IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2015

Letnik 62

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2015, letnik 62, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

MNOŽICE CELOŠTEVILSKIH IN RACIONALNIH RAZDALJ

JANKO BRAČIČ

Naravoslovnotehniška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 14G05

V članku predstavimo nekaj rezultatov, povezanih s takšnimi množicami v ravnini, v katerih so vse medsebojne razdalje med točkami cela ali racionalna števila.

SETS OF INTEGRAL AND RATIONAL DISTANCES

We present a few results related to point sets in the plane such that all pairwise distances of points in the set are integral or rational.

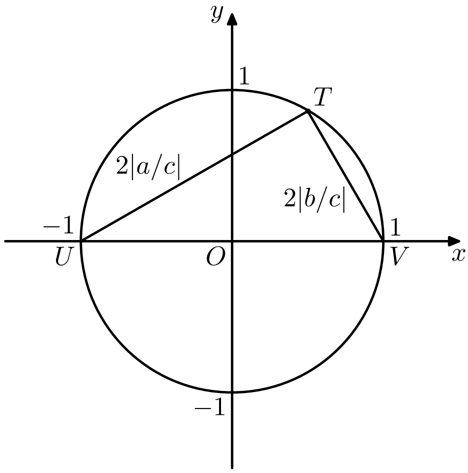
Članek je posvečen profesorju Milanu Hladniku ob njegovem 65. rojstnem dnevu.

Uvod

Podmnožica $\mathcal{S}$ točk v ravnini je *množica racionalnih razdalj*, če je razdalja $\mathrm{d}(A,B)$ med poljubnima točkama $A, B \in \mathcal{S}$ racionalno število. Če pa je razdalja med poljubnima točkama iz $\mathcal{S}$ celo število, rečemo, da je $\mathcal{S}$ *množica celoštevilskih razdalj*.

Verjetno bralcu ne bo težko poiskati primera množice celoštevilskih razdalj s tremi točkami. Še več, enostaven razmislek nas prepriča, da za poljubna naravna števila $p \leq q \leq r$, za katera velja $r \leq p+q$, obstajajo takšne točke A, B in C v ravnini, da je $\mathrm{d}(A,B) = p$, $\mathrm{d}(A,C) = q$ in $\mathrm{d}(B,C) = r$. Kaj pa množica celoštevilskih razdalj, ki ima več kot tri točke? Odgovor je seveda trivialen, če dovolimo, da so točke kolinearne. Očitno vsaka premica vsebuje neskončno podmnožico celoštevilskih razdalj. Preden nadaljuje z branjem, vabim bralca, da poišče štiri nekolinearne točke v ravnini, katerih medsebojne razdalje so naravna števila.

Leta 1945 sta Anning in Erdős [1] dokazala, da je vsaka neskončna množica celoštevilskih razdalj kolinearna. Po drugi strani pa sta pokazala, da za vsako naravno število n obstaja nekolinearna množica celoštevilskih razdalj z močjo n. Še istega leta je Ulam postavil vprašanje, ali obstaja v $\mathbb{R}^2$ gosta množica racionalnih razdalj. On sam je podvomil, da takšna množica res obstaja. Erdős se je k temu problemu občasno vračal v naslednjih desetletjih, a rešitve do danes še nihče ni našel. Tako je trditev, da v $\mathbb{R}^2$ ni goste



Slika 1. Konstrukcija množice racionalnih razdalj na enotski krožnici.

podmnožice racionalnih razdalj, znana kot *Erdős-Ulamova domneva* in je eno izmed mnogih odprtih vprašanj v *diskretni geometriji*.

V tem članku bomo navedli nekaj rezultatov, povezanih z množicami celoštevilskih in racionalnih razdalj. V naslednjem razdelku bomo obravnavali predvsem množice celoštevilskih razdalj in med drugim dokazali omenjeni izrek iz [1]. V tretjem razdelku se bomo ukvarjali z množicami racionalnih razdalj. Videli bomo, katere krožnice imajo goste podmnožice racionalnih razdalj. V zadnjem razdelku bomo na kratko spregovorili o Erdős-Ulamovi domnevi.

Bralec je verjetno že poiskal kakšno množico štirih točk v ravnini, katerih medsebojne razdalje so naravna števila. Če ne, naj se najprej prepriča, da je $\mathcal{S} = \{A(0,0),\ B(5,0),\ C(9,0),\ D(0,12)\}$ takšna množica, potem pa naj poišče takšno točko E v ravnini, da bo tudi $\mathcal{S} \cup \{E\}$ množica celoštevilskih razdalj.

Množice celoštevilskih razdalj

Čeprav bomo v tem razdelku govorili predvsem o množicah celoštevilskih razdalj, začnimo obravnavo z množicami racionalnih razdalj. Da vsaka premica v ravnini vsebuje gosto podmnožico racionalnih razdalj oziroma neskončno podmnožico celoštevilskih razdalj, je trivialno. Kaj pa krožnica? Očitno krožnica ne more vsebovati neskončne podmnožice celoštevilskih razdalj. (V premislek: vsaka omejena množica točk v ravnini ima samo končne podmnožice celoštevilskih razdalj.) Ali vsebuje krožnica gosto podmnožico racionalnih razdalj? Poglejmo enotsko krožnico s središčem v koordinatnem začetku

$$\mathcal{K}(O,1) = \{T(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

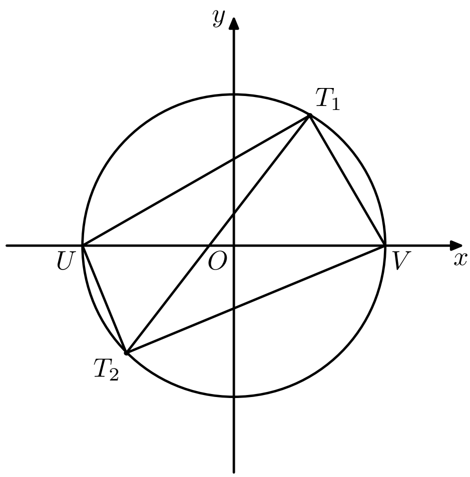
Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$, cela števila, za katera velja $a^2 + b^2 = c^2$. Potem točka $T(\frac{a^2-b^2}{c^2}, \frac{2ab}{c^2})$ očitno leži na krožnici $\mathcal{K}(O,1)$. Njena oddaljenost od točke $U(-1,0) \in \mathcal{K}(O,1)$ je $2|\frac{a}{c}|$ in oddaljenost od $V(1,0) \in \mathcal{K}(O,1)$ je $2|\frac{b}{c}|$. To sta racionalni števili.

