij, ugotovimo, kateremu je najbolj podoben in nastavimo funkcijske parametre tako, da je ujemanje najboljše.

Poglejmo najpreprostejši primer, ko nas izmerjene točke (x,u) vabijo, da skoznje potegnemo premico. To storimo tako, da se odmiki merskih točk od nje navzgor in navzdol "izravnajo". Izravnavanje ocenimo kar na oko, vendar upamo, da bomo kdaj v prihodnje našli bolj "objektiven" način. S tem smo merske podatke aproksimirali z grafom linearne funkcije $u = ax + b$. Vrednost parametra a določimo iz strmine narisane premice:

$a = \Delta u / \Delta x$. Parameter b pa je podan s presečiščem premice in ordinatne osi.

Kaj pa, če je funkcija videti kot potenčna funkcija $u = ax^n$? Tedaj enačbo logaritmiramo in dobimo $\lg u = n \lg x + \lg a$, kar je linearna funkcija $U = nX + A$ z novima spremenljivkama in z novim parametrom. Narišemo merske točke (X, U) in – če res tvorijo premico – po že znani metodi določimo vse parametre. Seveda velja postopek le, kadar so vrednosti logaritmiranih količin pozitivne. Eksponent pa je lahko pozitiven ali negativen. □

10 Posebne funkcije

Posebne funkcije – Geometrijska vrsta – Binomska vrsta – Eksponentna funkcija – Logaritemska funkcija – Kotne funkcije – Kotne tabele – Grafi kotnih funkcij – Obratne kotne funkcije

10.1 Posebne funkcije

Tipi funkcij

Funkcije, ki smo jih obravnavali do sedaj, so bile bodisi polinomi, bodisi njihovi kvocienti ali koreni. Vprašali smo se tudi, ali morda v naravi obstajajo še kakšne odvisnosti, ki jih ne moremo opisati z omenjenimi "algebrajskimi" funkcijami. Kje naj iščemo take posebne, "transcendentne" funkcije? V doslej skritih kotičkih matematike in narave!

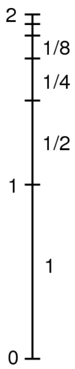
10.2 Geometrijska vrsta

Polinome lahko zgradimo iz toliko členov, kot hočemo. Kaj če bi uporabili neskončno mnogo členov? Najpreprostejši tovrstni izraz je naslednji:

$$G = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{10.1}$$

Konvergenca

To je *geometrijska vrsta*. V principu lahko za vsak argument x izračunamo vsoto iz toliko vodilnih členov, kot hočemo. Za $x = 0$ je vrsta trivialno enaka 1. Za $x = 1$ vsota očitno narašča preko vsake meje, prav tako za argumente $x > 1$. Za $x = 1/2$ pa se vsota čedalje tesneje bliža k vrednosti $G = 2$. To uvidimo takole: na palico enotne dolžine nataknemo polovico te palice, nato polovico polovice in tako dalje. Rečemo, da vsota *konvergira* k navedeni *limiti* oziroma da je vrsta *konvergentna*.



Slika 10.1 Vsota geometrijske vrste $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ konvergira k 2. Količnik med dvema zaporednima členoma, kjerkoli v vrsti, znaša 1/2. Vrste z drugačnim količnikom, vendar manjšim od 1, tudi konvergirajo.

Limitne vsote

Pričakujemo, da geometrijska vrsta konvergira za vsak argument, ki je absolutno manjši od 1. Kako to dokazati in kako najti ustrezne limite? Delno vsoto $G = 1 + x + x^2 + \dots x^n$ pomnožimo na obeh straneh z x ter dobimo $xG = x + x^2 + \dots x^{n+1}$. Obe enačbi med seboj odštejemo ter pridelamo $(1 - x)G = 1 - x^{n+1}$ oziroma $G = (1 - x^{n+1}) / (1 - x)$. Nato povečujemo n proti neskončnosti. Člen x^{n+1} se pri tem zmanjšuje na nič, če je le $|x| < 1$. Preostane

$$G = \frac{1}{1-x}\,, |x| < 1\,. \tag{10.2}$$

Vrsta je torej res konvergentna (za navedene argumente) in za vsak argument tudi vidimo, kam vrsta konvergira. Za $x = 1/3$, na primer, konvergira proti $G = 3/2$.

10.3 Binomska vrsta

Potence binoma

Posebno lepe polinome dobimo, če izračunamo potence binoma $(1+x)^n$ za naraščajoče vrednosti eksponenta n. Pridelani polinom stopnje n ima $n+1$ členov, vsebujočih potence x^0, x^1, x^2 in tako naprej do x^n. Koeficienti pred njimi so pozitivni in simetrični:

```
n = 0         1
n = 1        1 1
n = 2       1 2 1
n = 3      1 3 3 1
n = 4     1 4 6 4 1
```

Vsak koeficient je vsota dveh koeficientov, ki ležita nad njim. Z nekaj truda nam uspe najti naslednji vzorec

$$B = (1+x)^n = \tag{10.3}$$
$$1 + \frac{n}{1}\,x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \ldots + x^n\,.$$

Binomska vrsta

Razvoj potence binoma v polinom velja, če je eksponent n naravno število. Kaj pa, če stisnemo zobe in za eksponent zapišemo skalar s, recimo $-1/2$? Leva stran ima potem še vedno svoj pomen, saj postane splošna potenca. Desna stran pa se ne konča, ampak število členov naraste brez konca:

$$B = (1+x)^s = \tag{10.4}$$
$$1 + \frac{s}{1}\,x + \frac{s(s-1)}{1\cdot 2}\,x^2 + \frac{s(s-1)(s-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,x^3 + \ldots\,.$$

Rečemo, da je nastala *binomska vrsta*. Zelo je podobna geometrijski vrsti, saj v njej prav tako nastopajo zaporedne potence, le koeficienti pri njih so drugačni. Obe vrsti imata obliko

$$u = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots \tag{10.5}$$

Takšne vrste imenujemo *potenčne vrste*. Pričakujemo, da bomo kakšno še srečali.

V principu lahko v binomski vrsti izračunamo toliko členov, kolikor hočemo. Pojavita pa se seveda dve vprašanji: ali in za kakšne argumente je vrsta konvergentna ter ali je njena vsota (za vsak legitimni argument) enaka potenci na levi strani.

Konvergenčni kriterij

Binomska (in tudi drugačna potenčna) vrsta je gotovo konvergentna, če so vsi njeni repni členi (absolutno) manjši od ustrezajočih členov konvergentne geometrijske vrste. Končno število začetnih členov pač ne šteje. Pri geometrijski vrsti so, kot vemo, kvocienti zaporednih členov konstantni in absolutno manjši od ena. Kakšna pa je stvar pri binomski vrsti? Ne pričakujemo, da bodo kvocienti konstantni, saj bi na ta način imeli opravka spet z geometrijsko vrsto. Mogoče pa je, da (pri izbrani vrednosti argumenta) limitirajo h kakšni vrednosti r, in je ta vrednost absolutno manjša od 1. Potem je binomska vrsta res členoma omejena z geometrijsko vrsto s koeficientom r. Pogoj za konvergenco binomske (in tudi druge potenčne) vrste je torej

$$|u| < \infty \Longleftrightarrow \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} x \right| < 1 \,. \tag{10.6}$$

Oznaka $\lim n \to \infty$ pomeni limitno vrednost kvocientov pri pomikanju vzdolž neskončnega repa. Kvocient a_{n+1}/a_n v binomski vrsti znaša $(s - n)\,/\,(n + 1)$. Pri velikih n postane enak -1, zato pride do konvergence le za $|x| < 1$. Da pa so iz vrste izračunane vrednosti res enake potenci na levi, se prepričamo z nekaj konkretnimi izračuni.

Konvergenčni kriterij tudi pove, da v vsaki konvergentni vrsti (absolutna) velikost členov pada proti nič. Morda je res tudi obratno? Žal ne. Znana je namreč "harmonična" vrsta $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$, ki ne konvergira. To uvidimo takole. Dva člena $(1/3 + 1/4)$ sta večja od 1/2. Štirje členi $(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)$ so tudi večji od 1/2 in tako naprej. Celotna harmonična vrsta je torej večja od vrste $1 + 1/2 + 1/2 + 1/2 + \ldots$, ki pa je očitno divergentna.

Računska uporaba

Binomska vrsta je zelo primerna za izračun korenov. Številu A, ki ga hočemo koreniti, poiščemo primeren približni koren a in zapišemo $A = a^2 + b = a^2(1 + b/a^2)$, torej $A^{1/2} = a \cdot (1 + b/a^2)^{1/2}$. Paziti moramo le, da je drugi člen binoma manjši od 1. Čim manjši je, tem bolje. Potem binom razvijemo v vrsto in izračunamo ter seštejemo nekaj prvih členov. Včasih je dovolj že en sam. Podobno računamo tudi višje korene.

10.4 Eksponentna funkcija

Obrestovanje

Posojeni denar u_0 "raste" s pretečenimi leti N, kakor pove že spoznana obrestno obrestna enačba (5.6): $u = u_0\,(1 + p)^N$. Pri tem se količina denarja povečuje konec vsakega leta. To ni čisto "pošteno", pravijo pohlepni posojilodajalci; bolj "prav" bi bilo, da se povečuje v krajših časovnih korakih, recimo vsake $1/n$ leta, in sicer za ustrezno manjšo obrestno mero p/n. Potem nastane po N letih $u = u_0\,(1 + p/n)^{nN}$ denarja. Čim krajši je časovni interval obrestovanja, to je, čim večji je n, tem bolj denar zraste v opazovanem številu let.

Eksponentna vrsta

Zapisani binom lahko polepšamo. Najprej ga s substitucijo $p/n = 1/m$ spremenimo v obliko $(1 + 1/m)^{mpN}$ in nato s substitucijo

$pN = x$ v obliko $(1 + 1/m)^{mx}$. Slednjo razvijemo v binomsko vrsto. Nato privzamemo, da je m zelo velik in zanemarimo tiste člene, ki imajo v imenovalcih potence m. Tako pridelamo naslednjo potenčno vrsto za x in z njo definiramo novo, *eksponentno funkcijo*:

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{10.7}$$

Zaradi krajšega pisanja smo uvedli oznako $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k$, *fakulteto*. Z naraščajočim k limitira razmerje zaporednih členov $|x/(k+1)|$ proti nič in sicer za vsakršno vrednost argumenta. Vrsta je torej konvergentna za $|x| < \infty$.

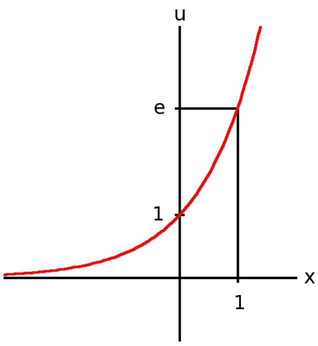
Eksponentna funkcija pove, za kakšen faktor naraste začetna količina denarja, ki se nenehno obrestuje, če poznamo produkt med njegovo obrestno mero na časovno enoto (p) in pretečenimi časovnimi enotami (N). Pri $p = 0{,}05$/leto in $N = 10$ let je torej treba izračunati $\exp(pN) = \exp(0{,}5)$. Vidimo tudi, da dvakrat večja obrestna mera naredi v dvakrat krajšem času enako mnogo denarja.

Eksponentna funkcija

Ko v eksponentno vrsto vstavimo $x = 1$ in seštejemo nekaj prvih členov, dobimo 2,71. To je približek, na tri mesta, k številu e, ki bi ga dobili s seštevanjem "vseh" členov. Ker je $(1 + 1/m)^{mx}$ enako $[(1 + 1/m)^m]^x$, uvidimo še

$$\mathrm{e}^x = \exp(x). \tag{10.8}$$

Eksponentna funkcija je torej potenca z osnovo e in z eksponentom kot spremenljivko. S tem smo tudi upravičili njeno ime. Tako raste denar, število ljudi v ugodnih razmerah in še marsikaj.



Slika 10.2 Graf eksponentne funkcije $u = \mathrm{e}^x$. Bolj splošna funkcija $u = A\mathrm{e}^{kx}$ seka ordinatno os v A, s k pa je urejena tamkajšnja strmina. Negativni vrednosti prvega in drugega parametra pomenita zrcaljenje preko abscisne in ordinatne osi.

Eksponentne funkcije ni dobro zamenjati s potenčno, ki ima osnovo, ne eksponent, za spremenljivko.

10.5 Logaritemska funkcija

Naravni logaritem

K eksponentni funkciji obstaja obratna funkcija – logaritem z osnovo e. Rekli mu bomo *naravni logaritem*:

$$u = \mathrm{e}^x \Longleftrightarrow \log_{\mathrm{e}} u = x\,. \tag{10.9}$$

Namesto $\log_e$ bomo raje pisali krajše:

$$\ln u = \log_e u \,. \tag{10.10}$$

Graf logaritma je – kakor mora biti – s strani pogledan graf za eksponentno funkcijo. Definiran je le za pozitivne vrednosti argumenta.

Sprememba logaritemske baze

Vrednosti eksponentne funkcije zlahka izračunamo iz njene vrste in jih tabeliramo. S tem hkrati izdelamo tabelo za naravne logaritme. Pojavi se vprašanje, ali morda lahko iz znanih naravnih logaritmov izračunamo desetiške. Da: iz $u = 10^x$ z naravnim logaritmiranjem dobimo $\ln u = x \ln 10$ in z desetiškim logaritmiranjem $\lg u = x$ ter iz obojega

$$\lg u = \frac{\ln u}{\ln 10} \,. \tag{10.11}$$

Logaritma sta sorazmerna. Sorazmernostni koeficient izračunamo z eksponentno vrsto: $\ln 10 = 2{,}30$.

Sprememba eksponentne baze

Morda lahko povežemo tudi eksponentni funkciji z osnovo e in z osnovo 10? Spet da: iz $10^x = \exp(\ln(10^x))$ sledi

$$10^x = e^{x \ln 10} \,. \tag{10.12}$$

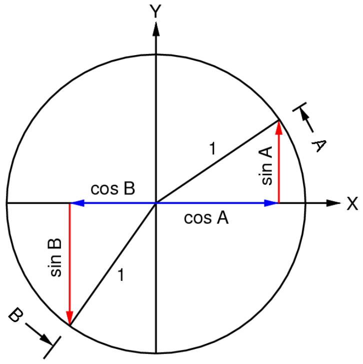
Kar velja za desetiški logaritem in desetiško eksponentno funkcijo glede povezanosti z "naravnim" logaritmom in "naravno" eksponentno funkcijo, velja seveda tudi za logaritme in eksponentne funkcije s poljubno (pozitivno) osnovo.

10.6 Kotne funkcije

Pri klancu je razmerje med njegovo višino h in diagonalo d enolično odvisno od nagibnega kota. Drugače rečeno: to razmerje je funkcija kota. Razmerje smo svoj čas krstili za sinus (7.7) in tako ga bomo poimenovali tudi kot funkcijo. Podobno smo definirali še razmerji kosinus in tangens in tudi na ti dve razmerji zdaj pogledamo kot na funkciji kota. Vse skupaj bomo poimenovali *kotne funkcije*.

Enotni krog

Kotne funkcije smo definirali le za klance, ki imajo dvižne kote med 0 in 90° oziroma med 0 in π/2. Vendar nam nič ne brani, da definicije razširimo na še večje kote. Vizirni kazalec na astrolabu z radijem r – spremenljiv klanec – pač zasučemo za poljubno velik kot φ. Pri zasuku se kazalec dotakne oboda v neki točki. Projekcije te točke na vodoravno in navpično os bomo izkoristili za razširjeno definicijo kotnih funkcij.



Slika 10.3 Enotni krog. Krog z radijem 1 služi za razširjeno definicijo kotnih funkcij za poljubni kot. Prikazani sta funkciji sinus in kosinus za dva kota. Prvi kot je z intervala $[0, \pi/2]$ in drugi z intervala $[\pi, 3\pi/2]$. Na prvem intervalu sta obe funkciji pozitivni in na drugem negativni.

Kotne funkcije

Višina vizirne točke nad ali pod vodoravno osjo astrolaba je daljica y; če je usmerjena navzgor, jo proglasimo za pozitivno, če navzdol, za negativno. Podobno je z razdaljo x točke od navpične osi astrolaba: če je usmerjena "naprej", naj bo pozitivna, sicer negativna. Dolžini y in x poimenujemo (predznačeni) koordinati opazovane obodne točke ter definiramo:

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= \sin\varphi \\ \frac{x}{r} &= \cos\varphi \\ \frac{y}{x} &= \tan\varphi\,. \end{aligned} \tag{10.13}$$

S tem so kotne funkcije definirane za poljuben kot med 0 in 2π. Ta kot štejemo od vodoravne osi proti navpični, torej v nasprotni smeri urinega kazalca. Definicijo uveljavimo tudi za še večje kote (ko naredi kazalec več kot en obrat) in za negativne kote – tiste, ki jih merimo v nasprotni smeri, torej v smeri urinega kazalca. Dosedanje definicije so zajete kot poseben primer.

Veljavnost izrekov

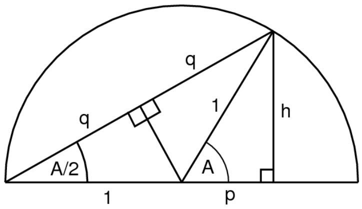
Kaj pa je z že spoznanimi osnovnimi izreki (7.8) ter s sinusnim (7.11) in kosinusnim (7.12) izrekom? Ali ostajajo v veljavi tudi za večje in celo za negativne kote? Z nekaj risbami in računi se prepričamo, da je odgovor pritrdilen. Pri tem smo deležni še nepričakovanega blagoslova. V sinusnem izreku namreč ni treba za topi kot A pisati $\sin(180° - A)$, ampak pišemo kar $\sin A$, torej enako kot za ostri kot. Definicija sinusa namreč poskrbi, da sta oba izraza identična. V kosinusnem izreku pa za topi kot ni treba več pisati $\cos(180° - A)$, ampak kar $-\cos A$, torej enako kot za ostri kot. Da sta oba izraza identična, poskrbi definicija kosinusa.

10.7 Kotne tabele

Za sedaj znamo določiti vrednosti kotnih funkcij pri poljubnem kotu zgolj z merjenjem njegovih projekcij. Le za nekatere kote, recimo 30°, jih znamo tudi izračunati. Ali ne bi bilo lepo, če bi jih znali izračunati za vsak kot med 0 in 90°? Očitno bi bilo to mogoče, če bi znali iz kotnih funkcij danega kota izračunati kotne funkcije polovičnega kota; in pa iz kotnih funkcij dveh danih kotov izračunati kotne funkcije za vsoto in razliko teh kotov.

Polovični kot

Ob omembi polovičnega kota se spomnimo naslednjega dejstva iz [7.4]: enakokraki kot nad tetivo kroga, z vrhom v njegovem središču, je točno dvakrat večji od enakokrakega kota nad isto tetivo, vendar z vrhom na obodu. To izkoristimo za izračun ustreznih kotnih funkcij.



Slika 10.4 Shema za izrek o sinusu in kosinusu polovičnega kota.

Slika pove: $\cos A = p$; $\cos A/2 = q$; in $\cos A/2 = (1+p)/2q$. Pa še tole: $\sin A = h$ in $\sin A/2 = h/2q$. Iz prve enačbe izrazimo p, iz druge q in oba vstavimo v tretjo enačbo. Nato pa q iz druge enačbe in h iz četrte vstavimo še v peto enačbo. Preimenujemo $A/2$ in A v A in $2A$ ter dobimo:

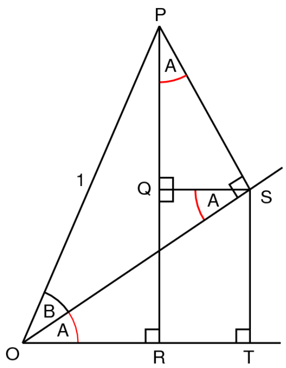
$$(\cos A)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2A) \qquad (10.14)$$

$$\sin A \cos A = \frac{1}{2}\sin 2A\,.$$

To sta izreka o sinusu in kosinusu polovičnega kota. Seveda sta hkrati tudi izreka o sinusu in kosinusu dvakratnega kota.

Vsota kotov

Določitev kotnih funkcij za vsoto kotov zahteva, da bika zgrabimo naravnost za roge: brez kakršnegakoli izogibanja moramo narisati ustrezajočo sliko in iz nje razbrati, kar iščemo.



Slika 10.5 Shema za izrek o sinusu in kosinusu vsote kotov.

Računamo takole: $\sin(A+B) = \mathrm{PR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{QR} = \mathrm{PQ} + \mathrm{ST} = \mathrm{PS}\cos A + \mathrm{OS}\sin A = \sin B \cos A + \cos B \sin A$. In pa takole: $\cos(A+B) = \mathrm{OR} = \mathrm{OT} - \mathrm{RT} = \mathrm{OT} - \mathrm{QS} = \mathrm{OS}\cos A - \mathrm{PS}\sin A = \cos B\cos A - \sin B \sin A$. Torej:

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B \qquad (10.15)$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A \sin B\,.$$

To sta izreka o sinusu in kosinusu vsote dveh kotov. Kot poseben primer $A = B$ vsebujeta tudi oba izreka o dvojnem kotu.

Razlika kotov

Vse štiri izreke smo izpeljali za kote, manjše od 90°. Z nekaj računi pa se prepričamo, da veljajo za poljubne, tudi za negativne kote. Zato s substitucijo $B \to -B$ zlahka zapišemo izrek o sinusu in kosinusu razlike. Upoštevati moramo le to, da je sinus liha in kosinus soda funkcija: $\sin(-B) = -\sin B$ in $\cos(-B) = \cos B$. Izkaže se, da je treba na desni strani izrekov zgolj zamenjati znak "+" v "−" in obratno.

S pridelanimi izreki izračunamo tabelo sinusov (in drugih kotnih funkcij) s korakom okrog 1°. Bolj drobne korake določimo, če je treba, z interpolacijo.

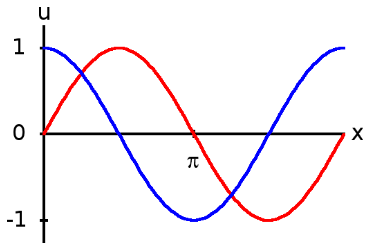
Goste kotne tabele so – tako kot logaritemske – debele in neudobne za prenašanje. Kdo pa nam brani, da jih (z omejeno natančnostjo) ne narišemo na drsno računalo kot eno ali več dodatnih skal? Tako uporabnost računala še povečamo.

10.8 Grafi kotnih funkcij

Sinus in kosinus

Graf funkcije $u = \sin x$ – vseeno je, s kakšnimi simboli označimo spremenljivke – je slika morskega vala z višino vrhov +1 in dolin −1. Val seka abscisno os pri 0 od spodaj navzgor in nato v zaporednih intervalih po π. Med temi ničelnimi točkami ležijo vrhovi in doline. Funkcija je *periodična*: $u(x) = u(x + 2\pi)$ s *periodo* 2π in liha.

Graf funkcije $u = \cos x$ je enak kot za sinus, vendar premaknjen v levo za $\pi/2$, torej z vrhom vala pri 0. Funkcija je periodična in soda.



Slika 10.6 Graf sinusne funkcije $u = \sin x$ (rdeča črta) in kosinusne funkcije $u = \cos x$ (modra črta). Prikazana je le osnovna perioda vsake funkcije. Ta perioda se ponavlja v levo in v desno brez konca.

Splošna sinusoida

Obe funkciji – sinus in kosinus – zajamemo v splošno obliko, upoštevajoč sinus vsote (10.15):

$$u = A \sin(kx + \delta) = a \sin kx + b \cos kx \tag{10.16}$$
$$a = A \cos \delta$$
$$b = A \sin \delta \,.$$

Rečemo, da je to *sinusoida*. Vrhove in doline ima povečane za faktor A, razdalje med ničlami skrajšane za faktor k in je zamaknjena v levo ali desno za δ.

Graf funkcije tangens narišemo z grafičnim deljenjem funkcij sinus in kosinus: kjer je sinus enak 0, je tangens enak 0, in kjer je kosinus enak 0, je tangens enak $\pm\infty$; rečemo, da je tam pol, skozi katerega poteka navpična asimptota. Med dvema poloma tangens narašča.

10.9 Obratne kotne funkcije

Obratne funkcije h kotnim funkcijam poimenujemo arkus sinus, arkus kosinus in arkus tangens:

$$\begin{aligned} \sin x = u &\Longleftrightarrow x = \operatorname{asin} u \\ \cos x = u &\Longleftrightarrow x = \operatorname{acos} u \\ \tan x = u &\Longleftrightarrow x = \operatorname{atan} u\,. \end{aligned} \tag{10.17}$$

Večličnost

Ker so kotne funkcije periodične, so njihove obratne funkcije *večlične*, to je, izvornega števila ne preslikajo v eno samo ciljno število, marveč v več, celo v neskončno mnogo. Zato obračamo le primerno dolge izvorne intervale: sinus predstavimo z naraščajočo vejo med $-\pi/2$ in $+\pi/2$, kosinus s padajočo vejo med 0 in π in tangens z naraščajočo vejo med $-\pi/2$ in $+\pi/2$. Grafi obratnih funkcij so taki kot grafi izvornih vej, gledani "od strani".

S tem zaenkrat zaključujemo iskanje transcendentnih funkcij. Brez dvoma jih bomo kasneje pri raziskovanju narave odkrili oziroma definirali še kaj. □

11 Diferenciali

Odvod – Diferencial – Odvodi osnovnih funkcij – Odvod obratne funkcije – Odvod sestavljene funkcije – Razvoj v potenčno vrsto – Razvoj osnovnih funkcij – Maksimum in minimum

11.1 Odvod

Pri risanju grafov smo večkrat omenili, da so ti bolj ali manj strmi. Kaj to pomeni kvalitativno, je znano vsakomur že iz otroških let. Morda pa lahko strmino grafa opišemo kvantitativno, to je s številom?

Strmina premice

Sprehodimo se v mislih po poševni premici skozi izhodišče koordinatnega sistema, torej po grafu funkcije $u = ax$. Ko pridemo nad koordinato x, se znajdemo na višini $u(x) = ax$. Če se iz te točke premaknemo naprej nad koordinato $x + h$, dosežemo višino $u(x + h) = a(x + h)$. Opravljeni premik je bolj ali manj "strm". Kvantificiramo ga s količnikom $[u(x + h) - u(x)]/h = a$, ki opisuje *strmino* premice pri koordinati x. Količnik je lahko večji ali manjši, pozitiven ali negativen, odvisno pač od tega, kakšna je premica. Pri tem je vseeno, za kakšen korak h gremo naprej: količnik je zmeraj enak. Prav tako je vseeno, nad katero koordinato x smo: povsod je količnik enak. Premica je povsod enako strma. Zato je tudi premica.

Strmina parabole

Zdaj pa se sprehodimo po kvadratni paraboli s temenom v koordinatnem izhodišču, torej po grafu funkcije $u = ax^2$. Ko se iz koordinate x premaknemo nad koordinato $x + h$, se višina spremeni iz $u(x) = ax^2$ v $u(x + h) = a(x + h)^2$. Izračunani količnik $[u(x + h) - u(x)]/h = 2ax + ah$ pa je zdaj odvisen od tega, kolikšen je korak h. S tem strmina žal ni enolično določena. Kako si pomagati? Tako, da zmanjšamo korak h na toliko, da postane člen ah mnogo manjši od člena $2ax$ in ga zanemarimo. Tedaj je strmina enaka $2ax$. Očitno ni v vsaki točki enaka. To seveda kaže graf sam.

Odvod funkcije

Kar smo ugotovili o strmini linearne in kvadratne funkcije, posplošimo na vsakršno funkcijo $u(x)$. Najprej označimo izraz "strmina funkcije u" s simbolom u'. Ker je izraz "strmina" preveč vezan na prostorsko navpičnico, ga raje nadomestimo z bolj nevtralnim izrazom *odvod*. Kako močno se funkcija $u(x)$ okrog neke vrednosti x spreminja, potem povemo takole:

$$u' = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{u(x + \mathrm{d}x) - u(x)}{\mathrm{d}x} \,. \tag{11.1}$$

To je definicija odvoda funkcije in s tem začetek razvoja diferencialnega računa (LEIBNIZ, EULER). Dosedanjo oznako h smo nadomestili z boljšo oznako dx, ki naj pomeni spremembo koordinate x. Da pa moramo to spremembo v izračunanem kvocientu napraviti dovolj majhno, opozorimo z oznako $\lim \mathrm{d}x \to 0$.

Odvod funkcije v izbrani točki ni nič drugega kot smerni koeficient premice, ki se krivulje tam dotika, *tangente*. Kadar je funkcija podana grafično, ga približno določimo z risanjem. Kadar je podana z enačbo, pa ga izračunamo po zgledu za linearno in kvadratno funkcijo. Odvod funkcije je definiran v vsaki dovolj pohlevni točki – razen v polu, skoku ali kolenu – in je zato tudi sam funkcija. Lahko ga nadalje odvajamo. Tako dobimo drugi odvod u'' in še višje odvode. Drugi odvod opisuje, kako se spreminja strmina tangente, to je, kako je graf ukrivljen.

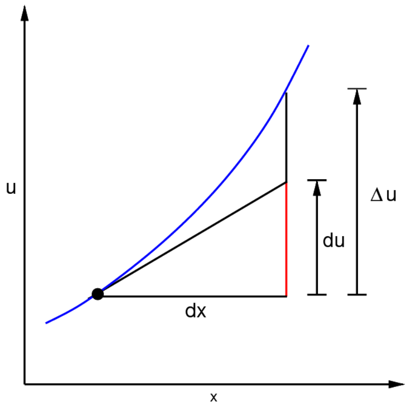
11.2 Diferencial

Prirast tangente in funkcije

Pri spremembi neodvisne spremenljivke za $\mathrm{d}x$ se funkcija spremeni za $\Delta u = u(x + \mathrm{d}x) - u(x)$. Ustrezni navpični prirastek na tangenti poimenujemo *diferencial* $\mathrm{d}u$ funkcije in znaša

$$\mathrm{d}u = u' \cdot \mathrm{d}x\,. \tag{11.2}$$

Zaradi poenotenega izražanja bomo prirastek $\mathrm{d}x$ poimenovali diferencial argumenta.



Slika 11.1 Odvod in diferencial funkcije. Odvod v izbrani točki je smerni koeficient tangente v tej točki. Diferencial funkcije je navpični prirastek te tangente.

Diferencialni količnik

Vpeljava diferenciala funkcije omogoča, da izrazimo odvod funkcije kot količnik

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'\,. \tag{11.3}$$

To je pravi količnik dveh poljubno velikih diferencialov. Pri dovolj majhnem $\mathrm{d}x$ je diferencial funkcije $\mathrm{d}u$ praktično enak spremembi funkcije Δu. Tedaj v praksi med obojima ne delamo razlike in obravnavamo $\mathrm{d}u$ kot spremembo funkcije. Tudi drugi odvod in višje odvode lahko zapišemo z diferenciali in sicer takole:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} = u''\,. \tag{11.4}$$

11.3 Odvodi osnovnih funkcij

Izračunajmo odvode osnovnih funkcij, ki jih že poznamo! Odvode bomo računali po definiciji, to je iz spremembe funkcije pri majhnem povečanju argumenta.

Konstanta

Najpreprostejša funkcija, če ji sploh lahko tako rečemo, je konstanta. Njen graf je ravna črta brez nagiba. Njen odvod je torej nič:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, c = 0\,. \tag{11.5}$$

Naravna potenca

Naravno potenco povečanega argumenta $(x+h)^n$ razvijemo po binomskem pravilu v polinom (10.3), odštejemo začetno vrednost x^n, delimo s h, zanemarimo vse člene, ki vsebujejo h, in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^n = n x^{n-1}\,. \tag{11.6}$$

Skalarna potenca

Skalarno potenco povečanega argumenta $(x+h)^s$ preoblikujemo v $x^s(1+h/x)^s$, jo razvijemo v binomsko vrsto (10.4) in po že opisanem postopku dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, x^s = s x^{s-1}\,. \tag{11.7}$$

Eksponentna funkcija

Eksponentno funkcijo povečanega argumenta $\mathrm{e}^{(x+h)}$ zapišemo kot produkt $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^h$ ter nato e^h izrazimo z eksponentno vrsto (10.7). Dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\,. \tag{11.8}$$

Zanimivo je, da je odvod funkcije enak funkciji sami. Eksponentna funkcija se pri odvajanju ne spremeni.

Kotne funkcije

Funkcijo sinus povečanega argumenta $\sin(x+h)$ razcepimo po izreku za sinus vsote dveh kotov (10.15). Za majhen h potem aproksimiramo, sklicujoč se na grafe kotnih funkcij, $\cos h \approx 1$ in $\sin h \approx h$. Podobno obdelamo funkcijo kosinus in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \sin x &= \cos x \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \cos x &= -\sin x\,. \end{aligned} \tag{11.9}$$

Dvakratno odvajanje prevede sinus nazaj v sinus, vendar z negativnim predznakom. Podobno velja za kosinus.

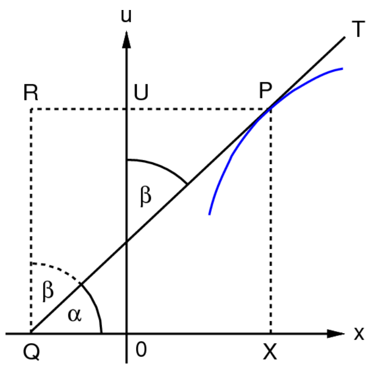
11.4 Odvod obratne funkcije

Dva odvoda

Vsako dovolj pohlevno funkcijo $u(x)$ je možno zapisati kot obratno funkcijo $x(u)$, recimo $u = x^2$ kot $x = u^{1/2}$. Funkcija in njena obratna funkcija sta, kot vemo, po definiciji povezani takole: če na argument delujemo s funkcijo in nato na dobljeni rezultat še z obratno funkcijo, dobimo začetni argument. Morda sta tudi odvoda $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u$ med seboj nekako povezana? Ker velja za omenjeno funkcijo $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 2x$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = 1/2u^{1/2} = 1/2x$, domnevamo, da velja splošno

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1\,. \tag{11.10}$$

Odvod obratne funkcije je recipročna vrednost odvoda prvotne funkcije. Domnevo dokažemo takole. Tangenta na krivuljo $u(x)$ tvori z osjo x kot α in z osjo u kot β, torej $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = \tan\alpha$ in $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = \tan\beta$. Velja: $\tan\alpha = \mathrm{PX}/\mathrm{XQ}$, $\tan\beta = \mathrm{PR}/\mathrm{RQ} = \mathrm{XQ}/\mathrm{PX}$, zato $\tan\alpha\tan\beta = 1$.



Slika 11.2 Shema za izrek o odvodu obratne funkcije. Tangenta T oklepa z absciso kot α in z ordinato kot β. Tangens prvega kota je odvod funkcije in tangens drugega kota je odvod obratne funkcije.

Logaritemska funkcija

Izrek o odvodu obratne funkcije omogoča, da izračunamo odvod logaritemske funkcije $u = \ln x$. Ta je namreč obratna funkcija k $\mathrm{e}^u = x$, torej $\mathrm{d}x/\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u$, $\mathrm{d}u/\mathrm{d}x = 1/(\mathrm{d}x/\mathrm{d}u) = 1/\mathrm{e}^u = 1/x$, to je:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x}\,. \tag{11.11}$$

Obratne kotne funkcije

Podobno izračunamo tudi odvode obratnih kotnih funkcij:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{asin} x &= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{acos} x &= -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}\,. \end{aligned} \tag{11.12}$$

11.5 Odvod sestavljene funkcije

Linearna in kvadratna funkcija ter polinomi nasploh so sestavljeni iz potenc različnih stopenj, pomnoženih s skalarji, in seštetih. Še bolj zamotane funkcije dobimo kot količnike polinomov. Pojavi se vprašanje, kako odvajati takšne in podobne sestavljene funkcije.

Vsota, produkt in kvocient

Naj bo $A = cu(x)$. Ko naraste $x \to x + \mathrm{d}x$, naraste $u \to u + \mathrm{d}u$ in $A \to A + \mathrm{d}A$. Velja $A + \mathrm{d}A = c(u + \mathrm{d}u) = cu + c\mathrm{d}u$. Odštejemo enačbo $A = cu$, dobimo $\mathrm{d}A = c\mathrm{d}u$, delimo z $\mathrm{d}x$ in doženemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,. \tag{11.13}$$

Vsoto funkcij $A = u(x) + v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u) + (v + \mathrm{d}v)$, odštejemo $A = u + v$, dobimo $\mathrm{d}A = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$, delimo z $\mathrm{d}x$ in ugotovimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u \pm v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \pm \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{11.14}$$

Produkt funkcij $A = u(x)v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u)(v + \mathrm{d}v)$, križem pomnožimo, zanemarimo produkt dveh diferencialov, odštejemo $A = uv$, delimo z $\mathrm{d}x$ in dobimo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot v + u \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{11.15}$$

Kvocient funkcij $A = u(x)/v(x)$ povečamo v $A + \mathrm{d}A = (u + \mathrm{d}u)/(v + \mathrm{d}v)$. Števec in imenovalec pomnožimo z $(v - \mathrm{d}v)$, križem pomnožimo, zanemarimo produkte dveh diferencialov, odštejemo $A = u/v$ ter najdemo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{\mathrm{d}u/\mathrm{d}x \cdot v - u \cdot \mathrm{d}v/dx}{v^2}\,. \tag{11.16}$$

Posredna funkcija

Na poseben način sestavljeno funkcijo $u(x)$ dobimo, če njen argument x nadomestimo z drugo funkcijo $v(x)$ ter pridelamo $u(v(x))$. Dobra primera sta $\exp(kx)$ ali $\sin(kx + b)$. Kako odvajati takšno funkcijo? Vemo, da diferencialu $\mathrm{d}x$ ustreza diferencial $\mathrm{d}v$, in njemu diferencial $\mathrm{d}u$. Velja $\mathrm{d}u = u'(v) \cdot \mathrm{d}v$ in $\mathrm{d}v = v'(x) \cdot \mathrm{d}x$. Vstavitev $\mathrm{d}v$ iz druge enačbe v prvo enačbo pove:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,. \tag{11.17}$$

To je verižno pravilo in z njim zmoremo odvajati tudi zelo zapletene funkcije.

11.6 Razvoj v potenčno vrsto

Funkcijo $1/(1 - x)$ znamo izraziti kot geometrijsko vrsto (10.1). Potenco binoma $(1 + x)^s$ smo zapisali kot binomsko vrsto (10.4). Obe omenjeni vrsti sta potenčni. Kaj ne bi bilo čudovito, če bi lahko katerokoli funkcijo zapisali s potenčno vrsto? Predpostavimo torej, da velja $u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ Koeficienti a_i so seveda odvisni od tega, kakšna, konkretno, je funkcija $u(x)$. Drugačna funkcija, drugačni koeficienti.

Koeficienti členov

Vemo tole. Pri $x = 0$ mora veljati $u(0) = a_0$. S tem je koeficient a_0 že določen. Nato odvajamo funkcijo in dobimo $u'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots$ Pri $x = 0$ mora veljati $u'(0) = a_1$ in s tem je določen koeficient a_1. Tako nadaljujemo z zaporednim odvajanjem in določimo vse koeficiente:

$$u(x) = u(0) + \frac{u'(0)}{1!}x + \frac{u''(0)}{2!}x^2 + \ldots \tag{11.18}$$

Koeficienti so odvisni le od vrednosti funkcije in njenih odvodov v točki $x = 0$. Zato rečemo, da smo funkcijo *razvili* okrog te točke. Seveda jo lahko razvijemo tudi okrog kake druge točke $x = a$; potem dobimo

$$u(a+h) = u(a) + \frac{u'(a)}{1!}\,h + \frac{u''(a)}{2!}\,h^2 + \ldots \tag{11.19}$$

Konvergenca vrste

To je *potenčni razvoj* funkcije (TAYLOR). Potenčna vrsta konvergira, če se njeni zaporedni členi dovolj hitro manjšajo. Kriterij za konvergenco (pri izbranem argumentu x) je, kot vemo, razmerje dveh zaporednih členov; limita tega razmerja mora biti absolutno manjša od 1 (10.6); Če vrsta konvergira za nek argument, konvergira tudi za vsak absolutno manjši argument. Za vsako funkcijo posebej moramo določiti, kakšen je največji argumant, za katerega njena vrsta še konvergira.

11.7 Razvoj osnovnih funkcij

Razvijmo v potenčne vrste nabor posebnih funkcij, ki jih že poznamo! To naredimo tako, da izračunamo zaporedne odvode teh funkcij in nato določimo, za kakšne vrednosti argumentov konvergirajo.

Eksponentna funkcija

Razvoj eksponentne funkcije že poznamo (10.7), saj smo jo pravzaprav definirali s potenčno vrsto. Vrsta konvergira za vsako vrednost argumenta. Za zabavo pa lahko postopek obrnemo: potenčno vrsto poustvarimo z zaporednim odvajanjem eksponentne funkcije.

Logaritemska funkcija

Prvi odvod logaritemske funkcije znaša $1/x$, kar je negativna naravna potenca, in vsi zaporedni odvodi te potence so spet potence. Razvijamo okrog točke $x = 1$, kjer ima logaritem vrednost nič, in dobimo:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \tag{11.20}$$

Vrsta konvergira za $|x| < 1$. Kako pa naj izračunamo logaritem za argument, ki je večji od 1? Poimenujmo ta argument y in ga zapišimo v obliki $y = (1+x)/(1-x)$. S tem je definiran $x = (y-1)/(y+1)$, ki je zmeraj manjši od 1. Zato lahko razvijemo $\ln(1+x)$ in $\ln(1-x)$ v dve vrsti, drugo odštejemo od prve in dobimo $\ln y$ kot

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\,(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots) \tag{11.21}$$

Na ta način zlahka izračunamo kakršenkoli logaritem in omilimo dosedanjo potrebo po logaritemskih tablicah.

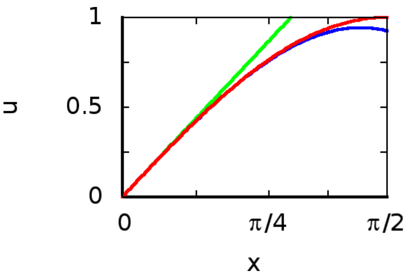
Kotne funkcije

Zaporedni odvodi funkcij sinus in kosinus so, izmenično, spet funkcije sinus in kosinus. Razvijamo okrog točke nič, kjer ima sinus vrednost nič in kosinus vrednost ena, pa dobimo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad (11.22)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$$

Vrsti sta konvergentni za poljubno velik argument. Z njima zlahka izračunamo kakršnokoli kotno funkcijo in tako omilimo dosedanjo potrebo po trigonometričnih tablicah.



Slika 11.3 Razvoj funkcije sinus v potenčno vrsto okrog izhodišča. Prikazani so grafi za prvi člen (zelen), za prvi in drugi člen (moder) in za vse člene (rdeč).

11.8 Maksimum in minimum

Odvod v ekstremu

V točki, kjer ima funkcija lokalni *maksimum* ali *minimum*, torej *ekstrem*, je tangenta vodoravna: odvod je enak nič. To nas navede na misel, kako za preiskovano funkcijo ugotoviti, ali in kje ima omenjene ekstreme. Funkcijo odvajamo, njen odvod izenačimo z nič in rešimo dobljeno enačbo. Najdeni koreni povedo, kje so lahko ekstremi.