Spomnimo, Ptolemajev izrek pravi, da so v tetivnem štirikotniku $ABCD$ stranice in diagonali povezane z enakostjo $|\overline{AC}||\overline{BD}| = |\overline{AB}||\overline{CD}| + |\overline{AD}||\overline{BC}|$. Če sta $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(O,1)$ točki, ki ju določajo cela števila $a_1, b_1, c_1 \neq 0$ oziroma $a_2, b_2, c_2 \neq 0$ tako, kot smo navedli prej, potem so U, V, T_1 in T_2 oglišča tetivnega štirikotnika, v katerem je daljica $\overline{T_1T_2}$ bodisi stranica bodisi diagonala, vendar je v vsakem primeru njena dolžina racionalni izraz dolžin preostalih stranic in diagonal, ki pa so, kot smo že ugotovili, racionalna števila. Sklenemo torej lahko, da je

$$\mathcal{S} = \left\{T\left(\tfrac{a^2-b^2}{c^2}, \tfrac{2ab}{c^2}\right); \quad a, b, c \in \mathbb{Z}, c \neq 0 : \; a^2 + b^2 = c^2\right\} \tag{1}$$

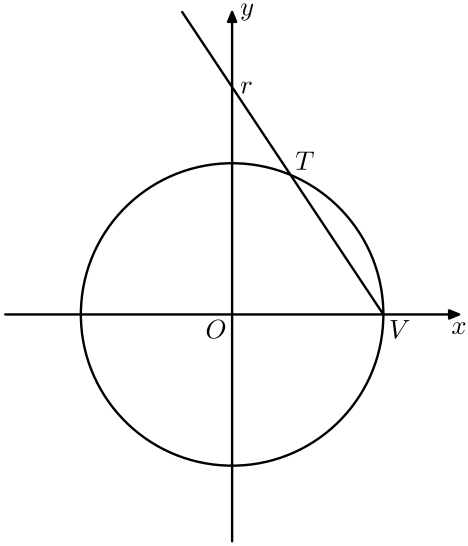
množica racionalnih razdalj. Pokažimo, da je gosta v $\mathcal{K}(O,1)$. Naj bo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{K}(O,1)$ definirana z

$$\varphi : \; r \mapsto T\left(\frac{r^2-1}{r^2+1}, \frac{2r}{r^2+1}\right) \qquad (r \in \mathbb{R}).$$



Slika 2. Tetivni štirikotnik z racionalnimi stranicami in diagonalami.

To je zvezna preslikava, ki $\mathbb{R}$ bijektivno preslika v $\mathcal{K}(O,1)\setminus\{V(1,0)\}$ (glejte sliko 3). Racionalno število $\frac{p}{q}$, kjer je $p \in \mathbb{Z}$ in $q \in \mathbb{N}$, se preslika v točko



Slika 3. Projekcija krožnice na premico.

$T(\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}, \frac{2pq}{p^2+q^2}) \in \mathcal{S}$. Ko $\frac{p}{q}$ preteče celotno množico $\mathbb{Q}$, dobimo množico $\mathcal{S}\setminus\{V(1,0)\}$. Ker je $\mathbb{Q}$ gosta v $\mathbb{R}$, je $\mathcal{S}\setminus\{V(1,0)\}$ gosta v $\mathcal{K}(O,1)\setminus\{V(1,0)\}$ oziroma $\mathcal{S}$ je gosta v $\mathcal{K}(O,1)$. Dokazali smo naslednjo trditev:

Trditev 1. *Krožnica $\mathcal{K}(O,1)$ vsebuje gosto podmnožico racionalnih razdalj.*

Posledica 2. *Za vsako naravno število $n \geq 3$ obstaja nekolinearna množica celoštevilskih razdalj z močjo n.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{S}$ množica iz (1). Izberimo poljubne točke $T_i(x_i, y_i) \in \mathcal{S}$ $(1 \leq i \leq n)$. Njihove medsebojne razdalje so pozitivna racionalna števila, recimo

$$\mathrm{d}(T_i, T_j) = \frac{p_{ij}}{q_{ij}}, \qquad p_{ij}, q_{ij} \in \mathbb{N} \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

Naj bo v najmanjši skupni večkratnik števil q_{ij} $(1 \leq i < j \leq n)$ in naj bo $A_i(vx_i, vy_i)$ za vse $1 \leq i \leq n$. Potem so $A_1, \ldots, A_n$ nekolinearne točke, katerih medsebojne razdalje so naravna števila

$$\mathrm{d}(A_i, A_j) = \frac{vp_{ij}}{q_{ij}} \quad (1 \leq i < j \leq n).$$

■

Pokažimo, da velja tudi drugi del Anning-Erdősevega izreka. Uporabili bomo eleganten dokaz, ki ga je Erdős objavil v kratki notici [4].