Vrsta ekstrema

Ali je preučevani morebitni ekstrem v točki a maksimum ali minimum? Funkcijo razvijemo okrog te točke v vrsto do kvadratnega člena, pri čemer postavimo prvi odvod na nič. Dobimo izraz $u(a+h) = u(a) + 1/2 \cdot u(a)''h^2$. Faktor h^2 je vedno pozitiven. Če je torej drugi odvod $u''(a)$ pozitiven, se bo drugi člen vedno dodal k prvemu, zato imamo minimum. Če je drugi odvod negativen, imamo maksimum. Če pa je drugi odvod enak nič, imamo prevoj:

$$u = \max \Longleftrightarrow u' = 0 \text{ in } u'' < 0 \qquad (11.23)$$

$$u = \min \Longleftrightarrow u' = 0 \text{ in } u'' > 0\,.$$

Za parabolo $u = ax^2 + bx + c$, na primer, izračunamo $u' = 2ax + b = 0$, torej je ekstrem pri $x = -b/2a$, kakor smo svoj čas že ugotovili [9.6]. Drugi odvod $u'' = 2a$ je v ekstremalni točki pozitiven ali negativen, odvisno od tega, kakšen je koeficient a. □

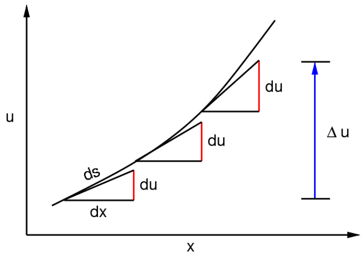
12 Integrali

Integral – Integrali osnovnih funkcij – Pravila integriranja – Integriranje vrst – Uporaba v geometriji

12.1 Integral

Diferencialni trikotniki

Tangenta na krivuljo v izbrani točki $u(x)$ določa lokalni *diferencialni trikotnik*, sestavljen iz poljubno dolgega kosa te tangente $\mathrm{d}s$ ter iz pripadajočih diferencialov $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}u$. Tudi v točki $u(x+\mathrm{d}x)$ lahko narišemo lokalni diferencialni trikotnik in tako naprej. Na ta način narišemo vzdolž krivulje zaporedje trikotnikov, ki se tiščijo drug drugega.



Slika 12.1 Niz diferencialnih trikotnikov. Vsota diferencialov funkcije $\mathrm{d}u$ je enaka spremembi funkcije Δu, če so le diferenciali dovolj majhni.

Pri dovolj majhnih $\mathrm{d}x$ so diferenciali $\mathrm{d}u$ praktično enaki lokalnim spremembam funkcije Δu, vsota vseh diferencialov pa je enaka celotni spremembi funkcije, ki jo tudi označimo kot Δu:

$$\Delta u = \lim_{\mathrm{d}u \to 0} \sum \mathrm{d}u = \int \mathrm{d}u\,. \tag{12.1}$$

To je definicija *integrala* funkcije in s tem začetek razvoja integralnega računa (LEIBNIZ, EULER). Da moramo seštevati dovolj majhne diferenciale, opozorimo z oznako "$\lim \mathrm{d}u \to 0 \sum$" oziroma, krajše, z znakom $\int$. V praksi obravnavamo $\mathrm{d}u$ kot majhno spremembo funkcije in $\int \mathrm{d}u$ kot vsoto njenih majhnih sprememb.

Računanje integrala

Ker lahko vsakega izmed zaporednih diferencialov izrazimo z lokalnim odvodom, velja:

$$\int \mathrm{d}u = \int_a^b u'\,\mathrm{d}x = u(b) - u(a)\,. \tag{12.2}$$

Integral funkcije $u'(x)$ med krajiščnima točkama $x = a$ in $x = b$ torej izračunamo tako, da – kakor vemo in znamo – poiščemo *primitivno funkcijo* $u(x)$, katere odvod je enak integrirani funkciji, ter izračunamo njeno razliko med krajiščnima točkama.

Določeni in nedoločeni integral

Integral med dvema zakoličenima mejama je *določen*: je neko število. Lahko si pa mislimo zgornjo mejo spremenljivo; tedaj postane integral funkcija te meje. Funkcija je odvisna še od postavitve spodnje meje: če to prestavimo, se spremeni za aditivno konstanto. Rečemo, da je tak integral brez specificiranih mej *nedoločen* in pišemo:

$$\int u' \, \mathrm{d}x = u(x) + C \,. \tag{12.3}$$

Diferenciranje je določanje diferencialov vzdolž znanega grafa. Integriranje, to pa je določanje celotnega grafa iz znanega zaporedja diferencialov. Integriranje je torej obratna operacija k diferenciranju.

12.2 Integrali osnovnih funkcij

Integral izračunamo tako, da podintegralsko funkcijo predelamo v obliko, ko v njej prepoznamo odvod znane funkcije. Na primer: (nedoločeni) integral x^2 je enak $x^3/3 + C$, ker je odvod druge funkcije enak prvi funkciji. Aditivno konstanto ponavadi kar izpuščamo.

Nabor integralov

Iz že poznanih odvodov osnovnih funkcij (11.5–9) takoj sledijo naslednji osnovni integrali (aditivna konstanta je izpuščena):

$$\begin{aligned}
&\int c \, \mathrm{d}x = cx \\
&\int x^s \, \mathrm{d}x = \frac{x^{s+1}}{s+1} \,, s \neq -1 \\
&\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x \\
&\int \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x \\
&\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x \\
&\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x \,.
\end{aligned} \tag{12.4}$$

Da so izračunani nedoločeni integrali, torej primitivne funkcije, res pravilni, se najlažje prepričamo tako, da jih odvajamo, pri čemer moramo dobiti podintegralske funkcije.

12.3 Pravila integriranja

Meje

Integriramo lahko od prve meje k drugi ali obratno. Prav tako lahko integriramo od prve meje do neke vmesne meje in nato od te vmesne meje do druge meje. Skoraj samoumevno velja:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b u \, \mathrm{d}x = -\int_b^a u \, \mathrm{d}x \\
&\int_a^b u \, \mathrm{d}x + \int_b^c u \, \mathrm{d}x = \int_a^c u \, \mathrm{d}x \,.
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Sestavljene funkcije

Ker je integriranje nasprotna operacija od diferenciranja oziroma odvajanja, so z znanimi pravili za odvajanje sestavljenih funkcij (11.13–17) določena tudi ustrezna pravila za integriranje.

Pravilo za odvod s konstanto pomnožene funkcije integriramo na obeh straneh: $\int (cu)' \, \mathrm{d}x = \int cu' \, \mathrm{d}x$. Integral na levi strani je, po definiciji, enak cu. Da bo tudi integral na desni strani tak, mora biti enak $c\int u'\,\mathrm{d}x$. Odvod poljubne funkcije je pravzaprav tudi poljubna funkcija, zato ni škode, če v končnem rezultatu namesto u' zapišemo kar u (s tem smo poljubno funkcijo zgolj preimenovali) in dobimo:

$$\int cu\,\mathrm{d}x = c\int u\,\mathrm{d}x\,. \tag{12.6}$$

Pravilo za odvod vsote integriramo na obeh straneh: $\int(u+v)'\,\mathrm{d}x = \int(u'+v')\,\mathrm{d}x$. Integral na levi je, po definiciji, enak $u+v$. Da bo tak tudi integral na desni, mora biti enak $\int u'\,\mathrm{d}x + \int v'\,\mathrm{d}x$, to je, veljati mora

$$\int(u\pm v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x \pm \int v\,\mathrm{d}x\,. \tag{12.7}$$

Integriranje po delih

Pravilo za odvod produkta integriramo na obeh straneh, pri čemer uporabimo že znano pravilo o integralu vsote: $\int(uv)'\,\mathrm{d}x = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x$, kar takoj vodi do izreka

$$\int u'v\,\mathrm{d}x = uv - \int uv'\,\mathrm{d}x\,. \tag{12.8}$$

Če je torej podintegralska funkcija produkt dveh funkcij, od katerih znamo integrirati eno, jo integriramo samostojno, nakar jo integriramo še enkrat, tokrat pomnoženo z odvodom druge funkcije. Pravimo, da *integriramo po delih*. Tako, na primer, izračunamo integral funkcije $x\cdot\sin x$ ali $x\cdot\mathrm{e}^x$, pri čemer integriramo kotno ali eksponentno funkcijo, linearno funkcijo pa odvajanje v naše zadovoljstvo zradira v konstanto.

Zamenjava spremenljivke

Integracija verižnega pravila za odvajanje posredne funkcije pove: $\int u'(x)\,\mathrm{d}x = \int u'(v)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$. Upoštevamo $v'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}v$, spremenimo oznako u' v u in dobimo

$$\int u(x)\,\mathrm{d}x = \int u[v(x)]\,\mathrm{d}v\,. \tag{12.9}$$

S tem pravilom o *zamenjavi spremenljivke* močno razširimo nabor funkcij, ki jih zmoremo integrirati. Dober zgled je integral $\int\sin(kx)\,\mathrm{d}x$. Takoj vidimo: če bi za diferencial imeli $\mathrm{d}(kx)$, bi imeli opravka z obliko $\int\sin t\,\mathrm{d}t$, ki jo znamo integrirati. Pa vstavimo faktor k pod diferencial! Ker $\mathrm{d}(kx) = k\,\mathrm{d}x$, smo s preoblikovanjem diferenciala posledično pomnožili podintegralski izraz s k, zato ga moramo s k še deliti, pa dobimo $(1/k)\int\sin(kx)\,\mathrm{d}(kx)$. Opisanemu postopku za zamenjavo spremenljivke rečemo "spravljanje pod diferencial".

12.4 Integriranje vrst

Integrabilnost

Če nihče ne bi vedel, da je odvod $\ln x$ enak $1/x$, potem nikakor ne bi vedeli, kako integrirati $\int\mathrm{d}x/x$. To nas opominja na naslednje: nobene funkcije ne moremo integrirati, če je poprej nismo pridelali z diferenciranjem česa drugega. Tako, na primer, še nikomur do sedaj ni uspelo – z znanimi funkcijami – integrirati $\int\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$. Kaj storiti v takem primeru? Integral – ki je funkcija zgornje meje – lahko uporabimo kot definicijo te funkcije in jo poimenujemo z novim imenom, recimo $\mathrm{erf}(x)$. Seveda je ta definicija zgolj formalna vse dotlej, dokler ne najdemo poti, kako za vsak x zares izračunati pripadajoči $\mathrm{erf}(x)$.

Integriranje vrste

Pri iskanju poti, kako integrirati "neintegrabilno" funkcijo, se spomnimo, da jo pravzaprav lahko razvijemo v potenčno vrsto (11.18) in členoma integriramo. Integriranje potenc je namreč preprosto. Integrirana vrsta je tudi potenčna in konvergira, v kar se prepričamo s konvergenčnim testom. Tako funkcijo, ki smo jo sprva definirali preko integrala, efektivno redefiniramo preko ustrezne vrste.

Številska vrsta za π

Seveda lahko z razvojem v potenčne vrste integriramo tudi "integrabilne" funkcije. Na zanimiv primer naletimo, ko hočemo integrirati funkcijo $1/(1+x^2)$, ki je odvod funkcije arkus tangens, $\mathrm{atan}(x)$. (To ugotovimo, ko izračunamo odvod funkcije tangens kot kvocienta funkcij sinus in kosinus, nakar izračunamo še odvod k tangensu inverzne funkcije.) Ko jo razvijemo v binomsko vrsto in členoma integriramo, dobimo vrsto za $\mathrm{atan}(x)$, ki konvergira za $|x| \leq 1$. Vemo, da $\tan(\pi/4) = 1$, zato $\pi/4 = \mathrm{atan}(1)$ in vrsta pove:

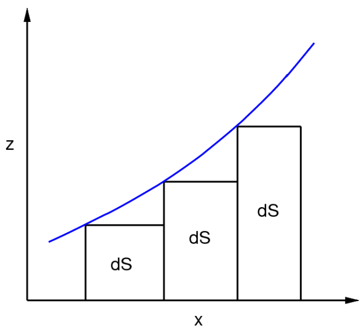
$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad (12.10)$$

Dobili smo način, kako izračunati število π na toliko decimalnih mest, kot želimo. Konvergenca je sicer počasna, vendar zanesljiva.

12.5 Uporaba v geometriji

Enačba $u = f(x)$ opisuje odvisnost dveh splošnih spremenljivk. Naj bosta do nadaljnjega to dve konkretni spremenljivki in sicer dve pravokotni ravninski koordinati: vodoravna x in navpična z. Enačba $z = f(x)$ tedaj opisuje pravo, geometrijsko krivuljo v navpični ravnini, recimo parabolo $z = x^2$. Kaj lahko v tem primeru povemo o integriranju?

Ploščina pod krivuljo



Slika 12.2 Ploščina pod krivuljo. Seštevek diferencialov dS je enak ploščini pod krivuljo $z(x)$, če so le diferenciali dovolj majhni.

Nad vsakim diferencialom dx je "naložen" ozek trak, segajoč do krivulje. Tak trak, aproksimiran s pravokotnikom, ima ploščino $\mathrm{d}S = z\,\mathrm{d}x$, in vsota vseh tovrstnih ploščin je enaka celotni ploščini pod krivuljo. Velja

$$S = \int z\,\mathrm{d}x\,. \qquad (12.11)$$

Tako računamo ploščine krivočrtnih likov. Paziti moramo le na to, da je ploščina nad abscisno osjo pozitivna in pod to osjo negativna. Ploščina pod sinusno krivuljo med koordinatama 0 in 2π, na primer, je zato enaka nič.

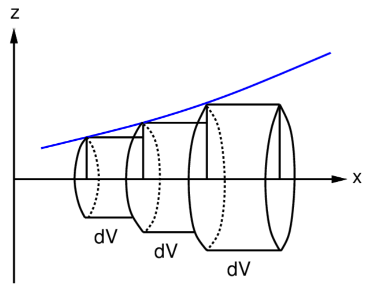
Trivialen primer je premica skozi izhodišče: $z = (h/a)x$. Integral za izračun ploščine ima rešitev $S = (h/a)x^2/2$. Če $x = a$, velja $S = ah/2$, kakor se za ploščino trikotnika tudi spodobi.

Prostornina vrtenine

Če pozitiven kos krivulje zavrtimo okrog abscisne osi, zarišemo rotacijsko telo, vrtenino. Okrog vsakega diferenciala $\mathrm{d}x$ je zdaj "razprostrt", kakor ražnjič na palici, prostorninski element vrtenine. Ta ražnjič, aproksimiran z valjem, ima prostornino $\mathrm{d}V = \pi z^2\,\mathrm{d}x$ in prostornina celotne vrtenine znaša

$$V = \pi \int z^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{12.12}$$

Tako določamo prostornino vrtenin.



Slika 12.3 Prostornina vrtenine. Seštevek diferencialov $\mathrm{d}V$ je enak prostornini vrtenine pod krivuljo $z(x)$, če so le diferenciali dovolj majhni.

Preprost zgled je stožec: to je premica $z = (r/h)x$, zavrtena okrog abscisne osi. Pri razdalji h je visoka r in dolga l. Integracija od 0 do h potrdi že znana rezultata $S = \pi rl$ in $V = \pi r^2 h/3$. □

13 Kompleksna števila

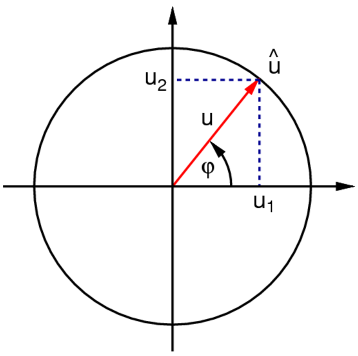
Skalarji in fazorji – Računske operacije – Imaginarna enota – Potenca in eksponencial – Kompleksne funkcije – Harmonične vrste – Primer spektralne analize – Kompleksne harmonične vrste – Harmonični integrali

13.1 Skalarji in fazorji

Zasuk nihala

Na vrvici obešena kroglica – težno nihalo – lahko niha sem in tja v navpični ravnini. Trenutni odmik kroglice iz njene ravnovesne lege opišemo z ustreznim relativnim številom, skalarjem: odmik v desno, na primer, je pozitiven in odmik v levo je negativen. Odmik nihala je torej količina, ki ima poleg velikosti še predznak.

Kroglica pa lahko tudi kroži v vodoravni ravnini; pri tem se njena projekcija na poljubni premer kroga spreminja. Trenutni zasuk nihala opišemo potem na dva načina: z dvema projekcijama – odmikoma u_1 in u_2 – na dva medsebojno pravokotna premera ali z velikostjo u in fazo φ. Zasuk nihala je torej količina, ki ima poleg velikosti še fazo. Odmik nihala je poseben primer zasuka za fazo 0 ali 180°.



Slika 13.1 Zasuk kot kompleksno število oziroma fazor.

Kompleksna števila ali fazorji

Na odmika u_1 in u_2, ki opisujeta zasuk, pogledamo kot na celoto in proglasimo: vsakršna dvojica relativnih števil (u_1, u_2) je *kompleksno število* $\hat{u}$ z *realno* komponento u_1 in *imaginarno* komponento u_2. Obenem definiramo še *absolutno vrednost* $|\hat{u}|$ in *fazo* $\operatorname{Arg}(\hat{u})$:

$$\begin{aligned}
&\hat{u} = (u_1, u_2) = (u\cos\varphi, u\sin\varphi) \qquad (13.1)\\
&\operatorname{Re}(\hat{u}) = u_1\\
&\operatorname{Im}(\hat{u}) = u_2\\
&|\hat{u}|^2 = u^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2\\
&\operatorname{Arg}(\hat{u}) = \varphi = \operatorname{atan}\frac{u_2}{u_1}\,.
\end{aligned}$$

Ker ima kompleksno število poleg velikosti še fazo, mu bomo rekli tudi *fazor*. Poljuben fazor bomo označili s črkami $\hat{u}$, $\hat{v}$ in $\hat{w}$.

13.2 Računske operacije

Kompleksna števila (fazorji) so razširitev relativnih števil (skalarjev). Slednja vključujejo kot pare, katerih imaginarna komponenta je enaka nič. Računanje s fazorji hočemo zato definirati tako, da bo pomen računskih operacij nad skalarji ohranjen. Razviti hočemo kompleksni račun (BOMBELLI, EULER, GAUSS).

Množenje fazorja s skalarjem

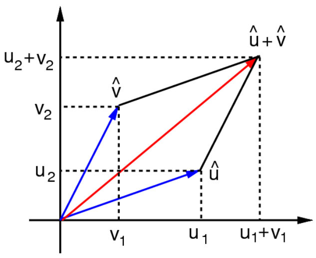
Naj ima fazor imaginarno komponento enako nič. Tedaj je "enakopraven" navadnemu realnemu odmiku. Množenje takega odmika s pozitivnim ulomkom pomeni njegov razteg ali skrčitev, z negativnim pa hkrati še obrat njegove usmeritve. Zato definiramo tako tudi za kompleksni zasuk:

$$c\hat{u} = (cu_1, cu_2)\,. \tag{13.2}$$

Seštevanje in odštevanje fazorjev

Seštevanje dveh realnih odmikov pomeni, da na konec prvega nataknemo začetek drugega in oba nadomestimo s premikom, ki sega od začetka prvega do konca drugega. Zato definiramo tako tudi za kompleksne zasuke:

$$\hat{u} + \hat{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)\,. \tag{13.3}$$



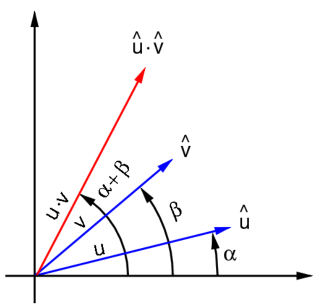
Slika 13.2 Seštevanje fazorjev po paralelogramskem pravilu.

To je (iz fizike) znano paralelogramsko pravilo za seštevanje sil. Odštevanje je obratna operacija k seštevanju in ga tako tudi definiramo: znake za seštevanje (+) nadomestimo z znaki za odštevanje (−).

Množenje in deljenje fazorjev

Fazor $u\,(\cos\varphi, \sin\varphi)$ opisuje razteg realnega enotnega premika za faktor u in zasuk za kot φ. To nas sili, da množenje fazorja $\hat{u} = u\,(\cos\alpha, \sin\alpha)$ s fazorjem $\hat{v} = v\,(\cos\beta, \sin\beta)$ definiramo kot zasuk prvega za argument drugega in hkratni ustrezni razteg:

$$\hat{u}\,\hat{v} = uv\,(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))\,. \tag{13.4}$$



Slika 13.3 Množenje fazorjev po sučnem pravilu. Prvi fazor zasučemo za fazo drugega fazorja in ga pomnožimo z njegovo velikostjo.

Deljenje je obratna operacija od množenja, zato smo prisiljeni definirati

$$\hat{u}/\hat{v} = (u/v)\,(\cos(\alpha-\beta), \sin(\alpha-\beta))\,. \tag{13.5}$$

Množenje in deljenje smo definirali z absolutnimi velikostmi in argumenti operandov. Ugodno bi bilo vedeti, kako se to zapiše s komponentami. Neposredni račun pokaže:

$$\begin{aligned} \hat{u}\hat{v} &= (u_1v_1 - u_2v_2, u_1v_2 + u_2v_1) \qquad (13.6)\\ \hat{u}/\hat{v} &= (u_1v_1 + u_2v_2, u_2v_1 - u_1v_2)\,. \end{aligned}$$

Z vpeljanimi definicijami ostanejo v veljavi vsa računska pravila, ki veljajo za skalarje (in še prej za naravna števila) (2.1): vsota in produkt dveh fazorjev sta komutativna in asociativna, produkt pa je distributiven glede na vsoto.

13.3 Imaginarna enota

Enotni fazorji

Definiciji za vsoto in produkt omogočata, da poljuben fazor zapišemo v obliki

$$\hat{u} = u_1 \cdot (1,0) + u_2 \cdot (0,1)\,. \tag{13.7}$$

Številska para $(1,0)$ in $(0,1)$ poimenujemo *realna enota* in *imaginarna enota*. Njuni velikosti sta, sledeč definiciji, enaki 1. Krajše zapišemo

$$\begin{aligned} \hat{u} &= u_1 + \mathrm{i}u_2 \qquad (13.8)\\ \mathrm{i} &= (0,1)\,. \end{aligned}$$

Imaginarna enota kot navidezni skalar

Realno enoto $(1,0)$ torej zapišemo kar kot skalar 1, imaginarno enoto $(0,1)$ pa kot "skalar" i. Ta zapis ima izjemno praktično vrednost. Če se delamo, da je imaginarna enota i kar navaden skalar, lahko vsako kompleksno število obravnavamo kot skalarni binom. Te pa igraje seštevamo, odštevamo, množimo in delimo! Če med računom pridelamo kvadrat ali kakšno višjo potenco imaginarne enote, upoštevamo, da velja, sledeč definiciji množenja, $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i} = (0,1)(0,1) = (-1,0)$, torej

$$\mathrm{i}^2 = -1\,. \tag{13.9}$$

Rezultat, ki ga dobimo, je prav tak, kot če bi mukoma računali s pari števil po osnovnih definicijah. Zgled pove to najbolje. Namesto takole: $(3,5)\cdot(2,4) = (3\cdot2-5\cdot4, 3\cdot4+5\cdot2) = (-14,22)$ računamo raje takole: $(3+5\mathrm{i})(2+4\mathrm{i}) = 2\cdot3+2\cdot5\mathrm{i}+4\mathrm{i}\cdot3+4\mathrm{i}\cdot5\mathrm{i} = 6+22\mathrm{i}+20\mathrm{i}^2 = -14+22\mathrm{i}$. Razlika je očitna.

Množenje skalarja z imaginarno enoto nazorno pomeni, da skalar zavrtimo za kot 90° v nasprotni smeri urinega kazalca. Dvakratno množenje z imaginarno enoto torej zavrti skalar za 180°, to je, spremeni mu predznak. To velja tudi za množenje kateregakoli fazorja z imaginarno enoto.

Konjugirana kompleksna števila

Velikost kompleksnega števila $\hat{u}$ je podana, kot vemo, takole: $|\hat{u}|^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2$. To je enako produktu $(u_1+\mathrm{i}u_2)(u_1-\mathrm{i}u_2)$. Drugi faktor je očitno enak prvemu, le predznak imaginarne enote ima nasproten. Rečemo, da je prvemu *konjugiran*, in zapišemo

$$\hat{u}^* = u_1 - \mathrm{i}u_2 \tag{13.10}$$
$$|\hat{u}|^2 = \hat{u}\hat{u}^* \,.$$

Konjugirano vrednost fazorja si nazorno predstavljamo kot njegovo preslikavo preko realne osi.

13.4 Potenca in eksponencial

Fazor kot baza potence

Naravno potenco fazorja definiramo enako kot naravno potenco skalarja:

$$\hat{u}^n = \hat{u} \cdot \hat{u} \ldots \hat{u} \,. \tag{13.11}$$

To zaradi (13.4) ne pomeni nič drugega kot

$$\hat{u}^n = u^n (\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi) \,. \tag{13.12}$$

Namesto naravnega eksponenta n si v zapisanem obrazcu mislimo recipročni naravni eksponent (koren) $1/n$, ulomni eksponent $p = n/m$ ali relativni eksponent $\pm p$. Ali obrazec za takšne skalarne eksponente še vedno velja, je nesmiselno vprašati, saj potenciranja fazorja z "nenaravnim" eksponentom s še nismo definirali. Pa proglasimo prav ta obrazec za definicijo! Torej:

$$\hat{u}^s = u^s (\cos s\varphi + \mathrm{i} \sin s\varphi) \,. \tag{13.13}$$

Paziti moramo le na naslednje. Ker sta sinus in kosinus periodični funkciji, je treba namesto izraza φ/n računati izraze $(\varphi + k2\pi)/n$, $k = 0, 1, 2 \ldots n-1$. "Nenaravne" potence fazorja so torej večlične.

Kvadratni koren iz negativnih skalarjev doslej ni bil določen, to je, ne obstajajo skalarji – ne pozitivni ne negativni –, katerih kvadrat bi bil negativni skalar. Če pa na skalar $-p$ pogledamo kot na ekvivalentni fazor $(-p, 0)$, potem je kvadratni koren iz njega prav lahko najti: $(-p, 0)^{1/2} = p^{1/2} (\cos \pi/2 + \mathrm{i} \sin \pi/2) = \mathrm{i}p^{1/2}$. Kvadratni koreni negativnih skalarjev so (imaginarna) kompleksna števila.

Fazor kot eksponent potence

Kako pa bi razširili eksponencial (potenco z bazo e) od skalarnega argumenta na kompleksnega? Stisnimo zobe in razvijmo funkcijo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ – za katero ne vemo, kaj pomeni! – v potenčno vrsto, kakor da bi bil argument $\mathrm{i}\varphi$ skalar! Pri tem upoštevajmo pravilo $\mathrm{i}^2 = -1$, s čimer v vrsti ostanejo samo gole vrednosti i. Naredimo še en greh in zberimo skupaj vse tiste člene, ki ne vsebujejo i, ter skupaj one, ki i vsebujejo. Iz slednjih izpostavimo i in dobimo vsoto dveh vrst. Vzhičeno ugotovimo, da sta to potenčni vrsti za kosinus in sinus, torej

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi \,. \tag{13.14}$$

Če naj si eksponentna funkcija zasluži svoje ime, bi moralo veljati še

$$e^{\hat{u}} = e^{u_1 + iu_2} = e^{u_1} e^{iu_2} = e^{u_1} (\cos u_2 + i \sin u_2) . \quad (13.15)$$

Pri $u_2 = 0$ se pridelani kompleksni eksponencial zares reducira v skalarnega. No, pa proglasimo ta rezultat, do katerega smo prišli s stisnjenimi zobmi, za definicijo kompleksnega eksponenciala! To gotovo lahko naredimo, kajti s tem nič ne vplivamo na dosedanja dejstva o skalarnem eksponencialu. Pravo vprašanje pa je seveda tole: ali iz sprejete definicije sledijo takšna pravila za računanje s kompleksnimi eksponenciali, ki so enaka računskim pravilom za skalarne eksponenciale? Kratki računi res pokažejo, da veljajo osnovna pravila $\exp \hat{u} \cdot \exp \hat{v} = \exp(\hat{u} + \hat{v})$; $\exp \hat{u} / \exp \hat{v} = \exp(\hat{u} - \hat{v})$; in $\exp \hat{u}^{\hat{v}} = \exp(\hat{u} \cdot \hat{v})$. Sprejeta definicija je torej dobra.

Najlepša enačba

Če za argument v eksponencialu izberemo $i\pi$, dobimo presenetljivo enačbo $e^{i\pi} + 1 = 0$. V njej je medsebojno povezanih pet najpomembnejših števil: 0, 1, π, e in i, povezujejo jih pa tri osnovne operacije: seštevanje, množenje in potenciranje. Za povrh je vključen še znak enakosti. Mnogi imajo to enačbo za najlepšo od vseh v matematiki.

13.5 Kompleksne funkcije

Kompleksni zapis kotnih funkcij

Enačba $\exp i\varphi = \cos \varphi + i \sin \varphi$ kaže, kako je eksponentna funkcija (imaginarnega argumenta) izražena s kotnimi funkcijami. Ali je možno tudi obratno, torej izraziti kakšno kotno funkcijo z eksponentnimi funkcijami? Za $\varphi \to -\varphi$ se enačba glasi $\exp(-i\varphi) = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Obe enačbi seštejemo in dobimo

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} . \quad (13.16)$$

Če enačbi odštejemo, pa pridelamo

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} . \quad (13.17)$$

Uspeli smo. Za izračunavanje numeričnih vrednosti kotnih funkcij, recimo za izračun $\cos 3$ ali $\sin 3$, izpeljani enačbi sicer nista uporabni, saj se reducirata v identiteto. Na primer: $\cos 3 = [\exp i3 + \exp(-i3)]/2 = [(\cos 3 + i \sin 3) + (\cos 3 - i \sin 3)]/2 = \cos 3$. Sta pa zelo uporabni pri dokazovanju trigonometričnih identitet, recimo znamenite identitete $(\sin \varphi)^2 + (\cos \varphi)^2 = 1$. Računanje z eksponentnimi funkcijami je namreč mnogo lažje od računanja s kotnimi funkcijami.

Kotne funkije kompleksnega argumenta

Nič nam ne brani, da razširimo definicijo kotnih funkcij tudi na kompleksne argumente:

$$\cos \hat{u} = \frac{e^{i\hat{u}} + e^{-i\hat{u}}}{2} \quad (13.18)$$

$$\sin \hat{u} = \frac{e^{i\hat{u}} - e^{-i\hat{u}}}{2i} .$$

S tem postaneta funkciji sinus in kosinus kompleksni, to je, njuna zaloga vrednosti so kompleksna števila. Na primer: $\cos(4\mathrm{i}+3) = [\exp(-4+3\mathrm{i}) + \exp(4-3\mathrm{i})]/2 = [\exp(-4)\exp 3\mathrm{i}]/2 + [\exp 4 \exp(-3\mathrm{i})]/2 = [\exp(-4)/2](\cos 3 + \mathrm{i}\sin 3) + [\exp(+4)/2](\cos 3 - \mathrm{i}\sin 3) = [\exp(-4) + \exp 4)]\cos 3/2 + \mathrm{i}[\exp(-4) - \exp 4]\sin 3/2$, kar je kompleksno število.

Kompleksne funkcije skalarja

Na izraz $\hat{u} = u(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ lahko pogledamo kot na kompleksno funkcijo $\hat{u}$ skalarnega argumenta φ: vsaki vrednosti φ pripada natanko določena vrednost $\hat{u}$. Splošno funkcijo te vrste lahko definiramo kot

$$\hat{u}(t) = u_1(t) + \mathrm{i}u_2(t)\,, \tag{13.19}$$

recimo $\hat{u} = at + \mathrm{i}bt^2$. Pojavi se vprašanje, ali in kako lahko takšne funkcije odvajamo in integriramo. Pravzaprav ni kaj dosti premišljevati. Odvod definiramo kot

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \tag{13.20}$$

in integral kot

$$\int \hat{u}\,\mathrm{d}t = \int u_1\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int u_2\,\mathrm{d}t\,. \tag{13.21}$$

Ko členoma odvajamo $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi)(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, dobimo $-\sin\varphi + \mathrm{i}\cos\varphi$, kar je enako $\mathrm{i}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Zapisano z eksponencialom to pomeni $(\mathrm{d}/\mathrm{d}\varphi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Vidimo, da kompleksni eksponencial odvajamo natanko tako kot skalarnega, pri čemer obravnavamo enoto i kot navaden skalar. Podobno velja za integriranje.

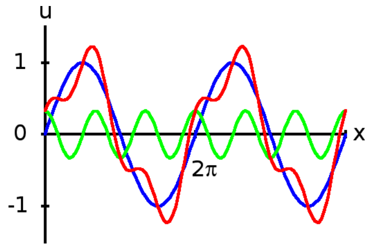
Kompleksne funkcije fazorja

Na izraze $\hat{w} = c\hat{u}$, $\hat{w} = \hat{u}^2$, $\hat{w} = \mathrm{e}^{\hat{u}}$, $\hat{w} = \cos\hat{u}$ ali $\hat{w} = \sin\hat{u}$ lahko pogledamo kot na kompleksne funkcije fazorskega argumenta. Vsaki vrednosti $\hat{u}$ pripada natanko določena vrednost $\hat{w}$. Splošno funkcijo te vrste zapišemo kot $\hat{w} = f(\hat{u})$. Očitno je, da je to preslikava točk (in s tem krivulj) iz ene ravnine v drugo ravnino. Podrobnejše obravnavanje takih funkcij, vključno z njihovim odvajanjem, integriranjem in razvojem v potenčne vrste, pa prepustimo drugim, ki to potrebujejo ali jih zanima.

13.6 Harmonične vrste

Superpozicija harmonikov

Struna (pravi fizika) lahko niha harmonično s (krožnimi) frekvencami ω, 2ω, 3ω itd. Osnovno nihanje se ponavlja po vsaki periodi $T = 2\pi/\omega$, naslednje po periodi $T_2 = 2\pi/2\omega$, pa tudi po periodi $T = 2T_2$, itd. Aktualno periodično nihanje strune je sestavljeno iz vsote izbranih harmoničnih nihanj. S primerno izbiro harmoničnih komponent je možno pridelati zelo različne periodične funkcije.



Slika 13.4 Vsota dveh sinusoid. Modra je $\sin x$, zelena je $(1/3)\cos 3x$, rdeča je vsota. Prikazan je interval med 0 in 4π. Če sta frekvenci v celoštevilčnem razmerju, je rezultat periodična funkcija.

To nas navaja na misel, da se da vsaka (ne preveč divja) periodična funkcija s periodo T zapisati v obliki *harmonične vrste* (FOURIER)

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)\,. \tag{13.22}$$

Pri tem je $\omega = 2\pi/T$. Za nekatere funkcije je morda dovolj le nekaj členov, za druge pa je potrebnih neskončno mnogo.

Razvoj funkcije v harmonično vrsto

Če poznamo amplitude a_n in b_n, lahko funkcijo $f(t)$ zlahka izračunamo. Kaj pa obratno? Če poznamo funkcijo, ali lahko izračunamo amplitude?

Razmišljamo takole. Preko periode T ima vsak sinus enako mnogo hribov kot dolin; njegov integral je zato nič. Podobno velja za kosinuse. Integral vseh členov, razen konstantnega, je zato nič, in integral funkcije mora zato biti enak integralu konstantnega člena:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{13.23}$$

Če pomnožimo harmonično vrsto (13.22) na levi in desni strani s členom $\cos k\omega t$, pridelamo na desni strani vsoto "istoimenskih" produktov $\cos n\omega t \cdot \cos k\omega t$ in "raznoimenskih" produktov $\sin n\omega t \cdot \cos k\omega t$. Potem integriramo vsako stran preko periode T. "Raznoimenski" integrali so vsi enaki nič. "Istoimenski" integrali pa so tudi enaki nič, če $n \neq k$; le v enem samem primeru, ko $n = k$, znaša integral $T/2$. Velja torej

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, 3\ldots \tag{13.24}$$

Na podoben način ugotovimo še

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,\mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, 3\ldots \tag{13.25}$$

Integriranje poteka preko periode T. Ta je seveda lahko poljubno zamaknjena. Namesto spodnje meje 0 lahko zato izberemo poljubno mejo t_0 in integriramo med t_0 in $t_0 + T$.

Vsota amplitud

Energija harmoničnega nihanja nihala je sorazmerna s kvadratom amplitude (pravi fizika). To nas navede na izračun integrala f^2 preko periode T. Morda bomo odkrili kaj zanimivega? Trigonometrično vsoto kvadriramo in pridelamo množico mešanih produktov med sinusi in kosinusi. Vsi produkti razen kvadratov sinusov in kosinusov so enaki nič in velja:

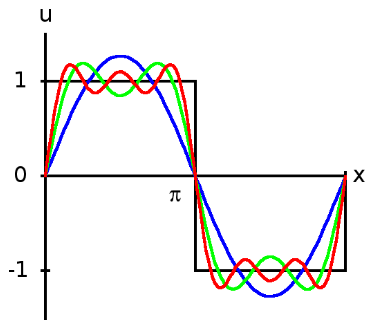
$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t = a_0{}^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2 + b_n{}^2)\,. \tag{13.26}$$

Povprečna vrednost kvadrata funkcije je torej enaka vsoti kvadratov posamičnih amplitud.

13.7 Primer spektralne analize

Škatlasta funkcija

Za zgled razvijmo v harmonično vrsto, to je *spektralno analizirajmo*, "škatlasto" periodično funkcijo, ki je na prvi polovici periode enaka $f(t) = 1$ in na drugi polovici enaka $f(t) = -1$. Upamo, da funkcija zaradi nezveznih skokov ni predivja za legitimni razvoj.



Slika 13.5 Škatlasta funkcija in njeni harmoniki. Prvi harmonik je moder, vsota prvih dveh je zelena in vsota prvih treh je rdeča.

Integrale $f(t)\cos n\omega t$ in $f(t)\sin n\omega t$ preko cele periode razdelimo na dva dela: preko prve polovice in preko druge polovice, jih zlahka integriramo in dobimo $f(t) = (4/\pi)\,[(1/1)\sin\omega t +$ $(1/3)\sin 3\omega t +$ $(1/5)\sin 5\omega t + \ldots]$. Funkcija je liha in je zato sestavljena iz samih sinusov.

Pri $t = T/4$ znaša $f(t) = 1$ in $\omega t = (2\pi/T)(T/4) = \pi/2$, zato se vrsta zapiše kot $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \ldots$ To je že znana vrsta (12.10). Povprečje kvadrata funkcije je 1 in je enako vsoti kvadratov spektralnih koeficientov, iz česar sledi

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots \tag{13.27}$$

Obe številski vrsti lahko izračunamo in ugotovimo, da res držita. To je pokazatelj (če že ne dokaz), preko posledic, da je spektralna analiza "skokovitih" funkcij veljavna. Na podoben način lahko pridelamo mnoge zanimive številske vrste.

13.8 Kompleksne harmonične vrste

Kompleksna vrsta

Če trigonometrične funkcije zapišemo v obliki $\cos\omega t = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})/2$ in $\sin\omega t = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})/2\mathrm{i}$, se razvoj v harmonično vrsto zapiše prav na kratko:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathrm{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{A}_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega t} \\
\hat{A}_0 &= a_0 \\
\hat{A}_n &= \frac{1}{2}\,(a_n - \mathrm{i}b_n) \\
\hat{A}_{-n} &= \frac{1}{2}\,(a_n + \mathrm{i}b_n)
\end{aligned}
\tag{13.28}
$$

iz česar sledi tudi

$$\hat{A}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}\,\mathrm{d}t, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\,\ldots \tag{13.29}$$

in še

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{A}_n|^2\,. \tag{13.30}$$

To je kompleksni zapis harmonične vrste. Tak zapis je ugoden zato, ker je integriranje eksponentnih funkcij, čeravno kompleksnih, praviloma lažje od integriranja trigonometričnih funkcij.

13.9 Harmonični integrali

Zvezni spekter

Kaj pa, če funkcija ni periodična, to je, če je njena perioda neskončna? Naj bo perioda T zelo dolga: pomislimo na enkraten brenk na struno, ki se ponovi le vsako uro. Tedaj je osnovna frekvenca $\omega_0 = 2\pi/T$ zelo majhna. Posamezne frekvence $\omega = n\omega_0$ so zato razporejene zelo na gosto. Pričakujemo, da se amplitude $\hat{A}_n$ potem z naraščanjem n le počasi spreminjajo. Število spektralnih črt $\mathrm{d}n$ na intervalu $\mathrm{d}\omega$ znaša $\mathrm{d}n = \mathrm{d}\omega/\omega_0$. Vsota amplitud na tem intervalu je $\hat{A}_n\,\mathrm{d}n = (\hat{A}_n/\omega_0)\,\mathrm{d}\omega$. Definiramo *gostoto spektra* kot $\hat{A}_n/\omega_0 = \hat{A}(\omega)$, pa lahko vsoto zapišemo z integralom:

$$f(t) = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{13.31}$$

Izračun spektra

Gostoto zveznega spektra razberemo iz enačbe za diskretne spektralne koeficiente. Periodo T zapišemo kot $2\pi/\omega_0$, delimo obe strani z ω_0 in pridelamo

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\,. \tag{13.32}$$

Podobno dobimo še povezavo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{A}(\omega)|^2\, d\omega\,. \tag{13.33}$$

Simetrična transformacija

Realna funkcija $f(t)$ in kompleksna funkcija $\hat{A}(\omega)$ sta torej medsebojno povezani. Rečemo, da je ena harmonična transformacija druge. Tistim, ki radi posplošujejo in imajo radi simetrijo, se ob tem porodi naslednja misel: zakaj ne bi bili obe funkciji kompleksni in zakaj ne bi bil predintegralski faktor pri obeh transformacijskih enačbah isti, najbolje kar enak ena? Če stisnemo zobe in proglasimo $f(t)$ za kompleksno funkcijo $\hat{f}(t)$; če namesto ω pišemo $2\pi\nu$, torej $d\omega = 2\pi d\nu$; in če zapišemo še $2\pi A(\omega) = B(\nu)$, s tem pridelamo par

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{B}(\nu)\, e^{i2\pi\nu t}\, d\nu \tag{13.34}$$

$$\hat{B}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)\, e^{-i2\pi\nu t}\, dt$$

ter povezavo

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{B}(\nu)|^2\, d\nu\,. \tag{13.35}$$

To je iskana transformacija v "unitarni" obliki. Zapisano gotovo velja, če $\hat{f}(t) = (f(t), 0)$. Da pa velja širše, nas prepričuje simetrija. Pustimo se ji prepričati. □

14 Vektorji in matrike

Premiki – Vektorji – Razteg in vsota – Enotni vektorji – Skalarni produkt – Vektorski produkt – Dvojni produkti – Matrike – Posebne matrike – Računske operacije – Sistem linearnih enačb – Inverzna matrika – Lastni vektorji – Diagonalizacija

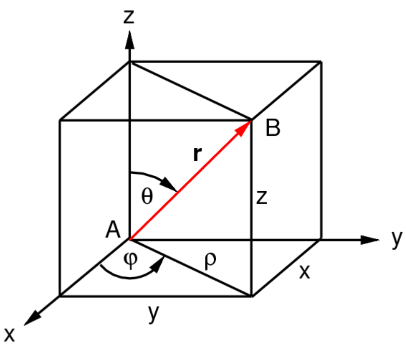
14.1 Premiki

Premik kot puščica

Človek se iz kraja A lahko premakne v različne sosednje kraje B, C, D itd. Vsak tak premik si predstavljamo kot ravno puščico iz začetne točke v končno točko. Zamišljena puščica ima dolžino in smer. Puščico iz točke A v točko B, na primer, bomo označili z $\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}$.

Komponente premika

Kako bi premik $\boldsymbol{r}_{\mathrm{AB}}$ opisali kvantitativno? V začetni točki A si zamislimo primeren koordinatni križ, recimo takega z vzhodno (x), severno (y) in navpično (z) osjo, in pogledamo, kakšne so projekcije premika na te osi.



Slika 14.1 Premik in njegove komponente.

Projekcije premika na koordinatne osi znašajo x, y in z. Rečemo, da so to *komponente* premika v postavljenem koordinatnem sistemu. Z njimi sta popolnoma določeni dolžina in smer premika. Za trojico komponent zato rečemo, da *reprezentirajo* premik v izbranem koordinatnem sistemu in zapišemo na kratko (če izpustimo oznako začetne in končne točke)

$$\boldsymbol{r} = (x, y, z)\,. \tag{14.1}$$

Dolžina in usmerjenost premika

Dolžino premika označimo z r. Hipotenuzni izrek (7.4) in definicije kotnih funkcij (10.13) povedo, da veljajo naslednje povezave med komponentami ter velikostjo in usmeritvijo premika:

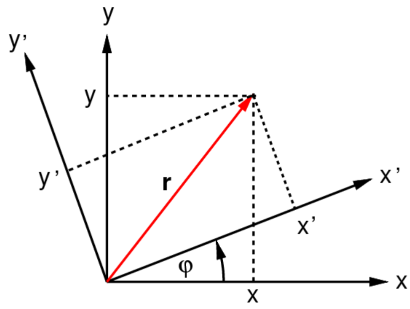
$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \rho^2 &= x^2 + y^2 \\ x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Poljubna točka prostora je torej enolično določena s *kartezičnimi* koordinatami x, y, z; s *cilindričnimi* koordinatami φ, ρ, z; ali s *sferičnimi* koordinatami φ, θ, r.

14.2 Vektorji

Zasuk koordinatnega sistema

Koordinatni sistem smo usmerili po straneh neba. Kaj če sistem zasučemo, recimo okrog navpične osi za kot φ v nasprotni smeri urinega kazalca?



Slika 14.2 Zasuk koordinatnega sistema. Prikazan je zasuk okrog osi z. V zavrtenem sistemu so komponente vektorja spremenjene, vektor sam, kot premik v prostoru, pa ostaja nespremenjen.

V zasukanem koordinatnem sistemu ima premik $\boldsymbol{r}$ komponente x', y' in z'. Iz risbe razberemo, da velja med obojimi komponentami naslednja povezava:

$$\begin{aligned} x' &= +x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z' &= z\,. \end{aligned} \tag{14.3}$$

Sistem lahko zasučemo tudi okrog kake druge osi – vzhodne, severne ali poljubno nagnjene. Povezave med starimi in novimi projekcijami so tedaj drugačne.

Invarianca dolžine

Čeprav so komponente preučevanega premika v različnih sistemih lahko različne, pa vendarle opisujejo isti premik. Izhodiščna in ciljna točka ležita namreč relativno glede na ves snovni svet enako, ne glede na to, na kateri del sveta ju relativiziramo.

Dolžina premika mora biti v vseh koordinatnih sistemih enaka. Pri zasukanem sistemu (recimo tistem okrog navpične osi) se v to prepričamo s kvadriranjem in seštevanjem leve in desne polovice transformacij (14.3). Dobiti moramo in tudi dobimo

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2\,. \tag{14.4}$$

Vektorji

Velikosti in smeri v prostoru nimajo samo premiki, ampak tudi druge preko njih definirane količine, na primer (v fiziki) hitrost ali pospešek ali sila. Rekli bomo, da so to *vektorji*. Vektorji so torej količine, ki imajo poleg velikosti še smer v prostoru. Premik je njihov prototipni predstavnik. Vektorje bomo označevali s poudarjenimi črkami, na primer $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$. V komponentni obliki pa bomo namesto oznak x, y, z raje pisali oznake 1, 2 in 3, na primer $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Takšne splošne vektorje si bomo predstavljali kar kot premike. Z njimi hočemo tudi računati, to je, razviti hočemo vektorski račun (GIBBS).

14.3 Razteg in vsota

Razteg vektorja

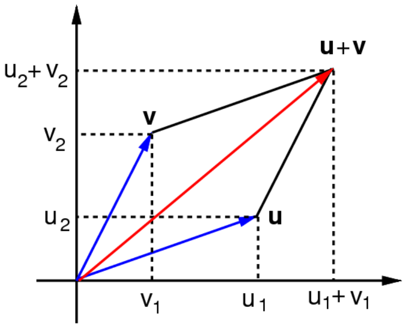
Sani, ki drsijo po ledu premo in enakomerno, opravijo v enotnem času, recimo v 1 sekundi, nek premik. V daljšem času pa opravljeni premik "podaljšajo". To nas navede, da definiramo "razteg" vektorja kot množenje vektorja s skalarjem:

$$\lambda \boldsymbol{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)\,. \tag{14.5}$$

Kadar je skalar negativen, se smer nastalega vektorja obrne. Očitno velja $\lambda \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\lambda$ in $\lambda(\mu \boldsymbol{u}) = \mu(\lambda \boldsymbol{u}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{u}$.

Vsota vektorjev

Ladja na morju opravi premik iz točke A v točko B in nato še premik iz točke B v točko C. S tem definira rezultantni premik iz A v C. To nas navede, da definiramo vsoto dveh vektorjev takole: na konec prvega vektorja nataknemo začetek drugega, sestavljeni vektor pa sega od začetka prvega do konca drugega vektorja. Alternativno lahko začetek drugega vektorja premaknemo v izhodišče prvega vektorja, sestavljeni vektor pa je enak diagonali ustvarjenega paralelograma. To je že znano paralelogramsko pravilo sil (v fiziki).



Slika 14.3 Vsota dveh vektorjev. Prototip je seštevanje dveh premikov ali dveh sil po paralelogramskem pravilu.

Risba pokaže:

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)\,. \tag{14.6}$$

Vsota je očitno komutativna in asociativna. Glede na produkt s skalarjem pa je distributivna.

Linearna kombinacija vektorjev

Množenje vektorja s skalarjem in seštevanje vektorjev lahko združimo v izraz $\lambda \boldsymbol{u} + \mu \boldsymbol{v} + \nu \boldsymbol{w}$. To je *linearna kombinacija* treh vektorjev. Njen rezultat je seveda vektor. Če trije vektorji med seboj niso paroma vzporedni, lahko s primerno izbiro treh skalarjev poustvarimo kakršenkoli vektor.

14.4 Enotni vektorji

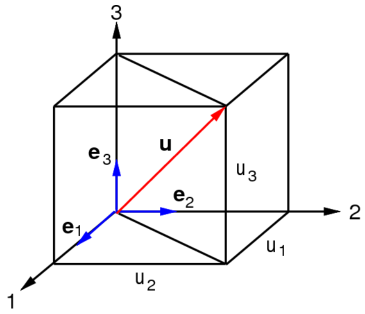
Enotni vektorji

Pa opremimo izhodišče koordinatnega sistema s tremi vektorji, ki rastejo vzdolž vsake osi! Naj imajo ti vektorji dolžine 1. To so *enotni vektorji*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 &= (1, 0, 0) \\ \boldsymbol{e}_2 &= (0, 1, 0) \\ \boldsymbol{e}_3 &= (0, 0, 1)\,. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Z njimi lahko poustvarimo kakršenkoli vektor. Potrebni skalarni koeficienti so kar enaki komponentam vektorja:

$$\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3 = \sum u_i\boldsymbol{e}_i\,. \tag{14.8}$$



Slika 14.4 Enotni vektorji.

Računanje z njimi

Z uporabo enotnih vektorjev zapišemo razteg vektorja kot $\lambda\boldsymbol{u} = \lambda\sum u_i\boldsymbol{e}_i = \sum \lambda u_i\boldsymbol{e}_i$ in vsoto dveh vektorjev kot $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \sum u_i\boldsymbol{e}_i + \sum v_i\boldsymbol{e}_i = \sum(u_i+v_i)\boldsymbol{e}_i$. Dosedanje računanje z vektorji lahko torej formalno prevedemo na računanje z relativnimi števili in tremi enotnimi vektorji, pri čemer se delamo, kot da so ti navadni skalarji.

14.5 Skalarni produkt

Sila F, ki deluje na telo pod kotom φ glede na njegov premik s, opravlja delo $Fs\cos\varphi$ (pravi fizika). To nas navede, da definiramo *skalarni produkt* dveh vektorjev:

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = uv\cos\varphi\,. \tag{14.9}$$

Specialno za enotne vektorje velja, na primer $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 = 1$, $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 = 0$ itd. Produkt dveh enakih enotnih vektorjev (med katerima je kot 0°) je enak 1. Produkt dveh različnih enotnih vektorjev (med katerima je kot 90°) pa je enak 0.

Zapis s komponentami

Kako bi skalarni produkt zapisali s komponentami? Vsak vektor zapišemo z enotnimi vektorji in navzkrižno pomnožimo vse člene. Potem upoštevamo, kaj pomenijo nastali produkti enotnih vektorjev (nič ali ena), in dobimo v komponentnem zapisu

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3\,. \tag{14.10}$$

Poseben primer nastane, če množimo vektor s samim seboj. Potem dobimo

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2 = u^2. \tag{14.11}$$

Skalarni produkt dveh vektorjev je skalar. Skalar je enak v vsakem koordinatnem sistemu. To pomeni, da je skalarni produkt invarianten glede na spremembo koordinatnega sistema.

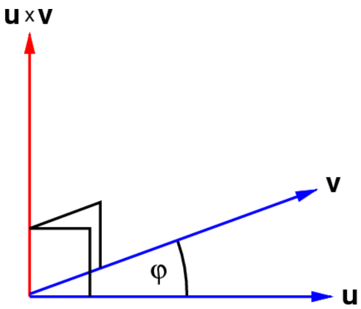
Z računi se prepričamo, da je skalarni produkt komutativen, ni acociativen in je distributiven nad vsoto.

14.6 Vektorski produkt

Sila F, ki deluje na drog pri razdalji r od njegove vrtilne točke, in sicer pod kotom φ, izvaja navor $Fr\sin\varphi$ (pravi fizika). To nas navede, da definiramo *vektorski produkt* dveh vektorjev:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = uv\sin\varphi \cdot \boldsymbol{n}\,, \tag{14.12}$$

pri čemer je $\boldsymbol{n}$ enotni vektor, pravokoten na ravnino obeh vektorjev in usmerjen v smeri gibanja desnega vijaka, ko prvi vektor zavrtimo proti drugemu.



Slika 14.5 Vektorski produkt. Prototip je navor, ki ga ustvarjata sila in ročica.

Specialno za enotne vektorje velja, na primer $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = 0$, $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ ipd. Produkt dveh enakih enotnih vektorjev (med katerima je kot 0°) je enak 0. Produkt dveh različnih enotnih vektorjev (med katerima je kot 90°) pa je enak tretjemu vektorju s pozitivnim ali negativnim predznakom, kakor pač že pove pravilo vijaka.

Zapis s komponentami

Tudi vektorski produkt hočemo zapisati s komponentami. Ravnamo tako kot pri skalarnem produktu in dobimo

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)\,. \tag{14.13}$$

Vektorski produkt dveh vektorjev je vektor. Z računi se prepričamo, da je antikomutativen $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$, ni asociativen in je distributiven nad vsoto.

14.7 Dvojni produkti

Ker je vektorski produkt vektor, se pojavi vprašanje, kaj se zgodi, če ga pomnožimo še z enim vektorjem, bodisi skalarno ali vektorsko.

Skalarno vektorski produkt

Produkt $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ poimenujemo *skalarno vektorski* produkt. Je skalar. Izraz v oklepaju je številsko enak ploščini paralelograma s stranicama u in v in ima smer njegove normale. Skalarno pomnožen s prvim faktorjem pa postane enak prostornini paralelepipeda s stranicami u, v in w. Prostornina je neodvisna od tega, kateri dve stranici določata bazo in katera določa višino. Zato lahko pišemo tudi

$$\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}\,. \tag{14.14}$$

Znaka za skalarni in vektorski produkt lahko torej zamenjamo, če le obdržimo vrstni red faktorjev.

Vektorsko vektorski produkt

Produkt $\boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ poimenujemo *vektorsko vektorski* produkt. Je vektor. Pravokoten je na smer tako prvega kot drugega (oklepajnega) faktorja. To pomeni, da je koplanaren z vektorjema v oklepaju. Račun s koordinatami pokaže:

$$\boldsymbol{w} \times (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u})\,. \tag{14.15}$$

Rezultat je razlika koplanarnih vektorjev, pri čemer je vsak skalarno pomnožen s skalarnim produktom preostalih dveh vektorjev.

14.8 Matrike

Preslikava vektorjev

Ko pomnožimo vektor $\boldsymbol{x}$ s skalarjem λ, ga raztegnemo v vektor $\boldsymbol{u}$. Vsaka komponenta vektorja se pri tem raztegne enako: $u_i = \lambda x_i$. Kaj pa, če vsako komponento pomnožimo z drugačnim skalarjem: $u_i = \lambda_i x_i$? Potem je nastali vektor ne samo raztegnjen, ampak tudi zavrten. Z izbiro trojice λ_i je popolnoma določeno, kakšen vektor nastane iz poljubnega vhodnega vektorja: komponente novega vektorja so sorazmerne istoležnim komponentam vhodnega vektorja. Najsplošnejšo sorazmernost pa zapišamo kot

$$\begin{aligned} u_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 \\ u_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 \\ u_3 &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3\,. \end{aligned} \tag{14.16}$$

S koeficienti A_{ij} je preslikava vhodnih vektorjev v izhodne popolnoma določena.

Sorazmernostna matrika

Zapisani sistem enačb ima na levi strani izhodni vektor in na desni strani tablico koeficientov, "pomešano" z vhodnim vektorjem. Morda lahko to zmešnjavo nekako razcepimo na dva ločena dela? S srečno roko zapišemo takole

$$\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \tag{14.17}$$

in deklariramo, da sta oba zapisa ekvivalentna. S tem smo na mah vpeljali: zapis vektorja kot stolpca; kvadratno tablico števil, *matriko*; in množenje matrike z vektorjem. Komponento i izhodnega vektorja dobimo, ko skalarno pomnožimo i-to vrstico matrike z vhodnim stolpcem:

$$u_i = \textstyle\sum_j A_{ij} x_j\,. \tag{14.18}$$

Na kratko bomo vse skupaj zapisali kar

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x}\,. \tag{14.19}$$

Matrika je torej *operator*, ki preslika en vektor v drugega; kakšna natančno je preslikava, je pa seveda odvisno od konkretnih elementov matrike. Poljubne matrike bomo označili s črkami $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ in podobno. Z njimi hočemo tudi računati, to je, razviti hočemo matrični račun (Cayley).

14.9 Posebne matrike

Enotna matrika

Kakšna je matrika, ki katerikoli vhodni vektor preslika v enak izhodni vektor?

$$\boldsymbol{I} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{14.20}$$

Diagonalna matrika

Pa tista, ki katerikoli vhodni vektor raztegne vzdolž treh osi za faktorje λ_1, λ_2 in λ_3?

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}. \tag{14.21}$$

Seveda so lahko vsi trije faktorji med seboj enaki. Tedaj se vektor zgolj raztegne in nič ne zavrti.

Rotacijske matrike

Kaj pa matrika, ki katerikoli vhodni vektor zavrti okrog osi 3 za kot φ v nasprotni smeri urinega kazalca? Očitno je taka matrika opisana z zasukom koordinatnega sistema okrog osi 3 v smeri urinega kazalca:

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{14.22}$$

Matriki, ki vrtita vektorje okrog drugih dveh osi, sta podobni. Rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_i$ ima $R_{ii} = 1$, vse ostale elemente v i-ti vrstici in i-tem stolpcu enake 0, štirje preostali elementi pa vsebujejo že zapisano četverico sinusov in kosinusov s primernimi predznaki.

14.10 Računske operacije

Produkt s skalarjem

Produkt matrike s skalarjem definiramo tako, da raztegne (seveda tudi skrči ali obrne) siceršnje izhodne vektorje: $(\lambda\boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{x} = \lambda(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x})$. Da to drži, moramo vpeljati predpis

$$\lambda\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Longleftrightarrow B_{ij} = \lambda A_{ij}\,. \tag{14.23}$$

Vsota

Vsoto dveh matrik definiramo tako, da proizvede vsoto siceršnjih posamičnih izhodnih vektorjev: $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x}$. To je res, če vpeljemo pravilo

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}\,. \tag{14.24}$$

Produkt

Produkt dveh matrik pa definiramo z zaporednim delovanjem posamičnih matrik: $(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{x})$. Da bi bilo to res, moramo vpeljati določilo

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow C_{ij} = \textstyle\sum_k A_{ik} B_{kj}\,. \tag{14.25}$$

V produktni matriki je ij-ti element enak skalarnemu produktu i-te vrstice prvega faktorja in j-tega stolpca drugega faktorja.

Lastnosti operacij

Pri računanju veljajo – z eno izjemo – enaki zakoni kot med skalarji. Vsota je komutativna in asociativna. Produkt ni komutativen, a je asociativen. Produkt je distributiven nad vsoto. Množenje s skalarjem je distributivno nad vsoto in asociativno s katerimkoli faktorjem produkta.

14.11 Sistem linearnih enačb

Če imamo podano sorazmernost $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$, lahko za vsak vhodni vektor $\boldsymbol{x}$ izračunamo izhodni vektor $\boldsymbol{u}$. Kaj pa, če je podan izhodni vektor, kako potem izračunamo vhodnega? Očitno moramo rešiti sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami.

Dovoljene pretvorbe

Sistem enačb se ne spremeni, če zamenjamo dve vrstici; če množimo vsak člen v vrstici z istim skalarjem; ali če k vrstici prištejemo ali odštejemo drugo vrstico. Da bo manj pisanja, zapišemo sistem kar s koeficienti:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & u_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & u_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & u_3 \end{vmatrix}. \tag{14.26}$$

To je "razširjena" matrika, zlepek "prave" matrike in izhodnega vektorja. Z naštetimi manipulacijami nad celotnimi vrsticami poskušamo pravo matriko preoblikovati v enotno matriko, pri čemer se desni stolpec preoblikuje v iskano rešitev:

$$[\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{u}] \to [\boldsymbol{I} \,|\, \boldsymbol{x}] \,. \tag{14.27}$$

Postopek reševanja

Preoblikovanje organiziramo takole

1. Na vrh postavimo vrstico, ki ima (absolutno) največji prvi koeficient.

2. Vsako naslednjo vrstico delimo z njenim prvim členom (da dobimo vodilno 1) ter pomnožimo z vodilnim členom prve vrstice, nakar od nje odštejemo prvo vrstico. Tako dobimo vodilno 0.

3. Pokrijemo prvo vrstico in prvi stolpec in nadaljujemo, dokler ne pridelamo matrike, ki ima pod diagonalo same 0.

4. Postopek ponovimo od spodaj navzgor, da dobimo diagonalno matriko.

Vsako vrstico delimo z diagonalnim členom, da nastane enotna matrika.

Ker na vrh prenašamo vrstice z največjim vodilnimi členi, se izogibamo deljenju z majhnimi števili in s tem minimiziramo zaokrožitvene napake.

14.12 Inverzna matrika

Matrična enačba $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ je po obliki enaka kot skalarna enačba $Ax = u$. Kako pa rešimo slednjo? Tako, da jo na obeh straneh množimo z $1/A$, to je s takim številom, da postane koeficient pred neznanko enak ena. Pa storimo tako tudi z matrično enačbo!

Sistem $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$ pomnožimo na obeh straneh s tako, še neznano matriko $\boldsymbol{A}^{-1}$, da velja

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}\,. \tag{14.28}$$

Postopek reševanja

S tem je sistem formalno rešen. Kako pa bi določili to *inverzno matriko*? Ker velja $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$, zapišimo razširjeno matriko

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 1 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 1 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \tag{14.29}$$

Na enak način kot pri reševanju sistema enačb pretvorimo levo matriko v enotno matriko, pri čemer na desni nastane inverzna matrika

$$[\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{I}] \to [\boldsymbol{I} \,|\, \boldsymbol{A}^{-1}]\,. \tag{14.30}$$

Ko z njo pomnožimo izhodni vektor, dobimo iskano rešitev.

Sistem enačb lahko torej rešimo neposredno ali po ovinku, z inverzno matriko. Hitrejša je prva pot. Kadar pa je treba rešiti več sistemov enačb, ki se med seboj ločijo le po izhodnem stolpcu, je hitrejša druga pot.

Inverzija posebnih matrik

Za posebne matrike dobimo naslednje inverzne matrike. Enotna matrika se invertira v enotno matriko. Diagonalna matrika se invertira v diagonalno matriko, katere elementi so enaki recipročnim vrednostim originalnih elementov. Katerakoli rotacijska matrika pa se invertira v takšno matriko, katere stolpci so enaki originalnim vrsticam; rečemo, da je to transponirana matrika $\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$.

14.13 Lastni vektorji

Matrika je operator, ki požira vhodne vektorje in iz njih izdeluje izhodne vektorje. Slednji so v splošnem zavrteni in raztegnjeni. Pojavi se vprašanje, ali kateri od njih morda niso zavrteni, ampak samo raztegnjeni. Take vektorje bomo poimenovali *lastne vektorje* matrike. Faktorje, za katere so ti vektorji raztegnjeni, pa bomo imenovali *lastne vrednosti* matrike.

Lastni vektorji posebnih matrik

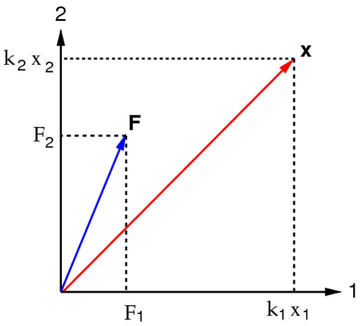
Identična matrika $\boldsymbol{I}$ spremeni vhodni vektor (u_1, u_2, u_3) v izhodni vektor (u_1, u_2, u_3). Vektor ni ne zasukan ne raztegnjen, ampak popolnoma enak vhodnemu. Matrika ima torej neskončno mnogo lastnih vektorjev. Vse pripadajoče lastne vrednosti so enake 1.

Diagonalna matrika $\boldsymbol{D}$ spremeni vhodni vektor (u_1, u_2, u_3) v izhodnega $(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \lambda_3 u_3)$. Izhodni vektor je torej raztegnjen in zasukan. Vektor $(u_1, 0, 0)$ se spremeni v $(\lambda_1 u_1, 0, 0)$; ta vektor je zgolj raztegnjen in ni nič zasukan. Podobno velja za vektorja $(0, u_2, 0)$ in $(0, 0, u_3)$. Vektor $(u_1, 0, 0)$ ima lahko poljubno vrednost komponente u_1, pa je še zmeraj lastni vektor. Da se izognemo takšni mnogoličnosti, ga normiramo, da znaša njegova dolžina 1, torej: $(1, 0, 0)$. (To naredimo tako, da vsako komponento delimo z absolutno vrednostjo vektorja.) Podobno naredimo z ostalima dvema lastnima vektorjema. Normiranje vektorjev ne spremeni njihovih lastnih vrednosti, ki znašajo λ_1, λ_2 in λ_3.

Rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_3$ zavrti vsak vektor razen tistega, ki kaže vzdolž osi 3. To je – v normirani obliki – vektor $(0, 0, 1)$. Njegova lastna vrednost je 1. Podobno velja tudi za drugi dve rotacijski matriki.

Zasuk matrike

Povezava med dvema vektorjema v naravi poteka dostikrat v kosu snovi. Dober primer je atom v kristalu, ki je na okolišnje atome privezan s tremi "vzmetmi" v treh pravokotnih smereh. Če deluje na atom zunanja sila $\boldsymbol{F}$ vzdolž kakšne vzmeti, se atom premakne v smeri sile za premik $\boldsymbol{x}$. Za majhne sile velja $\boldsymbol{F} = k\boldsymbol{x}$. Če pa deluje sila poševno in vzmeti niso enako močne, nastali premik ni več vzporeden s silo. Za majhne sile velja $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}$. Vektor sile torej ustvarja na atomu vektor premika. Lahko tudi rečemo, da atom preslikuje vhodni vektor (silo) v izhodni vektor (premik). V nekaterih snoveh je izhodni vektor zmeraj vzporeden z vhodnim vektorjem, ne glede na to, kako je slednji usmerjen. V drugih snoveh pa je bolj ali manj poševen. Le vzdolž nekaterih smeri je usmerjen kolinearno. Atom in njegove vezi s sosedi v snovi torej določajo, kje potekajo te osi. To so *glavne osi* preslikave. Če kos snovi obračamo, se z njim obračajo tudi glavne osi.



Slika 14.6 Sorazmernost vektorjev. Prototip je premik atoma ($\boldsymbol{x}$), vezanega v kristalu, ki ga povzroči sila ($\boldsymbol{F}$) nanj. Osi so usmerjene vzdolž atomskih vezi z okolico.

Kosu snovi je prav vseeno, v kakšnem opazovalnem sistemu opisujemo njegovo aktivnost, torej lokalno preslikovanje vektorjev. Če je opazovalni sistem tak, da njegove osi sovpadajo z glavnimi osmi, je preslikava vektorjev opisana posebno preprosto – z diagonalno matriko. Lastni vektorji pa imajo po eno samo neničelno komponento. Kadar pa je opazovalni sistem zasukan kako drugače, se v njem tako vektorji kot matrika zapišejo v "zasukani" obliki. Diagonalna matrika dobi nediagonalne elemente, lastni vektorji pa dobijo več neničelnih komponent.

Simetrične matrike

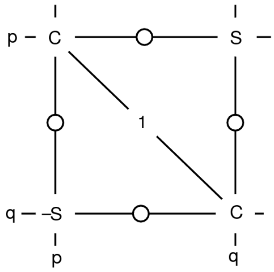
Kako zapišemo enačbo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{x}$ v koordinatnem sistemu, zasukanem okrog ene izmed glavnih osi? Na enačbo delujmo z ustrezno rotacijsko matriko $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x}$. Enotno matriko zapišemo kot $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{R}$, pa dobimo $(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) \cdot (\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x})$. Sorazmernostna matrika $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ je *simetrična*, to je, $A_{ij} = A_{ji}$. Lastni vektorji "zasukane" simetrične matrike so očitno enaki "zasukanim" lastnim vektorjem prvotne diagonalne matrike. Lastne vrednosti obeh so pa enake.

14.14 Diagonalizacija

Iz povedanega sklepamo, da lahko vsako simetrično matriko preoblikujemo nazaj v diagonalno matriko in s tem najdemo njene lastne vektorje in lastne vrednosti. Matriko je treba "le" obdelati s primernimi rotacijskimi matrikami.

Izničenje elementa

Rotacijsko matriko, ki ima diagonalna elementa $R_{pp} = R_{qq} = \cos\varphi = c$ ter izvendiagonalna elementa $R_{pq} = -R_{qp} = \sin\varphi = s$, označimo kot $\boldsymbol{R}_{pq}$. Transformacija $\boldsymbol{R}_{pq} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}{}_{pq}$ izdela matriko $\boldsymbol{A}'$, ki je enaka izvorni matriki s spremenjenima vrsticama p in q ter stolpcema p in q. Izbrati želimo takšno rotacijsko matriko, torej takšni vrednosti c in s, da bo element A_{pq} postavljen na nič.



Slika 14.7 Diagonalizacija matrike s primernim vrtenjem.

Transformacijski izraz množimo po komponentah in upoštevamo simetrijo, pa dobimo eksplicitne enačbe za A'_{pp}, A'_{qq}, $A'_{rp}\,(r \neq p)$, $A'_{rq}\,(r \neq q)$ in A'_{pq}, vse kot funkcije brezčrtastih elementov in (še neznanih) vrednosti c in s. Postavimo $A'_{pq} = 0$, iz česar sledi $\tan 2\varphi = 2A_{pq}/(A_{qq} - A_{pp})$. S tem sta torej določeni obe vrednosti c in s, z njima rotacijska matrika $\boldsymbol{R}_{pq}$ in z njo transformirana matrika $\boldsymbol{A}'$, ki ima element A'_{pq} postavljen na nič.

Postopek računanja

Diagonalizacija poteka takole. V izvorni matriki $\boldsymbol{A}$ poiščemo največji element A_{pq} nad diagonalo, z njim določimo rotacijsko matriko $\boldsymbol{R}_{pq}$ ter z njeno pomočjo izračunamo novo matriko $\boldsymbol{A}'$, ki ima ustrezen element postavljen na nič. Pri tem se nekateri preostali elementi spremenijo. Postopek ponavljamo na novi matriki, dokler ta ne postane diagonalna. Tako dobimo lastne vrednosti. Lastne vektorje pa potem določimo iz definicijske enačbe $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$, ki jo zapišemo v obliki $(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) \cdot \boldsymbol{x} = 0$. Sistem rešimo za vsak λ na že znani način.

Tako. Uspeli smo diagonalizirati simetrično matriko, ki opisuje linearno odvisnost dveh vektorjev v naravi. Diagonalizacijo drugih tipov matrik in probleme, povezane s tem, pa prepustimo drugim. □

15 Večkratne funkcije

Vektorske funkcije skalarja – Vektorski diferencial in integral – Skalarne funkcije več spremenljivk – Parcialni odvodi – Totalni diferencial – Verižno odvajanje – Razvoj v potenčno vrsto – Maksimum in minimum – Vezani ekstremi – Ploščinski integrali – Prostorninski integrali – Večkratni integrali

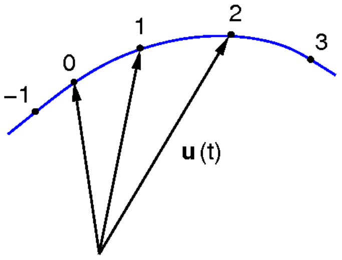
15.1 Vektorske funkcije skalarja

Vektorji so stalni ali se s časom spreminjajo. Takšen je, na primer, vektor iz središča Zemlje do izbrane točke na njenem površju: vrti se glede na zvezde. V koordinatnem sistemu, ki ima os z usmerjeno vzdolž zemeljske vrtilne osi in os x usmerjeno proti točki Gama na nebesnem ekvatorju, velja $\boldsymbol{r} = (R\sin\theta\cos\omega t, R\sin\theta\sin\omega t, R\sin\theta)$. S tem smo dobili prototip za splošno vektorsko funkcijo skalarnega argumenta:

$$\boldsymbol{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]\,. \tag{15.1}$$

Hodograf vektorja

Vektorsko funkcijo si nazorno predstavimo kot krivuljo, ki jo zariše konica vektorja, ko se s "časom" obrača in razteguje oziroma krči. Seveda morajo biti na krivuljo nanesene ustrezne časovne oznake. Tako sliko imenujemo *hodograf* vektorja.



Slika 15.1 Hodograf vektorja.

Pojavi se vprašanje, ali lahko vektorsko funkcijo odvajamo in integriramo, oziroma kakšen pomen, če sploh, imata ti dve operaciji za vektorje.

15.2 Vektorski diferencial in integral

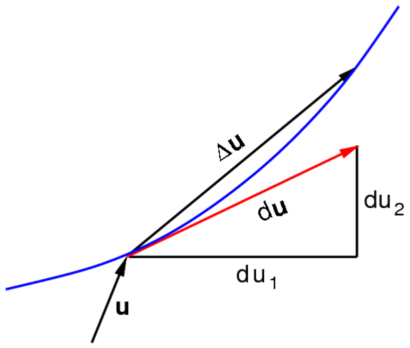
Odvod in diferencial

Odvod in diferencial definiramo po vzoru skalarnih funkcij kot

$$\boldsymbol{u}' = \lim_{\mathrm{d}t\to 0} \frac{\boldsymbol{u}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{u}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{15.2}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}' \cdot \mathrm{d}t\,.$$

Diferencial $\mathrm{d}\boldsymbol{u}$ je tangentni prirastek na hodografu vektorja. Pri majhni spremembi argumenta je približno enak pravi spremembi vektorja. Tako definiran odvod je tudi vektorska funkcija in jo lahko nadalje odvajamo. Drugi odvod označimo $\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t^2 = \boldsymbol{u}''$.



Slika 15.2 Sprememba in diferencial (tangentna sprememba) vektorja.

Iz definicij trivialno sledijo zapisi v komponentah:

$$\boldsymbol{u}' = (u_1', u_2', u_3') \qquad (15.3)$$
$$\mathrm{d}\boldsymbol{u} = (\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}u_2, \mathrm{d}u_3)\,.$$

Za vektorske funkcije veljajo ista pravila odvajanja kot za skalarno funkcijo. Tako odvajamo vsoto, vse vrste produktov (s skalarno konstanto, s skalarno funkcijo, skalarni produkt in vektorski produkt) ter posredno skalarno funkcijo.

Razvoj v potenčno vrsto

Razvoj v potenčno vrsto izvedemo tako kot pri skalarni funkciji. Velja:

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{u}(0) + \frac{\boldsymbol{u}'(0)}{1!}\,t + \frac{\boldsymbol{u}''(0)}{2!}\,t^2 + \dots \qquad (15.4)$$

oziroma

$$\boldsymbol{u}(t_0 + h) = \boldsymbol{u}(t_0) + \frac{\boldsymbol{u}'(t_0)}{1!}\,h + \frac{\boldsymbol{u}''(t_0)}{2!}\,h^2 + \dots \qquad (15.5)$$

Oba razvoja seveda lahko zapišemo tudi v koordinatah. Vsaka vektorska enačba pri tem razpade na tri skalarne enačbe.

Integral

Celotna sprememba vektorja je enaka limitni vsoti njegovih diferencialnih sprememb; vektor iz konice začetnega vektorja v konico končnega vektorja znaša

$$\boldsymbol{u} = \int \boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}t = \left(\int u_1'\,\mathrm{d}t, \int u_2'\,\mathrm{d}t\,, \int u_3'\,\mathrm{d}t\right). \qquad (15.6)$$

Če je končni vektor enak začetnemu, je očitno integral enak nič. Ker so pravila odvajanja "standardna", so takšna tudi pravila za integriranje.

15.3 Skalarne funkcije več spremenljivk

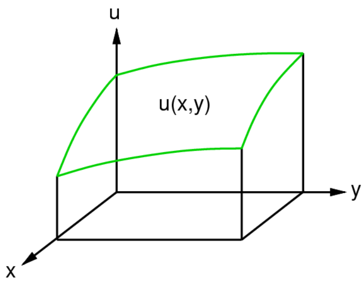
Skalarne funkcije so lahko odvisne od več spremenljivk, ne le od ene. Zgled je recimo prostornina valja, ki je odvisna od njegovega radija in višine: $V = \pi r^2 h$. Ali pa prostornina zraka v valju z batom, ki je pod pritiskom in potopljen v toplotno kopel: $V = RT/p$. In, seveda, najbolj nazorna odvisnost od vseh: višina kakšne ploskve nad ravnino, na primer polkrožne kupole nad tlemi: $h^2 = R^2 - (x^2 + y^2)$.

Ploskovni graf

Vse tovrstne funkcijo dveh argumentov zapišemo v skupni obliki $u = f(x, y)$ ali kar

$$u = u(x, y)\,. \tag{15.7}$$

Njihov graf si lahko nazorno predstavljamo kot ploskev nad ravnino. Funkcije treh in več spremenljivk zapišemo podobno, ne moremo pa si jih več predstavljati kot ploskve.



Slika 15.3 Ploskovni graf.

15.4 Parcialni odvodi

Delne spremembe

Poglejmo funkcijo u v izbrani točki (x, y)! Tam ima funkcija neko vrednost, namreč $u = u(x, y)$. Če se sedaj premaknemo v kakšno sosednjo točko, se vrednost funkcije spremeni. Posebej sta odlikovana dva premika: pri prvem se premaknemo v točko $(x + \mathrm{d}x, y)$ in pri drugem v točko $(x, y + \mathrm{d}y)$. Kakšna je sprememba funkcije pri prvem "vzdolžnem" premiku, povemo s *parcialnim odvodom*

$$u_x = \lim_{\mathrm{d}x \to 0} \frac{u(x + \mathrm{d}x, y) - u(x, y)}{\mathrm{d}x}\,. \tag{15.8}$$

Ravnamo torej natanko tako, kot pri funkciji enega samega argumenta, ko smo definirali njen navadni odvod. Za razliko od prej pa ne označimo odvoda kot u', marveč kot u_x. Ker ima funkcija dva argumenta, je pač treba nekako povedati, za katerega velja odvajanje. Ustrezni odvod po drugem argumentu pa zapišemo kot u_y.

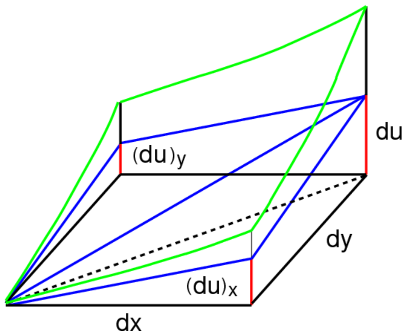
Računanje odvodov

Parcialne odvode izračunavamo prav tako kot navadne. Saj je funkcija več spremenljivk, ki jo odvajamo po eni sami spremenljivki, pri čemer držimo vse druge konstantne, v tem pogledu nerazločljiva od funkcije ene same spremenljivke. Veljajo vsa pravila odvajanja. Izračunani odvod je spet funkcija in jo lahko znova odvajamo, bodisi po prvem, bodisi po drugem argumentu. Tako pridelamo odvode u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} in u_{yx}. Zadnja dva sta med seboj enaka.

15.5 Totalni diferencial

Celotne spremembe

Parcialni odvodi povedo, koliko se funkcija spremeni, če spremenimo kakega od njenih argumentov, pri čemer druge držimo konstantne. Koliko pa se funkcija spremeni, če spremenimo vse argumente?



Slika 15.4 Totalni diferencial funkcije. Višinski prirastek tangentne ravnine je enak vsoti robnih prirastkov. Funkcija je zelena, tangentna ravnina modra in diferenciali rdeči.

Risba pokaže, da velja

$$\mathrm{d}u = (\mathrm{d}u)_x + (\mathrm{d}u)_y = u_x\,\mathrm{d}x + u_y\,\mathrm{d}y\,. \tag{15.9}$$

Rečemo, da je du *totalni diferencial* funkcije. Z njim zapišemo parcialne odvode na naslednji način:

$$\frac{(\mathrm{d}u)_x}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x\,. \tag{15.10}$$

Diferencialni količniki

Oznaki ∂x in ∂y torej pomenita isto kot dx in dy, namreč diferencial neodvisne spremenljivke. Oznaka ∂u pa pomeni diferencial funkcije, kadar se spreminja zgolj ena izmed neodvisnih spremenljivk. Oznaka ne pove, katera spremenljivka je to. Velja dogovor, da je to tista, nad katere diferencialom je zapisan. Pri rokovanju z diferenciali bomo morali na to paziti. V izrazu $\mathrm{d}u = (\partial u/\partial x)\mathrm{d}x + (\partial u/\partial y)\mathrm{d}y$, na primer, ne smemo krajšati diferencialov ∂x in dx ter ∂y in dy, ker s tem pridelamo izraz $\mathrm{d}u = \partial u + \partial u$, v katerem je izgubljena informacija o merodajnih spremenljivkah. Zato oba diferenciala ∂u nista med seboj enaka (čeravno sta enako zapisana) in ju ne smemo sešteti v $2\partial u$.

15.6 Verižno odvajanje

Verižno pravilo

V funkciji $u = u(x, y)$ je vsaka neodvisna spremenljivka lahko funkcija tretje spremenljivke t, torej $x = x(t)$ in $y = y(t)$. Zgled je plin pod zunanjim tlakom in temperaturo, ki se spreminjata s časom. Pojavi se vprašanje, kako izračunati odvod du/dt. Diferencial du delimo z dt in dobimo:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,. \tag{15.11}$$

To je *verižno pravilo* odvajanja.

Kaj pa, če je vsaka neodvisna spremenljivka funkcija dveh, ne ene, spremenljivke: $x = x(t, s)$ in $y = y(t, s)$? Ravnamo tako kot prej:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \tag{15.12}$$

in podobno za $\partial u/\partial s$. Sedaj vidimo, kakšna moč se skriva v pametni notaciji!

Implicitno odvajanje

Funkcija dveh spremenljivk je lahko podana tudi v implicitni obliki $F(x, y, u(x, y)) = 0$. Če gre, iz nje izrazimo $u = u(x, y)$ in izračunamo njene parcialne odvode. Lahko pa ravnamo drugače. Izraz F razumemo kot funkcijo treh spremenljivk, od katerih sta dve med seboj neodvisni, tretja pa je odvisna od njiju. Enačbo na obeh straneh odvajamo po verižnem pravilu na x, pri čemer upoštevamo $\partial x/\partial x = 1$ in $\partial y/\partial x = 0$:

$$F(x,y,u) = 0 \Longrightarrow F_x + F_u \frac{\partial u}{\partial x} = 0\,. \tag{15.13}$$

Sledi $\partial u/\partial x = -F_x/F_u$. Podobno izračunamo tudi odvod $\partial u/\partial y$.

15.7 Razvoj v potenčno vrsto

Posredni razvoj

Tudi funkcijo dveh spremenljivk hočemo razviti v potenčno vrsto okrog točke $(0, 0)$. Funkcijo zapišemo kot $u(x, y) = u(x(t), y(t)) = u(t)$ in postavimo $x(t) = \alpha t$ in $y(t) = \beta t$. Seveda velja razvoj v vrsto $u(t) = u(0) + u't + 1/2 \cdot u''t^2 + \ldots$ Nato izračunamo odvod $u' = \mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ po verižnem pravilu, pri čemer upoštevamo $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = \alpha$ in $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = \beta$. Podobno izračunamo drugi odvod $u'' = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}t^2$. Dobljena odvoda vstavimo v vrsto in pridelamo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u(0, 0) + \\ &xu_x + yu_y + \frac{1}{2}(x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy}) + \ldots \end{aligned} \tag{15.14}$$

Operatorski zapis

Odvodi so vsi računani v točki $(0, 0)$. Seveda lahko funkcijo razvijemo tudi okrog kake druge točke (a, b). Tedaj velja, v polepšanem zapisu,

$$\begin{aligned} u(a{+}x,b{+}y) &= u(a,b) + \\ &\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)u + \frac{1}{2!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \ldots \end{aligned} \tag{15.15}$$

Koeficienti so odvisni le od vrednosti funkcije in njenih parcialnih odvodov v točki (a, b). Višje parcialne odvode smo zapisali na kratko kot "potence". Izraz $(\partial/\partial x)^2$, na primer, pomeni $\partial^2/\partial x^2$, to je drugi odvod.

15.8 Maksimum in minimum

Prvi odvod

Hribi imajo svoje vrhove in globeli. To so njihovi *lokalni ekstremi*. Ekstremi so lahko samo v točkah, kjer sta oba parcialna odvoda u_x in u_y enaka nič. Ugotoviti je treba še, ali gre v takih *stacionarnih točkah* za maksimum ali minimum ali morda za sedlo.

Drugi odvod

Naj bo stacionarna točka (a, b). Navpični presek $u(x, b)$ skoznjo je funkcija zgolj ene spremenljivke. Kot vemo, ima taka funkcija maksimum, ako je njen drugi odvod negativen, in minimum, ako je drugi odvod pozitiven. Podobno velja za funkcijo $u(a, y)$. Tako lahko že rečemo: v maksimumu morata biti oba odvoda u_{xx} in u_{yy} negativna in v minimumu pozitivna. Toda to še ni dovolj. Drugi odvod v katerikoli smeri, ne zgolj v smeri koordinatnih osi, mora biti negativen (v maksimu) oziroma pozitiven (v minimumu).

Kriterij za ekstrem

Okrog stacionarne točke razvijemo funkcijo v potenčno vrsto do kvadratnih členov, pri čemer postavimo oba prva odvoda na nič. Dobimo, da je $u(a+h, b+k)$ enako $u(a,b) + 1/2 \cdot (u_{xx}h^2 + 2u_{xy}hk + u_{yy}k^2)$. Da bo v točki maksimum, mora biti drugi člen negativen za vsak h in k. Za minimum pa mora biti ta člen pozitiven. Da bo to res, mora četverica drugih odvodov zadoščati določenemu kriteriju. Kakšen je ta kriterij?