Trditev 3. *Vsaka nekolinearna množica celoštevilskih razdalj v ravnini je končna.*

Dokaz. Naj bosta $P, Q \in \mathbb{R}^2$ poljubni točki, katerih medsebojna razdalja je naravno število, recimo $\mathrm{d}(P, Q) = k$. Če je $R \in \mathbb{R}^2$ takšna točka, da sta tudi razdalji $\mathrm{d}(P, R)$ in $\mathrm{d}(Q, R)$ naravni števili, potem iz trikotniške neenakosti

$$\mathrm{d}(P, R) \leq \mathrm{d}(P, Q) + \mathrm{d}(Q, R) = k + \mathrm{d}(Q, R)$$

sledi

$$\mathrm{d}(P, R) - \mathrm{d}(Q, R) \leq k.$$

Podobno vidimo, da velja tudi

$$\mathrm{d}(Q, R) - \mathrm{d}(P, R) \leq k.$$

To pomeni, da je

$$|\,\mathrm{d}(P, R) - \mathrm{d}(Q, R)| = j$$

za neko število $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Množica točk

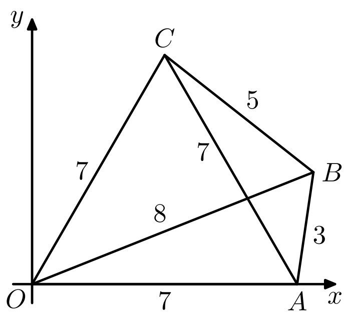
$$\mathcal{H}_j(P, Q) = \{T \in \mathbb{R}^2; \quad |\,\mathrm{d}(P, T) - \mathrm{d}(Q, T)| = j\}$$

je hiperbola z goriščema P in Q, če je $j \in \mathbb{N}$, in je simetrala daljice $\overline{PQ}$, ko je $j = 0$ (na to simetralo lahko gledamo kot na izrojeno hiperbolo z goriščema P in Q). Povzemimo: točka R, za katero sta razdalji $\mathrm{d}(P, R)$ in $\mathrm{d}(Q, R)$ naravni števili, leži na eni od hiperbol $\mathcal{H}_j(P, Q)$, $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Vzemimo zdaj, da je $\mathcal{S}$ nekolinearna množica celoštevilskih razdalj. Naj bodo $A, B, C \in \mathcal{S}$ nekolinearne točke. Označimo $\mathrm{d}(A, C) = m$ in $\mathrm{d}(B, C) = n$. Če je $T \in \mathcal{S}$ točka, različna od točk A, B in C, potem T leži na eni od hiperbol $\mathcal{H}_i(A, C)$, $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, in na eni od hiperbol $\mathcal{H}_j(B, C)$, $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$, torej na presečišču dveh takšnih hiperbol. Ker so A, B, C nekolinearne točke, imata družini hiperbol $\{\mathcal{H}_i(A, C);\ i = 0, 1, \ldots, m\}$ in $\{\mathcal{H}_j(B, C);\ j = 0, 1, \ldots, n\}$ le končno mnogo presečišč. Se pravi, da je v $\mathcal{S}$ lahko le končno mnogo točk. ∎

Množice celoštevilskih razdalj, ki smo jih srečali do sedaj, so bile posebne: bodisi so vse točke ležale na isti krožnici bodisi so vse točke razen kvečjemu ene bile na isti premici. Ali obstajajo množice racionalnih razdalj z veliko točkami, pri čemer pa večina točk ni na isti premici oziroma krožnici? Rekli bomo, da je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ množica točk v *splošni legi*, če nobene tri točke iz $\mathcal{S}$ ne ležijo na isti premici in nobene štiri točke iz $\mathcal{S}$ ne ležijo na isti krožnici. Definicija je netrivialna, če so v $\mathcal{S}$ vsaj štiri točke, zato najprej naloga za bralca: poiščite v $\mathbb{R}^2$ množico celoštevilskih razdalj v splošni legi z vsaj štirimi točkami. Naloga ni tako preprosta, kot se zdi na prvi pogled. Trik, da ogliščem pravokotnega trikotnika s celoštevilskimi stranicami dodamo četrto točko tako, da dobimo pravokotnik s celoštevilskimi stranicami in diagonalama, ni dober, saj ležijo oglišča pravokotnika na isti krožnici in torej niso v splošni legi. Navajamo naslednji zgled:

Zgled 1. Ni težko preveriti, da so točke $O(0,0)$, $A(7,0)$, $B(\frac{52}{7}, \frac{12\sqrt{3}}{7})$ in $C(\frac{7}{2}, \frac{7\sqrt{3}}{2})$ v splošni legi. To lahko razberemo tudi s slike 4, na kateri smo navedli še medsebojne razdalje med točkami.



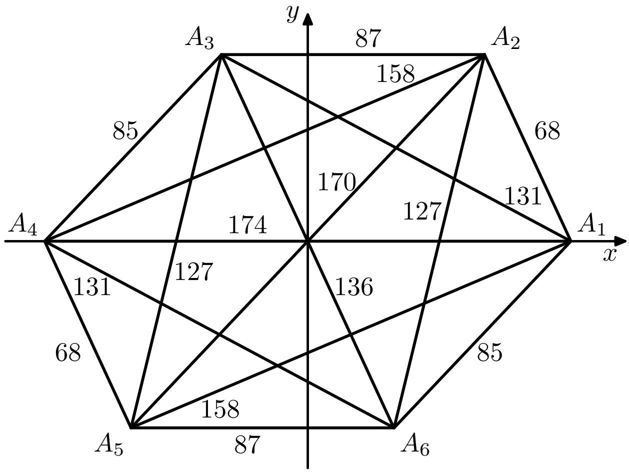
Slika 4. Erdősev štirikotnik.

Bralec se je verjetno prepričal, da poiskati množico celoštevilskih razdalj s štirimi točkami v splošni legi ni enostavna naloga. Toliko zahtevnejše je poiskati primere množic celoštevilskih razdalj s petimi ali celo več točkami v splošni legi. Vendar je takšnih množic kar nekaj. Na sliki 5 je verjetno prvi primer takšne množice s šestimi točkami. Odkril ga je Jean Lagrange okrog leta 1982.