Drugi člen (brez faktorja 1/2) zapišemo v taki obliki, da se znebimo člena z mešanim faktorjem hk: $Q = A[(h + Bk/A)^2 + (CA - B^2)k^2/A^2]$. Pri tem smo druge odvode zaradi kratkosti označili s črkami A, B in C. Pri pozitivnem A je količina Q za vsak h in k pozitivna, če je le $CA - B^2 > 0$. Pri negativnem A pa je količina Q vseskozi negativna pri istem pogoju. Iskani pogoj za ekstrem je torej

$$u = \max \Longleftrightarrow \mathrm{u}_{xx} < 0, u_{yy} < 0 \,\mathrm{in}\, u_{xx}u_{yy} - {u_{xy}}^2 > 0 \tag{15.16}$$
$$u = \min \Longleftrightarrow \mathrm{u}_{xx} > 0, u_{yy} > 0 \,\mathrm{in}\, u_{xx}u_{yy} - {u_{xy}}^2 > 0\,. \tag{15.17}$$

Rečemo, da je to diskriminanta drugih odvodov.

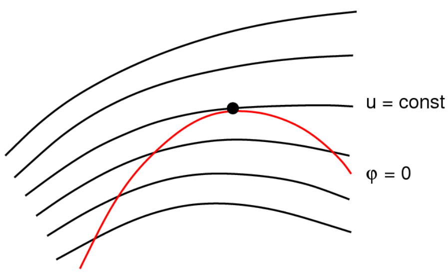
15.9 Vezani ekstremi

Presek ploskve

Hribovje v mislih prerežemo z navpično ravnino v smeri sever-jug pri koordinati $x = a$, ali pa v smeri vzhod-zahod pri koordinati $y = b$. Nastaneta ravninski krivulji $u = u(a, y)$ ali $u = u(x, b)$. Kje ima taka krivulja ekstreme, že znamo določiti. Kaj pa, če se po hribih vije cesta, katere talne koordinate so opisane z enačbo, bodisi eksplicitno ali implicitno? Kje na cesti so njeni ekstremi? Za splošno funkcijo $u = u(x, y)$ želimo torej najti ekstreme, ki zadoščajo dodatnemu pogoju

$$\varphi(x, y) = 0\,. \tag{15.18}$$

Rečemo, da so to *vezani ekstremi*.



Slika 15.5 Vezani ekstrem. Ploskev je podana z izohipsami. V ekstremni točki je tangenta na krivuljo tudi tangenta na lokalno izohipso.

Sovpad tangent

Slika kaže naslednje. Ko se premikamo po krivulji $\varphi = 0$, doživljamo različne vrednosti u. Tam, kjer naletimo na ekstrem, sta tangenti na φ in u enaki: $u_x/u_y = \varphi_x/\varphi_y$. Drugače povedano:

$$u_x + \lambda\varphi_x = 0 \qquad (15.19)$$
$$u_y + \lambda\varphi_y = 0\,,$$

pri čemer je λ (še neznani) sorazmernostni faktor med odvodi. Zapisani enačbi in pogoj $\varphi = 0$ tvorijo sistem treh enačb s tremi neznankami x, y in λ. Njegova rešitev nam da stacionarne točke. Ali so to maksimumi ali minimumi, pa pove diskriminanta drugih odvodov na že znani način.

15.10 Ploščinski integrali

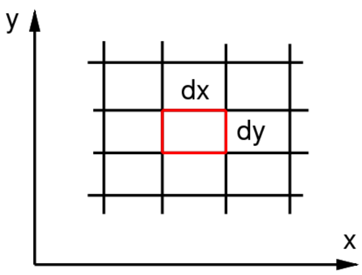
Ploskovna gostota

Funkcija $u = u(x, y)$ lahko opisuje tudi porazdelitev mase ali električnega naboja po ravnini: $u = \mathrm{d}m/\mathrm{d}S$ ali $u = \mathrm{d}e/\mathrm{d}S$. Masa (ali naboj), ki je naložena na dveh ločenih ploskovnih elementih dS, se sešteva. Rečemo, da je *ekstenzivna količina*. Za temperaturo, na primer, pa to ne velja. Pravimo, da je *intenzivna količina*. Naj bo torej U ekstenzivna količina in $u = \mathrm{d}U/\mathrm{d}S$ njena *ploskovna gostota*. Nad izbranim ravninskim območjem je potem nakopičena tolikšna limitna vsota:

$$U = \int u\,\mathrm{d}S\,. \qquad (15.20)$$

Razcep integrala

Kako naj izračunamo zapisani integral? Naj bo ravninsko področje pravokotnik $[a, b] \times [c, d]$. Vzdolžno in prečno ga razrežemo v ozke trakove. Tako dobimo ploščinske elemente $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



Slika 15.6 Ploščinski elementi v kartezičnih koordinatah. Integracija poteka najprej po vrsticah in nato po stolpcih oziroma obratno.

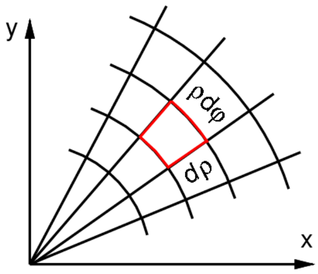
Potem integriramo po vsakem pasu vzdolž smeri x, pri čemer obravnavamo y kot parameter; dobimo delne vsote $\Delta U(y) = \int u(x, y)\,\mathrm{d}x$. Nato integriramo dobljene vsote vzdolž smeri y: $U = \int \Delta U(y)\,\mathrm{d}y$. Seveda lahko integriramo tudi obrnjeno: najprej vzdolž osi y in nato vzdolž osi x. Velja torej

$$U = \int\int u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b u\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d u\,\mathrm{d}y\,. \qquad (15.21)$$

Kadar definicijsko območje funkcije ni pravokotnik, ampak je krivočrtni lik, računamo z ustreznim spremenljivim intervalom $[a(y), b(y)]$ ali $[c(x), d(x)]$.

Polarni razcep

Posebno lep krivočrten tloris je tak, ki ima obliko kroga okoli izhodišča. V tem primeru ga je smiselno razrezati v ploskovne elemente z radialnimi premicami $\varphi = \text{const}$ in s koncentričnimi krogi $\rho = \text{const}$.



Slika 15.7 Ploščinski elementi v polarnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto $u(\rho, \varphi)$.

Elementi, ki jih tako pridelamo, imajo ploščine $\mathrm{d}S = \mathrm{d}\rho \cdot \rho\,\mathrm{d}\varphi$. Ploskovna gostota na teh elementih mora biti podana kot $u(\rho, \varphi)$. Skupna ekstenzivna količina tedaj znaša

$$U = \int\int u\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{15.22}$$

Integriramo po ustreznem "pravokotnem" področju, recimo $[0, R] \times [0, 2\pi]$.

Uporaba v geometriji

Posebej odlikovana ekstenzivna količina, ki jo lahko naložimo na ploskovni element $\mathrm{d}S$, je prostornina prizme $\mathrm{d}V$ nad njim. Ploskovna gostota je v tem primeru kar višina ploskve h. Integral $U = \int u\,\mathrm{d}S$ potem pomeni $V = \int h\,\mathrm{d}S$. Tako računamo prostornine teles, ki jih zamejujejo krovne ploskve. Če ima "krovna" ploskev negativno višino, torej če leži pod koordinatno ravnino, je izračunana prostornina negativna.

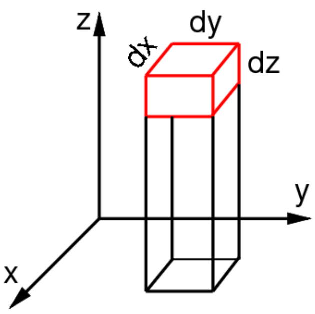
15.11 Prostorninski integrali

Ekstenzivna količina je lahko porazdeljene tudi po prostoru. Tedaj jo pač integriramo tam in sicer natanko tako, kot po ravnini:

$$U = \int u\,\mathrm{d}V. \tag{15.23}$$

Razcep integrala

Če ima preučevani prostor obliko kvadra, ga razkosamo na drobne kocke $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z$ in integriramo.



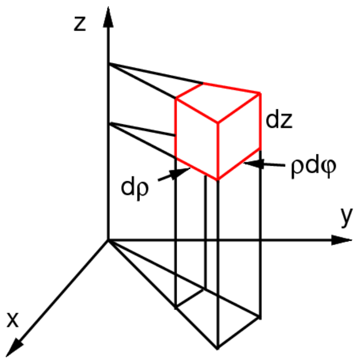
Slika 15.8 Prostorninski elementi v kartezičnih koordinatah. Integracija poteka po širini, globini in višini v tem ali kakem drugem vrstnem redu.

Integriramo po ustreznem kvadru, recimo po $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$:

$$U = \int\int\int u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{15.24}$$

Cilindrični razcep

Cilindrični prostor je bolje razkosati na prostorninske elemente $\mathrm{d}V = \mathrm{d}\rho \cdot \rho\,\mathrm{d}\varphi \cdot \mathrm{d}z$.



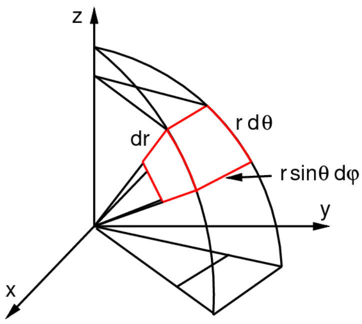
Slika 15.9 Prostorninski elementi v cilindričnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto $u(\rho, \varphi, z)$.

Integriramo po potrebnem "kvadru", recimo $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, H]$:

$$U = \int\int\int u\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z. \tag{15.25}$$

Krogelni razcep

Krogelni prostor pa je naravno razkosati na elemente $\mathrm{d}V = \mathrm{d}r \cdot r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \cdot r\,\mathrm{d}\theta$.



Slika 15.10 Prostorninski elementi v krogelnih koordinatah. Razcep je primeren za gostoto $u(r, \varphi, \theta)$.

Integriramo po "kvadru", recimo $[0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$:

$$U = \int\int\int u\,r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta. \tag{15.26}$$

15.12 Večkratni integrali

Poleg ekstenzivnih količin, ki so porazdeljene po ravnini ali prostoru, poznamo tudi take, ki so porazdeljene po prostorskem kotu, na primer svetilnost $I = \mathrm{d}P/\mathrm{d}\Omega$. V tem primeru ne integriramo po ravnini, ampak po kotu $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

Konfiguracijski prostor

Nasploh velja, da lahko integriramo kakršnokoli ekstenzivno skalarno funkcijo, ki je porazdeljena po eno-, dvo- ali večdimenzionalnem *konfiguracijskem prostoru*. Če integriramo po enodimenzionalnem prostoru, imamo opravka z navadnim integralom, če po večdimenzionalnem, pa z večkratnim integralom. □

16 Krivulje in ploskve

Krivulje in ploskve – Premica – Krožnica – Elipsa – Parabola – Vektorski opis krivulj – Ločna dolžina – Lokalne lastnosti krivulj – Osnovne ploskve – Vektorski opis ploskev – Krivulje na ploskvi – Lokalne lastnosti ploskev – Zemljemerstvo na krogli – Zemljepisne projekcije – Polarna stereografska – Ekvatorska valjna konformna – Stožčna konformna – Druge projekcije

16.1 Krivulje in ploskve

Večkrat smo omenili, da enačba $y = y(x)$ opisuje ravninsko *krivuljo*, če sta spremenljivki x in y dolžinski koordinati. Enačba $z = z(x, y)$ pa na podoben način opisuje *ploskev* v prostoru. Čas je, da se opisa krivulj in ploskev lotimo sistematično (DESCARTES, GAUSS).

Koordinate

Osnova za opis krivulj in ploskev z enačbami je "poimenovanje" vsake prostorske točke z njenimi koordinatami (x, y, z) v poljubno izbranem koordinatnem sistemu, katerega osi so med seboj pravokotne in umerjene v enakih dolžinskih enotah. Rečemo, da so to *kartezične koordinate*. Razdalja med dvema točkama potem znaša, po hipotenuznem izreku,

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\,. \tag{16.1}$$

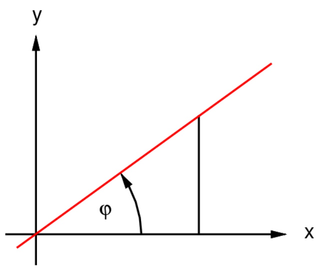
Pametno je sistem izbrati tako, da bo enačba krivulje ali ploskve v njem čim bolj preprosta.

16.2 Premica

Enačba premice

Najpreprostejša "krivulja" je *premica*. Uteleša jo, na primer, brazda ladje, ki pluje po morju v stalni smeri φ glede na sever. Pot ne sme biti predolga, da se ne pokaže zakrivljenost morja. Koordinatni sistem postavimo v začetno pristanišče, ordinatno os y usmerimo proti severu in abscisno os x proti vzhodu. Enačba brazde-premice se potem glasi

$$y = kx \tag{16.2}$$
$$k = \tan\varphi.$$



Slika 16.1 Premica. Najkrajša pot med dvema točkama v prostoru.

Smerni koeficient k ima nazoren pomen: to je prirast ordinatne razdalje na prirast abscisne razdalje. Če je koeficient pozitiven, premica narašča, sicer upada.

Premico, ki ne gre skozi izhodišče, ampak seka ordinatno os v y_0, opišemo kot $(y - y_0) = kx$. Če seka abscisno os v točki x_0, velja $y = k(x - x_0)$. Ako pa gre skozi točko (x_0, y_0), se enačba premice glasi $(y - y_0) = k(x - x_0)$.

Parametrični zapis

Pri ladji, ki pluje z enakomerno hitrostjo, sta njeni koordinati enolično določeni s pretečenim časom t:

$$\begin{aligned} x &= At \\ y &= Bt\,. \end{aligned} \tag{16.3}$$

Ladja zariše isto premico ne glede na to, kako hitro pluje oziroma kako hitro teče čas (to je ura, ki jo imamo). Zato bomo opustili časovne enote in uporabljali kar brezdimenzijska števila. Takšen "čas", ki zavzema vrednosti na intervalu $(-\infty, +\infty)$, bomo poimenovali *parameterski čas* oziroma *parameter* in ga označevali kar s t. Vsaki vrednosti parametra ustreza natanko ena vrednost koordinat. Primerjava parametričnega in eksplicitnega zapisa pove $k = B/A$.

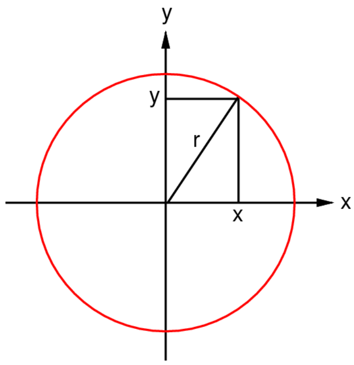
16.3 Krožnica

Enačba krožnice

Iz sive davnine je poznana *krožnica*: krivulja, katere vsaka točka je enako oddaljena od izbrane točke, središča. Že stara ljudstva so jo risala s količkom in vrvico pri gradnji kolib in obzornih krogov. Mi bomo postavili koordinatni sistem v središče kroga. Potem pove hipotenuzni izrek

$$x^2 + y^2 = r^2\,. \tag{16.4}$$

V translatorno zamaknjenem koordinatnem sistemu pa ima središče kroga koordinati (x_0, y_0). Tedaj očitno velja $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.



Slika 16.2 Krožnica. Vsaka njena točka je enako oddaljena od izbrane točke, središča.

Parametrični zapis

Tudi krožnico lahko opišemo parametrično. Spomnimo se enakomernega kroženja nihala (iz fizike), pa takoj uvidimo

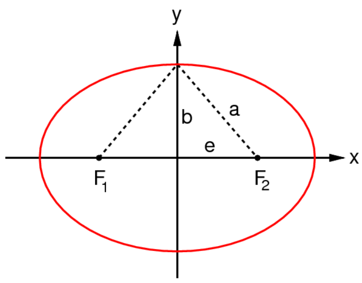
$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t\,, \end{aligned} \tag{16.5}$$

pri čemer leži parameter t na intervalu $[0, 2\pi]$.

16.4 Elipsa

Prečno presekano bambusovo steblo ima rob v obliki krožnice. Če ga presekamo poševno, pa je rob "raztegnjena" krožnica, *elipsa*. Kako bi tako elipso narisali na tleh? Prej ali slej – morda kot kakšen kraljevi vrtnar – odkrijemo postopek: središče kroga "raztegnemo" v dve središči, nanju privežemo vrv, jo nategnemo z risalnim količkom in začrtamo željeno krivuljo. Elipsa je s tem definirana kot množica točk, pri katerih je vsota razdalj do dveh izbranih točk, *gorišč*, konstantna.

Točko na polovici zveznice med obema goriščema poimenujemo središče elipse. Skozi središče potekata dva odlikovana premera: dolga os $2a$ in kratka os $2b$. Razdaljo med središčem in (katerimkoli) goriščem poimenujemo *ekscentričnost* e. Ko je risalni količek v temenu velike osi, vidimo, da velja $r_1 + r_2 = 2a$. Ko je v temenu male osi, pa hipotenuzni izrek pove $b^2 + e^2 = a^2$.



Slika 16.3 Elipsa. Vsota razdalj iz dveh izbranih točk, gorišč, je do vsake njene točke enaka.

Enačba elipse

Koordinatni križ postavimo v središče elipse in ga zavrtimo tako, da njegove osi sovpadajo z veliko in malo osjo. Levo gorišče ima potem koordinato $(-e, 0)$ in desno $(+e, 0)$. Razdalji od gorišč do izbrane točke na elipsi znašata ${r_1}^2 = (x+e)^2 + y^2$ in ${r_2}^2 = (x - \mathrm{e})^2 + y^2$. Njuna vsota mora biti $r_1 + r_2 = 2a$ in iz tega pogoja sledi, z nekaj računanja, enačba

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{16.6}$$

Elipso v premaknjenem koordinatnem sistemu (oziroma premaknjeno elipso v obstoječem sistemu) pa opišemo z zamenjavo $x \to x - x_0$ in $y \to y - y_0$.

Parametrični zapis

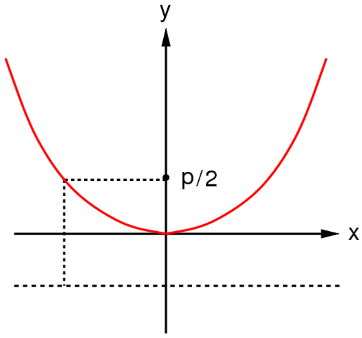
Pri $a = b$ preide elipsa v krog, kakor je tudi prav. Parametrični opis zato kar uganemo:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t\,. \end{aligned} \tag{16.7}$$

Parameter t leži na intervalu $[0, 2\pi]$. Da je to res pravi opis, preverimo z vstavitvijo v implicitno enačbo.

16.5 Parabola

Krogelno zrcalo (katerega presek je krožni lok) zbira vzporeden snop žarkov v goriščno točko, vendar samo tedaj, kadar je snop ozek. Bolj oddaljeni žarki se po odboju sekajo v gorišču, ki je bliže temenu. Morda obstaja kakšna krivulja, ki bi vse vzporedne žarke združevala v isti točki? Drugače povedano: tako krivuljo – *parabolo* – bi morale sestavljati točke, ki so enako oddaljene od premice in goriščne točke.



Slika 16.4 Parabola. Vsaka njena točka je enako oddaljena od izbrane točke, gorišča, in od vodilne premice.

Enačba parabole

Postavimo koordinatni sistem tako, da bo premica "vodilja" vodoravna pri koordinati $(0, -p/2)$. Gorišče je potem v točki $(0, +p/2)$. Razdalja poljubne točke na iskani krivulji od gorišča je ${r_1}^2 = (y - p/2)^2 + x^2$ in razdalja te točke od premice je $r_2 = |y + p/2|$. Iz pogoja $r_1 = r_2$ sledi, z nekaj računanja,

$$2py = x^2 \,. \tag{16.8}$$

Parametrični zapis

Enačba ima obliko $y \propto x^2$. Spomnimo se, da prav takšna enačba opisuje tir kamna pri vodoravnem metu (v fiziki). Tam narašča vodoravna koordinata s časom in navpična s kvadratom časa, kar nas navede na naslednji parametrično zapis parabole z navpično simetrijsko osjo:

$$\begin{aligned} x &= At \\ y &= Bt^2 \,. \end{aligned} \tag{16.9}$$

Vstavitev polarnih enačb v implicitno enačbo pove $2p = A^2/B$.

16.6 Vektorski opis krivulj

Hodograf vektorja

Namesto s koordinatami lahko delamo z ustreznimi *vektorji lege*: $\boldsymbol{r} = (x, y)$. Razdaljo med dvema točkama potem zapišemo kot absolutno vrednost razlike dveh vektorjev: $s = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$.

Parametrski zapis krivulje pove, kako se vsaka koordinata spreminja s časom: $x = x(t)$ in $y = y(t)$. To zapišemo v vektorski obliki kot

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) \,. \tag{16.10}$$

S časom se vektor spreminja – obrača, daljša in krajša – in s svojo konico zarisuje *hodograf* – krivuljo. Naraščajoči parameter t definira pozitivno smer gibanja po krivulji.

Odvodi po parametru

Kako se odvod ene koordinate po drugi izraža z odvodoma koordinat po parametru? Verižno pravilo pove $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}y/\mathrm{d}x) \cdot (\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)$, torej

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} \,. \qquad (16.11)$$

Odvod po parametru smo označili s črtico. Drugi odvod pa računamo takole. Posredno odvajamo $(d/dx)(dy/dx) = (d/dt)(dy/dx) \cdot dt/dx$. Ker $dy/dx = y'/x'$ in $dt/dx = 1/x'$, velja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3} \,. \qquad (16.12)$$

Kako parametrizirati

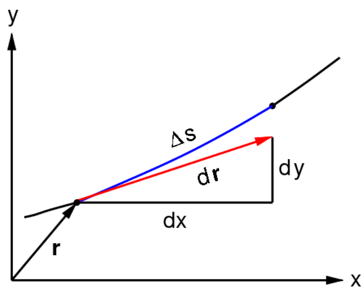
Kako za funkcijo $y = y(x)$ določiti parametrično obliko? Izberemo (skoraj) poljubno funkcijo $x = x(t)$ in nato izračunamo $y = y(x(t))$. Očitno je možnosti za izbiro neskončno. Poiščemo takšno, da je rezultat najbolj preprost. Posebno zanimiva izbira je kar $x = t$. Tedaj velja $\boldsymbol{r}(x) = (x, y(x))$. Parabolo, na primer, zapišemo kot $\boldsymbol{r}(t) = (At, Bt^2)$ ali kot $\boldsymbol{r}(x) = (x, x^2/2p)$. Očitno je parametrični zapis krivulje zelo nazoren in vsestranski.

Kako pa iz parametrične oblike $x = x(t), y = y(t)$ določiti eksplicitno oziroma implicitno obliko funkcije? Iz prve in druge enačbe izrazimo t, ju izenačimo in dobimo iskano enačbo, ki jo po potrebi še preoblikujemo v lepšo obliko.

16.7 Ločna dolžina

Ločni element

Prirast parametra za dt se odraža kot sprememba vektorja $d\boldsymbol{r} = (dx, dy)$ oziroma kot kratek kos krivulje, *ločni element* $ds^2 = dx^2 + dy^2$.



Slika 16.5 Ločni element krivulje. Njegova dolžina je limitno enaka spremembi vektorja lege.

Velja $ds = |d\boldsymbol{r}|$. Enačbo delimo na obeh straneh z dt, pa dobimo

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}'|\, dt = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}\, dt \,. \qquad (16.13)$$

Dolžina krivulje

Dolžina poti, ki jo zariše vektor med začetno in končno lego, znaša

$$s = \int \sqrt{(x'^2 + y'^2)}\, dt \,. \qquad (16.14)$$

Če je parameter koordinata $t = x$, pomeni odvajanje na parameter kar odvajanje na koordinato: $x' = dx/dx = 1$ in $y' = dy/dx$, torej $ds = \sqrt{(1 + y'^2)}\, dx$.

Naravna parameterizacija

Dolžina krivulje od izbrane začetne točke naprej in nazaj je odličen parameter za opis krivulje. Krivulja je tedaj kot cesta, na kateri so v enakih dolžinskih presledkih postavljeni mejniki. Vsak tak mejnik ima svoje koordinate in krivuljo opišemo kot

$\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s))$. Parameter je sedaj vezan zgolj na krivuljo in nič na okolico. Pri takšni parametrizaciji seveda velja $x'^2 + y'^2 = 1$ (črtica označuje odvod po parametru s).

Kako dolžinsko parametrizirati krivuljo, ki je podana s splošnim parametrom t? — Izračunamo dolžino vzdolž krivulje kot funkcijo časa $s(t)$. — Izračunamo obratno funkcijo $t(s)$. — Vstavimo jo v prvotno enačbo $\boldsymbol{r}(t(s))$. Za krog, na primer, dobimo $x = r\cos(s/r)$ in $y = r\sin(s/r)$.

16.8 Lokalne lastnosti krivulj

Tangenta

Smer krivulje v izbrani točki je podana z normaliziranim premikom

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,. \tag{16.15}$$

Števec in imanovalec ulomka delimo z dt in dobimo enotni *tangentni vektor* $\boldsymbol{r}'/|\boldsymbol{r}'|$, to je

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}\,. \tag{16.16}$$

Tangenta, na kateri leži enotni tangentni vektor, ima smerni koeficient $k = y'/x'$. Če se dve krivulji sekata, je kot med njunima tangentnima vektorja določen s skalarnim produktom $\boldsymbol{\tau}_1 . \boldsymbol{\tau}_2 = \cos\varphi$.

Normala

S tangentnim vektorjem je definiran *normalni vektor*, ki stoji nanj pravokotno:

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\tau}\,, \tag{16.17}$$

pri čemer je $\boldsymbol{k}$ enotni vektor v smeri osi z. Normalni vektor dobimo s križnim množenjem vektorskega produkta (ali z množenjem z rotacijsko matriko za 90°):

$$\boldsymbol{n} = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}}\,. \tag{16.18}$$

Normala, na kateri leži normalni vektor, ima smerni koeficient $k = -x'/y'$. To je negativna recipročna vrednost smernega koeficienta tangente.

Ukrivljenost

Koliko se zasuče enotni vektor preko dolžinskega elementa, je mera za lokalno *ukrivljenost* krivulje

$$K = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}}{\mathrm{d}s}\right|. \tag{16.19}$$

Izračunamo jo takole. — Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ odvajamo po času posredno: $\boldsymbol{r}' = (\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s)\cdot(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$ in dobimo $\boldsymbol{\tau}v$. — Vektor $\boldsymbol{r}'$ odvajamo po času posredno: $\boldsymbol{r}'' = (\mathrm{d}/\mathrm{d}s)(\boldsymbol{\tau}v)\cdot(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)$, upoštevamo pravilo za odvod produkta in $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}/\mathrm{d}s = K\boldsymbol{n}$ ter dobimo $Kv^2\boldsymbol{n} + \boldsymbol{\tau}\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$. — Izračunamo produkt $\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'' = Kv^3 \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n}$. — Iz slednjega izrazimo K, pri čemer upoštevamo $\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$, in dobimo $K = (\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{r}'')\boldsymbol{k}/v^3$, torej:

$$K = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \,. \tag{16.20}$$

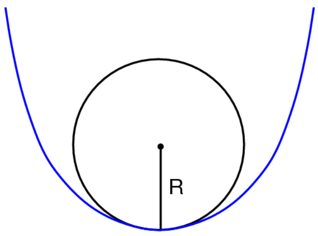
Enačbe za tangento, normalo in ukrivljenost se ustrezno poeneostavijo, če vzamemo $t = x$ ali $t = s$. Ukrivljenost se, na primer, izrazi kot $K = y'' / (1 + y'^2)^{3/2}$ oziroma kot $K = \sqrt{(x''^2 + y''^2)}$.

Krivinski radij

Ko izračunamo ukrivljenost krožnice z radijem R, dobimo v vsaki točki vrednost

$$K = \frac{1}{R} \,. \tag{16.21}$$

Če je ukrivljenost krivulje K, zato rečemo, da je njen lokalni *krivinski radij* $R = 1/K$. Krivulja je lokalno "nerazločljiva" od takega "pritisnjenega" kroga. Pritisnjeni krog je lokalno enak krivulji v tem smislu, da imata enak "ničti", prvi in drugi odvod.



Slika 16.6 Krivinski radij krivulje. To je radij kroga, ki se najtesneje prilega krivulji.

Invariante krivulj

Nekatere značilnosti krivulje so odvisne od njene lege v izbranem koordinatnem sistemu. Primer so nagibi tangent ali normal glede na abscisno ali ordinatno os. Pri vrtenju koordinatnega sistema se takšni nagibi ne ohranjajo. Po drugi strani pa je ukrivljenost v izbrani točki krivulje neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Rečemo, da je to invariantna lastnost krivulje oziroma njena *invarianta*. Invariante se ne izražajo s koordinatami, marveč le z njihovimi diferenciali.

16.9 Osnovne ploskve

Ravnina

Ravnina, ki gre skozi izhodišče koordinatnega sistema, zareže v ravnini xz enotni vektor $\boldsymbol{r}_1 = (\cos\theta_1, 0, \sin\theta_1)$. V ravnini yz zareže vektor $\boldsymbol{r}_2 = (0, \cos\theta_2, \sin\theta_2)$. Poljubna linearna kombinacija teh dveh vektorjev $\boldsymbol{r} = A\boldsymbol{r}_1 + B\boldsymbol{r}_2$ je krajevni vektor do ustrezajoče točke na preučevani ravnini. Zapišimo to kombinacijo v komponentah. Iz prve enačbe $x = A\cos\theta_1$ izrazimo A, iz druge $y = B\cos\theta_2$ izrazimo B in oboje vstavimo v tretjo enačbo $z = \mathrm{A}\sin\theta_1 + B\sin\theta_2$. Tako dobimo eksplicitno enačbo ravnine

$$z = k_1 x + k_2 y \,, \tag{16.22}$$

pri čemer sta k_1 in k_2 smerna koeficienta, torej tangensa obeh naklonskih kotov θ_1 in θ_2.

Valj

Vodoravno krožnico $x^2+y^2=r^2$ premikamo v navpični smeri. Pri tem zariše plašč *valja*. Enačba zanj je kar enaka enačbi krožnice:

$$x^2+y^2=r^2\,. \tag{16.23}$$

Stožec

Premico $z=kx$ zavrtimo okrog navpične osi z. Nobeni točki se pri tem koordinata z ne spreminja, njena koordinata x pa prehaja v koordinate $\rho=\sqrt{(}x^2+y^2)$. Enačbo $z=k\rho$ kvadriramo in dobimo enačbo *stožca*

$$\frac{z^2}{k^2}=x^2+y^2\,. \tag{16.24}$$

Krogla

Krožnico $x^2+z^2=r^2$ zavrtimo okoli navpične osi z. Transformacija $x^2\to x^2+y^2$ da enačbo *krogle*

$$x^2+y^2+z^2=r^2\,. \tag{16.25}$$

Rotacijski elipsoid

Elipso $x^2/a^2+z^2/c^2=1$ zavrtimo okrog navpične osi z. Dobimo rotacijski *elipsoid*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{16.26}$$

Rotacijski paraboloid

Parabolo $2pz=x^2$ zavrtimo okrog navpične osi z. Nastane rotacijski *paraboloid*

$$2pz=x^2+y^2\,. \tag{16.27}$$

Vse zapisane enačbe veljajo v posebno skrbno izbranih sistemih. Tako so tudi enačbe preproste. Seveda pa lahko koordinatni sistem translatorno premaknemo, kar je isto, kot da premaknemo ploskev v nasprotni smeri. Premik vzdolž osi z, na primer, je ekvivalenten transformaciji spremenljivke $z\to z-z_0$. Enačba se temu ustrezno "pogrša". Še hujše lepotne spremembe dosežemo z rotacijo.

16.10 Vektorski opis ploskev

Izbrane ploskve smo zapisali implicitno ali eksplicitno. Pojavi se vprašanje, ali (in kako) jih lahko zapišemo parametrično oziroma vektorsko. Poskusimo z najpomembnejšo ploskvijo, kroglo.

Točka na krogli radija R je enolično določena z vektorjem lege $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$. Komponente vektorja izrazimo, kot že znamo, z azimutnim kotom φ in s polarnim kotom θ (14.2):

$$\begin{aligned} x&=R\sin\theta\cos\varphi\\ y&=R\sin\theta\sin\varphi\\ z&=R\cos\theta\,. \end{aligned} \tag{16.28}$$

Parametrska ravnina

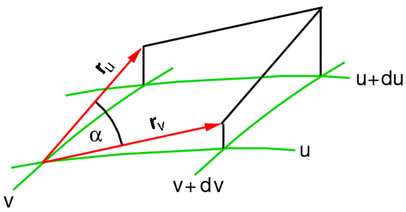
Vsaki dvojici kotov torej pripada ustrezna trojica koordinat. Na podoben način se lotimo tudi drugih ploskev. Valj in stožec, na primer, parametriziramo z azimutnim kotom in višino. Ne predivje ploskve nasploh opišemo z dvema parametroma:

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\,. \tag{16.29}$$

Parametra sta lahko karkoli. V posebnem primeru izberemo kar dve koordinati: $\boldsymbol{r} = (x, y, z(x,y))$. Tedaj preide parametrični opis v eksplicitnega. Hkrati nam ponudi še naslednjo nazorno sliko: dva splošna parametra tvorita posebno "parametrično" ravnino. Točke te ravnine se preslikajo v točke na aktualni ploskvi.

16.11 Krivulje na ploskvi

Krivulja $(u(t), v(t))$ v parametrični ravnini se preslika v ustrezno krivuljo na ploskvi. Poseben primer je preslikava, ko je eden izmed parametrov konstanten, recimo $v = \text{const}$. Tedaj se na ploskvi zariše ena izmed izo-parametričnih krivulj. Pri različnih vrednostih konstante se nariše množica takih krivulj – krivočrtnih koordinat na ploskvi. Tako se na krogli, na primer, zarišejo poldnevniki $\varphi = \text{const}$ in vzporedniki $\theta = \text{const}$.



Slika 16.7 Parcialna premika na ploskvi. To sta prirastka vektorja lege vzdolž krivočrtnih koordinat na ploskvi.

Parametrski kot

Vektorja $\boldsymbol{r}_u$ in $\boldsymbol{r}_v$ ležita v lokalni tangentni ravnini vzdolž obeh krivočrtnih koordinat. Kakšen je sekalni kot teh koordinat, α, pove skalarni produkt:

$$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u||\boldsymbol{r}_v|}\,. \tag{16.30}$$

Pri lepo izbranih parametrizacijah je kot v vsaki točki (morda s kakšno izjemo) enak 90°. Tedaj so krivočrtne koordinate med seboj pravokotne. Takšni so poldnevniki in vzporedniki na krogli.

Dolžinski element

V tangentni ravnini leži tudi totalni diferencial – "poševni" premik $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_u \mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v \mathrm{d}v$. S kvadratom tega premika je določena njegova dolžina $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, torej:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \boldsymbol{r}_u{}^2 \mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v \mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{r}_v{}^2 \mathrm{d}v^2 = \\ &g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v^2\,.\end{aligned} \tag{16.31}$$

V komponentah zapišemo

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_u{}^2 + y_u{}^2 + z_u{}^2 \\ g_{12} &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ g_{22} &= x_v{}^2 + y_v{}^2 + z_v{}^2\,. \end{aligned} \tag{16.32}$$

Koeficienti g_{11}, g_{12} in g_{22} so realna števila. Vsaka točka na ploskvi ima svojo trojico teh števil. Rečemo, da so to *metrični koeficienti* ploskve. Njihov pomen je, da diferenciale parametrov "povežejo" z diferenciali dolžin. Če izberemo drugačno parametrizacijo ploskve, se metrični koeficienti seveda spremenijo. V pravokotni koordinatni mreži je koeficient $g_{12} = 0$. Za kroglo v standardni parametrizaciji izračunamo $g_{11} = r^2 \sin^2\theta$ in $g_{22} = r^2$. Za valj pa $g_{11} = 1$ in $g_{22} = r^2$.

Dolžina krivulje na ploskvi je limitna vsota vseh dolžinskih diferencialov, torej (če označimo odvod po času s črtico)

$$s = \int \sqrt{(g_{11}u'^2 + 2g_{12}u'v' + g_{22}v'^2)}\mathrm{d}t\,. \tag{16.33}$$

Geodetke

Med dvema oddaljenim točkama A in B na ploskvi poteka neskončno mnogo krivulj. Ena od njih je najkrajša. Rečemo, da je to *geodetka*. Na krogli je geodetka glavni krog, to je tak, ki ima središče v središču Zemlje. Nazorno si geodetko predstavljamo kot elastično nit, napeto med obema točkama: elastičnost jo skrči na najkrajšo dolžino.

Ploščinski element

Dolžinska elementa vzdolž krivočrtnih koordinat, pravokotnih ali ne, sta $(\mathrm{d}s)_u = \sqrt{g_{11}}\mathrm{d}u$ in $(\mathrm{d}s)_v = \sqrt{g_{22}}\mathrm{d}v$. Ploščina paralelograma, ki ga zamejujeta, pa znaša

$$\mathrm{d}S = (\mathrm{d}s)_u\,(\mathrm{d}s)_v \sin\alpha = \sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,. \tag{16.34}$$

Ploščina ploskve je limitna vsota ploščinskih elementov, torej dvojni integral

$$S = \int\!\!\int \sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2)}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\,. \tag{16.35}$$

Za parametra, ki sta kar koordinati, se enačba poenostvi v obliko

$$S = \int\!\!\int \sqrt{(1 + z_x{}^2 + z_y{}^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,. \tag{16.36}$$

16.12 Lokalne lastnosti ploskev

Normala

Tangentna vektorja ležita v tangentni ravnini. Njun vektorski produkt je pravokoten nanjo. Če ga normiramo, dobimo *normalo*

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|} = \frac{\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v}{\sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}{}^2)}}\,. \tag{16.37}$$

Za parametra, ki sta kar koordinati, se enačba zapiše v obliki

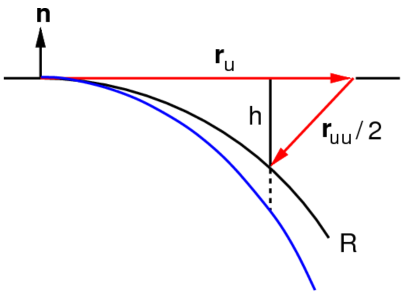
$$\boldsymbol{n} = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\sqrt{(1 + z_x{}^2 + z_y{}^2)}}\,. \tag{16.38}$$

Odmik tangentne ravnine

Vektor iz opazovane točke v bližnjo okolišnjo točko na ploskvi, torej vektor $\boldsymbol{r}(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v) - \boldsymbol{r}(u,v)$, aproksimiramo s potenčno vrsto z linearnim členom $(\boldsymbol{r}_u\mathrm{d}u + \boldsymbol{r}_v\mathrm{d}v)$ in s kvadratnim členom $^1/_2 \cdot (\boldsymbol{r}_{uu}\mathrm{d}u^2 + 2\boldsymbol{r}_{uv}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \boldsymbol{r}_{vv}\mathrm{d}v^2)$. Prvi člen je pomik po tangentni ravnini. Drugi člen je pomik do pritisnjenega kroga v smeri pravokotno na krog. Če ga pomnožimo z normalo, dobimo pravokotno razdaljo od tangentne ravnine:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{d}h &= L_{11}\mathrm{d}u^2 + 2L_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + L_{22}\mathrm{d}v^2 \\ L_{11} &= \boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n} \\ L_{12} &= \boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n} \\ L_{22} &= \boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}\,. \end{aligned} \tag{16.39}$$

Za kroglo v standardni parametrizaciji izračunamo $L_{11} = r\sin^2\theta$ in $L_{22} = r$. Za valj pa velja $L_{11} = 0$ in $L_{22} = r$.



Slika 16.8 Odmik ploskve od tangentne ravnine. Limitno je enak odmiku pritisnjene paraboloidne ploskve.

Ukrivljenost

Ukrivljenost ploskve je enaka ukrivljenosti pritisnjenega kroga: $\mathrm{d}h = \mathrm{d}s^2/2R$, torej $1/R = 2\mathrm{d}h/\mathrm{d}s^2$, zato:

$$K = \frac{L_{11}\mathrm{d}u^2 + 2L_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + L_{22}\mathrm{d}v^2}{g_{11}\mathrm{d}u^2 + 2g_{12}\mathrm{d}u\mathrm{d}v + g_{22}\mathrm{d}v^2}\,. \tag{16.40}$$

To je ukrivljenost ploskve v smeri, ki jo določata du in dv. Skozi izbrano točko potekajoče krivulje imajo večjo ali manjšo ukrivljenost. Izmed njih ima ena maksimalno ukrivljenost $K_{\max} = 1/\mathrm{R}_{\min}$ in druga minimalno $K_{\min} = 1/R_{\max}$. Najdemo ju kot ekstremalne vrednosti po vseh smereh. V to se ne bomo spuščali. Ko takšni vrednosti najdemo, se lahko igramo z njunima vrednostima: tvorimo, na primer, "povprečno" ukrivljenost $K = (K_{\max} + K_{\min})/2$ ali "metrično" ukrivljenost $K = K_{\max} \cdot K_{\min}$ ter poskušamo najti, kako se izražata s koeficienti $g_{11} \ldots L_{22}$. Tudi to zahtevno zabavo prepustimo drugim, ki jih to zanima.

Poglejmo še nekaj zgledov. Ravnina ima v vsaki točki vse ukrivljenosti nič. Zato ji tudi rečemo ravnina. Na krogli so poldnevniški krivinski radiji večji od vzporedniških. Vsi glavni krogi skozi vsako točko pa imajo enak radij, ki je enak poldnevniškemu. Najmanjši krivinski radij na valju je enak polmeru valja in največji je neskončen. Podobno je pri stožcu. Vidimo, da se da marsikaj dognati tudi brez računanja.

16.13 Zemljemerstvo na krogli

Na majhnih razdaljah je zemeljska površina ravna in koti, premice in trikotniki na njej se pokoravajo že spoznanim pravilom, recimo pravilu o vsoti notranjih kotov v trikotniku ali hipotenuznemu pravilu o razdalji med dvema točkama. Na večjih razdaljah pa je treba upoštevati zemljino zakrivljenost. "Ravne" premice na njej postanejo glavni krogi. Vsota notranjih kotov trikotnika postane večja od 180°, kar se lepo vidi na primeru trikotnika z bazo na ekvatorju in vrhom na polu. Hipotenuzni, kosinusni in sinusni izrek za trikotnike pa bo treba na novo premisliti.

Dolžina geodetke

Za lažje preučevanje bomo vse dolžine na krogli merili z radijem kot enoto. S tem postane radij brezdimenzijska količina z velikostjo 1, dolžinski odsek vsakega glavnega kroga pa številsko enak središčnemu kotu, v radianih, na katerega je napet. Prvo vprašanje, ki si ga zastavimo, je: kolikšna je dolžina glavnega kroga med dvema točkama?

Na točki naj kažeta vektorja $\boldsymbol{r}_1(\theta_1, \varphi_1)$ in $\boldsymbol{r}_2(\theta_2, \varphi_2)$ iz središča krogle. Njuna velikost je enaka ena. Kot med njima, torej brezdimenzijska dolžina glavnega kroga, je določen s skalarnim produktom $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = \cos\alpha$. Zmnožimo komponente, upoštevamo kosinus razlike in dobimo

$$\cos\alpha = \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos\theta_1 \cos\theta_2 \,. \tag{16.41}$$

Razdalja, v dolžinskih enotah, je potem $d = R\,\alpha$. Poseben primer $\varphi_1 = \varphi_2$ pove dolžino poldnevnika: $\alpha = |\theta_2 - \theta_1|$, kakor tudi mora biti.

Hipotenuzni izrek

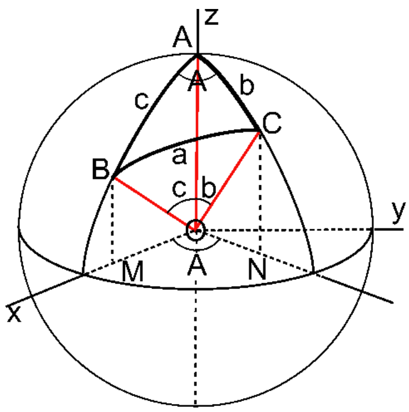
Pravokotni trikotnik na krogli določajo trije enotni vektorji iz njenega izhodišča do trikotnikovih oglišč. Vseeno je, kako je koordinatni sistem postavljen. Izberemo ga tako, da kaže vektor $\boldsymbol{r}_1$ vzdolž osi x, vektor $\boldsymbol{r}_2$ leži v ekvatorski ravnini xy pod dolžinskim kotom a in vektor $\boldsymbol{r}_3$ leži v poldnevniški ravnini pod širinskim kotom h. Vektorji so torej naslednji: $\boldsymbol{r}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{r}_2 = (\cos a, \sin a, 0)$ in $\boldsymbol{r}_3 = (\cos a \cos h, \sin a \sin h, \sin h)$. Kot d med $\boldsymbol{r}_1$ in $\boldsymbol{r}_3$ je hipotenuza trikotnika in je določen s skalarnim produktom $\cos d = \boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2$. Pomnožimo komponente in dobimo *hipotenuzni izrek*

$$\cos d = \cos a \cos h. \tag{16.42}$$

Pri kratkih stranicah aproksimiramo $\cos x \approx 1 - x^2/2$, zanemarimo visoke potence in izrek preide v ravninskega.

Kosinusni izrek

Podobno se lotimo poševnega trikotnika na krogli. Omejimo se na "prave" trikotnike, katerih koti so manjši od π in katerih stranice so tudi manjše od π.



Slika 16.9 Poševni trikotnik na krogli. (Mercator, 2013)

Na tri oglišča trikotnika kažejo vektorji OA, OB in OC. Koordinatni sistem usmerimo, kot kaže slika. V njem velja $\mathrm{OA} = (0, 0, 1)$ in $\mathrm{OB} = (\sin c, 0, \cos c)$. Vektor OC se projicira v ON pod kotom A, torej $\mathrm{OC} = (\sin b \cos A, \sin b \sin A, \cos b)$. Skalarni produkt $\mathrm{OB} \cdot \mathrm{OC} = \cos a$. Zmnožimo komponente in dobimo:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\,. \tag{16.43}$$

Stranica a je podana z drugima dvema stranicama in kotom med njima. To je iskani *kosinusni izrek*. Velja seveda za vsakršno permutacijo zapisanih količin. Opazimo tudi, da je kosinusni izrek povsem enak izrazu za dolžino geodetke (16.41). To pa ni nič čudnega, saj je slednji le poseben primer prvega: za glavne kroge uporablja poldnevnike in ekvator.

Pri majhnih razdaljah aproksimiramo $\sin x \approx x$ in $\cos x \approx 1 - x^2/2$, zanemarimo visoke potence in izrek preide v ravninskega. V posebnem primeru, ko $A = 90°$, je trikotnik pravokoten in izrek se reducira v hipotenuzni izrek.

Sinusni izrek

Ideniteta $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$ nas navede na misel, da vanjo vstavimo $\cos A$ iz kosinusnega izreka in upamo, da se bo izcimil sinusni izrek. Res pridelamo izraz $\sin A / \sin a = f(a, b, c)$. Desna stran izraza je invariantna glede na ciklično permutacijo stranic, kar pomeni, da mora veljati

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\,. \tag{16.44}$$

To je *sinusni izrek*. Pri majhnih razdaljah preide v že znano ravninsko obliko.

Hipotenuzni, kosinusni in sinusni izrek nam pomagajo pri računanju kotov in stranic na krogli točno na tak način, kot to počnemo v ravnini. Ko delamo s kroglo polmera R namesto 1, moramo vse stranice trikotnika, podane v dolžinskih enotah, deliti z R. Drugače rečeno: namesto brezdimenzijske stranice a moramo povsod pisati a/R in podobno za druge stranice.

16.14 Zemljepisne projekcije

Projekcija krogle

Točke na zemeljski površini so enolično določene s svojimi zemljepisnimi koordinatami: širino δ (oziroma polarnim kotom $\theta = \pi/2 - \delta$) in dolžino φ. Zemljo verodostojno predstavimo s pomanjšanim krogelnim modelom. Takšen *globus* pa je, žal, neprimeren za prenašanje in tudi ni dovolj velik za podroben prikaz manjših območij. Naravno je torej pomisliti, kako bi ga preslikali – v celoti ali deloma – na ravno ploskev, *zemljevid*. Iščemo torej primerne preslikave

$$(x, y) \leftarrow (\theta, \varphi). \tag{16.45}$$

Rečemo jim *zemljepisne projekcije*.

Slika 16.10 Preslikava krogle na ravnino s svetlobnimi žarki. Oblika sence je zanimiva tudi za slikarje. (Rubens, 1613)

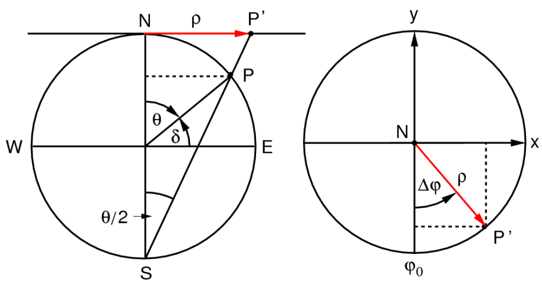
Napake projekcij

Vsaka preslikava, ki jo vpeljemo, preslika Zemljine poldnevnike in vzporednike v dve družini ravninskih krivulj. Dva bližnja vzporednika in poldnevnika na Zemlji oblikujeta ploščinski element, približni pravokotnik. Ko se takšen pravokotnik preslika, pričakujemo naslednje nevšečnosti: kot med stičnima stranicama se spremeni; razmerje med tema stranicama se spremeni; enaki pravokotniki na različnih lokacijah se preslikajo neenako, bodisi po dolžini, širini ali ploščini. Seveda hočemo najti take preslikave, ki bodo obremenjene s čim manj nevšečnostmi. Posebej pomembno je, da se ohranjajo lokalni koti, to je lokalna razmerja stranic. Tedaj se oblika in orientacija drobnih likov pri preslikavi ohranja. Drobni krogi se, na primer, preslikajo kot krogi. Takim preslikavam rečemo *konformne*.

16.15 Polarna stereografska

Preslikava z žarki

Preslikajmo severno poloblo na tangentno ravnino na severnem polu! Preslikujemo lahko z žarki, ki izhajajo is središča krogle, iz njenega južnega pola ali iz južne neskončnosti. V vsakem primeru se Zemljini poldnevniki preslikajo v radialne premice, vzporedniki pa v koncentrične kroge. Razdalja med krogi je odvisna od izbire žarkov. Središčni žarki "preveč" raztegnejo ekvatorske predele, neskončni pa jih "preveč" stisnejo. Osredotočimo se torej na južni pol kot izvor žarkov. To je *polarna stereografska projekcija*.



Slika 16.11 Polarna stereografska projekcija. Projekcija je primerna za prikaz polarnih dežel, pa tudi za prikaz zvezdnega neba.

Polarni izvor žarkov

Slika pokaže, da se točka P(θ) preslika v točko P'(ρ). Ker je obodni kot enak polovici središčnega, razberemo iz pravokotnega trikotnika SNP' povezavo

$$\rho = 2R \tan \frac{\theta}{2} \,. \tag{16.46}$$

Za radij Zemlje izberemo primerno pomanjšano vrednost: $R = M \cdot R_\mathrm{E}$, na primer $M = 1{:}10^7$. Namesto polarnega kota θ lahko uporabimo tudi zemljepisni kot $\delta = 90° - \theta$. V tangentni ravnini vpeljemo koordinatni sistem z izhodiščem v polu; os y kaže vzdolž poljubnega poldnevnika φ_0. Potem velja

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\varphi - \varphi_0) \\ y &= -\rho \cos(\varphi - \varphi_0)\,. \end{aligned} \tag{16.47}$$

S tem je preslikava zaključena. Seveda ni treba projicirati celotne hemisfere, ampak le kakšen njen del. Tedaj na tangentni ravnini vpeljemo lokalni koordinatni sistem, ki je glede na polarnega ustrezno translatorno zamaknjen.

Konformnost

Je projekcija morda konformna? Ploščinski element na krogli je približno pravokotnik z vzporedniško stranico $R \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi$ in s poldnevniško stranico $R\, \mathrm{d}\theta$. Ustrezajoči ploščinski element v tangentni ravnini je tudi približno pravokotnik s stranicama $\rho \mathrm{d}\varphi$ in $\mathrm{d}\rho$. Z razmerjem istoležnih stranic sta podana *raztezna faktorja* $H = \rho \mathrm{d}\varphi / R \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi$ in $K = \mathrm{d}\rho / R\, \mathrm{d}\theta$. Če je preslikava konformna, mora veljati $H = K$. Izračunamo odvod $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\theta$ in ga vstavimo v enačbo. Pokaže se, da je kvocient razteznih faktorjev enak 1. Preslikava je povsod konformna.

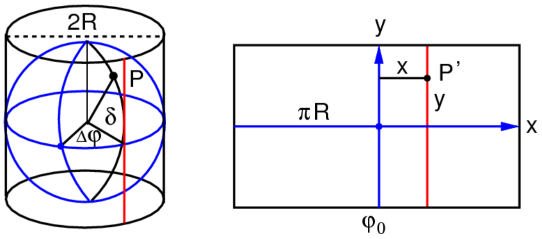
Polarna stereografska projekcija je primerna za prikaz dežel v visokih zemljepisnih širinah, pa tudi za prikaz zvezdnega neba.

16.16 Ekvatorska valjna konformna

Morska navigacija

Ko mora ladja pluti iz kraja A v oddaljeni kraj B, ima na voljo neomejeno mnogo poti. Če odmislimo tokove, vetrove in neurja, je najboljša pot tista, ki je najkrajša, torej geodetka, to je glavni krog na krogli. Takšna geodetka je na polarni stereografski projekciji v splošnem krivulja, ki seka poldnevnike pod različnimi koti. Določiti in zarisati jo brez obsežnega računanja ni možno. Pa tudi sledenje taki črti bi zahtevalo, da krmar stalno spreminja magnetni kurz ladje.

Druga možnost je krivulja, ki seka vse poldnevnike pod istim kotom – *loksodroma*. Je sicer daljša od geodetke, vendar je za krmarjenje mnogo bolj primerna. Seveda je tudi loksodroma kriva črta na polarni stereografski projekciji (razen če pluje ladja po poldnevniku). Kaj ne bi bilo čudovito, če bi imel navigator na mizi zemljepisno projekcijo, na kateri bi bila loksodroma povsod ravna črta? Med krajema A in B bi potegnil ravno črto in s tem določil kurz ladje. Bolj preprosto ne gre. Poizkusimo, kot navigatorji, najti tako projekcijo!



Slika 16.12 Ekvatorska valjna konformna projekcija. Projekcija je primerna za prikaz ekvatorskih dežel in za pomorsko navigacijo.

Valjna projekcija

Da bo loksodroma ravna, morajo očitno biti poldnevniki ekvidistantne premice, vzporedniki pa nanje pravokotne premice v takšnih medsebojnih razmakih, da je mreža povsod lokalno konformna. To pomeni, da moramo projicirati kroglo na valj, ovit okoli njenega ekvatorja. Valj se seveda da razviti v ravnino. Na valju postavimo koordinatni sistem z osjo x vzdolž ekvatorja in y vzdolž poljubnega poldnevnika φ_0. Točke s poldnevnika φ se vse preslikajo v

$$x = R\,(\varphi - \varphi_0)\,. \tag{16.48}$$

Vpeljava konformnosti

Pri tem se točke iz različnih širin θ preslikajo v ustrezne y, kakor določa zahteva po konformnosti. Ravnamo tako kot pri polarni stereografski projekciji. Izenačimo raztezna faktorja $H = \mathrm{d}x/R\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$ in $K = \mathrm{d}y/R\,\mathrm{d}\theta$. V dobljeni enačbi sta vsebovana dva odvoda. Prvega $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\varphi$ zlahka izračunamo in s tem je določen drugi: $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\theta = R\,/\cos\theta$. Ločitev spremenljivk in integracija pove

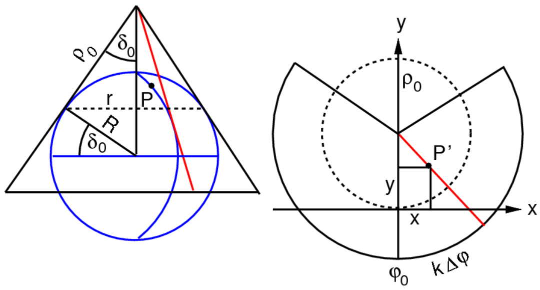
$$y = R\ln\tan\frac{\theta}{2}\,. \tag{16.49}$$

Razmiki med vzporedniki torej naraščajo z oddaljenostjo od ekvatorja. To je tudi pričakovati, saj projekcija na silo širi in paralelizira krogelne poldnevnike. Seveda ni treba projicirati celotne krogle, ampak le kakšen njen del. Tam postavimo lokalni koordinatni sistem, ki je ustrezno translatorno premaknjen.

Ekvatorska valjna konformna projekcija je odlična za pomorsko navigacijo in primerna za prikaz dežel v nizkih zemljepisnih širinah.

16.17 Stožčna konformna

Razrast industrializacije, širjenje železniškega in cestnega omrežja ter nenehna vojskovanja zahtevajo natančne zemljevide velikih držav. Pokaže se potreba po ustrezni projekciji za srednje zemljepisne širine. Smer raziskave je hitro pri roki: zemeljsko kroglo je treba projicirati na plašč stožca, ki se je dotika v izbranem vzporedniku. Poldnevniki so tedaj radialne premice, vzporednike – koncentrične kroge – pa želimo razmestiti tako, da bo projekcija konformna. Tako kot valj lahko tudi stožec nato razvijemo v ravnino.



Slika 16.13 Stožčna konformna projekcija. Projekcija je primerna za prikaz dežel v zmernem pasu.

Razvoj stožca v ravnino

Naj se stožec dotika vzporednika $\delta_0 = \pi/2 - \theta_0$, ki je za ρ_0 oddaljen od vrha stožca. Vrhnji polkot stožca je potem tudi enak δ_0. Obseg stožca po tem vzporedniku znaša $L_1 = 2\pi\rho_0 \sin\delta_0$. Ko plašč stožca razvijemo v ravnino, nastane izsekan krog, katerega celotni obseg je $L_2 = 2\pi\rho_0$. Razmerje teh dveh obsegov $L_1/L_2 = k = \sin\delta_0$. (Spomnimo se na stožčaste šotore, tipije, prerijskih severnoameriških domorodcev! Plašč tipija je točno polovica kroga: $k = 1/2$. To pomeni, da ima vrhnji polkot $\delta_0 = 30°$.)

V izsekani krog vpeljimo ravninski koordinatni sistem z vrhom v presečišču tangentnega vzporednika in poljubnega poldnevnika φ_0. Os x je usmerjena vzdolž vzporednika in os y vzdolž poldnevnika. Krogelni poldnevnik φ postane na razvitem plašču stolpca poldnevnik $k\varphi$.

Vpeljava konformnosti

Ploskovni element na razvitem plašču stožca ima vzporedniško stranico $\rho\, k\mathrm{d}\varphi$ in poldnevniško stranico $\mathrm{d}\rho$, s čimer sta določena raztezna faktorja glede na ploskovni element na krogli. Izenačitev razteznih faktorjev vodi do enačbe $\mathrm{d}\rho/\rho = k\mathrm{d}\theta/\sin\theta$. Integriranje obeh strani da rešitev

$$\rho = C \tan^k \frac{\theta}{2} \qquad (16.50)$$
$$k = \sin(\pi/2 - \theta_0).$$

Konstanto C določimo iz razteznega pogoja: $\rho(\theta_0) = R\tan\theta_0$. S tem sta določeni tudi koordinati

$$x = \rho \cos k(\varphi - \varphi_0) \qquad (16.51)$$
$$y = \rho_0 - \rho \sin k(\varphi - \varphi_0)\,.$$

Vzdolž tangentnega vzporednika so razdalje točne. Če za tangentni vzporednik izberemo pol, preide stožec v tangentno ravnino in projekcija v polarno stereografsko. Če za tangentni vzporednik izberemo ekvator, pa preide stožec v valj in projekcija v ekvatorsko valjno konformno.

Stožčna konformna projekcija je dobra za prikaz dežel na srednjih zemljepisnih širinah.

16.18 Druge projekcije

Različice projekcij

Vsaka izmed obravnavanih tipov projekcij – ravninska, valjna in stožčna – ima več različic. Če, na primer, razvrstimo vzporednike na enake medsebojne razdalje, dobimo *ekvidistantne* projekcije. Razdalje vzdolž poldnevnikov so tedaj pravilne. Spet drugače izbrana razvrstitev poldnevnikov pa zagotovi, da so pravilne ploščine. To so *ekvivalentne* projekcije. Jasno je, da spremenjene projekcije niso več konformne.

Zemlja kot rotacijski elipsoid

Zemlja je krogla le v prvem, čeravno zelo dobrem približku. Tisti, ki želijo večjo natančnost, jo aproksimirajo z rotacijskim elipsoidom s kratko polosjo med poloma. Projekcijske enačbe se močno zapletejo in vprašanje je, kdaj jih je sploh smiselno uporabljati. Sploščenost Zemlje je namreč zelo majhna: $(a-b)/a \approx 1/300$.

Globalne projekcije

Nobena izmed naštetih projekcij ni primerna za prikaz celotne zemeljske oble. Obliko velikih in "oddaljenih" kontinentov namreč močno popačijo. So pa ljudje iznašli mnogo kar sprejemljivih globalnih projekcij. Žal to, da je teh projekcij mnogo, pove, da nobena ni povsem zadovoljujoča. Ena izmed boljših je *eliptična projekcija* z naslednjimi značilnostmi. Slika sveta je elipsa z razmerjem polosi 1:2. Ekvator in vzporedniki so vzporedne daljice z enakomernim presledkom. Centralni poldnevnik je daljica. Vsi drugi so polelipse, simetrične glede na ekvator in na centralni poldnevnik. Polelipsi skozi ±90° tvorita krog. Projekcijski obrazci so ustrezno zamotani in jih ne bomo izpeljevali. □

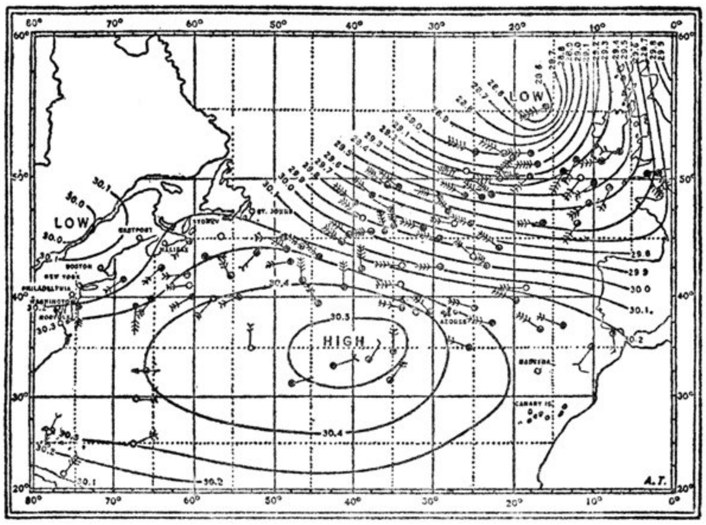
17 Prostorska polja

Skalarna in vektorska polja – Gradient in smerni odvod – Pretok in divergenca – Cirkulacija in rotor – Operacije drugega reda – Krivočrtne koordinate – Cilindrične koordinate – Krogelne koordinate

17.1 Skalarna in vektorska polja

Primeri polj

Količine, ki so "porazdeljene" po točkah prostora in so torej odvisne od treh prostorskih koordinat, imenujemo prostorska *polja*. Dobri primeri so naslednji: temperatura, pritisk in hitrosti v ozračju ter gravitacijske, električne in magnetne sile v prostoru. Naštete polja so bodisi *skalarna* ali *vektorska*. S kompleksnimi polji se ne bomo ukvarjali.



Slika 17.1 Prizemno polje zračnega pritiska in vetrov nad Atlantikom. Izmerile so ga ladje, ki so prikazane s krožci. Pritisk je podan z izobarami (v palcih živega srebra) in veter z zastavicami. Veter piha približno vzporedno z izobarami. (US Weather Bureau)

Splošno skalarno polje, neodvisno od časa, bomo označili kot

$$U = U(x, y, z) \tag{17.1}$$

in splošno vektorsko polje kot

$$\boldsymbol{v} = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)). \tag{17.2}$$

Raziščimo, kaj lahko povemo o njih!

17.2 Gradient in smerni odvod

Gradient polja

Začnimo s skalarnim poljem. Ko se premaknemo iz izbrane točke polja v kako sosednjo točko, se polje v splošnem spremeni. Sprememba na enoto dolžine $\mathrm{d}U/\mathrm{d}s$ je odvisna od tega, v katero smer se premaknemo. Izmed vseh smeri je ena – označimo jo z enotnim vektorjem $\boldsymbol{n}$ – posebej odlikovana: to je tista, vzdolž katere je sprememba polja največja. Velikost in smer te spremembe opišemo z vektorjem, *gradientom* polja:

$$\operatorname{grad} U = \boldsymbol{n} \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\,. \tag{17.3}$$

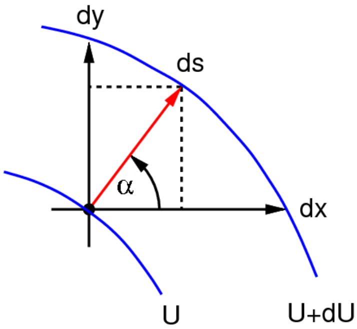
Gradient skalarnega polja je torej vektorsko polje. Njegovi vektorji kažejo, v kateri smeri se skalarno polje najbolj spreminja in kako velike so te spremembe. Definicija gradienta ni odvisna od izbire koordinatnega sistema. Je invarianta polja.

Koordinatni zapis

Kako bi gradient izrazili s koordinatami? Vpeljimo poljuben koordinatni sistem. Gradientni premik ds ima v smeri osi x komponento $\mathrm{d}x = \mathrm{d}s/\cos\alpha$, pri čemer je α kot med gradientno in abscisno smerjo. To pomeni, da $\mathrm{d}U/\mathrm{d}x = (\mathrm{d}U/\mathrm{d}s)\cos\alpha$. Podobno velja za preostali dve komponenti. Vse tri enačbe združimo v vektorsko obliko. V desni strani prepoznamo $(\mathrm{d}U/\mathrm{d}s)\,\boldsymbol{n}$, torej velja

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right). \tag{17.4}$$

Velikost gradienta je seveda $|\operatorname{grad} U|$ in njegova smer je $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad} U / |\operatorname{grad} U|$.



Slika 17.2 Gradient skalarnega polja. Definiran je kot odvod v smeri največjega naraščanja polja.

Operator nabla

Tudi na komponentni izraz za gradient lahko pogledamo kot na produkt: $(\partial U/\partial x, \partial U/\partial y, \partial U/\partial z) = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)\, U$. S tem vpeljemo vektorski operator *nabla* in velja

$$\operatorname{grad} U = \boldsymbol{\nabla} U \tag{17.5}$$
$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Nabla je diferencialni operator in simbolični vektor. Ima lastnosti tako odvoda kot vektorja. Pričakujemo, da bodo zanj veljala podobna pravila odvajanja kot za navaden odvod. Kratki računi (v komponentah in z enotnimi vektorji $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ in $\boldsymbol{k}$) res pokažejo, da veljajo standardna pravila $\boldsymbol{\nabla}(cU) = c\boldsymbol{\nabla}U$, $\boldsymbol{\nabla}(U+V) = \boldsymbol{\nabla}U + \boldsymbol{\nabla}V$ in $\boldsymbol{\nabla}(UV) = U\boldsymbol{\nabla}V + V\boldsymbol{\nabla}U$.

Smerni diferencial

Kako pa se skalarno polje iz točke $\boldsymbol{r}$ spreminja v izbrano smer $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$? To povemo s *smernim diferencialom* $\mathrm{d}U = U_x\mathrm{d}x + U_y\,\mathrm{d}y + U_z\,\mathrm{d}z$. (Indeksi ne pomenijo komponent, saj jih skalar pač nima, ampak parcialna odvajanja.) Desno stran zapišemo kot skalarni produkt dveh vektorjev, gradienta in premika, ter dobimo

$$\mathrm{d}U = \nabla U \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \nabla)U\,. \tag{17.6}$$

Kar je zapisano v oklepaju, razumemo kot operator smernega diferenciranja. Skalarni produkt gradienta in nanj pravokotnega premika je enak nič, torej je diferencial v tej smeri enak nič, kakor tudi mora biti.

Zaporedne smerne diferenciale lahko seštejemo in dobimo spremembo polja med dvema oddaljenima točkama, izraženo preko gradienta tega polja

$$U_2 - U_1 = \int \nabla U\, \mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{17.7}$$

Vrednost polja v točki 2, relativna na vrednost v točki 1, je neodvisna od tega, po kateri poti jo določamo. To je *izrek o integralu gradienta*. Pravzaprav ni nič drugega kot posplošitev osnovnega izreka integralnega računa (12.2), namreč da je "navadni" integral funkcije ene spremenljivke enak limitni vsoti njenih diferencialov. V posebnem primeru, ko je pot sklenjena, torej zanka, je krivuljni integral gradienta enak nič.

17.3 Pretok in divergenca

Pretok

Poglejmo sedaj vektorska polja. Kakor teče reka po strugi, tako "teče" splošno vektorsko polje skozi prostor; nazorno si ga predstavljamo kar s tokovnicami. Pretok reke skozi izbrani presek struge nam da zamisel, da prav tako definiramo *pretok* vektorskega polja skozi izbrano ploskev:

$$\Phi = \int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S\,, \tag{17.8}$$

Ploskev je lahko ravna ali zvita. K pretoku skozi vsak njen ploskovni element prispeva le pravokotna komponenta polja, to je projekcija poljskega vektorja na smer ploskovne normale. V komponentah zapišemo $\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{d}S = (\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, torej

$$\int \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}S = \iint v_x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + \iint v_y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x + \iint v_z\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{17.9}$$

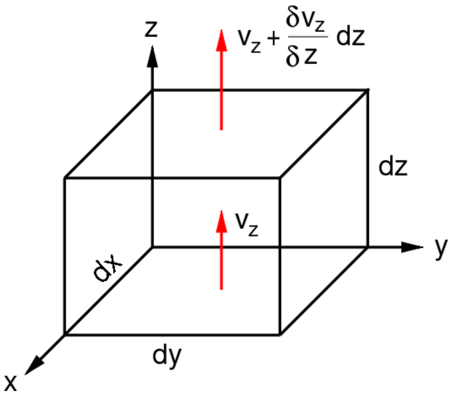
Vsak presek struge ima svoj pretok. Če med dvema zaporednima presekoma ni *izvorov* in *ponorov*, sta oba pretoka enaka. To nas napelje na misel, da uvedemo pretok skozi sklenjeno ploskev, sestoječo iz dveh zaporednih presekov in iz zamejitvenih sten struge. Ali še bolje: skozi sklenjeno ploskev kakršnekoli oblike, potopljeno v reko, to je v vektorsko polje. Kadar je pretok polja skozi sklenjeno ploskev različen od nič, bomo rekli, da so znotraj ploskve *neto izvori* polja: pozitivni ali negativni. Kadar pa je pretok nič, v notranjosti bodisi ni izvorov/ponorov ali pa se medsebojno izničujejo.

Divergenca

Za podrobnejšo raziskavo notranjih izvorov (ponore bomo zanaprej obravnavali kot negativne izvore), naredimo sklenjene ploskve znotraj vektorskega polja poljubno majhne. S tem definiramo prostorninsko *gostoto izvorov* kot

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oint \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S\,. \tag{17.10}$$

Rečemo, da je to *divergenca* polja. Divergenca vektorskega polja je skalarno polje. Definirana je neodvisno od izbire koordinatnega sistema in je zato invarianta polja.



Slika 17.3 Divergenca vektorskega polja. Definirana je kot neto pretok vektorskega polja skozi majhno zaprto ploskev.

Kako naj divergenco izrazimo s koordinatami? Vpeljemo poljuben koordinatni sistem. Sklenjeni ploskvi damo obliko kvadra. Slika pokaže naslednje. Neto pretok v smeri z znaša $(\mathrm{d}v_z/\mathrm{d}z)\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Podobno velja za neto pretoka v smeri x in z. Vse tri pretoke seštejemo, delimo s prostornino $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ in dobimo

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\,. \tag{17.11}$$

Prostorninski integral divergence

Prostornino znotraj poljubne sklenjene ploskve si mislimo zapolnjeno s samimi drobnimi kvadri. Pretok skozi kvader znaša $\oint \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V$. Seštejemo pretoke po vseh kvadrih. Prispevki po stičnih ploskvah se medsebojno izničijo in preostane pretok skozi oklepajočo ploskev:

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \int \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\,. \tag{17.12}$$

Pretok polja skozi sklenjeno ploskev je torej enak integralu divergence tega polja po zaobjeti prostornini. Ta skoraj samoumevni *divergenčni izrek* omogoča, da namesto integriranja po površini (kar je ponavadi težko) raje integriramo po prostornini.

Divergenca je skalarni diferencialni operator. Z malo računanja v komponentah in z enotnimi vektorji ugotovimo, da veljajo standardna pravila odvajanja: $\boldsymbol{\nabla}\cdot(c\boldsymbol{v}) = c\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{\nabla}\cdot(U\boldsymbol{v}) = U\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot U$.

17.4 Cirkulacija in rotor

Cirkulacija

Reka teče ponekod gladko, drugod se vrtinči. Na zamišljeni krožni poti po obrobju takega vrtinca so vsi hitrostni vektorji bolj ali manj usmerjeni vzdolž poti. Na podobni poti kje drugje, izven *vrtincev*, pa so hitrostni vektorji na kakšnem odseku usmerjeni vzdolž poti, na preostalem odseku pa v nasprotno smer. Kaže torej, da je integral vektorskega polja po sklenjeni poti, to je zanki, pomemebna količina. Zato definiramo *cirkulacijo* splošnega vektorskega polja po poljubni zanki kot

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{17.13}$$

V komponentah se integral glasi

$$\oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \oint v_x\,\mathrm{d}x + \oint v_y\,\mathrm{d}y + \oint v_z\,\mathrm{d}z\,. \tag{17.14}$$

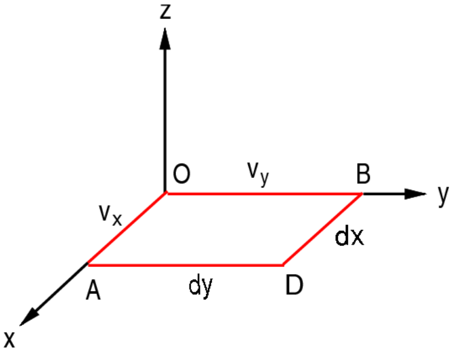
Kadar je cirkulacija po zanki različna od nič, rečemo, da so na (vsaj eni) ploskvi, napeti na zanko, prisotni *neto vrtinci* polja. Če je preučevana cirkulacija enaka nič, pa bodisi vmes ni vrtincev oziroma se ti medsebojno izničujejo.

Rotor

Za bolj natančno obravnavanje notranjih vrtincev naredimo zanke v vektorskem polju ravninske, poljubno majhne in jih tudi orientiramo v različne smeri. Zanka definira komponento *rotorja* polja v smeri svoje normale. Primerno zasukana zanka pokaže, v kateri smeri $\boldsymbol{n}$ je komponenta rotorja največja in s tem enaka celotnemu rotorju:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \cdot \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{17.15}$$

Rotor vektorskega polja je tudi vektorsko polje. Njegovi vektorji kažejo, kje so vrtinci polja, kako so močni in kako so usmerjeni. Definicija rotorja je neodvisna od izbire koordinatnega sistema in je zato invarianta polja.



Slika 17.4 Rotor vektorskega polja. Definiran je kot cirkulacija vektorskega polja vzdolž majhne zanke.

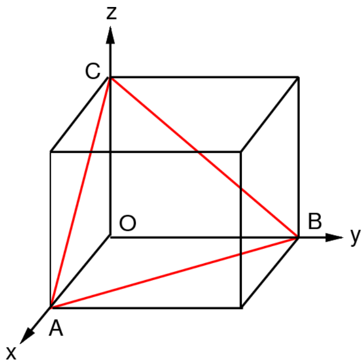
Komponentni zapis

Kakšen je rotor v koordinatnem zapisu? Določiti moramo njegove tri pravokotne komponente, to je, preučiti tri ustrezno usmerjene zanke. Slika pove naslednje.

Produkt $\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ znaša na odseku OA: $v_x\,\mathrm{d}x$; na odseku AD: $(v_y + (\partial v_y/\partial x)\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y$; na odseku DB: $-(v_x + (\partial v_x/\partial y)\,\mathrm{d}y)\,\mathrm{d}x$; in na odseku BO: $-v_y\,dy$. Vse seštejemo, delimo s ploščino $dx\,dy$ in dobimo izraz za komponento rotorja vzdolž osi z. Podobno napravimo še za drugi dve osi in dobimo vse tri komponente rotorja

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \nabla \times \boldsymbol{v}\,. \tag{17.16}$$

Tako kot gradient in divergenca se tudi rotor lepo izraža z operatorjem nabla.



Slika 17.5 Rotor in njegove komponente.

Komponente in projekcije

Prepričali bi se še radi, da se tri pravokotne komponente rotorja, izračunane iz treh kvadratnih zank, res sestavljajo v vektor. Slika pove naslednje. Naj trikotnik ABC določa ravnino, katere normala $\boldsymbol{n}$ kaže v smer rotorja. Normala oklepa s koordinatnimi osmi kote α, β in γ. Ploščina trikotnika je S_n in cirkulacija Γ_n poteka vzdolž stranic AB, BC in CA. Ta cirkulacija je enaka vsoti treh cirkulacij Γ_x, Γ_y in Γ_z po treh stranskih trikotnikih OBC, OCA in OAB, saj se prispevki vzdolž skupnih stranic izničijo. Ploščina stranskega trikotnika $S_x = S_n \cos\alpha$ in podobno za druga dva. Naštete cirkulacije zapišemo kot produkte ustreznih rotorjev in ploščin ter dobimo (po deljenju z S_n) $\operatorname{rot}_n \boldsymbol{v} = \cos\alpha \operatorname{rot}_x \boldsymbol{v} + \cos\beta \operatorname{rot}_y \boldsymbol{v} + \cos\gamma \operatorname{rot}_z \boldsymbol{v}$. Iz tega razberemo $\operatorname{rot}_n \boldsymbol{v} = \boldsymbol{n} \cdot (\operatorname{rot}_x \boldsymbol{v}, \operatorname{rot}_y \boldsymbol{v}, \operatorname{rot}_z \boldsymbol{v})$. To je dokaz, da se rotor res projicira v pravilne komponente oziroma da komponente res opisujejo pravi vektor.

Majhna okrogla ploščica z narisano puščico, ki plava po gladini vode in se pri tem vrti, kaže, kakšen je lokalni rotor v navpični smeri. Integral obodne hitrosti po obsegu ploščice znaša $2\pi r v$, ploščina je πr^2, njun količnik pa pove $\operatorname{rot}_z \boldsymbol{v} = 2v/r = 2\omega$. Rotor je torej enak dvakratni kotni hitrosti vrtenja. V notranjosti tekočine pa si moramo misliti prozorno kroglico s tremi vrisanimi puščicami.

Ploskovni integral rotorja

Ploščino poljubne ploskve, napete na veliko zanko, si mislimo razkosano na drobne kvadrate. Cirkulacija po kvadratu znaša $\oint \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{s} = (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS$. Seštejemo cirkulacije po vseh kvadratih. Prispevki po stičnih robovih se medsebojno izničijo in preostane cirkulacija po zunanji oklepajoči zanki:

$$\oint \boldsymbol{v}\,d\boldsymbol{s} = \int (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\,dS\,. \tag{17.17}$$

Cirkulacija polja po sklenjeni zanki je torej enaka integralu rotorja tega polja po katerikoli zaobjeti ploskvi. Ta *rotorski izrek* omogoča, da namesto integriranja po zanki raje integriramo po ploskvi in obratno, kakor je pač računsko lažje.

Rotor je vektorski diferencialni operator. Z nekaj računanja v komponentah in z enotnimi vektorji ugotovimo, da veljajo naslednja pravila odvajanja: $\boldsymbol{\nabla}\times(c\boldsymbol{v})=c\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$ in $\boldsymbol{\nabla}\times(U\boldsymbol{v})=U\,(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})-\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{\nabla}\,U)$.

17.5 Operacije drugega reda

Divergenca in rotor gradienta

Gradient skalarja je vektor. Nad tem vektorjem lahko izvršimo operacijo divergence ali rotorja. Kaj dobimo? Računanje s komponentami pokaže:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}U)=\boldsymbol{\nabla}^2U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\\&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}U)=0\,.\end{aligned}\tag{17.18}$$

Simbolično lahko torej računamo tako, kot da bi bil nabla pravi vektor in skalarno polje navaden skalar: $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\,c)=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\,c=\boldsymbol{a}^2\,c$. In $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\,c)=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\,c=0$.

Kakšen pomen ima izraz $\boldsymbol{\nabla}^2U$? Okrog preučevane točke si zamislimo kocko z robovi dl. V središčni točki aproksimirajmo $\partial^2U/\partial x^2\approx[(U_{i+1}-U_i)/\mathrm{d}l-(U_i-U_{\mathrm{i}-1})/\mathrm{d}l]/\mathrm{d}l$ in podobno za druga dva odvoda. Dobimo $\boldsymbol{\nabla}^2U=(\bar{U}-U_0)/S$, pri čemer je U_0 polje v preučevani točki (v sredini kocke), $\bar{U}$ povprečna vrednost polja na šestih ploskvah kocke in S površina kocke. Če je torej izraz $\boldsymbol{\nabla}^2U$ v preučevani točki enak nič, je vrednost polja v tej točki enaka povprečni vrednosti na "ekvidistantni" ploskvi okrog nje. Če ni nič, pa meri odmik od tega povprečja. V pomanjkanju boljšega imena mu bomo rekli *delta* polja in ga označili ΔU. Delta polja torej pove, koliko se polje v izbrani točki razlikuje od povprečja v neposredni okolici.

Zanimiva je tudi ugotovitev, da gradient poljubnega skalarnega polja nima vrtincev. To je pričakovano, saj je le z drugimi besedami povedano, da je integral gradienta po sklenjeni zanki enak nič.

Divergenca in rotor rotorja

Rotor vektorja je vektor. Tudi nad njim lahko legitimno izvršimo operacijo divergence ali rotorja. Računanje v komponentah, v zadnjem primeru precej dolgovezno, pove:

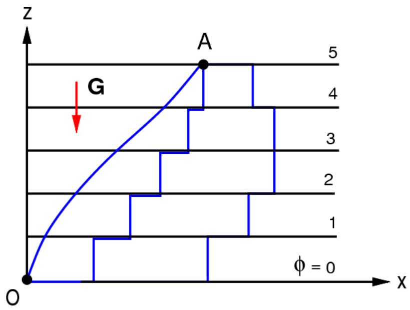
$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})=0\\&\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{v}\,.\end{aligned}\tag{17.19}$$

Spet smemo računati kot s pravimi vektorji. V produktu $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ je faktor v oklepaju vektor, pravokoten na $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$, torej je njegov skalarni produkt z $\boldsymbol{a}$ enak nič. Druga enačba pa je tudi taka, kot pravi dvojni vektorski produkt. Spet dobimo zanimiv rezultat, namreč da rotor poljubnega vektorskega polja nima izvorov.

Preostala operacija drugega reda – gradient divergence – je že zaobjeta v identiteti za rotor rotorja.

Konservativna polja

Naj bo vektorsko polje tako, da je njegova cirkulacija (oziroma rotor) povsod enaka nič: $\nabla \times \boldsymbol{G} = 0$. Rečemo, da je takšno polje *konservativno*. Dober primer je homogeno gravitacijsko polje v bližini Zemlje. Ker vemo, da je rotor enak nič tudi za gradient poljubnega skalarnega polja, sledi, da se da konservativno vektorsko polje izraziti kot gradient ustreznega skalarnega polja: $\boldsymbol{G} = -\nabla\phi$. To skalarno polje poimenujemo *potencial*. Negativni predznak vključimo zato, ker želimo, da se potencial veča vzdolž smeri polja.



Slika 17.6 Potencial konservativnega polja. Prikazano je homogeno gravitacijsko polje $\boldsymbol{G}$. Vrednost potenciala ϕ v izbrani točki je določena z integralom polja vzdolž poljubne krivulje iz referentne točke.

Kako izračunamo potencial? Izberemo referentno točko v polju in ji dodelimo poljubno vrednost potenciala. Potem izračunamo krivuljni integral vzdolž poljubne poti do vsake točke polja in s tem določimo tamkajšnji potencial: $\phi - \phi_0 = \int \boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$. Pot izberemo tako, da je računanje najlažje. Očitno je tovrstna izbira potenciala nedoločena za izhodiščno konstanto. Drugače rečeno: če je ϕ potencial konservativnega polja, potem je tak tudi $\phi + \mathrm{const}$. Za gravitacijsko polje $\boldsymbol{G} = (0, 0, -g)$ tako izračunamo $\phi = gz_0 + gz$.

17.6 Krivočrtne koordinate

Skalirni faktorji

Kadar ima polje cilindrično ali krogelno simetrijo, ga je priročno obravnavati v temu prilagojenih koordinatah. Cilindrične koordinate so, kot vemo: ρ, φ in z, krogelne pa: r, θ in φ. Poljubne pravokotne *krivočrtne koordinate* označimo s q_1, q_2 in q_3. Prostor je prepleten z njihovimi koordinatnimi krivuljami. Skozi vsako točko gredo tri med seboj pravokotne krivulje. Vzdolž krivulje 1 je usmerjen dolžinski element

$$\mathrm{d}s_1 = h_1\,\mathrm{d}q_1 \tag{17.20}$$

in podobno vzdolž drugih dveh. Trije *skalirni faktorji* h_i so pravzaprav koreni že spoznanih metričnih koeficientov: $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ (16.31). Za cilindrične koordinate znašajo, kot znano: 1, ρ in 1 ter za krogelne: 1, r in $r\sin\theta$.