Množicam celoštevilskih razdalj v splošni legi nekateri rečejo *Erdősevi mnogokotniki*. V zgledu 1 je tako naveden primer Erdősevega štirikotnika in Lagrangeeva množica je Erdősev šestkotnik. Dolgo je bilo odprto vprašanje, ali obstajajo Erdősevi sedemkotniki. Problem sta šele pred kratkim rešila Kreisel in Kurz [6]. Našla sta (seveda s pomočjo računalnika) množico celoštevilskih razdalj s sedmimi točkami v splošni legi:

$$A_1(0,0),\ A_2(22\,270,0),\ A_3\Big(\frac{26\,127\,018}{2\,227}, \frac{932\,064\sqrt{2002}}{2\,227}\Big),\ A_4\Big(\frac{245\,363}{17}, \frac{3\,144\sqrt{2002}}{17}\Big),$$

$$A_5\Big(\frac{17\,615\,968}{2\,227}, \frac{238\,464\sqrt{2002}}{2\,227}\Big),\ A_6\Big(\frac{56\,068}{17}, \frac{3\,144\sqrt{2002}}{17}\Big),\ A_7\Big(\frac{19\,079\,044}{2227}, -\frac{54\,168\sqrt{2002}}{2227}\Big).$$



Slika 5. Lagrangeev primer Erdősevega šestkotnika.

V naslednji tabeli so navedene medsebojne razdalje med temi točkami:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
A_1	0	22 270	22 098	16 637	9 248	8 908	8 636
A_2		0	21 488	11 397	15 138	20 698	13 746
A_3			0	10 795	14 450	13 430	20 066
A_4				0	7 395	11 135	11 049
A_5					0	5 780	5 916
A_6						0	10 744
A_7							0

Zdaj, ko je problem Erdősevega sedemkotnika rešen, se postavlja vprašanje, ali obstaja kakšen Erdősev osemkotnik.

Množice racionalnih razdalj

Kot smo videli v trditvi 1, ima krožnica $\mathcal{K}(O,1)$ gosto podmnožico racionalnih razdalj. Ali to velja za vsako krožnico? Da lahko odgovorimo, potrebujemo nekaj splošnih trditev o množicah racionalnih razdalj. Pokažimo, da nekatere preslikave v ravnini preslikajo množice racionalnih razdalj v množice racionalnih razdalj.

Trditev 4. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ množica racionalnih razdalj in naj bodo $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$, $r \in \mathbb{Q}$ poljubna števila. Potem so tudi*

(i) $\mathcal{S} + (a,b) = \{T(x+a, y+b); \quad T'(x,y) \in \mathcal{S}\}$,

(ii) $r\mathcal{S} = \{T(rx, ry);\quad T'(x,y) \in \mathcal{S}\}$ *in*

(iii) $\rho_\alpha(\mathcal{S}) = \{T(x\cos\alpha - y\sin\alpha, x\sin\alpha + y\cos\alpha);\quad T'(x,y) \in \mathcal{S}\}$ *množice racionalnih razdalj.*

Dokaz. Zlahka preverimo, da trditev velja. Poglejmo, recimo, množico $\rho_\alpha(\mathcal{S})$. Naj bosta $T_1(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$ in $T_2(x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha, x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha)$ poljubni točki v $\rho_\alpha(\mathcal{S})$. Potem sta $T_1'(x_1, y_1)$ in $T_2'(x_2, y_2)$ v $\mathcal{S}$, kar pomeni, da velja

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(T_1, T_2) = \\ &\sqrt{((x_2-x_1)\cos\alpha - (y_2-y_1)\sin\alpha)^2 + ((x_2-x_1)\sin\alpha + (y_2-y_1)\cos\alpha)^2} \\ &= \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \mathrm{d}(T_1', T_2') \in \mathbb{Q}.\end{aligned}$$ ■

Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem v točki $S(p, q)$ in s polmerom $r > 0$. *Inverzija* glede na krožnico $\mathcal{K}$ je preslikava

$$\iota :\ \mathbb{R}^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{S\},$$

ki točki T priredi tisto točko $T' = \iota(T)$ na poltraku, ki se začne v S in gre skozi T, za katero velja

$$\mathrm{d}(S, T)\,\mathrm{d}(S, T') = r^2.$$

Če ima $T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{S\}$ koordinati (x, y), potem sta koordinati preslikane točke $T' = \iota(T)$ dani z

$$x' = p + \frac{r^2(x-p)}{(x-p)^2 + (y-q)^2} \quad \text{in} \quad y' = q + \frac{r^2(y-q)}{(x-p)^2 + (y-q)^2}. \tag{2}$$

Ni se težko prepričati, da ι preslika T' nazaj v točko T. Od tod sledi, da je ι bijektivna preslikava na prebodeni ravnini $\mathbb{R}^2 \setminus \{S\}$. Če ravnini $\mathbb{R}^2$ dodamo *točko v neskončnosti* S_∞, da dobimo razširjeno ravnino $\widetilde{\mathbb{R}}^2$, potem lahko inverzijo ι razširimo do bijekcije na $\widetilde{\mathbb{R}}^2$, pri čemer velja $\iota(S) = S_\infty$ in $\iota(S_\infty) = S$. Na premice v razširjeni ravnini lahko gledamo kot na krožnice z neskončno velikim polmerom in s središčem v S_∞. Zdaj se ni težko prepričati, da v razširjeni ravnini inverzija preslika krožnice v krožnice (bralec naj premisli, kam se preslikajo krožnice in premice, ki vsebujejo točko S). Poglejmo naslednji poseben primer, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju.