Ploščinski element z normalo vzdolž krivulje 1 je

$$\mathrm{d}S_1 = h_2\, h_3\, \mathrm{d}q_2\, \mathrm{d}q_3 \qquad (17.21)$$

in podobno za ostali dve. Prostorninski element pa znaša

$$\mathrm{d}V = h_1\, h_2\, h_3\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2\, \mathrm{d}q_3\,. \qquad (17.22)$$

Gradient, divergenca in rotor

Zapisani elementi omogočajo, da izračunamo gradient, divergenco in rotor v krivočrtnih koordinatah, izhajajoč iz brezkoordinatnih definicij teh količin. Ravnamo prav tako kot pri kartezičnih koordinatah, le računanja je več:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= \left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right) \qquad (17.23)\\
\operatorname{div} \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial v_1 h_2 h_3}{\partial q_1} + \frac{\partial v_2 h_3 h_1}{\partial q_2} + \frac{\partial v_3 h_1 h_2}{\partial q_3}\right]\\
\operatorname{rot}_1 \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_2 h_3}\left(\frac{\partial v_3 h_3}{\partial q_2} - \frac{\partial v_2 h_2}{\partial q_3}\right)\\
\operatorname{rot}_2 \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_3 h_1}\left(\frac{\partial v_1 h_1}{\partial q_3} - \frac{\partial v_3 h_3}{\partial q_1}\right)\\
\operatorname{rot}_3 \boldsymbol{v} &= \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial v_2 h_2}{\partial q_1} - \frac{\partial v_1 h_1}{\partial q_2}\right).
\end{aligned}$$

Delta

Iz enačb za gradient in divergenco sledi enačba za divergenco gradienta, torej za delto polja v krivočrtnih koordinatah:

$$\begin{aligned}
\Delta U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial U}{\partial q_1}\right) + \qquad (17.24)\\
&\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial U}{\partial q_3}\right)\Bigg].
\end{aligned}$$

17.7 Cilindrične koordinate

Vstavitev cilindričnih skalirnih faktorjev v dobljene enačbe pove:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} U &= \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \qquad (17.25)\\
\operatorname{div} \boldsymbol{v} &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho\, v_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\\
\operatorname{rot}_\rho \boldsymbol{v} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial z}\right)\\
\operatorname{rot}_\varphi \boldsymbol{v} &= \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial z}\right)\\
\operatorname{rot}_z \boldsymbol{v} &= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \varphi}\right)\\
\Delta U &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\,.
\end{aligned}$$

Osnosimetrična polja

Enačbe so videti kar zamotane, vendar se močno poenostavijo, če ima polje *osno simetrijo*. Temperatura v steni cevi, po kateri teče vroča voda, ima na primer osno simetrični profil $T = T(\rho)$. Njegova gradient in delta zato znašata

$$\mathrm{grad}_\rho T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho} . \tag{17.26}$$

$$\Delta T = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\rho}) .$$

Lep vodni vrtinec ima profil hitrosti $v_\varphi = v_\varphi(\rho)$. Njegova divergenca in rotor zato znašata

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0 \tag{17.27}$$

$$\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho v_\varphi}{\mathrm{d}\rho} .$$

Togo vrtenje, ko $v_\varphi = \omega\rho$, zadevo še bolj poenostavi v $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{v} = 2\omega$, kakor tudi mora biti. Če pa se voda v vrtincu giblje tako, da $v_\varphi \rho = \mathrm{const}$, je rotor povsod enak nič. "Vrtinec" je zato brezvrtinčen!

17.8 Krogelne koordinate

Ko v splošne enačbe vstavimo krogelne skalirne faktorje, pa dobimo:

$$\mathrm{grad}\,U = (\frac{\partial U}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}) \tag{17.28}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta\, v_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\mathrm{rot}_r\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}(\frac{\partial r\sin\theta\, v_\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial r v_\theta}{\partial\varphi})$$

$$\mathrm{rot}_\theta\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial r\sin\theta\, v_\varphi}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\varphi})$$

$$\mathrm{rot}_\varphi\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{r}(\frac{\partial r v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial\theta})$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial U}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} .$$

Radialno simetrična polja

Te enačbe so še bolj zapletene kot cilindrične. Se pa lepo poenostavijo za polja, ki imajo *radialno simetrijo*. Primer je temperaturni profil v notranjosti Zemlje, $T = T(r)$. Njegova gradient in delta znašata

$$\mathrm{grad}_r T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} . \tag{17.29}$$

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}) .$$

Tudi težno polje v Zemlji in izven nje ima radialno simetričen profil $g_r = g_r(r)$. Njegova divergenca in rotor znašata

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{g} = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r^2 g_r}{\mathrm{d}r} \tag{17.30}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{g} = 0 .$$

Zunaj Zemlje, kjer $g_r = g_0\, {r_0}^2 / r^2$ (kakor pravi fizika), postane tudi divergenca enaka nič. Tako tudi mora biti, saj tam ni izvorov polja. □

18 Diferencialne enačbe

Diferencialne enačbe – Enačbe prvega reda – Enačbe drugega reda – Advekcijska enačba – Valovna enačba – Difuzijska enačba – Potencialna enačba – Amplitudna enačba

18.1 Diferencialne enačbe

Iz fizike poznamo naslednje. Premik ds telesa v kratkem časovnem intervalu dt je odvisen od njegove hitrosti v: $\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t$; pospešek telesa $\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2$ je odvisen od sile F nanj: $\mathrm{d}^2s/\mathrm{d}t^2 = F/m$; in tudi mnoge druge spremembe v naravi so opisane z enačbami, v katerih nastopajo odvodi/diferenciali količin. To so *diferencialne enačbe*. Na splošno zapišemo "navadno" diferencialno enačbo v obliki $F(u,t,u',u''\ldots) = 0$. Glede na to, katerega reda je najvišji diferencial, razlikujemo enačbe prvega, drugega in višjih redov. Rešitev diferencialne enačbe je funkcija $u(t)$, ki tej enačbi zadošča.

Spremembe funkcij več spremenljivk, tipično časa in prostora, opisujejo enačbe, ki vsebujejo parcialne odvode. To so *parcialne diferencialne enačbe*. Takšna je, na primer, lokalna sprememba koncentracije primesi v zračnem toku v odvisnosti od lokalnega gradienta koncentracije: $\partial Q/\partial t = c\,\partial Q/\partial x$. Za funkcijo dveh spremenljivk ima parcialna diferencialna enačba splošno obliko $F(u, x, y, u_x, u_y, u^2{}_{xx}, u^2{}_{yy}, u^2{}_{xy} \ldots) = 0$. Njena rešitev je taka funkcija $u(x,y)$, ki enačbi zadošča. Podobno velja za funkcije treh in več spremenljivk. Poglejmo in rešimo tipične enačbe, navadne in parcialne, ki jih srečamo v fiziki!

18.2 Enačbe prvega reda

Trivialne enačbe

Najpreprostejše enačbe so naslednje:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = g(u) \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(t)g(u)\,. \tag{18.1}$$

Vse rešujemo na enak način – z ločevanjem spremenljivk in integriranjem, na primer:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{g(u)} = \int f(t)\mathrm{d}t\,. \tag{18.2}$$

Če imamo srečo, pridela integracija *splošno rešitev* v eksplicitni obliki $u = \xi(t) + C$. Z zahtevo, da je izpolnjen *začetni pogoj* $u(0) = u_0$, je konstanta C enolično določena in dobimo *posebno rešitev* enačbe.

Linearna enačba Bolj zapleten je enačba

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + f(t)u = g(t)\,. \tag{18.3}$$

Na obeh straneh jo pomnožimo s še neznano funkcijo $w(t)$, jo spravimo pod diferencial (pri tem pridelamo dodatni člen, ki ga moramo odšteti) in dobimo $\mathrm{d}(uw)/\mathrm{d}t - [u\,\mathrm{d}w/\mathrm{d}t + uwf] = wg$. Izberemo tak w, da je izraz v oglatem oklepaju nič, torej:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + fw = 0\,. \tag{18.4}$$

To je separabilna enačba $\mathrm{d}w/w = -f\mathrm{d}t$ z integralno rešitvijo $w = C\exp(-\int f\,\mathrm{d}t)$. Preostane enačba

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t} + wg = 0 \tag{18.5}$$
$$\xi = uw\,,$$

ki je spet separabilna; iz nje izračunamo ξ ter potem $u = \xi/w$.

Splošna enačba Splošno enačbo

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = f(u,t) \tag{18.6}$$

rešujemo z nastavkom v obliki potenčne vrste. Nastavek $u(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + \ldots$ vstavimo v enačbo, izračunamo, kar je treba, in uredimo dobljene člene po naraščajočih potencah t^n, vse na isti strani enačbe. Koeficient pred vsako potenco (vsebujoč različne a_i) mora biti enak nič. Posamezne a_i določimo iz teh pogojev rekurzivno.

18.3 Enačbe drugega reda

Trivialne enačbe Prototipne enačbe drugega reda so enačbe gibanja: opisujejo, kako se giblje telo pod vplivom sil. Najpreprostejše enačbe

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = f(t) \tag{18.7}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = f(s)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = f(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})$$

rešujemo s substitucijo $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = v$, ki pripelje na enačbo prvega reda: $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(t)$ ali $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = (\mathrm{d}v/\mathrm{d}s)(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t) = v\mathrm{d}v/\mathrm{d}s = f(s)$ ali $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = f(v)$. Vsaka dobljena enačba je separabilna in jo rešimo na v, potem pa z njim iz substitucijske enačbe izračunamo še s. Pri tem pridelamo dve nedoločeni konstanti. Določimo ju iz dveh začetnih pogojev $s(0) = s_0$ in $s'(0) = v(0) = v_0$.

Prosto nihanje

Bolj zapletene so linearne enačbe s konstantnimi koeficienti; opisujejo razne vrste nihanj. Najbolj preprosta med njimi je enačba prostega nihanja:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 s = 0\,. \tag{18.8}$$

Kakšna je njena rešitev, pravi kar enačba sama: drugi odvod katere funkcije je spet ta funkcija, vendar z nasprotnim predznakom? To je sinus ali kosinus. Nastavek $s = \cos\omega t$ pove $\omega = \omega_0$. Podobno velja za nastavek $s = \sin\omega t$. Splošna rešitev je linearna kombinacija obeh delnih rešitev:

$$s = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t\,. \tag{18.9}$$

Konstanti A_1 in A_2 določimo iz začetnih pogojev $s(0) = s_0$ in $s'(0) = v_0$.

Opazimo tudi naslednje. Zapisana nihajna enačba (18.8) je pravzaprav realni (ali imaginarni) del kompleksne enačbe s povsem enako obliko, le da je v njej količina $\hat{s} = (x + \mathrm{i}y)$ kompleksna: $(x + \mathrm{i}y)'' + {\omega_0}^2\,(x + \mathrm{i}y) = 0$ pomeni $(x'' + {\omega_0}^2\,x) + \mathrm{i}(y'' + {\omega_0}^2\,y) = 0$, to je par "navadnih" enačb. Zato jo lahko rešujemo tudi s kompleksnim nastavkom $\hat{s} = (s_0 \exp \mathrm{i}\delta) \exp \mathrm{i}\omega t$. Ko ga vstavimo v nihajno enačbo, dobimo $(\mathrm{i}\omega)^2 + {\omega_0}^2 = 0$, torej $\omega = \omega_0$. Tako realni kot imaginarni del kompleksnega nastavka sta iskani rešitvi: $s = s_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$ ali $s = s_0 \sin(\omega_0 t + \delta)$. Konstanti s_0 in δ določimo iz začetnih pogojev. Če upoštevamo še obrazec za sinus ali kosinus vsote (10.15), pa dobimo rešitev v obliki $s = A_1 \cos\omega_0 t + A_2 \sin\omega_0 t$. Novi konstanti se izražata s starima: ${s_0}^2 = {A_1}^2 + {A_2}^2$ in $\tan\delta = -A_2/A_1$.

Vzbujeno nihanje

Gibanje nihala, na katerega deluje dodatni zunanji harmonični vpliv s frekvenco ω, opisuje enačba

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\,s = A\cos(\omega t + \delta)\,. \tag{18.10}$$

Zapisano enačbo razširimo v kompleksno obliko $\hat{s}'' + {\omega_0}^2\,\hat{s} = \hat{A} \exp \mathrm{i}\omega t$, pri čemer $\hat{A} = A \exp \mathrm{i}\delta$. Za rešitev pričakujemo nihanje z isto frekvenco kot zunanji vpliv, zato izberemo nastavek $\hat{s} = \hat{s}_0 \exp \mathrm{i}\omega t$, pri čemer $\hat{s}_0 = s_0 \exp \mathrm{i}\theta$, in ga vtaknemo v nihajno enačbo. Dobimo $(\mathrm{i}\omega)^2 \hat{s}_0 + {\omega_0}^2 \hat{s}_0 = \hat{A}$, torej $\hat{s}_0 = \hat{A}/({\omega_0}^2 - \omega^2)$. Količini $\hat{s}_0$ in $\hat{A}$ sta povezani z realnim sorazmernostnim faktorjem, zato sta njuni fazi enaki in velja

$$s = s_0 \cos(\omega t + \delta) \tag{18.11}$$
$$s_0 = \frac{A}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)}}\,.$$

Nihalo niha harmonično z isto frekvenco ω kot vzbujevalec. Čim manjša je razlika med frekvenco vzbujevalca in lastno frekvenco ω_0 nihala, tem večja je amplituda s_0 nihanja. Ko sta frekvenci enaki, je amplituda neskončna. Rečemo, da je nihalo v *resonanci* z vzbujevalcem. Seveda nastopa v naravi trenje/upor, ki ga nismo upoštevali, in so zato vzbujene amplitude končne.

Vzbujano nihanje z dušenjem

Vzbujeno nihanje z linearnim uporom zapišemo z enačbo

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 s = A \cos(\omega t + \delta)\,. \tag{18.12}$$

Postopamo enako kot pri nedušenem vzbujanju in pridelamo enačbo $\hat{s}_0 = \hat{A}/(\omega_0 - \omega + \mathrm{i}\gamma\omega) = \hat{R}\hat{A}$. To enačbo zapišemo v obliki $\hat{s}_0 = R \exp \mathrm{i}\theta \cdot A \exp \mathrm{i}\delta = RA \exp \mathrm{i}(\theta + \delta)$. Realni del leve strani je enak realnemu delu desne strani, zato

$$s = RA \cos(\omega t + \delta + \theta)\,. \tag{18.13}$$

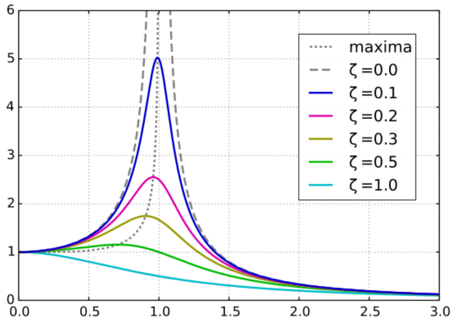
Nihanje je harmonično s frekvenco vzbujevalca, vendar je časovno zamaknjeno. Amplituda je določena z R in faza s θ. Določimo ju! Definicijski izraz za $\hat{R}$ kvadriramo, to je, pomnožimo ga s konjugirano vrednostjo, in dobimo:

$$R = \frac{1}{\sqrt{[(\omega^2 - {\omega_0}^2)^2 + \gamma^2\,\omega^2]}}\,. \tag{18.14}$$

Recipročni izraz za $\hat{R}$ preoblikujemo takole: $1/\hat{R} = 1/R \exp \mathrm{i}\theta = (1/R) \exp(-\mathrm{i}\theta) = ({\omega_0}^2 - \omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega)$. Realni del dobljenega izraza je $\cos\theta$ in imaginarni del je $-\sin\theta$. Njuno razmerje pove

$$\tan\theta = \frac{-\gamma\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}\,. \tag{18.15}$$

Pri nizkih vzbujevalnih frekvencah nihalo kar sledi vzbujevalcu. Pri visokih stoji pri miru, saj nima časa, da bi mu sledilo. Trenje poskrbi, da je resonantno ojačanje končno. Nihanje vedno kasni za vzbujevanjem. Kasnenje narašča s frekvenco. V resonanci kasni natanko za četrt nihaja.



Slika 18.1 Resonantna krivulja pri različnh dušenjih. Na abscisi je razmerje ω/ω_0 in na ordinati ojačanje amplitude R. (Anon.)

Dušeno nihanje

Preostane še dušeno nihanje:

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 s = 0\,. \tag{18.16}$$

Na enačbo pogledamo, kot da je kompleksna. Pričakujemo nihanje z zmanjševanjem amplitude s časom in zato poskusimo z nastavkom $\hat{s} = \exp \mathrm{i}\hat{r}t$ s kompleksnim $\hat{r}$. Kompleksni eksponent namreč vsebuje realni in imaginarni del, ki poskrbita za oboje – dušenje in nihanje. Dobimo $(-\hat{r}^2 + \mathrm{i}\gamma\hat{r} + \omega_0{}^2)\exp \mathrm{i}\hat{r}t = 0$. Prvi faktor mora biti enak nič, to pa je pri $\hat{r} = \mathrm{i}\gamma/2 \pm \sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2/4)}$ oziroma okrajšano $\hat{r} = \mathrm{i}\gamma/2 \pm \omega$. Privzemimo, da je dušenje tako majhno, da je podkorenski izraz pozitiven. Tedaj je frekvenca ω realna. Potem dobimo rešitev $\hat{s} = \exp(-\gamma t/2)\,[c_1 \exp(\mathrm{i}\omega t) + c_2 \exp(-\mathrm{i}\omega t)]$. Da bomo kompleksno rešitev reducirali na realno, moramo postaviti $c_2 = c_1{}^*$ oziroma obratno in dobimo

$$s = s_0\, \mathrm{e}^{-\gamma t/2} \cos(\omega t + \delta) \qquad (18.17)$$
$$\omega = \sqrt{(\omega_0{}^2 - \gamma^2)},\ \gamma < \omega_0\,.$$

Nihanje je harmonično z manjšo frekvenco kot pri prostem nihanju, amplitude pa so eksponentno dušene. Če je dušenje premočno, si zlahka predstavljamo, da do nihanja sploh ne pride, ampak preostane le eksponentno pojemanje. Računsko pa se tega ne bomo lotili.

Splošna enačba

Splošno enačbo drugega reda

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = f(u, t, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}) \qquad (18.18)$$

rešujemo z nastavkom s potenčno vrsto, prav tako kot enačbo prvega reda (18.6).

18.4 Advekcijska enačba

Transport primesi ali temperature s konstantnim snovnim tokom opisuje *advekcijska enačba*

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -c\,\frac{\partial Q}{\partial x}\,. \qquad (18.19)$$

Konstanta c je hitrost toka. Če je pozitivna, teče tok v smeri osi x, sicer pa v nasprotni smeri. Ker je tok konstanten v prostoru in času, se začetni oblak primesi $Q(x,0) = F(x)$ zgolj translatorno premakne in se nič ne deformira. Na neomejenem območju $[-\infty, +\infty]$ ima torej enačba rešitev

$$Q(x,t) = F(x - ct) \qquad (18.20)$$

s poljubno funkcijo F. V to se prepričamo z neposrednim odvajanjem. Na omejenem območju $[0,l]$ je treba pri toku z leve $(c > 0)$ poleg začetnega profila specificirati še levi robni pogoj, recimo $u(0,t) = 0$. Če prihaja tok z desne, pa je potreben desni robni pogoj.

18.5 Valovna enačba

Snovni ali elektromagnetni valovi se pokoravajo *valovni enačbi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,. \qquad (18.21)$$

Neomejen prostor

Enačbo zapišemo v obliki $(\partial^2/\partial t^2 - c^2\partial^2/\partial x^2)u = 0$, jo "faktoriziramo" v $(\partial/\partial t - c\partial/\partial x)(\partial/\partial t + c\partial/\partial x)u = 0$ ter pridobimo dve advekcijski enačbi. S tem smo našli tudi splošno rešitev na neomejenem področju:

$$u(x,t) = F(x-ct) + G(x+ct) \tag{18.22}$$

Funkciji F in G sta poljubni. Začetni profil $u(x,0) = F(x) + G(x)$ je sestavljen iz dveh delov, od katerih se vsak giblje v svojo stran v nespremenjeni obliki. Da je splošna rešitev res prava, se prepričamo z neposrednim odvajanjem.

Omejen prostor

Na omejenem področju $[0,l]$ sta poleg dveh začetnih pogojev $u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$ potrebna še dva robna pogoja; najpreprosteje $u(0,t) = u(l,t) = 0$. Iščemo rešitve v obliki $u(x,t) = X(x)T(t)$. Vstavitev v valovno enačbo pove $X_{xx}/X = T_{tt}/c^2T$. Leva strann je odvisna samo od x in desna samo od t. To je možno le, če je vsaka stran enaka isti konstanti, $-\lambda$. Rešitev leve enačbe je $\sin\sqrt{\lambda}x$ ali $\cos\sqrt{\lambda}x$ ali linearna kombinacija obeh. Da ustrežemo levemu pogoju, vzamemo sinus, desnega pa zadovoljimo z izbiro konstante $\sqrt{\lambda} = n\pi/l$. Rešitev druge enačbe sta sinus ali kosinus argumenta $\sqrt{\lambda}ct = n\pi ct/l$ oziroma njuna linearna kombinacija, torej

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{l}\left(a_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + b_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right). \tag{18.23}$$

Da ustrežemo začetnima pogojema, mora veljati $u(x,0) = f(x) = \sum a_n \sin n\pi x/l$ in $u'(x,0) = g(x) = \sum (n\pi c/l)\, b_n \sin n\pi x/l$. Koeficienti so torej

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \tag{18.24}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x\,.$$

Če $g(x) = 0$, so časovno odvisni členi v rešitvi le kosinusi; osnovna frekvenca nihanja znaša $\omega_1 = \pi c/l$, ostale pa so njeni celoštevilčni mnogokratniki.

18.6 Difuzijska enačba

Za difuzijo primesi ali temperature v mirujoči snovi velja *difuzijska enačba*

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = D\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\,, \quad D > 0\,. \tag{18.25}$$

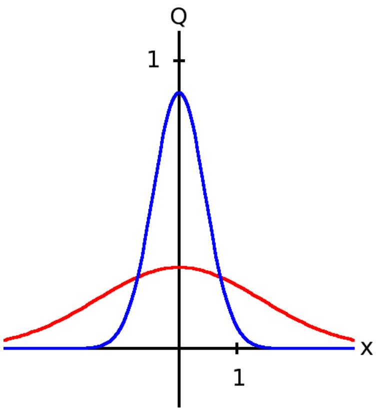
Neomejen prostor

Naj bo prostor za difuzijo neomejen. Najpreprostejši začetni profil primesi je oster vrh pri $x = 0$. Gibanje delca primesi po ozadju snovnih molekul spominja na kotaljenje kroglice po ožlebljeni deski (pri fiziki). Porazdelitev kroglic po odmiku od središčne lege je normalna. Domnevamo, da je tako tudi pri difuziji delcev primesi: okrog začetne lege se bodo razpršili normalno in ta razpršitev se bo sčasoma širila in nižala. Zato izberemo nastavek $Q = 1/\sqrt{(2\pi a)} \cdot \exp(-x^2/2a)$, pri čemer je a neznana funkcija časa. Vstavimo ga v difuzijsko enačbo (18.25) in ugotovimo, da ji zadošča, ako $a = 2Dt$. To torej pomeni, da je rešitev

$$Q(x,t) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{(2\pi)}} \exp \frac{-x^2}{2\sigma_x^2} \qquad (18.26)$$
$$\sigma_x^2 = 2Dt\,.$$

O pravilnosti se prepričamo tako, da rešitev vstavimo v difuzijsko enačbo.

Normalna rešitev v dveh dimenzijah je produkt normalnih rešitev v posamičnih dimenzijah. Dobimo jo, če nadomestimo $x^2 \to \rho^2$ in $\sigma_x^2 \to \sigma_\rho^2 = 4Dt$. Podobno velja za tri dimenzije: $x^2 \to r^2$ in $\sigma_x^2 \to \sigma_r^2 = 6Dt$.



Slika 18.2 Difuzija točkastega izvora. Prikazana je enodimenzionalna difuzija za $D = 1$ in ob časovnih enotah 0.01 (modra) ter 1 (rdeča).

Kaj pa, če začetni profil v neomejenem prostoru ni točkast, ampak je razmazan v oblak? Potem je gotovo težko – če sploh – najti analitično rešitev. S tem se ne bomo ukvarjali.

Omejen prostor

Prostor, v katerem poteka difuzija, je lahko tudi omejen s stenami take ali drugačne vrste. Poleg začetnega profila po vsem prostoru so potem merodajni tudi robni pogoji, ob vseh časih, na teh stenah. Na omejenem področju $[0,l]$ sta poleg začetnega pogoja potrebna torej še dva robna pogoja; najpreprosteje je, da sta oba nič: $Q(0,t) = Q(l,t) = 0$. Postopamo tako kot pri valovni enačbi. Nastavek $Q(x,t) = X(x)T(t)$ pove $X_{xx}/X = T_t/DT$. Leva stran je odvisna samo od x in desna samo od t. To je možno le, če je vsaka stran enaka isti konstanti, $-\lambda$. Rešitev leve enačbe je $\sin\sqrt{\lambda}x$ ali $\cos\sqrt{\lambda}x$ ali linearna kombinacija obeh. Da ustrežemo levemu pogoju, vzamemo sinus, desnega pa zadovoljimo z izbiro konstante $\sqrt{\lambda} = n\pi/l$. Desna enačba ima rešitev $\exp(-\lambda Dt)$. Celotna rešitev je torej linearna kombinacija

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} \exp \frac{-n^2\pi^2 Dt}{l^2}\,. \tag{18.27}$$

Koeficiente c_n izberemo tako, da rešitev zadošča začetnemu pogoju $Q(x,0) = \sum c_n \sin(n\pi x/l)$. To je razvoj v trigonometrično vrsto sinusov, torej

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l Q(x,0) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx\,. \tag{18.28}$$

Drugačne robne pogoje obravnavamo takole. Pogoja $Q(0,t) = Q(l,t) = A$ prevedemo na nič s premikom skale $Q \to Q + A$. Pri pogojih $Q_x(0,t) = Q_x(l,t) = 0$ pa vzamemo za krajevne funkcije kosinuse.

18.7 Potencialna enačba

Na okvir napeta elastična opna ali med prevodnike napeto električno polje zadoščata *potencialni enačbi*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{18.29}$$

Na kvadratnem območju

Na omejenem kvadratnem območju $[0,a] \times [0,b]$ naj bodo robne vrednosti iskane funkcije povsod enake nič, le na desnem robu naj velja $u(a,y) = f(y)$. Ločitev spremenljivk privede do dveh enačb $X_{xx} - \lambda X = 0$ in $Y_{yy} + \lambda Y = 0$. Rešitev druge enačbe, ki zadošča robnima pogojema, je $\sin\sqrt{\lambda}y$, pri čemer $\sqrt{\lambda} = n\pi/b$. Prva enačba in upoštevanje levega robnega pogoja pa zahtevata rešitev $\sinh\sqrt{\lambda}x$. Pri tem je $\sinh\alpha = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$. Iskana funkcija je superpozicija

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{a}\,. \tag{18.30}$$

Koeficiente c_n izberemo tako, da uresničimo desni robni pogoj $f(y) = \sum c_n \sinh n\pi a/b \cdot \sin n\pi y/b$, to je

$$c_n = \frac{2}{b \sinh n\pi a/b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b}\, dy\,. \tag{18.31}$$

Če so robni pogoji predpisani z normalnimi odvodi, od katerih so vsi razen desnega enaki nič, se v rešitvi pojavita funkciji cos in cosh. Pri tem je $\cosh\alpha = (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2$. Ločitev spremenljivk je mogoča le tedaj, ko sta funkcija ali njen normalni odvod enaka nič na treh stranicah. Drugače pa zapišemo funkcijo u kot vsoto štirih funkcij, pri katerih je vsakokrat druga stranica različna od nič.

18.8 Amplitudna enačba

Amplitude stojnega valovanje na struni, opni ali v prostorski votlini opisuje *amplitudna enačba*

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0, k = \omega / c\,. \tag{18.32}$$

Struna

Za struno dolžine l, vpeto na obeh straneh, se amplitudna enačba zapiše kot

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} + k^2 A = 0\,. \tag{18.33}$$

Očitno ji zadoščajo sinusni valovi s celim številom polvalov med obema krajiščema:

$$A_n = \sin(k_n x) \tag{18.34}$$
$$k_n l = n\pi, n = 0, 1, 2\ldots$$

Struna lahko niha s kakršnokoli linearno kombinacijo osnovnih rešitev. Rezultat velja tudi za piščal, ki je na obeh straneh odprta, le da v tem primeru sinuse nadomeščajo kosinusi.

Kvadratna opna

Najpreprostejši dvodimenzionalni primer nudi kvadratna opna $x \in [0, a]$, $y \in [0, b]$. Amplitudno enačbo zapišemo v kartezičnih koordinatah

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\mathrm{d}y^2} + k^2 A = 0\,. \tag{18.35}$$

Rešitev iščemo z nastavkom $A(x, y) = X(x)Y(y)$. Dobimo $X''/X + Y''/Y = -k^2$. To je možno le, če je vsak izmed obeh členov enak konstanti: $X''/X = -k_x{}^2$ in $Y''/Y = -k_y{}^2$, pri čemer $k_x{}^2 + k_y{}^2 = k^2$. Rešitvi teh dveh enačb sta sinus ali kosinus. Da zadostimo pogoju na mejah $x = 0$ in $y = 0$, izberemo $\sin k_x x$ in $\sin k_y y$. Da zadostimo še pogoju na mejah $x = a$ in $y = b$, pa postavimo $k_x = m\pi/a$ in $k_y = n\pi/b$, $m, n = 1, 2, 3\ldots$ Iskane rešitve so torej

$$A_{mn} = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,, \tag{18.36}$$

Katerakoli izmed teh rešitev, recimo A_{11}, je dobra, prav tako pa katerakoli njihova linearna kombinacija. Frekvenca nihanja znaša

$$\frac{\omega^2}{c^2} = (\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2\,. \tag{18.37}$$

Krožna opna

Za krožno opno $\rho \in [0, a]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ zapišemo amplitudno enačbo v cilindričnih koordinatah, upoštevajoč [17.7]:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + k^2 A = 0\,. \tag{18.38}$$

Izberemo nastavek $A = R(\rho)\Phi(\varphi)$ ter ga vstavimo vanjo. Če dobljeno enačbo pomnožimo še z ρ^2, postane njen drugi člen $(1/\Phi)\mathrm{d}^2\Phi/\mathrm{d}\varphi^2$, torej neodvisen od ρ, zato mora biti enak konstanti, ki jo zapišemo kot $-n^2$. Tako dobimo dve ločeni enačbi:

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} (\rho \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}) + [(k\rho)^2 - n^2]R = 0 \tag{18.39}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + n^2\Phi = 0\,.$$

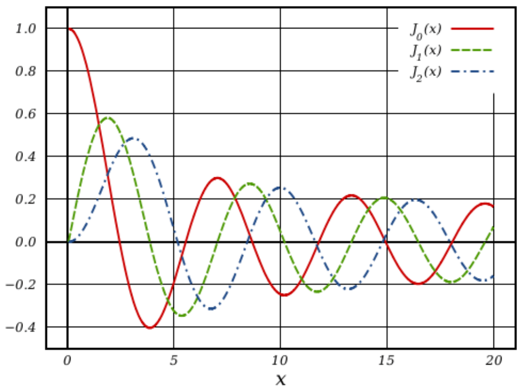
Rešitev druge enačbe je sinus ali kosinus argumenta $n\varphi$. Zanj moramo upoštevati periodični mejni pogoj $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, kar pomeni, da mora biti n celo število $0, 1, 2, 3 \ldots$ in

$$\Phi(\varphi) = \cos n\varphi\,. \tag{18.40}$$

Prvo enačbo polepšamo z vpeljavo spremenljivke $k\rho = t$ v obliko $t^2R'' + tR' + [t^2 - n^2] = 0$. Rešitev iščemo z nastavkom v obliki potenčne vrste $R(t) = t^n \sum c_j t^j$. Vstavimo ga v enačbo in dobimo $\sum (n+j)^2 c_j t^{n+j} + [t^2 - n^2] \sum c_j t^{n+j} = 0$. Koeficiente c_j moramo zdaj tako izbrati, da bo enačba veljala. S precej truda najdemo

$$R(k\rho) = \sum_j^\infty \frac{(-1)^j}{j!(n+j)!} (\frac{k\rho}{2})^{2j+n} = J_n(k\rho)\,. \tag{18.41}$$

Funkcije $J_0, J_1 \ldots$ poimenujemo *cilindrične funkcije*.



Slika 18.3 Cilindrične funkcije kot rešitve amplitudne enačbe v cilindričnih koordinatah. (Anon)

Na robu mora biti vsaka cilindrična funkcija enaka nič. Za funkcijo J_n moramo zato izbrati takšne vrednosti k_{nm}, $m = 1, 2, 3 \ldots$, da $J_n(k_{nm}a) = 0$. Funkcija J_0, na primer, ima prvo ničlo pri 2,4, zato mora biti $k_{01} = 2{,}4/a$. Iskana stojna valovanja na krožni opni so torej

$$A_{nm} = J_n(k_{nm}\rho) \cos n\varphi\,. \tag{18.42}$$

Seveda je rešitev tudi katerakoli njihova linearna kombinacija. Frekvence nihanja pa so $\omega^2 / c^2 = k_{nm}{}^2$.

Krogla

Stojna nihanja na površini in v notranjosti elastične krogle opišemo z amplitudno enačbo v sferičnih koordinatah [17.8]. Rešitev iščemo v obliki $A = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. Pričakujemo izjemno težko delo, saj je bil že izračun za krožno opno zelo zahteven. Zato se ga ne bomo lotili. □

19 Verjetnostni račun

Preštevanje – Poskusi in izidi – Verjetnosti izidov – Verjetnost sestavljenih izidov – Binomska porazdelitev – Vsota slučajnih izidov – Normalna porazdelitev – Povprečje in varianca – Večdimenzijske porazdelitve – Soodvisnost spremenljivk – Vzorčenje in statistika – Merjenje in merske napake – Intervalno ocenjevanje – Preizkušanje domnev – Regresijska analiza – Statistično zavajanje

19.1 Preštevanje

Izbiranja

Nekatere stvari v življenju lahko naredimo na več načinov. Dober primer je kosilo v restavraciji. Na jedilniku je zapisano: 2 predjedi, 3 glavne jedi in 2 poobedka. Izberemo lahko po eno jed iz vsake skupine. Koliko različnih kosil si lahko privoščimo? Očitno $N = 2 \cdot 3 \cdot 2$. Nasploh velja: če lahko najprej naredimo N_1 izbir; nato – neodvisno od tega, kaj smo izbrali – novih N_2 izbir; in tako naprej, je različnih izbirnih nizov $N = N_1 \cdot N_2 \dots N_n$. Kaže, da sta izbiranje in preštevanje izbir pomembni opravili. Poskusimo torej raziskati kaj več o tem.

Permutacije

Imejmo niz petih različnih črk $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e})$. Ta niz lahko premešamo; ena izmed premešav je, na primer, $(\mathrm{b}, \mathrm{a}, \mathrm{c}, \mathrm{e}, \mathrm{d})$. Rečemo, da je to *permutacija* osnovnega niza. Koliko pa je takih različnih permutacij? Na prvo mesto permutacije lahko postavimo eno izmed 5 črk. Ostanejo še štiri. Na drugo mesto postavimo eno izmed preostalih 4 črk. Tako nadaljujemo in dobimo $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$ različnih nizov črk. Na splošno lahko torej iz n-terice različnih elementov naredimo P_n njenih permutacij:

$$P_n = n!\,. \tag{19.1}$$

Če vseh n elementov ni različnih, ampak je med njimi r enakih, je različnih permutacij $r!$-krat manj: $P_n{}^r = n!/r!$.

Variacije

Iz niza petih črk $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e})$ potegnimo poljubne tri črke. Trojke iz istih črk, a z različnim vrstnim redom, obravnavamo kot različne: $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ je torej različna od $(\mathrm{b}, \mathrm{a}, \mathrm{c})$. Rečemo, da so to *variacije* dolžine 3 iz osnovnega niza. Koliko različnih variacij pa lahko naredimo? Na prvo mesto v trojki lahko postavimo eno izmed 5 črk. Preostanejo štiri. Na drugo mesto postavimo eno izmed preostalih 4 črk. Tako nadaljujemo in dobimo $N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 5!/(5-3)!$ različnih trojk. Na splošno iz n-terice različnih elementov lahko naredimo $V_n{}^r$ različnih variacij dolžine r:

$$V_n{}^r = \frac{n!}{(n-r)!}\,. \tag{19.2}$$

Kombinacije

Koliko je pa različnih trojk, pri čemer obravnavamo trojke iz istih črk, a z različnim vrstnim redom, kot enake: $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ je enaka (b, a, c)? Rečemo, da so to *kombinacije* dolžine 3 iz osnovnega niza. Očitno je število kombinacij manjše kot število variacij in sicer za tolikokrat, kolikor je permutacij niza z dolžino 3, torej $N = 5!/(5-3)!3!$. Na splošno lahko torej iz n-terice različnih elementov naredimo ${C_n}^r$ različnih kombinacij dolžine r:

$$ {C_n}^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,. \tag{19.3} $$

19.2 Poskusi in izidi

Igralna kocka

Ljudje, ki nimajo kaj boljšega početi, radi mečejo kocke. Takšna *igralna kocka* ima na svojih ploskvah narisane pike. Vsaka ploskev ima svoje število pik: od ena do šest. Ko kocko vržemo na mizo, se zakotali, ustavi in njena zgornja ploskev pokaže določeno število pik. Vnaprej nikoli ne vemo, koliko jih bo padlo. Ljudje stavijo denar, kaj se bo pri metu zgodilo, in tisti, ki ugane, pobere stave. Te so lahko raznovrstne: padla bo trojka; ne bo padla trojka; padlo bo sodo število; v dveh zaporednih metih bo padla vsaj ena šestica; pri hkratnem metu dveh kock bo padlo skupaj deset pik; in še mnogo drugega.

Slika 19.1 Igralni kocki. Izid meta ene ali več kock je slučajna spremenljivka. (Anon)

Poskus in izid

Na met kocke lahko pogledamo kot na *poskus*, ki ima šest možnih *elementarnih izidov*: število pik od ena do šest. Vnaprej ne vemo, kakšen bo izid predstoječega poskusa, zato rečemo, da je tak izid *slučajna spremenljivka*, ki lahko zavzame celoštevilčne vrednosti med ena in šest. Pričakujemo pa, da se bo v velikem številu poskusov (torej metov), pojavil vsak izmed šestih izidov v približno enakem deležu in sicer v eni šestini primerov, če je le kocka "poštena". Pravzaprav je res obratno: če se vsak izid pojavlja enako pogosto, rečemo, da je kocka poštena.

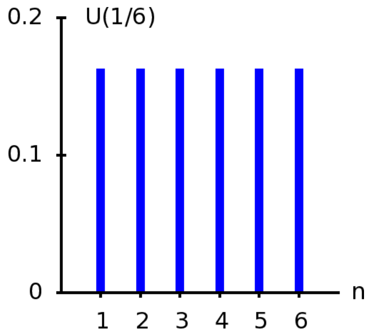
19.3 Verjetnosti izidov

Pogostost izida

Pa izmerimo, kako pogosto se pojavljajo posamični izidi za dotično kocko! Kar naprej jo mečimo in beležimo vsakokratne izide, to je vrednosti slučajne spremenljivke x. Ta spremenljivka lahko zavzame vrednosti $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ … $x_6 = 6$. Ko vržemo kocko 10-krat, se izid x_3, na primer, pojavi 2-krat, torej v 2/10 poskusov. Pri N poskusih se nasploh izid x_k pojavi N_k-krat. Razmerje N_k/N se z vsakim nadaljnjim metom spremeni. V začetku se od meta do meta močno spreminja, kasneje pa se čedalje bolj zgošča okrog neke limitne vrednosti. Vsak izid se zgošča okrog svoje limite. S tem je definirana njegova *relativna frekvenca* oziroma *pogostost*

$$P_k = \lim_{N\to\infty} \frac{N_k}{N} \,. \tag{19.4}$$

Pri pošteni kocki, na primer, izmerimo v 1000 metih $P_3 = 0{,}17 \approx 1/6$ in enako za ostale izide. Pogostosti elementarnih izidov prikažemo s tabelo ali grafom – *frekvenčno porazdelitvijo* izidov.



Slika 19.2 Frekvenčna porazdelitev izidov pri metu poštene kocke. Vsak izid n se pojavlja z enako pogostostjo: porazdelitev je enakomerna.

Iz definicije je jasno, da mora za vsakršno frekvenčno porazdelitev veljati

$$\sum P_k = 1 \,. \tag{19.5}$$

Rečemo, da so porazdelitve *normirane*.

Verjetnost izida

Čim večja je pogostost kakega izida v množici poskusov, tem bolj "verjetno" se nam zdi, da bo predstoječi posamični poskus pokazal ravno ta izid. Povedano izkoristimo za kvantitativno definicijo verjetnosti: *verjetnost* kakega izida pri posamičnem poskusu, to naj bo njegova relativna frekvenca v množici poskusov pri enakih "delovnih" pogojih. Pogostost se torej nanaša na množico poskusov, verjetnost pa na posamičen poskus. Izraz "verjetnost", kakor smo ga definirali in kakor ga hočemo uporabljati, ni nič drugega kot sinonim za izraz "pogostost". Verjetnosti so decimalna števila med 0 in 1.

19.4 Verjetnost sestavljenih izidov

Unija izidov

Kakšna je verjetnost, da pri metu kocke pade x_3 ali x_5? Da bomo bolj splošni, recimo: kakšna je verjetnost, da se v enem poskusu pokaže elementarni izid A ali elementarni izid B, torej vsaj eden izmed obeh? To je seveda tudi svojevrsten izid poskusa. Poimenujemo ga *unija* dveh elementarnih izidov ter ga označimo kot izid $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. Iz definicije verjetnosti neposredno sledi

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) \,. \tag{19.6}$$

Verjetnost, da se pri enem poskusu pokaže eden ali drugi od možnih elementarnih izidov, je enaka vsoti verjetnosti obeh posamičnih izidov. Da poštena kocka pokaže x_3 ali x_5, se zato zgodi z verjetnostjo $1/6 + 1/6 = 2/6$.

Pravilo o seštevanju verjetnosti ne velja le za dva elementarna izida, ampak tudi za več njih. Prav tako ne velja le za elementarne izide, temveč za kakršnekoli izide, ki se medsebojno izključujejo, to je, če se pokaže eden, se ne more hkrati pokazati še drugi. Dva takšna izključujoča se izida pri metu kocke sta, na primer: pade sodo število pik (x_2 ali x_4 ali x_6) in pade trojka (x_3). Verjetnost prvega izida je 1/2, verjetnost drugega je 1/6, in verjetnost njune unije, torej enega ali drugega, je $1/2 + 1/6 = 4/6$.

Presek izidov

Kakšna je verjetnost, da pri metu kocke pade x_3 in pri naslednjem metu x_5? Da bomo bolj splošni, recimo: kakšna je verjetnost, da se v prvem poskusu pokaže elementarni izid A in pri drugem poskusu elementarni izid B? To je tudi svojevrsten izid (dvojnega) poskusa. Poimenujemo ga *presek* obeh izidov ter ga označimo kot izid $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$. Iz definicije verjetnosti neposredno sledi

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})\,. \tag{19.7}$$

Verjetnost, da se pri prvem poskusu pokaže izid A in pri drugem izid B, je enaka produktu verjetnosti obeh posamičnih izidov. Seveda velja vse povedano tudi za več poskusov in za izide, ki niso elementarni. V vsakem primeru pa morajo biti poskusi medsebojno neodvisni, to je, izid drugega poskusa ne sme biti odvisen od izida prvega poskusa. Da poštena kocka pokaže prvič x_3 in druga x_5, se zato zgodi z verjetnostjo $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

19.5 Binomska porazdelitev

Verjetnost, da pri metu kocke pade šestica, torej x_6, naj bo 1/6. Verjetnost, da ne pade šestica, pa je zato $1 - 1/6 = 5/6$. Zanima nas, kolikšne so verjetnosti, da v 5 metih pade šestica natanko 0-krat, 1-krat … 5-krat. Poskusi so sedaj petorke metov, opazovani izid pa število šestic, n, v vsaki petorki. Mečemo petorke v nedogled. Sproti štejemo, kolikokrat vsebujejo 0 šestic, 1 šestico in tako naprej. S tem so čedalje natančneje določene relativne frekvence P_n. Hočemo jih izračunati.

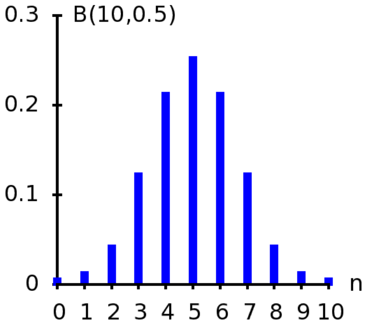
Število uspehov v vrsti poskusov

Bolj splošno lahko nalogo postavimo takole. Delamo take poskuse, ki imajo le dva izida, "uspeh" T in "neuspeh" F. Verjetnost za uspeh naj bo p in za neuspeh $1 - p = q$. Kakšna je verjetnost, da je v N poskusih natanko n uspešnih?