Zgled 2. Za inverzijo glede na krožnico $\mathcal{K}(O, 1)$ velja

$$\iota :\ (x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right), \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

Naj bo $r > 0$. Pokažimo, da ι preslika premico, ki je parametrično podana z $x = r$, $y = t$ ($t \in \mathbb{R}$), v krožnico s središčem v točki $(\frac{1}{2r}, 0)$ in s polmerom $\frac{1}{2r}$. Ker velja

$$\left(\frac{r}{r^2+t^2} - \frac{1}{2r}\right)^2 + \left(\frac{t}{r^2+t^2}\right)^2 = \frac{1}{4r^2},$$

je $\iota(r,t) = \left(\frac{r}{r^2+t^2}, \frac{t}{r^2+t^2}\right)$ res točka na krožnici s središčem v točki $(\frac{1}{2r}, 0)$ in s polmerom $\frac{1}{2r}$. Opazimo, da je točka $(0,0)$ na tej krožnici. Vanjo se preslika točka v neskončnosti. Naj bo zdaj $(u,v) \neq (0,0)$ poljubna točka na krožnici s središčem v $(\frac{1}{2r}, 0)$ in s polmerom $\frac{1}{2r}$. Potem kratek račun pokaže, da je $\iota(u,v) = (r, r\frac{v}{u})$, torej točka na premici $x = r$, $y = t$ ($t \in \mathbb{R}$).

Trditev 5. *Naj bo $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ množica racionalnih razdalj. Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem v točki $S(p,q) \in \mathcal{S}$ in s polmerom $r > 0$, za katerega velja $r^2 \in \mathbb{Q}$. Če je ι inverzija glede na $\mathcal{K}$, potem je $\iota(\mathcal{S} \setminus \{S\}) \subseteq \mathbb{R}^2$ množica racionalnih razdalj.*

Dokaz. Pokazati moramo, da je za poljubni točki $T_1(x_1,y_1)$, $T_2(x_2,y_2) \in \mathcal{S} \setminus \{S\}$ razdalja $\mathrm{d}(\iota(T_1), \iota(T_2))$ racionalno število. Najprej opazimo, da je za poljubno točko $T(x,y) \in \mathcal{S} \setminus \{S\}$ razdalja $\mathrm{d}(S,T) = \sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2}$ racionalno število, saj je $\mathcal{S}$ množica racionalnih razdalj in sta $S, T \in \mathcal{S}$. Koordinati točk $\iota(T_j)$ ($j = 1,2$) sta (glejte (2))

$$x_j' = p + \frac{r^2(x_j - p)}{(x_j-p)^2 + (y_j-q)^2} \quad \text{in} \quad y_j' = q + \frac{r^2(y_j - q)}{(x_j-p)^2 + (y_j-q)^2}.$$

Z nekaj računanja dobimo

$$\mathrm{d}(\iota(T_1), \iota(T_2)) = r^2 \frac{\mathrm{d}(T_1,T_2)}{\mathrm{d}(S,T_1)\,\mathrm{d}(S,T_2)}.$$

Ker so po predpostavki r^2, $\mathrm{d}(T_1,T_2)$, $\mathrm{d}(S,T_1)$ in $\mathrm{d}(S,T_2)$ racionalna števila, je tudi $\mathrm{d}(\iota(T_1), \iota(T_2))$ racionalno število. ∎

Zdaj lahko povemo, katere krožnice v ravnini imajo goste podmnožice racionalnih razdalj.

Izrek 6. *Naj bo $\mathcal{K}$ krožnica s središčem v točki $S(p,q)$ in s polmerom $r > 0$. Naslednje trditve so ekvivalentne:*

(i) r^2 je racionalno število;

(ii) $\mathcal{K}$ ima gosto podmnožico racionalnih razdalj;

(iii) obstajajo tri točke $A, B, C \in \mathcal{K}$, katerih medsebojne razdalje so racionalna števila.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Naj bo $\mathcal{L}$ premica, ki je parametrično podana z $x = \frac{1}{2r}$, $y = t$ $(t \in \mathbb{R})$. Kot smo videli v zgledu 2, preslika inverzija glede na krožnico $\mathcal{K}(O,1)$, označimo jo z ι, premico $\mathcal{L}$ v krožnico

$$\mathcal{K}: \quad (x-r)^2 + y^2 = r^2,$$

natančneje $\iota(\mathcal{L}) = \mathcal{K} \setminus \{O\}$. Množica točk

$$\mathcal{S}_0 = \{(\tfrac{1}{2r}, \tfrac{m}{r^2m^2-1}); \quad m \in \mathbb{Q} \setminus \{\tfrac{1}{r}, -\tfrac{1}{r}\}\}$$

je gosta podmnožica v $\mathcal{L}$. Za poljubni točki $T_1(\frac{1}{2r}, \frac{m_1}{r^2m_1^2-1})$, $T_2(\frac{1}{2r}, \frac{m_2}{r^2m_2^2-1}) \in \mathcal{S}_0$ je

$$\mathrm{d}(T_1, T_2) = \left| \frac{m_1}{r^2m_1^2 - 1} - \frac{m_2}{r^2m_2^2 - 1} \right| \in \mathbb{Q},$$

tako da je $\mathcal{S}_0$ množica racionalnih razdalj. Ker je za vsako točko $T(\frac{1}{2r}, \frac{m}{r^2m^2-1}) \in \mathcal{S}_0$ razdalja do koordinatnega začetka O enaka $\mathrm{d}(O,T) = \frac{r^2m^2+1}{r^2m^2-1} \in \mathbb{Q}$, je tudi $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \{O\}$ množica racionalnih razdalj. Uporabimo trditev 5, pa vidimo, da je tudi $\iota(\mathcal{S}_0) \subseteq \mathcal{K}$ množica racionalnih razdalj. Ker je $\mathcal{S}_0$ gosta podmnožica v $\mathcal{L}$, je $\iota(\mathcal{S}_0)$ gosta podmnožica v $\mathcal{K}$, saj je ι zvezna preslikava.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Ta implikacija očitno velja.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Označimo $a = \mathrm{d}(A,B)$, $b = \mathrm{d}(B,C)$ in $c = \mathrm{d}(A,C)$. Krožnica $\mathcal{K}$ je trikotniku ABC očrtana, zato velja

$$r = \frac{abc}{4p},$$

kjer je p ploščina trikotnika ABC. Po Heronovem obrazcu je $p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, pri čemer je $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ polovica obsega. Se pravi, da velja

$$r^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}.$$

Ker so a, b, c racionalna števila, je tudi r^2 racionalno število. ■

Za premice in krožnice v ravnini smo ugotovili, kdaj vsebujejo kakšno gosto podmnožico racionalnih razdalj. Kaj pa druge krivulje? V [7] sta Solymosi in de Zeeuw pokazala, da razen premic in krožnic druge algebraične krivulje ne premorejo neskončnih podmnožic racionalnih razdalj (pri tem so mišljene takšne algebraične krivulje, katerih kakšna komponenta ni premica ali krožnica). V posebnem, vsaka podmnožica racionalnih razdalj elipse (ki ni krožnica) ali hiperbole ali parabole je končna. Na primer, za parabolo $y = x^2$ so znane le podmnožice racionalnih razdalj v splošni legi s kvečjemu štirimi točkami. Takšen primer so točke z abscisami

$$x_1 = \frac{5392284536718697904101 67}{9727950873020199597668800}, \quad x_2 = \frac{1331012266196114465365521 37}{2918385261906059879300640 0},$$
$$x_3 = \frac{1135884384473851748882954 3}{2918385261906059879300640 0}, \quad x_4 = \frac{6756734701093279907841433}{9727950873020199597668800}.$$

Ker so vse abscise pozitivne, so te točke seveda v splošni legi. Več o podmnožicah racionalnih razdalj parabole $y = x^2$ lahko bralec najde v [2, 3].

Erdős-Ulamova domneva

Na koncu se vrnimo k Erdős-Ulamovi domnevi. Vzemimo, da obstaja gosta podmnožica racionalnih razdalj v $\mathbb{R}^2$, označimo jo s $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$. Ta hipotetična množica ima nekatere zanimive lastnosti. Na primer, Solymosi in de Zeeuw [7, Theorem 2.2] sta dokazala: če ima množica racionalnih razdalj $\mathcal{S}$ na neki premici $\mathcal{L}$ (ali krožnici $\mathcal{K}$) neskončno mnogo točk, potem so vse točke, razen mogoče štirih (oziroma treh), na premici $\mathcal{L}$ (oziroma krožnici $\mathcal{K}$). Od tod sledi, da je za vsako premico $\mathcal{L}$ in vsako krožnico $\mathcal{K}$ presek $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}} \cap \mathcal{L}$ oziroma $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}} \cap \mathcal{K}$ končna množica. Namreč, če bi bil kateri od omenjenih presekov neskončen, bi vse točke iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$, razen mogoče končno mnogo, bile na neki premici oziroma krožnici. To pa nasprotuje predpostavki, da je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta podmnožica v $\mathbb{R}^2$. Že prej smo omenili, da algebraične krivulje, katerih del ni premica ali krožnica, sploh nimajo neskončnih podmnožic racionalnih razdalj. Sklenemo torej lahko, da je presek $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ s katero koli algebraično krivuljo v $\mathbb{R}^2$ končna množica.

Ker je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta podmnožica v $\mathbb{R}^2$, vsebuje vsaj dve različni točki. Z uporabo preslikav iz trditve 4 lahko $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ preoblikujemo v gosto podmnožico racionalnih razdalj v $\mathbb{R}^2$, ki pa vsebuje koordinatni začetek $O(0,0)$ in točko $V(1,0)$. Brez škode za splošnost privzemimo, da je že $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ takšna množica. Seveda, ker je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta v $\mathbb{R}^2$, obstaja takšna točka v njej, ki leži v zgornji polravnini, recimo točka $A(a, \sqrt{b})$, kjer je $b > 0$. Če sta $P(p_1, p_2)$ in $Q(q_1, q_2)$ poljubni točki iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$, so števila

$$\mathrm{d}(P,O)^2 = p_1^2 + p_2^2, \quad \mathrm{d}(Q,O)^2 = q_1^2 + q_2^2 \quad \text{in} \quad \mathrm{d}(P,Q)^2 = (p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2$$

racionalna. Zaradi

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = \tfrac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 - (p_1 - q_1)^2 - (p_2 - q_2)^2\right)$$

je racionalno tudi število $p_1 q_1 + p_2 q_2$. Vzemimo za Q točko V, pa dobimo $p_1 \in \mathbb{Q}$. Ugotovili smo, da je abscisa vsake točke iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ racionalno število.

V posebnem, število a, abscisa točke A, je racionalno. Iz $\mathrm{d}(A,O)^2 = a^2 + b \in \mathbb{Q}$ zato sledi, da je $b \in \mathbb{Q}$. Zdaj, ko vemo, da so abscise točk iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ racionalna števila, iz $p_1q_1 + p_2q_2 \in \mathbb{Q}$ sklepamo, da je tudi produkt ordinat p_2q_2 poljubnih dveh točk iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ racionalno število. V posebnem, ko je $Q = A$, dobimo $p_2\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, kar nam da $p_2 = s\sqrt{b}$ za neko racionalno število s (upoštevali smo, da je b racionalno število). Pokazali smo, da je

$$\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}} \subseteq \{T(t, s\sqrt{b}); \quad t, s \in \mathbb{Q}\},$$

pri čemer je b neko pozitivno racionalno število. Med drugim od tod sledi, da je množica $\mathcal{S}_{eu}$ števna.