En način, na katerega se lahko pojavi $n = 2$ uspehov v $N = 5$ poskusih, je TTFFF. Verjetnost tega izida znaša $p \cdot p \cdot q \cdot q \cdot q = p^n q^{N-n}$. Vendar obstajajo še drugi načini, na primer FFFTT in TFFFT in še mnogi. Vsak izmed njih je enako verjeten, ker so zaporedni poskusi med seboj neodvisni. Verjetnosti vseh moramo sešteti. Koliko različnih N-teric pa pravzaprav lahko sestavimo iz n črk T in iz $(N - n)$ črk F? Toliko, kolikor je permutacij N elementov, od katerih je n enakih in $(N - n)$ tudi enakih: $N!/n!(N - n)!$. Iskana verjetnost je torej:

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n (1-p)^{N-n} = \mathrm{B}_{N,p}(n)\,. \tag{19.8}$$

To je *binomska porazdelitev* (J. BERNOULLI). Pove nam, kakšna je verjetnost, da v N poskusih zadenemo natanko n uspešnih izidov, če je verjetnost takega izida pri posamičnem poskusu enaka p. Da v petih metih kocke pade natanko ena šestica, se torej zgodi z verjetnostjo 0,16.



Slika 19.3 Binomska porazdelitev. Prikazana je verjetnost, da v deseterici metov poštenega kovanca pade glava $0, 1, 2 \ldots 10$-krat.

Vsota verjetnosti vseh možnih izidov pri enem poskusu (N-terici metov) mora biti enaka ena, to je, porazdelitev verjetnosti mora biti normirana. Malo nas skrbi, ali to za izpeljano binomsko porazdelitev res drži. Eksplicitno zapisana vsota $\sum \mathrm{B}_{N,p}(n)$ znaša ${C_N}^0\, q^n + {C_N}^1\, pq^{n-1} + \ldots\, {C_N}^N\, p^n$. To pa ni nič drugega kot razviti binom $(q+p)^n$, torej $((1-p)+p)^n$, torej $1^n = 1$. Skrb je odveč, porazdelitev je normirana.

Slepo reševanje testov

Lep primer "uspešnega" poskusa je slepo reševanje šolskih testov. Učenec dobi 5 vprašanj. Ob vsakem so navedeni 3 odgovori in samo eden izmed njih je pravilen. Vsi odgovori se zdijo učencu enako verjetni, zato na slepo izbere enega. Verjetnost, da je prav uganil, je zato 1/3. Število uspehov, ki jih tako doseže, znaša od 0 do 5. Verjetnost, da doseže 4 ali 5 uspehov, je $\mathrm{B}_{5,1/3}(4) + \mathrm{B}_{5,1/3}(5) \approx 0{,}045$. Kaj takega se torej zgodi enkrat v $1/0{,}045 \approx 20$ testih.

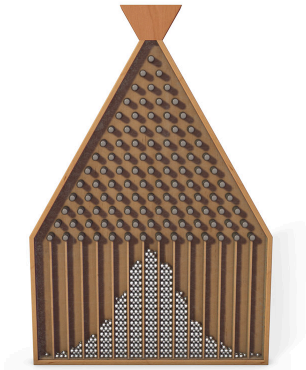
Namesto da en učenec slepo opravi neskončno testov, si lahko mislimo neskončno učencev, ki na slepo opravijo en test. Frekvenčni porazdelitvi po rezultatih sta v obeh primerih enaki. Če je torej potrebnih ~ 20 testov, da en učenec slučajno doseže štiri ali pet točk, to slučajno uspe enemu izmed množice ~ 20 učencev.

Še beseda o slepem izbiranju. Izbira enega izmed množice elementov, recimo enega izmed treh odgovorov, je slepa, če ima vsak element enako verjetnost, da je izbran. Dober način za to je naslednji: vse elemente oštevilčimo, številke zapišemo na listke in jih zapremo v čim bolj enake kroglice, vržemo kroglice v vrteč se boben ter čez nekaj časa z zavezanimi očmi potegnemo iz njega eno kroglico. Za prvo silo, če je elementov malo, zadostujejo kar prepognjeni listki in navaden klobuk. Da opisana načina res zagotavljata enako verjetnost izbire, pa se na koncu koncev ne moremo prepričati nič drugače, kot da ju dejansko preizkusimo s štetjem izidov.

19.6 Vsota slučajnih izidov

Ožebljena deska

Na met in kotaljenje kocke učinkuje okolje z množico vplivov, ki jih ne poznamo in na katere je izid silno občutljiv. Majhna sprememba v začetnih in vmesnih pogojih, pa je rezultat že čisto drugačen. To nas navede na misel, da bi vpliv okolja na gibanje telesa lahko preučevali tudi tako, da bi po klancu spuščali kroglico, nanjo vplivali z gozdom zabitih žebljičkov, in gledali, kje na dnu bo pristala. Najpreprostejša je deska z N vrsticami žebljičkov, ki so med sabo razmaknjeni za premer kroglice, pri čemer je vsaka druga vrsta zamaknjena vstran za polovčno razdaljo med žebljički. To je ožebljena deska.



Slika 19.4 Ožebljena deska. Ilustracija deske, ki jo je uporabljal F. Galton. Spuščene kroglice se razvrstijo po binomski porazdelitvi. (Eterea Estudios)

Porazdelitev odmikov

Kroglico spustimo z vrha. Na prvi vrstici se odbije levo ali desno, na drugi prav tako in s cikcakanjem nadaljuje vse do dna. Verjetnost za odboj v desno naj bo vsakokrat p in za odboj v levo $q = 1 - p$. Ti dve verjetnosti sta ponavadi enaki. V N trkih opravi kroglica n korakov v desno in $N-n$ korakov v levo. Gibanje kroglice lahko torej opišemo kot N-kratni met kocke in štetje "ugodnih" izidov. Ugodni izid pri spuščanju kroglice je pač korak v (recimo) desno. Kolikokrat se bo kroglica premaknila v desno v N trkih, je torej opisano z binomsko porazdelitvijo $\mathrm{B}_{N,p}(n)$.

Neto premik v desno, m, je enak razliki premikov v desno in levo: $m = n - (N - n)$. Izrazimo n z m in ga vstavimo v binomsko porazdelitev, pri čemer izberemo še $p = q = 1/2$, pa dobimo:

$$\mathrm{B}_{N,1/2}(m) = \frac{N!}{[(N+m)/2]!\,[(N-m)/2]!}\left(\frac{1}{2}\right)^N. \tag{19.9}$$

To je verjetnostna porazdelitev leg, ki jih doseže kroglica na dnu, oziroma delež kroglic, ki pristanejo v teh legah. Kadar izraza $N + m$ ali $N - m$ nista soda, bi morali računati faktorielo ulomnega števila. Kaj to pomeni, ne vemo in bo morda treba še primerno definirati. Zaenkrat bomo pri konkretnem računanju aproksimirali $(n + 0{,}5)! \sim n!(n + 1)/2$.

Dolga ožebljena deska

Če je ožebljena deska dolga, postane porazdelitev simetrično zvonasta. Kakšna je ta porazdelitev, ko raste N čez vse meje, pri čemer se omejimo še na področje $m \ll N$?

Faktoriele velikih števil so neznansko velike, zato porazdelitev najprej logaritmiramo. Nastane vsota logaritmov. Vsak člen oblike $\ln n!$ aproksimiramo z integralom: $\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ldots \ln n \approx \int_1^n \ln x \, dx$. Tak integral znaša $(x \ln x - x)\,|_1{}^n$, torej – ko zanemarimo še 1 v primeri z n – $\ln n! \approx n \ln n - n$. Nato pridobljene izraze $\ln(1 + m/N)$ aproksimiramo s kratko potenčno vrsto: $m/n - m^2/2N^2$. Dobimo $\ln \mathrm{B} \approx -m^2/2N$, torej

$$\mathrm{B}_{N,1/2}(m) \approx A \cdot \mathrm{e}^{-m^2/2N}. \qquad (19.10)$$

Konstanto A smo pritaknili, ker sumimo, da smo zaradi številnih aproksimacij zapravili normiranost izhodiščne porazdelitve. To pomeni, da moramo to konstanto zdaj naknadno določiti iz pogoja normiranosti, torej $A = 1 / \int \exp(-m^2/2N)\, \mathrm{d}m$. S tem bo *normalna aproksimacija* k binomski porazdelitvi popolnoma določena.

Normalni integral

Kako izračunati *normalni integral* $I = \int \exp(-x^2)\, \mathrm{d}x$ med $-\infty$ in $+\infty$? Takole: $I^2 = \int \exp(-x^2)\, \mathrm{d}x \cdot \int \exp(-y^2)\, \mathrm{d}y = \int\int \exp -(x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. To je ploskovni integral v kartezičnih koordinatah. Zapišemo ga v polarnih koordinatah $x^2 + y^2 = r^2$ in $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, preoblikujemo $r\mathrm{d}r = {}^1/_2\, \mathrm{d}(r^2)$ in dobimo integral z navadno eksponentno funkcijo $I^2 = {}^1/_2 \int\int \exp(-t)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}\varphi$. Za meji med 0 in ∞ ter med 0 in 2π ga zlahka izračunamo in znaša π. Koren iz tega je torej iskani normalni integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,. \qquad (19.11)$$

S tem je normalizacijska konstanta določena: $A = 1/\sqrt{(2\pi N)}$.

19.7 Normalna porazdelitev

Gostota verjetnosti

Ko z astrolabom določamo višino zvezde ob kulminaciji, se izmerki med seboj bolj ali manj razlikujejo. Če odmislimo *sistematične napake* – ko uporabimo nenatančen kotomer ali ko narobe odčitamo številko z njega ali ko celo merimo napačno zvezdo – preostane še množica *slučajnih napak* – zaradi nihanje astrolaba, migotanja ozračja in še kaj. Podobno se dogaja pri merjenju drugih količin. Izmerke takšne zvezne količine x razvrstimo v primerno široke razrede $x \pm \mathrm{d}x/2$ in preštejemo, koliko izmerkov $\mathrm{d}N(x \pm \mathrm{d}x/2)$ pade v vsakega. S tem je določena njihova frekvenčna porazdelitev

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{d}N(x \pm \mathrm{d}x/2)}{N} = p(x)\,, \qquad (19.12)$$

ki je seveda normirana:

$$\int \mathrm{d}P = \int p(x)\, \mathrm{d}x = 1\,. \qquad (19.13)$$

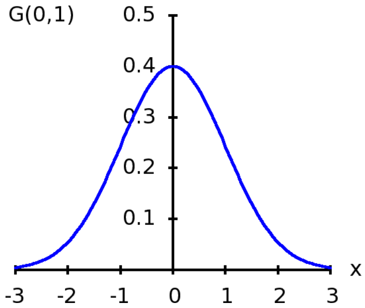
Pogledano z drugimi očmi: izmerek količine je slučajna spremenljivka in (limitna) frekvenčna porazdelitev izmerkov je njena gostota verjetnosti.

Normalna porazdelitev

Ko narišemo gostoto verjetnosti za izmerjene kulminacije ali kako drugo tovrstno količino, opazimo, da ima lepo zvonasto obliko, ki je na moč podobna normalni binomski aproksimaciji, le da je zvezna (19.10). Zato definiramo *normalno porazdelitev* kot (GAUSS)

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} = \mathrm{G}_{\mu,\sigma}(x)\,. \tag{19.14}$$

Parameter μ pove, kje leži vrh porazdelitve in parameter σ določa širino vrha. Kot kvadrat ga pišemo zato, da ima enake dimenzije kot slučajna spremenljivka. Sorazmernostna konstanta poskrbi za normiranost.



Slika 19.5 Normalna porazdelitev. Prikazana je porazdelitev s povprečjem 0 in deviacijo 1.

Dejstvo, da so kakšni izmerki porazdeljeni normalno, nam sporoča, da nanje vpliva – kakor na gibanje kroglice po žebljasti deski – množica med seboj neodvisnih in nasprotujočih si drobnih vplivov. Pravzaprav je normalna porazdelitev celo neke vrste zagotovilo, da izmerki niso obremenjeni s sistematičnimi, ampak zgolj s slučajnimi napakami.

Standardna porazdelitev

S porazdelitvijo verjetnosti po spremenljivki x je določena tudi porazdelitev po vsaki drugi, z njo povezani spremenljivki $z(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\,. \tag{19.15}$$

Če so izmerki x porazdeljeni kot $\mathrm{d}P/\mathrm{d}x = \mathrm{G}_{\mu,\sigma}(x)$, potem so ustrezajoči *normalizirani izmerki*

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \tag{19.16}$$

porazdeljeni kot $\mathrm{d}P/\mathrm{d}z = (\mathrm{dG}/\mathrm{d}x)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}z)$, torej takole:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \cdot \mathrm{e}^{-z^2/2} = \mathrm{G}_{0,1}(z). \tag{19.17}$$

To je normalna porazdelitev z vrhom pri $\mu = 0$ in s širino $\sigma = 1$. Poimenujemo jo *standardna porazdelitev*. Verjetnost, da bo slučajni izmerek x ležal na intervalu med x_1 in x_2, je zato enaka verjetnosti, da bo normalizirani izmerek z ležal na intervalu med $z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma$ in $z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$. Ta verjetnost je enaka integralu $\mathrm{G}_{0,1}(z)$ med navedenima mejama. Za konkretno računanje potrebujemo še tabelirane vrednosti $\mathrm{G}_{0,1}(z)$ in njenega integrala

$$\int_0^z \mathrm{G}_{0,1}(z)\,\mathrm{d}z = \mathrm{erf}(z)\,. \tag{19.18}$$

Slednjega izračunamo z razvojem podintegralske funkcije $\exp t$, $t = -z^2/2$ v potenčno vrsto $1 + t + t^2/2! + \ldots$ in jo členoma integriramo:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n!(2n+1)}\,. \tag{19.19}$$

Tako pridelamo tabelo

Tabela 19.1. Standardna porazdelitev in ploščina pod njo.

z	$\mathrm{G}_{0,1}$(z)	erf(z)
0.0	0,40	0,00
0.5	0,35	0,19
1.0	0,24	0,34
1.5	0,13	0,43
2.0	0,05	0,48
2.5	0,02	0,49
3.0	0,00	0,50

Verjetnost, da leži izmerek x znotraj intervala $\mu \pm \sigma$, je torej $2 \cdot 0{,}34 = 0{,}68$. Na intervalu $\pm 2\sigma$ leži z verjetnostjo $2 \cdot 0{,}48 = 0{,}95$. In na intervalu $\pm 3\,\sigma$ ga najdemo (skoraj) z gotovostjo $2 \cdot 0{,}50 = 1$.

19.8 Povprečje in varianca

Povprečje

Ko zaporedno zložimo N palic z dolžinami $l_1, l_2 \ldots l_N$, dobimo palico dolžine L. Enako dolgo sestavljeno palico dobimo tudi z N enakimi palicami dolžine $\bar{l}$, torej $N \cdot \bar{l} = \sum l_n$. S tem je definirana povprečna dolžina uporabljenih N palic: $\bar{l} = (1/N) \sum l_n$. Če je palic veliko in so nekatere med seboj enake, raje računamo takole: $\bar{l} = (1/N) \sum N_k\, l_k = \sum (N_k/N)\, l_k = \sum f_k\, l_k$. Keficienti f_k so relativne frekvence palic enake dolžine. Kar velja za palice in njihove dolžine, posplošimo za poljubno slučajno spremenljivko x: njeno *povprečno vrednost* v limitni množici poskusov, ko $f_k \to P_k$, definiramo kot $\langle x \rangle = \sum x_k\, P_k = \mathrm{Ave}(x)$. Če je spremenljivka zvezna, pa velja

$$\langle x \rangle = \int x\, p(x)\, \mathrm{d}x. \tag{19.20}$$

Vsota uteženih odmikov od povprečja je enaka nič: $\int (x - \langle x \rangle)\, \mathrm{d}P = \int x\, \mathrm{d}P - \langle x \rangle \int \mathrm{d}P = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$.

Varianca in deviacija

Palice, iz katerih določamo povprečje, se med seboj bolj ali manj razlikujejo. Kolikšno je to razlikovanje, povemo s povprečnim kvadratnim odmikom od povprečja: $s_l{}^2 = (1/N)\sum(l_n - \bar{l})^2$ oziroma $s_l{}^2 = \sum f_k\,(l_k - \bar{l})^2$. Kar velja za dolžino palic, posplošimo na poljubno slučajno spremenljivko: njeno *varianco* definiramo kot $\sigma_x{}^2 = \sum(x_k - \langle x\rangle)^2 P_k = \mathrm{Var}(x)$. Koren iz variance, σ_x, pa poimenujemo *deviacija*. Za zvezno spremenljivko velja:

$$\sigma_x{}^2 = \int (x - \langle x\rangle)^2\, p(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{19.21}$$

Integral lahko preoblikujemo: kvadriramo podintegralski binom, integriramo dobljene člene in pridelamo izraz

$$\sigma_x{}^2 = \int x^2\,p(x)\,\mathrm{d}x - \left(\int x\,p(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\,. \tag{19.22}$$

Izračun povprečij in varianc

Če so porazdelitve podane s tabelo, računamo njihova povprečja in variance s konkretnimi številskimi vrednostmi. Če so podane z enačbo, pa lahko računamo s simboli. Izračunajmo povprečja in variance tistih porazdelitev, ki smo jih že spoznali!

Za enakomerno diskretno porazdelitev (pošteno kocko) velja $\langle x\rangle = \sum n\cdot(1/6) = 3{,}5$ in $\sigma_x{}^2 = \sum n^2\cdot(1/6) - (3{,}5)^2 = (1{,}7)^2$. Na interval $\langle x\rangle \pm \sigma_x$ padejo vrednosti 2, 3, 4 in 5, to je, 2/3 vseh vrednosti.

Za binomsko porazdelitev že poznamo njeno vsoto: $\sum C_N{}^n\,p^n\,q^{N-n} = (p+q)^N$. Če bi bil vsak člen vsote pomnožen s faktorjem n, bi nastala vsota opisovala povprečje. Kako pridelati faktorje n? Levo in desno stran odvajamo na p in nato množimo s p. Na levi nastane povprečje $\langle x\rangle = \sum n\,C_N{}^n\,p^n\,q^{N-n}$ in na desni izraz $np\,(p+q)^{N-1}$. Ko v njem upoševamo $q = 1-p$, najdemo $\langle x\rangle = Np$. Podobno izračunamo varianco – izhodiščno enačbo dvakrat odvajamo na p in nato pomnožimo s p^2. Tako dobimo $\sigma_x{}^2 = Npq$.

Pri računanju povprečja in variance normalne porazdelitve moramo izračunati integrala oblike $\int x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ in $\int x^2\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$. Prvega izračunamo tako, da spravimo x pod diferencial, s čimer prevedemo integral v lahko rešljivo obliko $\int\exp(-t)\,\mathrm{d}t$. Drugega pa se lotimo po delih: $u = x$, $\mathrm{d}v = x\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$ in ga s tem prevedemo ne integral za povprečje. Dobimo $\langle x\rangle = \mu$ in $\sigma_x{}^2 = \sigma^2$.

Katerokoli porazdelitev, ki ima povprečje $\langle x\rangle$ in varianco $\sigma_x{}^2$, lahko aproksimiramo z normalno porazdelitvijo, ki ima isto povprečje in varianco. Ujemanje je bolj ali manj dobro. Normalna aproksimacija enakomerne porazdelitve je prav slaba, binomske pa naravnost odlična, če je le njen parameter N dovolj velik. Nekaj konkretnih grafov pokaže, da je ujemanje precej dobro že pri $N = 10$.

19.9 Večdimenzijske porazdelitve

Pri nadaljnji raziskavi bo očitno nerodno uporabljati dve različni pisavi, eno za diskretne primere in drugo za zvezna primere. Odločimo se, da bomo uporabljali le pisavo za zvezno spremenljivko, ki pa jo v bomo primeru diskretnosti razumeli takole: $p(x)\mathrm{d}x \to P_k$ in $\int p(x)\mathrm{d}x \to \sum P_k$.

Dve spremenljivki

Pri streljanju s puško v tarčo je lega zadetka slučajna spremenljivka.

Slika 19.6 Tarča. Lega zadetka je slučajna spremenljivka. (Anon)

Vsak zadetek ima svoj vodoravni odmik x in navpični odmik y od središča tarče. Gostoto verjetnosti za zadetek okrog točke (x,y), to je na intervalu $(x \pm \mathrm{d}x/2, \mathrm{y} \pm \mathrm{d}y/2)$, definiramo s številom strelov $\mathrm{d}N$ v ta interval, deljenim s številom vseh strelov N:

$$\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{d}N(x \pm \mathrm{d}x/2, y \pm \mathrm{d}y/2)}{N} = p(x,y). \tag{19.23}$$

Predstavljamo si jo kot ploskev oziroma kot hrib, ki je ponekod bolj, drugod manj visok. Višina hriba na nekem mestu pove, kakšna je tamkajšnja pogostost oziroma verjetnost zadetkov.

Robne verjetnosti

Verjetnost za vodoravni izid okrog x, neodvisno od tega, kakšen je navpični izid, je vsota

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \int p(x,y)\,\mathrm{d}y = u(x)\,. \tag{19.24}$$

Predstavljamo si, da smo ves hrib stlačili na vodoravno os, vzdolž katere se je naredil kumulativni profil $u(x)$. Podobno velja tudi za tlačenje hriba na navpično os, ko nastane kumulativni profil $v(y)$.

Pogojne verjetnosti

Kolikšna pa je verjetnost za vodoravni izid okrog x pri pogoju, da je navpični izid okrog y? Vzdolž ozkega vodoravnega pasu okrog $y = \mathrm{const}$ definiramo verjetnost

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\Big|_y = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{d}N(x \pm \mathrm{d}x/2)}{N(y \pm \mathrm{d}y/2)} = p(x\,|\,y). \tag{19.25}$$

Rekli bomo, da je to *pogojna verjetnost* za izid okrog x glede na izid okrog y. Predstavljamo si jo kot profil hriba vzdolž vodoravnega prereza. Seveda velja podobno tudi za pogojne verjetnosti vzdolž navpičnih pasov, $p(y\,|\,x)$. Iz definicij verjetnosti, robne verjetnosti in pogojne verjetnosti sledi

$$p(x,y) = u(x)\,v(y|x)\,. \tag{19.26}$$

Res. Verjetnost za strel okrog (x,y) je enaka robni verjetnosti za strel okrog x, pomnoženi z ustrezno pogojno verjetnostjo za strel okrog y. Kadar je slučajna spremenljivka y neodvisna od x, je njena pogojna verjetnost $v(y|x)$ kar enaka "nepogojni" verjetnosti $v(y)$ in velja že znano produktno pravilo (19.7)

$$p(x, y) = u(x)\, v(y)\,. \tag{19.27}$$

Dober primer je streljanje v tarčo, če nastane gostota $\exp(-r^2)$, to je $\exp(-x^2 - y^2)$, torej $\exp(-x^2) \cdot \exp(-y^2)$. Strelca zanaša v levo in desno enako, neodvisno od tega, kako ga zanaša gor in dol, in obratno.

19.10 Soodvisnost spremenljivk

Povprečje in varianca

Za vsako spremenljivko posebej lahko definiramo njeno povprečje in varianco. Za spremenljivko x tako velja:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int\!\!\int x\, p(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ {\sigma_x}^2 &= \int\!\!\int (x - \langle x \rangle)^2\, p(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{19.28}$$

Očitno sta to povprečje in varianca robne verjetnosti: $\langle x \rangle = \int x\, u(x)\, \mathrm{d}x$ in ${\sigma_x}^2 = \int (x - \langle x \rangle)^2\, u(x)\, \mathrm{d}x$. Podobno velja za spremenljivko y.

Kovarianca in korelacija

Sama se ponuja še mešana količina

$$\sigma_{xy} = \int\!\!\int (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle)\, p(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,. \tag{19.29}$$

Poimenujemo jo *kovarianca*. Pričakujemo, da na nek način pove, kako močno sta spremenljivki med seboj odvisni. Preverimo to domnevo! Če sta spremenljivki neodvisni, torej če $p(x) = u(x)v(y)$, se kovariantni integral zapiše kot produkt dveh integralov, od katerih je vsak enak nič, torej je tudi kovarianca enaka nič. Če sta spremenljivki natanko sorazmerni, torej $y = kx$, so odmiki od povprečij maksimalni in koviariantni integral se reducira v $k{\sigma_x}^2$ oziroma v $(1/k){\sigma_y}^2$. Domneva je torej potrjena. Zato je smiselno definirati

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\,, \tag{19.30}$$

to je *korelacijski koeficient* dveh spremenljivk. Koeficient očitno leži med vrednostima -1 in 1. Čim večja je njegova absolutna vrednost, tem tesnejša je medsebojna odvisnost spremenljivk.

19.11 Vzorčenje in statistika

Populacija in vzorci

Povprečje in varianco smo definirali za neskončno veliko množico poskusov oziroma opazovanj oziroma meritev, to je na neskončni (ali zelo veliki) *populaciji*. Rekli bomo, da sta to *populacijska parametra*. Določimo ju pa seveda lahko le iz končnega *vzorca*; tedaj jima bomo rekli *vzorčni statistiki*.

Vzorčne statistike so seveda le približek k ustreznim populacijskim parametrom. Če je vzorec velik in slepo izbran, pričakujemo, da je ujemanje dobro. Pojavi se vprašanje, kako točne so takšne ocene, to je, kolikšne napake pri tem zagrešimo. Poskusimo to narediti za povprečje!

Ko opravimo N poskusov in zabeležimo njihove izide, s tem iz neskončne populacije poskusov izberemo končni vzorec. Za ta vzorec izračunamo povprečje $\bar{x}$. Pri kakem drugem vzorcu bi dobili drugačno povprečje. Mislimo si, da vzorčenje kar naprej ponavljamo. Dobimo neskončno populacijo povprečij. Kakšna je njihova povprečna vrednost $\langle\bar{x}\rangle$? In kakšna je njihova varianca ${\sigma_{\bar{x}}}^2$?

Povprečje povprečij

Na izmerjene vzorčne vrednosti $x_1 \ldots x_N$ lahko pogledamo kot na uresničitev N slučajnih, med seboj neodvisnih spremenljivk $X_1 \ldots X_N$ iz osnovne populacije. Vse so porazdeljene tako, kot osnovna spremenljivka X. Spremenljivka X_1 je pri vzorčenju pač pokazala vrednost x_1, pri drugem vzorcu bi pa pokazala kaj drugega. Podobno velja za druge spremenljivke. Izmerjeno povprečje $\bar{x}$ pa je potem uresničitev slučajne spremenljivke $\bar{X} = (1/N)\sum X_n$.

Kakšno je torej povprečje vzorčnih povprečij $\langle\bar{X}\rangle = \mathrm{Ave}(X_1 + \ldots X_N)/N)$? Izpostavimo faktor $1/N$ izven povprečja; povprečje vsote je vsota povprečij; povprečje X_n je povprečje X; in dobimo:

$$\langle\bar{X}\rangle = \langle X\rangle\,. \tag{19.31}$$

Povprečje vzorčnih povprečij je torej enako populacijskemu povprečju. To je dobro.

Varianca povprečij

In kakšna je varianca vzorčnih povprečij ${\sigma_{\bar{X}}}^2 = \mathrm{Var}((X_1 + \ldots X_N)/N)$? Izpostavimo faktor $1/N$ izven variance, pri čemer postane $(1/N)^2$; varianca vsote je vsota varianc; varianca X_n je varianca X; in dobimo:

$${\sigma_{\bar{X}}}^2 = \frac{{\sigma_X}^2}{N}\,. \tag{19.32}$$

Vzorčna povprečja se torej stiskajo okrog populacijskega povprečja z N-krat manjšo varianco, kot je varianca posamičnih spremenljivk. Tudi to je dobro.

Porazdelitev povprečij

Vzorčno povprečje je (normirana) vsota N neodvisnih slučajnih spremenljivk z isto porazdelitvijo. To močno spominja na pot kroglice po ožlebljeni deski: ena pot, ki jo kroglica ubere, je en vzorec z N spremenljivkami, njihova vsota pa je končni odmik kroglice na dnu. Spremenljivke so "binomske", imajo samo dva izida. Vsote velikega števila binomskih spremenljivk se torej porazdelijo normalno. Morda velja to tudi za vsote velikega števila "nebinomskih" spremenljivk? Domnevamo torej

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\bar{X}} \propto \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{X}-\langle\bar{X}\rangle}{\sigma_{\bar{X}}}\right)^2\right]. \tag{19.33}$$

Ni videti lahke poti, da bi z doslej pridobljenim znanjem domnevo dokazali. Pa nič hudega: saj jo lahko utrdimo eksperimentalno. Mečemo pošteno kocko. Na stranice v mislih napišemo 1, 2, 3, 3, 4, 5. Verjetnostna porazdelitev izidov je zato $P(1) = 1/6$, $P(2) = 1/6$, $P(3) = 1/3$, $P(4) = 1/6$ in $P(5) = 1/6$, torej ima $\langle x \rangle = 3{,}0$ in $\sigma_x = 1{,}7$. Kocko vržemo 10-krat in dobimo prvi vzorec ter njegovo povprečje (nekje med 1,0 in 5,0). To ponovimo stokrat. Dobljenih sto povprečij porazdelimo po primerno širokih razredih. Porazdelitev se kar dobro prilega pričakovani normalni z $\mu = 3{,}0$ in $\sigma = 1{,}7/\sqrt{10} = 0{,}5$. Daljši vzorci in številčnejše ponovitve pokažejo še boljše prileganje. Seveda lahko kockine stranice kakorkoli oštevilčimo. Bolj kot je osnovna porazdelitev različna od normalne, daljše vzorce potrebujemo, da je njihova povprečna vrednost zadovoljivo normalno porazdeljena.

19.12 Merjenje in merske napake

Natančnost meritev

Povedano uporabimo za oceno merskih napak. Večkratna meritev kakšne količine, recimo dolžine mize, je namreč slučajno vzorčenje. Merjena dolžina je slučajna spremenljivka. Izmerjeno povprečje in varianca pa sta dve statistiki, iz katerih sklepamo na "pravo" dolžino mize. Ocenimo $\bar{x} \approx \langle x \rangle \pm \sigma_x / \sqrt{N}$. Neznano populacijsko deviacijo σ_x aproksimiramo kar z znano vzorčno deviacijo s_x, pa z nekaj drznosti zapišemo

$$\langle x \rangle \approx \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{N}} \,. \qquad (19.34)$$

Kadar je izmerkov malo, se ni treba mučiti z izračunom s_x. Kar na oko ocenimo, kakšen je interval okrog povprečja, v katerega pade 2/3 izmerkov, in zapišemo $\langle x \rangle \approx \bar{x} \pm \mathrm{d}x = \bar{x}(1 \pm \mathrm{d}x/\bar{x})$. Količino $\mathrm{d}x$ poimenujemo *absolutna napaka* in $\mathrm{d}x/\bar{x}$ *relativna napaka*.

Izboljšanje natančnosti

Čim več je meritev, tem manjša odstopanja njihovega povprečja od prave vrednosti pričakujemo. Večkratno merjenje je torej dober način, da izboljšamo natančnost izmerka. Žal pa se z naraščanjem N povečuje $\sqrt{N}$ le počasi. Če hočemo natančnost povečati za faktor 10, moramo povečati število meritev za faktor 100. Pri tem pa niti ne zmanjšujemo sistematičnih napak.

Širjenje napak

Če je kakšna količina obremenjena z napako, in to je zmeraj, so tudi njene funkcije obremenjene z napakami. Rečemo, da se napake podedujejo oziroma se širijo. Kako to gre?

Na napako funkcije lahko pogledamo kot na njen diferencial. Pri funkciji ene spremenljivke je to navadni diferencial in pri funkciji več spremenljivk imamo opravka s totalnim diferencialom. Seveda pa moramo upoštevati, da so takšni diferenciali lahko pozitivni ali negativni. Tako z diferenciranjem dobimo naslednja pravila.

$$
\begin{aligned}
&u = cx \Longrightarrow \mathrm{d}u = |c|\,\mathrm{d}x \\
&u = x \pm y \Longrightarrow \mathrm{d}u = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y \\
&u = xy \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{|u|} = \frac{\mathrm{d}x}{|x|} + \frac{\mathrm{d}y}{|y|} \\
&u = \frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{|u|} = \frac{\mathrm{d}x}{|x|} + \frac{\mathrm{d}y}{|y|} \\
&u = x^n \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}u}{|u|} = |n|\,\frac{\mathrm{d}x}{|x|} \\
&u = u(x) \Longrightarrow \mathrm{d}u = |u'|\,\mathrm{d}x \\
&u = u(x,y) \Longrightarrow \mathrm{d}u^2 = (u_x\,\mathrm{d}x)^2 + (u_y\,\mathrm{d}y)^2\,.
\end{aligned}
\tag{19.35}
$$

Napaka vsote ali razlike je vsota napak posameznih členov. Relativna napaka produkta ali kvocienta pa je vsota relativnih napak posameznih faktorjev. Zlasti je nevarno takrat, kadar naletimo na razliko dveh približno enakih členov. Tedaj je relativna napaka lahko ogromna. Računanje odvodov je včasih zoprno. V takem primeru lahko ocenimo kar $\mathrm{d}u \approx u(x+\mathrm{d}x) - u(x)$ oziroma $\mathrm{d}u \approx u(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y) - u(x,y)$ za primerno izbrane neodvisne diferenciale.

19.13 Intervalno ocenjevanje

Ko rečemo $\bar{x} = \mu \pm \sigma/\sqrt{N}$, pravzaprav pravimo, da leži μ nekje na intervalu $[\bar{x} - \sigma/\sqrt{N}, \bar{x} + \sigma/\sqrt{N}]$ z verjetnostjo 0,68 in izven tega intervala z verjetnostjo 0,32. Oceno za μ pa lahko podamo bolj na splošno takole: leži na intervalu $[\bar{x} - x_\alpha, \bar{x} + x_\alpha]$ z verjetnostjo α, na primer 0,95. Kakšna je povezava med x_α in α?

Verjetnostni interval

Vemo tole. Če je $\bar{X}$ porazdeljen normalno kot $\mathrm{G}_{\mu,\sigma/\sqrt{N}}$, potem je $Z = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{N})$ porazdeljena normalno kot $\mathrm{G}_{0,1}$. To pomeni, da je

$$
\begin{aligned}
&P(-z_\alpha \le Z \le +z_\alpha) = P(\bar{X} - x_\alpha \le \mu \le \bar{X} + x_\alpha) = 2\,\mathrm{erf}(z_\alpha) = \alpha \\
&x_\alpha = z_\alpha \sigma/\sqrt{N}\,.
\end{aligned}
\tag{19.36}
$$

Za vsako izbrano verjetnost α lahko izračunamo pripadajočo vrednost x_α. Verjetnosti 0,68, na primer, odgovarja $z_\alpha = 1$, torej $x_\alpha = \sigma/\sqrt{N}$, kakor tudi mora biti. Verjetnosti 0,95 pa odgovarja 2-krat tolikšen interval. Če hočemo v več primerih uloviti srednjo vrednost μ, moramo pač razširiti lovilno past.

Ocena intervala

Za izračun x_α moramo poznati deviacijo populacije. Te ponavadi ne poznamo, zato jo aproksimiramo kar z deviacijo vzorca. Širino intervala, ki pri 95 % vzorcev vsebuje neznano povprečje μ, torej določimo takole. Potegnemo vzorec dolžine N, iz njega izračunamo $\bar{x}$ in s_x ter izračunamo $x_{0.95} = 2s_x/\sqrt{N}$. S tem je interval izračunan. Če ga hočemo prepoloviti, potrebujemo štirikrat večji vzorec.

Verjetnost, da ocenjeni *interval zaupanja* dejansko pokrije neznano pravo povprečje, znaša α. Rečemo, da je to *stopnja zaupanja*. Seveda pa tvegamo, da povprečje leži izven intervala.

Verjetnost, da se to zgodi, znaša $1-\alpha$. Rečemo, da je to *stopnja tveganja*.

19.14 Preizkušanje domnev

Domneva o povprečju

Vojaški zdravnik trdi, da je povprečna višina v populaciji vojakov $\langle x\rangle = a$. To domnevo hočemo preveriti. Če domneva drži, vemo, da je vzorčna statistika $Z=(\bar{X}-a)/(\sigma_x/\sqrt{N})$ porazdeljena standardno kot $G_{0,1}(Z)$. Ker ne poznamo populacijske deviacije, jo aproksimiramo z vzorčno deviacijo in dobimo statistiko $T=(\bar{X}-a)/(S_x/\sqrt{N})$. Pričakujemo, da je tudi ona porazdeljena približno kot $G_{0,1}(T)$. To pomeni, da je na intervalu $[-t_\alpha, +t_\alpha] = [-2, +2]$ pričakovati $\alpha = 95\,\%$ uresničitev te statistike. Da pade uresničitev izven intervala, pa pričakujemo le v 5 % vzorcev. Iz populacije torej na slepo potegnemo vzorec N vojakov in izračunamo $\bar{x}$, s_x ter iz obojega t. Če pade t znotraj postavljenega intervala, nimamo kaj reči. Če pa pade t izven tega intervala, lahko to razlagamo na dva načina: — domneva je sicer pravilna, a smo imeli tako nesrečno roko, da smo naleteli na enega izmed tistih 5 % vzorcev; — domneva je vsekekor nepravilna. Katero izmed obeh razlag izbrati? Odločimo se, da je bolj verjetna druga razlaga in domnevo zavrnemo.

Dve vrsti napak

S preizkušanjem domnev torej ne sprejemamo, ampak jih zgolj – bolj ali manj utemeljeno – zavračamo. Očitno lahko pri tem naredimo dve vrsti napak: domneve ne zavrnemo, čeravno je nepravilna, ali pa domnevo zavrnemo, čeravno je pravilna. Kadar ima zavračanje domneve hude posledice, hočemo biti nadvse gotovi, da jo zavračamo utemeljeno. Takrat gledamo interval $[-3, +3]$ in ustrezno verjetnost 99,8 %.

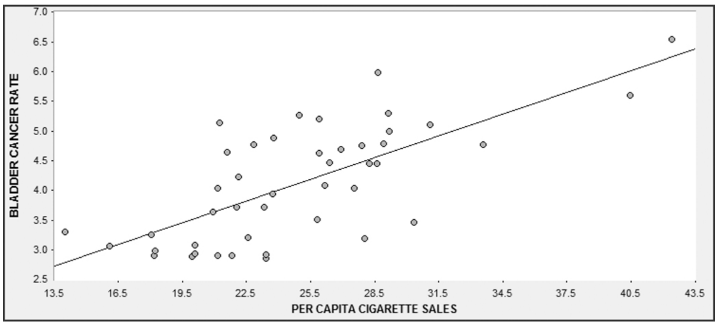
Ko zavračamo domnevo, moramo vsekekor povedati, pri kakšni stopnji tveganja $1-\alpha$ to počnemo. Tako rečemo, da smo domnevo zavrnili pri stopnji tveganja 5 %, oziroma da se vzorčni podatki statistično značilno razlikujejo od domneve pri tej stopnji tveganja. Stopnja tveganja pove, kolikšna je verjetnost, da smo domnevo zavrnili, čeravno je pravilna.

Druge domneve

Domnevamo, da lahko na podoben način zavračamo najrazličnejše domneve o populacijah, na primer: varianca porazdelitve je enaka neki vrednosti; povprečji dveh porazdelitev sta enaki; varianci dveh porazdelitev sta enaki; porazdelitvi sta enaki; in še kaj. Postopek je vedno enak: postaviti moramo ustrezno cenilko in zanjo določiti porazdelitev. Potem pogledamo, kako verjetna je dejanska uresničitev cenilke in se glede na to odločamo. Vse to je seveda lažje reči kot narediti. Podrobnejšo obravnavo zato prepustimo tistim, ki to potrebujejo (FISCHER).

19.15 Regresijska analiza

Soodvisnost dveh spremenljivk, tabeliranih v N parih (x_n, y_n) lahko aproksimiramo s premico, ki se jima "najbolj prilega". Najboljše prileganje definiramo takole: vsota kvadratov odmikov ene spremenljivke od premice naj bo minimalna. Minimiziramo lahko odmike y_n ali x_n; v splošnem se dobljeni premici razlikujeta. Najbolje je minimizirati odmike tiste spremenljivke, ki ima večjo deviacijo. Naj bo to spremenljivka y. Zaradi preprostosti še privzamemo, da so deviacije spremenljivke x enake nič.



Slika 19.7 Povezava med kajenjem in rakom. Za 44 ameriških držav je bilo določeno, koliko cigaret na prebivalca je bilo prodanih v letu 1960 in koliko smrti na 100 tisoč prebivalcev zaradi raka na mehurju je bilo zabeleženih v istem letu. (Fraumeni, 1968)

Določitev koeficientov

Iščemo torej funkcijo

$$y^* = A + Bx \tag{19.37}$$

tako, da bo $\sum(y^*_n - y_n)^2 = \sum(A + Bx_n - y_n)^2 = Q(A, B)$ minimalen. Postavimo $\partial Q/\partial A = 0$ in $\partial Q/\partial B = 0$, s čimer pridelamo dve linearni enačbi z dvema neznankama A in B: $AN + B\sum x_n = \sum y_n$ in $A\sum x_n + B\sum x_n{}^2 = \sum x_n y_n$. Iz enačb izračunamo obe neznanki in s tem je regresijska premica določena (Gauss):

$$A = \frac{(\sum x_n{}^2)(\sum y_n) - (\sum x_n)(\sum x_n y_n)}{\Delta} \tag{19.38}$$

$$B = \frac{N(\sum x_n y_n) - (\sum x_n)(\sum y_n)}{\Delta}$$

$$\Delta = N(\sum x_n{}^2) - (\sum x_n)^2.$$

Ocena napak

Vzorčne vrednosti y_n imamo lahko za uresničitev slučajnih spremenljivk Y_n. Predpostavimo, da je vsaka izmed teh spremenljivk porazdeljena normalno okrog svoje srednje vrednosti $A + Bx_n$ z isto "lokalno" deviacijo σ. Zato so vse spremenljivke $Y_n - A - Bx_n$ porazdeljene normalno kot $\mathrm{G}_{0,\sigma}$. Iz tega sklepamo, da je dobra ocena za lokalne deviacije kar enaka "globalni" deviaciji

$$s_y{}^2 = \frac{1}{N}\sum(y_n - A - Bx_n)^2\,. \tag{19.39}$$

Parametra A in B sta čisti funkciji izmerkov $y_1 \ldots y_N$. Zato sta njuni deviaciji oz. napaki s_A in s_B določeni kar z deviacijami oz. napakami s_y slednjih. V obrazec za širjenje napak $s_A{}^2 = \sum(\partial A/\partial y_n \cdot s_y)^2$ vstavimo $\partial A/\partial y_n = [(\sum x_n{}^2) - x_n(\sum x_n)]/\Delta$ in dobimo, po nekaj računanja,

$$s_A{}^2 = s_y{}^2 \sum x_n{}^2 / \Delta \qquad (19.40)$$
$$s_B{}^2 = s_y{}^2 N / \Delta\,.$$

Podobno obravnavamo tudi linearno regresijo več spremenljivk. Kogar to veseli, pa se lahko loti celo nelinearne regresije.

19.16 Statistično zavajanje

Pravijo, da obstajajo tri vrste laži: navadna laž, huda laž in statistika. Nedvomno je res, da je statistika močno orodje za raziskavo množice podatkov, če jo seveda prav uporabljamo. Je pa tudi res, da se jo da zlorabiti na najrazličnejše načine. Pogosto to počno politiki in prodajalci. Kakšni so njihovi glavni načini zavajanja?

Majhen vzorec

Osnova statistike je vzorčenje. Vzorec mora biti dovolj velik, da iz njega lahko karkoli sklepamo. Beremo recimo, da se 33,3 % študentk na univerzi N. N. poroči s svojimi profesorji. Natančne številke in decimalna mesta nas prepričujejo, da raziskovalec ve, o čem govori. Surove številke pa govorijo drugače: v obdobju raziskave so bile na univerzi vpisane tri študentke, od katerih se je ena poročila s profesorjem.