V teoriji grafov je znan Fáryjev izrek, ki pravi, da lahko vsak ravninski graf narišemo tako, da so povezave daljice, ki se ne sekajo. Še vedno pa je odprto vprašanje, znano kot *Harborthova domneva*, ali lahko graf narišemo tako, da bodo povezave daljice, ki se ne sekajo in katerih dolžine so naravna števila. Če je Erdős-Ulamova domneva napačna in torej množica $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ obstaja, potem bi Harborthova domneva veljala: vsak ravninski graf lahko narišemo z daljicami, ki se ne sekajo in katerih dolžine so cela števila. Namreč, če je $\mathcal{G}$ ravninski graf z n vozlišči, potem po Fáryjevem izreku obstajajo takšne točke $V_1, \ldots, V_n$ v ravnini, ki predstavljajo vozlišča grafa, da so vse povezave iz grafa predstavljene z daljicami, ki se ne sekajo. Ker je $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ gosta množica, lahko blizu vsake točke V_j ($j = 1, \ldots, n$) najdemo kakšno točko iz $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$. Če izberemo točke $V_1', \ldots, V_n' \in \mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$ tako, da je V_j' dovolj blizu V_j za vsak indeks $j = 1, \ldots, n$, lahko $\mathcal{G}$ realiziramo na točkah $V_1', \ldots, V_n'$, pri tem pa bodo povezave še vedno daljice. Še več, ker so točke $V_1', \ldots, V_n'$ v $\mathcal{S}_{\mathfrak{eu}}$, so dolžine daljic racionalna števila. Če zdaj naredimo ustrezen razteg ravnine, dobimo realizacijo grafa $\mathcal{G}$ na nekih točkah $V_1'', \ldots, V_n''$, pri čemer pa so povezave daljice, ki se ne sekajo in imajo celoštevilske dolžine.

LITERATURA

[1] N. Anning in P. Erdős, *Integral distances*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 598–600.

[2] G. Campbell, *Points on $y = x^2$ at rational distance*, Math. Comp. **73** (2004), 2093–2108.

[3] A. Choudhry, *Points at rational distances on a parabola*, Rocky Mountain J. Math. **36** (2006), 413–424.

[4] P. Erdős, *Integral distances*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), str. 996.

[5] P. Erdős, *Some combinatorial and metric problems in geometry*, v: *Intuitive Geometry*, Coll. Math. Soc. János Bolyai **48** (1987), 167–177.

[6] T. Kreisel in S. Kurz, *There are integral heptagons, no three points on a line, no four on a circle*, Discrete Comput. Geom. **39** (2008), 786–790.

[7] J. Solymosi in F. de Zeeuw, *On a question of Erdős and Ulam*, Discrete Comput. Geom. **43** (2010), 393–401.

K TERMODINAMIKI TERMOMAGNETNIH STROJEV

JANEZ STRNAD[1], PRIMOŽ ZIHERL[1,2]

[1]Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani
[2]Institut Jožef Stefan

PACS: 72.15Jf, 75.30.Sg

Ob stoosemdeseti obletnici Stefanovega rojstva se spomnimo njegove obravnave termomagnetnih strojev. Je pomanjkljiva, ker ne upošteva odvisnosti magnetnega momenta od gostote magnetnega polja, a poučna. Dodamo nekaj pripomb o toploti pri pojavih v magnetnem polju in njihovih odkriteljih.

ON THE THERMODYNAMICS OF THERMOMAGNETIC ENGINES

On the hundred and eightieth anniversary of Stefan's birth his treatment of thermomagnetic engines is revisited. It is deficient, since the dependence of the magnetic moment on the magnetic field is not considered, but instructive. Some remarks are added concerning heat in effects in a magnetic field and their discoverers.

Jožef Stefan je leta 1888 v Poročilih z zasedanja cesarske Akademije znanosti na Dunaju objavil daljši članek *O termomagnetnih motorjih*, ki je leto pozneje izšel še v Fizikalnih analih [1]. V prvem delu je opisal poskuse s termomagnetnim nihalom in strojem [2]. Namesto pločevine iz železa je uporabil pločevino iz niklja zaradi nižje Curiejeve temperature, nad katero snov izgubi feromagnetne lastnosti. V drugem delu je delovanje stroja pospremil s termodinamičnimi enačbami. Obravnavanje termodinamike feromagnetne snovi je zelo zahtevno [3]. To zbudi radovednost o dosegu Stefanovega razmeroma preprostega računa.

Stefanova izpeljava

Sledimo Stefanu in enačbe oštevilčimo enako kot on, uporabimo pa naše simbole in totalne odvode nadomestimo s parcialnimi. Pojave obravnavamo v najpreprostejšem enodimenzionalnem primeru. Vzamemo trajen magnet v izhodišču s statičnim magnetnim poljem z gostoto $B_z(z)$. V polju v smeri osi z se giblje telo iz feromagnetne snovi, ki je tako majhno, da smemo gostoto magnetnega polja v njem imeti po smeri in po velikosti za konstantno. Telo ima magnetni moment p v smeri magnetnega polja. Upoštevamo odvisnost magnetnega momenta od temperature, ne pa od gostote magnetnega polja. Na magnetni moment v smeri magnetnega polja v nehomogenem magnetnem polju deluje proti gostejšemu polju sila $F_z = p(\partial B/\partial z)$, če pri komponentah p_z in B_z zaradi preglednosti opustimo indeks [4]. Delo te sile je $dA = -F_z dz = -p(\partial B/\partial z)dz = -pdB$. Spremembe vzamemo za tako počasne, da se ni treba ozirati na toploto, ki se v telesu razvije zaradi indukcije. To se sklada s privzetkom, da so spremembe reverzibilne.