Neslučajen vzorec

Vzorec mora biti tudi slučajen. Ko anketiramo ljudi, mora imeti vsak človek enako verjetnost, da ga izberemo. Beremo recimo, da 73 % Slovencev nasprotuje smrtni kazni. Vprašamo se: katerih Slovencev? Pokaže se, da je raziskavo naredil levičarski časopis N. N. preko vprašalnikov, ki jih je kar priložil časopisu. Ta časopis kupujejo pretežno levičarji in ti imajo bolj odklonilen odnos do smrtne kazni kot desničarji. Sklepanje na celotno populacijo je povsem neutemeljeno.

Golo povprečje

Povprečje nič ne pove o razpršenosti izmerkov okrog njega. Podjetje N. N. na primer objavi, da znaša povprečna mesečna plača njihovega delavca solidnih 3000 dolarjev. Lepo in prav, dokler ne odkrijemo, da je v podjetju zaposlenih 9 delavcev in en direktor. Direktor ima 21.000 dolarjev plače in delavci po mizernih 1000 dolarjev. Skoraj vsakdo je pod navedenim povprečjem!

Korelacija kot vzrok

Korelacija ne pomeni vzročne odvisnosti. Študentje, ki kadijo, imajo nižje ocene. To je verodostojno statistično dokazano. Torej kajenje povzroča slabe ocene? Morda celo otopi možgane? Nič od tega: če gresta kajenje in slabe ocene skupaj, to še ne pomeni, da kajenje povzroča slabe ocene. Morda je ravno obratno: slabe ocene silijo študente h kajenju. Ali pa nobeno ne povzroča drugega, marveč je oboje posledica kakega tretjega vzroka. Je morda tako, da družabni ljudje, ki ne jemljejo preveč resno knjig, hkrati tudi kadijo več?

Obrezani grafi

Kako cene rastejo, najlepše pokažemo z grafom. Recimo, da kakšna cena v desetih letih naraste od 100 na 110 dolarjev. Na grafu z višino 5 cm, ki ima navpično os oštevilčeno od 0 do 120, je rast cene zelo položna krivulja. Morda nam to ni všeč? Odrežimo spodnji in zgornji del grafa (z izgovorom, da sta itak prazna) ter prikažimo zgolj navpični interval med 100 in 110 dolarji, seveda raztegnjen na isto višino. Mnogo bolje! Graf je sedaj zelo strma krivulja, ki kar kriči, kakšen hud porast cen se je zgodil. Nič ni bilo ponarejenega – razen vtisa, ki ga graf zapusti. Podobno lahko polepšamo tudi druge vrste grafov.

Obramba

Kako si pomagamo, da nas takšne "statistike" in sklepi iz njih ne zavedejo? Tako, da odgovorimo na nekaj vprašanj. Kdo to pravi? Kako to ve? Kaj vse manjka (velikost vzorca, način vzorčenja, povprečje brez deviacije, testiranje domnev brez stopnje tveganja, korelacijski parametri brez ocenjenih napak, grafi brez meril)? Ali je vse skupaj smiselno? Nikoli pa tudi ne smemo pozabiti, da je statistika vredna zgolj toliko, kot so verodostojni podatki, na katerih sloni. □

20 Numerika

Računalniki – Koreni enačb – Sistem linearnih enačb – Odvajanje – Integriranje – Spektralna analiza – Enačba rasti – Enačba gibanja – Advekcijska enačba – Valovna enačba – Difuzijska enačba – Potencialna enačba – Amplitudna enačba

20.1 Računalniki

Matematika kot računsko orodje znanosti se ukvarja s števili, funkcijami in enačbami. V principu lahko vse to delamo s svinčnikom na papirju. Z izumom računalnika pa se vse spremeni. Današnji računalniki opravijo v sekundi toliko osnovnih računskih operacij, kolikor bi jih človek na papirju v milijon letih. Računi, ki so bili do sedaj preobsežni, postanejo praktično izvršljivi. Poglejmo, kako lahko računalnik uporabimo za reševanje tipičnih matematičnih problemov!

Slika 20.1 Osebni računalnik. Z njim komuniciramo preko tipkovnice in katodnega zaslona. (Anon)

20.2 Koreni enačb

Kadar kakšne enačbe $f(x) = 0$ ne znamo ali ne zmoremo rešiti algebraično, s simboli, jo rešujemo numerično, s števili.

Bisekcija

Z grobim tabeliranjem najdemo dve vrednosti a in b, pri katerih ima funkcija nasprotna predznaka: ničla (koren) leži tedaj nekje na intervalu $[a,b]$. Izračunamo osrednjo točko

$$c = \frac{a+b}{2} \tag{20.1}$$

in funkcijsko vrednost $f(c)$ v njej. Odvisno od predznaka funkcije v tej točki je novi interval $[a,c]$ ali $[c,b]$. Nadaljujemo, dokler ne skrčimo intervala na željeno majhnost. To je reševanje enačbe z *bisekcijo* in je zmeraj uspešno.

Regula falsi

Namesto da iščemo središčno točko intervala, je bolje iskati točko, kjer premica skozi obe krajiščni točki seka abscisno os. Tej premici rečemo sekanta. Podobna trikotnika z vrhoma pri presečišču povesta $f(b)/(b-c) = f(a)/(a-c)$, torej

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \,. \tag{20.2}$$

Nato izberemo pravega izmed obeh podintervalov ter ponovimo postopek. To je reševanje enačbe z metodo *regula falsi*. Potrebnih je manj korakov kot pri razpolavljanju.

Navadna iteracija

Morda lahko enačbo $f(x) = 0$ izrazimo kot $x = g(x)$? Potem vstavimo v desno stran primeren približek x_0 in izračunamo levo stran – novi približek x_1:

$$x_1 = g(x_0)\,. \qquad (20.3)$$

Tako nadaljujemo in upamo, da se bodo zaporedni približki vse bolj stiskali – konvergirali – k neki mejni vrednosti. Pravimo, da enačbo rešujemo z *navadno iteracijo*.

Kdaj pride do konvergence? Naj bo α iskani koren. Razvoj v vrsto pove $g(x) = g(\alpha) + (x-\alpha)g'(\alpha) + \ldots$ Ker $g(\alpha) = \alpha$, velja $g(x) - \alpha \approx g'(\alpha)(x-\alpha)$. Ker $x_{n+1} = g(x_n)$, sledi $(x_{n+1} - \alpha) \approx g'(\alpha)(x_n - \alpha)$. Drugače rečeno: razlika med približkom in korenom se pri vsaki iteraciji pomnoži približno z $g'(\alpha)$. Zato pride do konvergence, če $|g'(\alpha| < 1$. Funkcija $g(x)$ torej ne sme v okolici korena naraščati ali padati prestrmo.

20.3 Sistem linearnih enačb

Sistem $n \times n$ linearnih enačb je v matrični obliki zapisan kot $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Njegova formalna rešitev je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$. Numerično jo določimo takole (GAUSS).

Eliminacija

Najprej k matriki $\boldsymbol{A}$ na desni strani prilepimo stolpec $\boldsymbol{b}$ in tako dobimo razširjeno matriko $\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b}$ koeficientov. Potem:

1. Najdemo "delovno" vrstico z (absolutno) največjim vodilnim elementom in jo postavimo na vrh.
2. Delovno vrstico delimo z njenim prvim elementom.
3. Od vsake naslednje vrstice odštejemo delovno vrstico, pomnoženo s prvim elementom te vrstice.
4. Pokrijemo prvo vrstico in prvi stolpec ter nadaljujemo s preostankom po istem postopku, le da odštevamo od vsake naslednje in od vsake predhodne vrstice.
5. Ponovimo postopek od spodaj navzgor.

Dobimo enotno razširjeno matriko $\boldsymbol{I}|\boldsymbol{d}$, to je sistem $\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{d}$, ki je že iskana rešitev. To je *metoda eliminacije*.

Navadna iteracija

Pri eliminaciji se zaokrožitvene napake akumulirajo. Kadar je matrika velika, postane rešitev neuporabna. Takrat pomaga iterativna metoda – taka, kot pri iskanju korena funkcije. Matriko zapišemo v obliki $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{R}$, pri čemer vsebuje prva matrika diagonalo $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag} \boldsymbol{A}$ (z ničlami drugod), druga pa preostanek $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{D}$ (z ničlami po diagonali). Tako dobimo enačbo $\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{x}$. V desno stran vstavimo primeren približek $\boldsymbol{x}^0$ in izračunamo levi vektor – z diagonalnimi koeficienti pomnoženi novi približek $\boldsymbol{x}^1$. Eksplicitno velja:

$$x_i^1 = \frac{1}{a_{ii}} (b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^0) . \tag{20.4}$$

Po želji lahko v desno stran sproti vstavljamo že izračunane nove komponente. Metoda konvergira, če je vsak diagonalni element matrike $\boldsymbol{A}$ po absolutni vrednosti večji od vsote absolutnih vrednosti preostalih elementov v vrstici. (Tako pravijo tisti, ki se na to spoznajo. Mi se dokazu hvaležno odrekamo.)

Prekomerna relaksacija

Ko iz približka x_i^0 izračunamo novi približek x_i^1, je ta od predhodnika bolj ali manj različen. Naravno se zdi predpostaviti, da je "pravi" naslednji približek x_i^2 odvisen od prejšnjega približka x_i^0 in razlike približkov $x_i^1 - x_i^0$. Dobljeni približek x_i^1 torej vzamemo za "provizoričnega" in iz njega izračunamo "pravega":

$$x_i^2 = x_i^0 + \omega(x_i^1 - x_i^0), 0 \leq \omega . \tag{20.5}$$

To je *prekomerna relaksacija*. Če izberemo $\omega = 1$, se enačba poenostavi v navadno iteracijo, kakor tudi mora biti. Parameter ω izberemo s poskušanjem tako, da je konvergenca čim hitrejša. Tipično je nekaj večji od 1. Pri vrednostih preko 2 pa rado pride do divergiranja.

20.4 Odvajanje

Kadar kakšne funkcije ne moremo ali nočemo odvajati algebraično, storimo to numerično, in sicer v vsaki točki, ki nas zanima.

Prvi odvod, enostranska shema

Okrog točke x, kjer iščemo odvod, razvijemo funkcijo $u(x)$ v potenčno vrsto $u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \ldots$, iz nje izračunamo prvi odvod u' in zanemarimo vse višje člene:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} . \tag{20.6}$$

To je *napredna shema* za izračun odvoda. Če bi razvili $u(x-h) = u(x) - hu'(x) \ldots$, bi pa pridelali *odzadnjo shemo*

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} . \tag{20.7}$$

Napaka metode, ki jo pri razvoju obakrat zagrešimo, je sorazmerna s h: $|u'_{\mathrm{true}} - u'| \propto h$. Čim manjši h izberemo, tem manjša je ta napaka. Žal pa pri dejanskem računanju na končno število decimalnih mest h ne sme biti premajhen. Ker je namreč vsak člen v števcu obremenjen z zaokrožitveno napako, je relativna napaka njune razlike tem večja, čim manjši je h.

Prvi odvod, centralna shema

Ugodno bi bilo, ko bi bila napaka metode sorazmerna z višjo, ne zgolj s prvo potenco h. Očitno bo treba v razvoju funkcije v potenčno vrsto upoštevati več členov. Tako razvijemo $u(x+h)$ in

$u(x-h)$, drugo enačbo odštejemo od prve in iz dobljene razlike izračunamo prvi odvod u', pri čemer zanemarimo vse višje člene:

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} \,. \tag{20.8}$$

To je *centralna shema* za izračun odvoda. Napaka metode je zdaj sorazmerna s h^2.

Drugi odvod, centralna shema

Po zgledu približkov za prvi odvod izračunajmo še približek za drugi odvod. Razvijemo $u(x+h)$ in $u(x-h)$, obe enačbi seštejemo, iz dobljene vsote izračunamo drugi odvod u'' in zanemarimo višje člene, pa dobimo:

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \,. \tag{20.9}$$

To je *centralna shema* za izračun drugega odvoda. Napaka metode je sorazmerna s h^2.

20.5 Integriranje

Ko odpovejo vsi algebraični prijemi za izračun integrala, ni druge, kot da se zatečemo k numeričnim metodam. Abscisno os razdelimo na primerne velike zaporedne intervale, nekako izračunamo delne ploščine nad vsakim in jih nato seštejemo.

Pravokotna shema

Prva misel je, da kos krivulje nad obdelovanim abscisnim intervalom $[x, x+h]$ aproksimiramo s konstanto; tako pridelamo ploskev v obliki pravokotnika. Funkcijo $u(x)$ torej razvijemo v potenčno vrsto okrog točke x in to do prvega člena; tako dobimo *pravokotno shemo*

$$\int_x^{x+h} u(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\,h \,. \tag{20.10}$$

Napaka izračunanega integrala je sorazmerna s h^2. Če hočemo integrirati na velikem intervalu $[a, b]$, ga razdelimo na majhne intervale $(b-a)/N = h$. Levi robovi teh intervalov imajo koordinate $x_i = a + ih$. Celotni integral je potem vsota delnih integralov

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = h \sum_{i=0}^{N-1} u(x_i) \,. \tag{20.11}$$

Lokalne napake se pri seštevanju preko $N = [b-a]/h$ podintervalov akumulirajo in celotna napaka $N \cdot h^2$ postane sorazmerna z $|b-a|h$.

Trapezna shema

Druga misel je, da kos krivulje nad obdelovanim abscisnim intervalom aproksimiramo s sekanto; tako pridelamo ploskev v obliki trapeza. Funkcijo $u(x)$ torej razvijemo v potenčno vrsto okrog točke x do linearnega člena, izrazimo prvi odvod z enostransko desno shemo, zanemarimo višje člene in dobimo – z napako, sorazmerno s h^3 – *trapezno shemo*

$$\int_x^{x+h} u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{u(x)+u(x+h)}{2}\,h\,. \tag{20.12}$$

Integral po večjem območju $[a,b]$ je vsota integralov po podobmočjih $(b-a)/N = h$. Označimo $x_i = a + ih$, pa dobimo

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{N-1}\left[u(x_i) + u(x_{i+1})\right]. \tag{20.13}$$

Lokalne napake se pri seštevanju akumulirajo in celotna napaka postane sorazmerna z $|b-a|h^2$.

Parabolična shema

Še bolj natančna je aproksimacija s parabolo. Funkcijo torej razvijemo v potenčno vrsto okrog točke $x+h$ do kvadratnega člena, izrazimo prvi odvod s centralno shemo, drugi odvod s centralno shemo, zanemarimo višje člene in dobimo – z napako, ki je zdaj sorazmerna s h^5 – *parabolično shemo* (SIMPSON)

$$\int_x^{x+2h} u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{u(x)+4u(x+h)+u(x+2h)}{3}\,h\,. \tag{20.14}$$

Integral po večjem območju $[a,b]$ je vsota integralov po podobmočjih $(b-a)/2N = h$, torej

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{N-1}\left[u(x_{2i}) + 4u(x_{2i+1}) + u(x_{2i+2})\right]. \tag{20.15}$$

Kumulativna napaka je sorazmerna z $|b-a|h^4$. Od vseh naštetih shem je torej parabolična daleč najbolj natančna in je zato priporočljiva za uporabo.

20.6 Spektralna analiza

Vsako periodično funkcijo lahko zapišemo kot vsoto harmoničnih funkcij (13.8). Naj bo periodična funkcija $f(t)$ podana – s tabelo ali enačbo – v ekvidistantnih točkah $k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, 3 \ldots N-1$ preko celotne periode. Poznamo torej vrednosti f_k. Funkcijo tedaj zapišemo kot superpozicijo

$$f_k = \mathrm{Re}\,\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\hat{B}_n\,\mathrm{e}^{2\pi i nk/N}. \tag{20.16}$$

Harmonične koeficiente izračunamo takole:

$$\hat{B}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k\,\mathrm{e}^{-2\pi i kn/N}. \tag{20.17}$$

Če časovna funkcija ni periodična, moramo v interval na obeh koncih zajeti točke, ki so zanjo "tipične", karkoli pač to že pomeni.

Vzorčenje časovne funkcije z odseki Δt ne more zajeti harmonikov, ki imajo periodo krajšo od $2\Delta t$, ampak jih prepozna kot harmonike z daljšimi periodami. Zato tudi ni verodostojno računati njihovih amplitud. To je razlog, zakaj pri diskretni transformaciji računamo največ toliko harmonikov, kot imamo na voljo časovnih točk.

Filtriranje šuma

Vremenoslovci merijo temperaturo zraka vsak dan ob treh časih: zjutraj, opoldne in zvečer. Tako dobijo časovni niz preko mnogih let. Ta niz kaže počasno nihanje preko enega leta (sezonske spremembe), na katerega je naloženo hitro nihanje preko enega dne (dnevne spremembe). Kako bi iz časovnega niza "odstranili" dnevne spremembe, da ne bi "kvarili" sezonskih sprememb oziroma da bi bile te bolj vidne? — Časovnemu nizu določimo spekter. — Dobljeni spekter pomnožimo s tako funkcijo, da nam frekvence izven izbranega frekvenčnega pasu zavzamejo vrednost 0, znotraj pa ostanejo nespremenjene. — Iz popravljenega spektra izračunamo popravljeni časovni niz, ki ne vsebuje več motečih frekvenc. Rečemo, da smo niz *filtrirali*. Opisana metoda je zelo priročna za filtriranje vsakršnih nizov, v katerih je *signal* pomešan s *šumom*.

20.7 Enačba rasti

Enačbo rasti (za spreminjanje mase vode v rezervoarju z dotoki in odtoki)

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = f(m,t) \tag{20.18}$$

Tangentna metoda

rešujemo najbolj preprosto takole. Odvod $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ izrazimo z napredno shemo (20.6) in dobimo

$$m(t+\mathrm{d}t) = m(t) + f(m,t)\mathrm{d}t\,. \tag{20.19}$$

To je *tangentna metoda* (EULER). Če poznamo vrednost $m(t)$ ob času t, lahko iz (20.19) izračunamo, kakšna je vrednost $m(t+\mathrm{d}t)$ ob malo kasnejšem času $t+\mathrm{d}t$. Nato postopek ponavljamo po korakih $\mathrm{d}t$. Za zagon potrebujemo začetni pogoj $m(t_0) = m_0$.

Metoda ima – zaradi uporabljene sheme odvoda – pri enem koraku lokalno napako $|m_{\text{true}} - m| \propto (\mathrm{d}t)^2$. Čim manjši korak $\mathrm{d}t$ uporabimo, tem bolj natančno je določena $m(t+\mathrm{d}t)$. Premajhnega koraka pa spet nima smisla vzeti, ker napako $(\mathrm{d}t)^2$ prevpije nenatančnost računanja na N decimalnih mest, 10^{-N}. Za najmanjši še smiselni časovni korak zato velja $\mathrm{d}t > 10^{-N/2}$.

Z naraščanjem števila korakov se lokalne napake akumulirajo: kumulativna napaka po n korakih je zato sorazmerna z $n\cdot(\mathrm{d}t)^2 =$

$|t-t_0|/\mathrm{d}t\cdot(\mathrm{d}t)^2=|t-t_0|\mathrm{d}t$. Tetivna metoda je zato malo natančna. Uporabna je predvsem za računanje ne predaleč od začetne točke.

Dvotangentna metoda

Poskusimo najti boljšo shemo! Funkcijo $m(t+\mathrm{d}t)$ razvijemo v vrsto do kvadratnega člena. V tem razvoju upoštevamo $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t=f(m,t)$ in $\mathrm{d}^2m/\mathrm{d}t^2=\mathrm{d}f(m,t)/\mathrm{d}t$. Nato aproksimiramo $\mathrm{d}f(m,t)/\mathrm{d}t=[f(m(t+\mathrm{d}t),t+\mathrm{d}t)-f(m,t)]/\mathrm{d}t$ in znotraj tega $m(t+\mathrm{d}t)=m(t)+\mathrm{d}t\,f(m,t)$. Ko vse skupaj zložimo, dobimo

$$m(t+\mathrm{d}t)=m(t)+\frac{f[m+\mathrm{d}t\,f(m,t),\,t+\mathrm{d}t]+f(m,t)}{2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{20.20}$$

Namesto tangente $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ v točki t torej uporablja metoda povprečno vrednost tangent v točkah t in $t+\mathrm{d}t$. Da bi določili vrednost tangente v točki $t+\mathrm{d}t$, bi pravzaprav že morali poznati vrednost $m(t+\mathrm{d}t)$ v tej točki. Ker tega ne vemo, aproksimiramo vrednost $m(t+\mathrm{d}t)$ s formulo (20.6). Za praktično računanje so primerne naslednje oznake:

$$\begin{aligned} k_1&=f(m,t) \\ k_2&=f(m+k_1\mathrm{d}t,\,t+\mathrm{d}t) \\ m(t+\mathrm{d}t)&=m(t)+\left(\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}\right)\mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{20.21}$$

To je *dvotangentna metoda*. Njena napaka pri enem koraku je sorazmerna z $(\mathrm{d}t)^3$ in preko daljšega intervala sorazmerna s $|t-t_0|(\mathrm{d}t)^2$.

20.8 Enačba gibanja

Gibalna enačba (za gibanje točkastega telesa pod vplivom sile)

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=f\left(t,s,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \tag{20.22}$$

je ekvivalentna sistemu dveh sklopljenih enačb

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}&=v \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}&=f(t,s,v)\,. \end{aligned} \tag{20.23}$$

Dvotangentna metoda

To sta dve enačbi prvega reda in rešujemo ju skupaj, korak za korakom, po dvotangentni metodi (20.21): najprej izračunamo $v(t+\mathrm{d}t)$, nato pa še $s(t+\mathrm{d}t)$. Lego in hitrost torej računamo v istih časovnih točkah.

Preskočna metoda

Računanje lege in hitrosti v istih časovnih točkah gotovo ni najbolje. Če se omejimo na primer, ko sila f ni odvisna od hitrosti v, sta lega in hitrost lepo "prepleteni" v času: $s(t+\mathrm{d}t)=s(t)+v(t+\mathrm{d}t/2)\,\mathrm{d}t$ in $v(t+\mathrm{d}t/2)=v(t-\mathrm{d}t/2)+f(t,s(t))\mathrm{d}t$. Obe količini lahko zato računamo v medsebojno zamaknjenih časovnih točkah. Ob času t naj bo začetna lega s_0 in ob času $t+\mathrm{d}t/2$ "začetna" hitrost $v_{1/2}$. Nove vrednosti dt kasneje so:

$$s_1 = s_0 + v_{1/2}\mathrm{d}t \qquad (20.24)$$
$$v_{1+1/2} = v_{1/2} + f_1\mathrm{d}t\,.$$

Če "začetne" hitrosti ne poznamo, jo določimo iz prave začetne hitrosti v_0 s posebnim korakom po tangentni metodi $v_{1/2} = v_0 + f_0\mathrm{d}t/2$.

20.9 Advekcijska enačba

Advekcijsko enačbo (za širjenje koncentracije primesi s snovnim tokom)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -c\,\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (20.25)$$

preučujmo na intervalu $[0,l]$. Interval opremimo s točkami v razmikih dx. V teh točkah si mislimo vrednosti $Q_i{}^n$ ob času $n\mathrm{d}t$. Iz njih moramo izračunati vrednosti $Q_i{}^{n+1}$ ob naslednjem času $(n+1)\mathrm{d}t$.

Protitočna shema

V vsaki točki aproksimiramo časovni odvod z diferenco naprej v času in prostorski odvod z diferenco proti toku: $\partial Q/\partial t = (Q^{n+1} - Q^n)/\mathrm{d}t$ in $\partial Q/\partial x = (Q_i - Q_{i-1})/\mathrm{d}x$. Nove vrednosti so potem podane eksplicitno takole (za $c > 0$):

$$Q^1{}_i = Q_i - r(Q_i - Q_{i-1}) \qquad (20.26)$$
$$r = c\mathrm{d}t\,/\,\mathrm{d}x.$$

Računati začnemo ob času $n = 0$, ko so točke opremljene z začetnim stanjem. Za vsako notranjo točko izračunamo prihodnjo vrednost. Robni točki izračunamo posebej, v skladu z robnimi pogoji: postavimo ju na predpisano vrednost ali na vrednost prve notranje točke. Potem nadaljujemo z naslednjim korakom v času, dokler je pač treba.

Kriterij stabilnosti

Kolikšna intervala dx in dt naj izberemo? Izkušnje kažejo, da pri uporabljenem r kakšna točkovna vrednost sčasoma podivja v neskončnost. Ko primerno zmanjšamo r, pa se to ne zgodi. Da bo shema stabilna, je očitno potreben naslednji pogoj: $\max_i |Q_i{}^{n+1}| \le \max_i |\mathrm{Q}_i{}^n|$. Analitična rešitev $Q(x,t)$ advekcijske enačbe je vsak izraz oblike $\exp(\mathrm{i}\omega t)\exp(\mathrm{i}kx)$, pa tudi linearna kombinacija takih členov. (Paziti moramo na razliko med kompleksno enoto i in točko i.) Naj bo torej $Q_i{}^n = \exp(\mathrm{i}\omega n\mathrm{d}t)\exp(\mathrm{i}ki\mathrm{d}x)$ takšna elementarna rešitev v točkah (i,n). Potem $\max_i|Q_i{}^n| = |\exp(\mathrm{i}\omega n\mathrm{d}t)|$ in kriterij stabilnosti se zapiše kot

$$\left|\,\frac{\exp(\mathrm{i}\omega(n+1)\mathrm{d}t)}{\exp(\mathrm{i}\omega n\mathrm{d}t)}\,\right| = |\lambda| \le 1\,. \qquad (20.27)$$

Stabilnost protitočne sheme (20.26) torej raziščemo tako, da vanjo vstavimo $Q_i^{n+1} = \exp(\mathrm{i}\omega(n+1)\mathrm{d}t$ in $Q_i^n = \exp(\mathrm{i}\omega n\mathrm{d}t)$ ter izračunamo njun količnik. Ta vsebuje parameter r in s kriterijem stabilnosti je slednji tudi določen. Tako izračunamo $\lambda = 1 - r(1 - \cos k\mathrm{d}x) - \mathrm{i}r\sin k\mathrm{d}x)$ in iz kriterija $|\lambda| \leq 1$ sledi

$$r \leq 1\,. \tag{20.28}$$

Torej moramo uporabiti tako kratek dt, da se lokalne motnje premaknejo za manj kot dx. Če hočemo zmanjšati prostorski interval za dvakrat, moramo zmanjšati časovni interval za dvakrat, torej povečati računsko delo za faktor štiri.

20.10 Valovna enačba

Valovna enačba (za širjenje snovnih ali elektromagnetnih valov)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \mathrm{c}^2\,\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{20.29}$$

se zapiše kot sistem dveh advekcijskih enačb

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= -\,\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -c^2\,\frac{\partial h}{\partial x}\,.\end{aligned} \tag{20.30}$$

Nazorno sta to enačbi za gladinske valove v plitvi vodi: h je višina vala nad/pod neperturbirano gladino (normirana na njeno globino), v pa horizontalna hitrost vode. Gradient hitrosti torej povzroča spremembo višine vala, gradient višine vala pa povzroča spremembo hitrosti.

Preskočna shema

Zaradi prepletenosti obeh spremenljivk h in v in njunih gradientov je smiselno računanje v dveh naborih točk. Naj bosta torej začetni polji v dveh naborih točk $v^0{}_i$ in $h^0{}_{i+1/2}$; nabora točk sta medsebojno zamaknjena za interval d$x/2$. V časovnem intervalu dt se hitrostno polje spremeni v

$$v^1{}_i = v^0{}_i - c^2\,(\mathrm{d}t/\mathrm{d}x)\,(h^0{}_{i+1/2} - h^0{}_{i-1/2})\,, \tag{20.31}$$

nakar se spremeni še višina polja v

$$h^1{}_{i+1/2} = h^0{}_{i+1/2} - (\mathrm{d}t/\mathrm{d}x)\,(v^1{}_{i+1} - v^1{}_i)\,. \tag{20.32}$$

To je *preskočna shema*. Na robovih je treba upoštevati primerne robne pogoje. Zaradi medsebojne zamaknjenosti točk so odvodi efektivno centralni in metoda je drugega reda natančnosti, to je, njena kumulativna napaka je sorazmerna s $|t{-}t_0|(\mathrm{d}t)^2$.

Kriterij stabilnosti

Da bo rešitev dveh advekcijskih enačb stabilna, moramo uporabljati, kot smo že spoznali, dovolj kratke časovne korake:

$$r \leq 1 \tag{20.33}$$

20.11 Difuzijska enačba

Difuzijsko enačbo (za širjenje koncentracije primesi v mirujoči snovi)

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \qquad (20.34)$$

Napredno-centralna shema

rešujemo v točkah i z diferencami naprej v času in centralno v prostoru:

$$Q^1{}_i = Q_i + r(Q_{i+1} - 2\,Q_i + Q_{i-1}) \qquad (20.35)$$
$$r = D\mathrm{d}t\,/\,\mathrm{d}x^2.$$

Računati začnemo ob času $n = 0$, ko so točke opremljene z začetnim stanjem. Za vsako notranjo točko izračunamo prihodnjo vrednost. Robni točki izračunamo posebej, v skladu z robnimi pogoji: postavimo ju na predpisano vrednost ali na vrednost prve notranje točke. Potem nadaljujemo z naslednjim korakom v času, dokler je pač treba.

Kriterij stabilnosti

Stabilnost sheme določimo tako kot pri advekcijski (in valovni) enačbi. V shemo (20.35) vstavimo $Q_i{}^{n+1} = \exp(\mathrm{i}\omega(n{+}1)\mathrm{d}t$ in $Q_i{}^n = \exp(\mathrm{i}\omega n\mathrm{d}t)$ ter izračunamo njun količnik. Ta vsebuje parameter r in s kriterijem stabilnosti je slednji tudi določen. Tako izračunamo $\lambda = 1 - 4r\sin^2(k/2)$ in iz kriterija $|\lambda| \le 1$ sledi

$$r \le 1/2\,. \qquad (20.36)$$

Če hočemo zmanjšati prostorski interval za dvakrat, moramo zmanjšati časovni interval za štirikrat, torej povečati računsko delo za faktor osem. V treh dimenzijah ravnamo podobno. Prostor razdelimo na kocke z robom dl in računamo Q_{ijk} v njihovih ogliščih. Stabilnost sedaj zahteva $r = D\mathrm{d}t/\mathrm{d}l^2 \le 1/6$.

20.12 Potencialna enačba

Potencialno enačbo (za deformacijsko polje snovi ali za elektrostatično polje v kondenzatorju)

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (20.37)$$

Prekomerna relaksacija

aproksimiramo v točkah $(i{,}j)$ s centralnimi diferencami v prostoru ter rešujemo z relaksacijo (20.4):

$$\phi_{ij}{}^1 = \frac{1}{4}\,(\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1})\,. \qquad (20.38)$$

Po želji v desno stran sproti vstavljamo že izračunane nove komponente. Lahko pa celo dobljeni novi približek $\phi_i{}^1$ poimenujemo kot "provizoričnega" in iz njega izračunamo "pravega" (20.5),

$$\phi_i{}^2 = \phi_i{}^0 + \omega(\phi_i{}^1 - \phi_i{}^0),\, 0 \le \omega\,. \qquad (20.39)$$

Robni pogoji

Pri vsakem časovnem koraku morajo biti podani vsi robni pogoji s predpisanimi vrednostmi. Če je kakšen robni pogoj podan z odvodom, na primer s $\phi_x(i{=}1) = A$, izračunamo robno vrednost $\phi(1)$ iz aproksimacije $A = [\phi(2) - \phi(1)]/\mathrm{d}x$. Posebej za $\phi_x(i{=}1) = 0$ velja $\phi(1) = \phi(2)$.

Področje, na katerem želimo rešiti potencialno enačbo, tudi ni nujno pravokotnik. Če je krog ali krogla, si pomagamo tako, da zapišemo $\nabla^2 \phi = 0$ v cilindričnih ali krogelnih koordinatah in primerno diskretiziramo odvode. Če pa je področje "nepravilne" oblike, potem vozlišča mreže ne padejo točno na robove območja. Za vsako robno točko mreže moramo potem določiti vrednost z interpolacijo iz notranjih točk. V podrobnosti se ne bomo spuščali.

20.13 Amplitudna enačba

Gibanje kvantnega delca v potencialnem polju opisuje razširjena amplitudna enačba

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = [E - V(x)]\,\psi\,. \tag{20.40}$$

Energije E ne poznamo. V diskretnih točkah zapišemo enačbo kot

$$\psi_{i+1} = -\psi_{i-1} + 2\psi_i \; + f(E,V_i)\psi_i. \tag{20.41}$$

Strelska metoda.

Nato izberemo primerno vrednost energije E. Ker mora veljavna amplituda izginiti pri prodiranju v visok potencial, postavimo začetno vrednost ψ_0 na nič in naslednjo vrednost ψ_1 na poljubno majhno število. Nato izračunamo vrednost ψ_2 iz obeh predhodnih. Tako korakamo do desnega roba. Dobljeno amplitudo normiramo. S tem se ustrezno prilagodijo vse strmine, tudi tista, ki smo jo izbrali na levem robu. Če je sedaj desna robna amplituda enaka nič, je bila izbrana energija kar prava. Če pa ne, poskusimo znova z drugo energijo. Ko smo našli dve energiji, pri katerih amplituda spremeni predznak na desnem robu, poiščemo boljše približke z razpolavljanjem tega intervala. Podobno poiščemo tudi druge energije in lastne funkcije. Metoda je uporabna tudi za osnosimetrične in centralne potenciale $V(r)$, le $\nabla^2\psi$ moramo zapisati v ustreznih koordinatah. □

Glavni viri

Osnovna šola

Smeltzer, D., 2003: *Man and Number.* Dover Publications, Mineola.
Euler, L., 1738/1942: *Einleitung zur Rechenkunst.* Birkhauser Verlag, Basel.
Francisti, J., 1982: *Kalendar i mjerenje vremena.* Nišro Dnevnik, Novi Sad.
Lagan, J., 2006: *The Barefoot Navigator.* Adlard Coles Nautical, London.

Srednja šola

Euler, L., 1770/2006: *Elements of Algebra.* Tarquin Publications, St Albans.
Thompson, S., 1969: *Calculus Made Easy.* Macmillan, London.
Kline, M., 1985: *Mathematics for the Nonmathematician.* Dover Publications, Mineola.
Hogben, L., 1937: *Mathematics for the Million.* Allen and Unwin, London.

Visoka šola

Anton, H., 1977: *Elementary linear algebra.* Wiley and Sons, New York.
Euler, L., 1785/1983: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen, I.* Springer Verlag, Berlin.
Courant, R., 1971: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, 1–2.* Springer Verlag, Berlin.
Braun, M., 1979: *Differentialgleichungen und ihre Anwendungen.* Springer Verlag, Berlin.
Ivanović, D., 1971: *Vektorska analiza.* Naučna knjiga, Beograd.
Taylor, J., 1982: *An Introduction to Error Analysis.* University Science Books, Mill Valley.
Schmid, E. W., 1987: *Theoretical Physics on the Personal Computer.* Springer Verlag, Berlin.

Dopolnilno čtivo

Katz, V. (Ed.), 2007: *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook.* Princeton University Press, Princeton.
Smith, D. E., 1959: *A Source Book in Mathematics.* Dover Publications, Mineola.
Burton, D., 2006: *The History of Mathematics.* McGraw-Hill, New York.

Viri slik

Publikacije pred 1923	Agricola, 1556: *De Re Metallica*. Apian, P., 1524:*Cosmographia*. Brache, T., 1589: *Astronomiae instauratae mechanica*. Comstock, G., 1903: *A Text-Book of Astronomy*. Frisius, G., 1533, grafika. Kopernik, N., 1543: *De revolutionibus orbium coelestium*. Liu Hui, 236/1992: *The Sea Island Mathematical Manual*. Rubens, P. / d'Aiguillon, F., 1613: *Opticorum Libri Sex*.
Publikacije po 1923	Fraumeni, J., 1968: J. Nat. Cancer Inst. Hogben, L., 1960: *Mathematics in the Making*. Needham, J., 1995: *Science and Civilisation in China*.
Spletišča	Celestial Products Eterea Estudios Hungarian Geographic Museum, Erd National Geographic National Maritime Museum, Greenwich Royal Observatory, Greenwich Science Museum, London US Weather Bureau
Posamezniki	Mercator, P.

Kazalo

astrolab 6.2

binomska porazdelitev 19.5, 19.6
binomska vrsta 10.3

ciklometrične funkcije 10.9
cirkulacija polja 17.4

čas 1.6
- greenwichki kronometrski 6.9
- lokalni kronometrski 6.6
- lokalni sončni 6.4
- lokalni zvezdni 6.7

časovna anomalija Sonca 6.6
časovni pasovi 6.10

dan (enota) 6.1
deklinacija zvezd 6.7
deklinacije Sonca 6.3
delta polja 17.5
dif. enačbe, navadne
- drugega reda 18.3, 20.8
- prvega reda 18.2, 20.7

dif. enačbe, parcialne
- advekcijska 18.4, 20.9
- amplitudna 18.8, 20.13
- difuzijska 18.6, 20.11
- potencialna 18.7, 20.12
- valovna 18.5, 20.10

diferenciali 11.2
- totalni diferencial 15.5

divergenčni izrek 17.3
divergenca polja 17.3

eksponentna funkcija 10.4
ekstremi funkcij 11.8, 15.8
- vezani 15.9

enačbe, pomen 5.5, 5.6
enakonočje 3.4

funkcije 9.1–2, zapis z
- enačbo 9.1, 9.8, 19.15
- grafom 9.1, 9.7
- tabelo 9.1, 9.8

funkcije več spremenljivk 15.3–7

geocentrični model sveta 3.6
geometrijska vrsta 10.2
gnomon 3.3
gradient polja 17.2
grezilo 3.3

harmonične vrste 13.6, 13.8
harmonični integrali 13.9
heliocentrični model sveta 7.13
horizontalna ravnina 1.5

integral funkcije 12.1
- elementarni integrali 12.2
- pravila integriranja 12.3

izrek o istoležnih stranicah 7.2

kombinacije 19.1
kompleksne funkcije 13.5
konservativno polje 17.5
koordinate, cilindrične 14.1, 17.7
koordinate, kartezične 14.1, 16.1
koordinate, sferične 14.1, 17.8
koordinatni sistem 14.1
korelacijski koeficient 19.10
koreni 5.4, 10.3
kot 6.2, 7.4
kotna minuta 6.2
kotna stopinja 6.2
kotomer 6.2
kovarianca 19.10
krivulje
- dolžinski element 16.7
- elementarne 16.2–5
- krivinski radij 16.8
- opis z enačbo 16.1
- tangenta 16.8
- ukrivljenost 16.8
- vektorski opis 16.6

krog
- obseg 7.4
- razni izreki 7.4

kronometer 6.5
krožna konstanta 7.4, 12.4, 13.7
kulminacija 3.1
kulminacijska višina 6.3
kvadrant 6.2
kvadratna enačba 9.6
kvadratna funkcija 9.6

leto 6.1
- civilno 6.1

linearna enačba 9.6
linearna funkcija 9.6
linearna regresija 19.15
logaritemska funkcija 10.5
logaritemsko računalo 8.7
logaritmi 8.4–6

matrike 14.8–9
- in lastni vektorji 14.13–14
- računanje z njimi 14.10–12

merske napake 19.12
- absolutna 19.12
- intervalna ocena 19.13
- ocena 19.12
- relativna 19.12

širjenje 19.12
značilna mesta 5.2
Mesec 3.5
oddaljenost 7.12
velikost 7.12
mesec 6.1
meter (palica) 7.1, 7.11
meter 7.1, 7.11
milja 7.1
minuta 6.5
morska milja 7.11

navpičnica 1.5
nebesna os 3.5
nebesna telesa 3.5
nebesni ekvator 6.4
nebesni pol 3.5
nebesni poldnevnik 6.4
nebesno gibanje
Meseca 3.5
planetov 3.5
Sonca 3.1, 3.5
zvezd 3.5
normalna porazdelitev 19.7

obratna sorazmernost 9.4
obrestni račun 5.5, 5.6
obzorni krog 3.4
odvod funkcije 11.1
elementarni odvodi 11.3
pravila odvajanja 11.4, 11.5
parcialni odvodi 15.4

paralaksa 7.6
permutacije 19.1
planeti 3.5
ploščina 7.9
ploščina pod krivuljo 12.5
ploščine elementarnih likov 7.9
ploščinski integral 15.10
ploskve
elementarne 16.9
krivulje na ploskvi 16.11
normala 16.12
opis z enačbo 16.1
ploščinski element 16.11
ukrivljenost 16.12
vektorski opis 16.10
podobni trikotniki 7.2
polje in krivočrtne koordinate 17.6
cilindrične 17.7
sferične 17.8
poševni trikotnik 7.7
izrek o vsoti kotov 7.7
kosinusni izrek 7.7
sinusni izrek 7.7
poskusi in izidi 19.2
potenčna funkcija 9.5
potenčne vrste 10.3
potence 5.1, 5.3, 8.3, 13.4
povprečje vzorčnih povprečij 19.11
povprečna vrednost 19.8
površina 7.9
površine elementarnih teles 7.9
pravokotni trikotnik
hipotenuzni izrek 7.3
kotna razmerja 7.5
preizkušanje domnev 19.14
pretok polja 17.3
projekcija, ekvatorska valjna konformna 16.16
projekcija, polarna stereografska 16.15
projekcija, stožčna konformna 16.17
projekcije, geografske 16.14, 16.18
prostornina 7.10
prostornina vrtenine 12.5
prostornine elementarnih teles 7.10
prostorninski integral 15.11

razvoj funkcije v harmonično vrsto 13.6
elementarni razvoji 13.7
razvoj funkcije v potenčno vrsto 11.6
elementarni razvoji 11.7
rektascenzija zvezd 6.8
rotor polja 17.4
rotorski izrek 17.4

sekunda 6.5
sence 3.2, 6.4, 7.2
sferični trikotniki 16.13
hipotenuzni izrek 16.13
kosinusni izrek 16.13
sinusni izrek 16.13
sinusoida 10.8
skalarna polja 17.1
slučajne spremenljivke 19.2
smerni odvod 17.2
solsticij 3.4
Sonce 3.1
oddaljenost 7.12
velikost 7.12
sorazmernost 9.3
spremenljivke 9.1
standardna deviacija 19.8
statistično laganje 19.16
strani neba 3.3

števila, decimalna 4.4
računanje z njimi 4.5
števila, kompleksna 13.1
računanje z njimi 13.2
števila, naravna 2.1–2
računanje z njimi 2.3–7

števila, relativna 8.1
računanje z njimi 8.2
števila, ulomna 4.1–2
računanje z njimi 4.3

točka Gama 6.8
trajanje 1.6
triangulacija 7.6, 7.8
trigonometrične funkcije 10.6–8

ura (enota) 6.4
ura, nihalna 6.5
ura, sončna 6.4
ura, vzmetna 6.5

variacije 19.1
varianca 19.8
varianca vzorčnih povprečij 19.11
večdimenzijske verjetnostne porazdelitve 19.9
večkratni integral 15.12
vektorji 14.1–2
računanje z njimi 14.3–7
vektorska polja 17.1
vektorske funkcije 15.1–2
verjetnost izida 19.3
verjetnost sestavljenega izida 19.4
verjetnostna porazdelitev 19.3
vzorčenje 19.11

zemeljski ekvator 6.9
zemeljski poldnevniki 6.9
zemeljski vzporedniki 6.9
Zemlja
oblika 3.6
velikost 7.11
zemljepisna dolžina 6.9
zemljepisna lega 6.9
zemljepisna širina 6.9
zenit 6.4
zenitna razdalja 6.4
zvezde 3.5, 6.7

ISBN 978-961-290-099-1 (pdf)