Energijski zakon se glasi:

$$dW_n = dQ + dA = dQ - pdB. \tag{1}$$

Kot spremenljivki izberemo absolutno temperaturo T in gostoto magnetnega polja B. Privzamemo, da se prostornina magneta ne spreminja in je sploh ne upoštevamo. Dovedeno toploto izrazimo z enačbo:

$$dQ = C_B dT + D_T dB. \tag{2}$$

Koeficient C_B pomeni toplotno kapaciteto pri konstantni gostoti magnetnega polja, pomen D_T bo postal jasen nižje, ko bomo zapisali totalni diferencial entropije. Notranja energija W_n je enolična funkcija stanja in dW_n je totalni diferencial. Enačbo (1) najprej delimo z dT in odvajamo po gostoti polja B. Po drugi strani jo lahko najprej delimo z dB in nato odvajamo po temperaturi T. Upoštevamo, da je pri konstantni gostoti polja $(dW_n)_B = (dQ)_B$, in izenačimo mešana odvoda:

$$\frac{\partial C_B}{\partial B} = \frac{\partial D_T}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T} \quad \text{s} \quad C_B = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_B \quad \text{in} \quad D_T = \left(\frac{\partial Q}{\partial B}\right)_T. \tag{3}$$

Določeni temperaturi T ustreza določena vrednost momenta p, določeni koordinati z pa določena gostota magnetnega polja. Sprememba entropije $dS = dQ/T$ je totalni diferencial in z enačbo (2) dobimo:

$$dS = C_B \frac{dT}{T} + D_T \frac{dB}{T}.$$

Vidimo, da je D_T v enačbi (2) povezan z odvodom entropije po B pri konstantni T: $D_T = T(\partial S/\partial B)_T$.

Zdaj gornji totalni diferencial entropije zopet delimo z dT in odvajamo po gostoti B ter potem delimo z dB in odvajamo po temperaturi T. Upoštevamo, da so nekateri členi pri konstantni gostoti magnetnega polja enaki nič in izenačimo mešana odvoda:

$$\frac{\partial C_B}{\partial B} = \frac{\partial D_T}{\partial T} - \frac{D_T}{T}. \tag{4}$$

Iz enačb (3) in (4) sledi:

$$D_T = T\frac{\partial p}{\partial T}. \tag{5}$$

Za adiabatno spremembo, pri kateri je $dQ = dS = 0$, dasta enačbi (2) in (5) za spremembo temperature:

$$dT = -\frac{D_T}{C_B} dB = -\frac{T}{C_B}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right) dB. \tag{6}$$

William Thomson, poznejši lord Kelvin, je leta 1878 opozoril, da je zveza posledica obeh osnovnih zakonov termodinamike [1].

V enačbo (3) vstavimo D_T iz enačbe (5) in ugotovimo, da določa C_B enačba:

$$\frac{\partial C_B}{\partial B} = T\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}. \tag{7}$$

Iz nje izhaja, da C_B ni odvisen od B, če se p pri konstantni gostoti polja spreminja linearno s temperaturo T. V splošnem pa velja:

$$C_B - C_{B0} = \int_0^B T\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} dB. \tag{8}$$

C_B je toplotna kapaciteta v magnetnem polju z gostoto B, če je C_{B0} toplotna kapaciteta v polju $B = 0$, torej običajna toplotna kapaciteta telesa.

Pri danih T in B je magnetni moment p odvisen tudi od oblike telesa. Zato je tudi kapaciteta C_B odvisna od oblike telesa. Če telo iz polja $B = 0$ prestavimo v polje B, ne da bi mu dovedli toploto, se po enačbi (6) spremeni njegova temperatura. Če naj poteka pojav pri konstantni temperaturi, moramo telesu dovesti toploto:

$$\int_0^B D_T dB = \int_0^B T\frac{\partial p}{\partial T} dB = T\frac{\partial}{\partial T}\int_0^B p dB.$$

Zadnji integral podaja oddano delo $A_o = \int_0^B p dB$. Torej je dovedena toplota $T\partial A_o/\partial T$. Če A_o z naraščajočo temperaturo pojema, je ta izraz negativen. Od telesa moramo odvesti toploto in je $Q_o = -T\partial A_o/\partial T$ toplota, odvedena pri približevanju telesa magnetu.

Če še naprej zahtevamo, da ostane temperatura T pri gibanju telesa konstantna, enačba (8) preide v:

$$C_B - C_{B0} = T\frac{\partial^2 A_o}{\partial T^2} = \frac{\partial}{\partial T}\left(T\frac{\partial A_o}{\partial T} - A_o\right) = -\frac{\partial(Q_o + A_o)}{\partial T}.$$

Če telo v polju B segrejemo od T_0 na T_1, porabimo za to več toplote kot pri enaki spremembi zunaj polja. Razlika je:

$$\int_{T_0}^{T_1} (C_B - C_{B0}) dT = Q_{o0} + A_{o0} - (Q_{o1} + A_{o1}). \tag{9}$$

Če se telo magnetu približa pri temperaturi T_0, pri kateri se magnetni moment le malo spremeni, je toplota Q_{o0} zelo majhna. Če oddaljimo telo od magneta pri temperaturi T_1, pri kateri je magnetni moment zelo majhen, sta toplota in delo Q_{o1} in A_{o1} zelo majhna. V tem primeru je A_{o0} pri krožni spremembi odvedeno delo, ki se ujema z dovedeno toploto. Delo A_{o0}

primerjamo z odvedenim delom pri elektromotorju z enako gostoto polja in enakim magnetnim momentom, pri katerem potem prekinemo magnetilni tok. Delo pri termomagnetnem stroju je v resnici večje, ker je magnetni moment po segretju zanemarljivo majhen. Nazadnje je Stefan razpravljal o drugih oblikah energijskega zakona za ta primer.

Današnji pogled na Stefanov račun

V našem času se tega računa ne bi lotili enako. Stefanove enačbe (2) ne bi zapisali, ker smo pri termodinamičnem formalizmu bolj dosledni pri upoštevanju tega, da toplota ni funkcija stanja in da dQ zato ni diferencial. Po drugi strani ta zveza v Stefanovem računu neposredno ne nastopa, saj jo je zares uporabil le pri totalnem diferencialu entropije. Ta je funkcija stanja in zato je izračun mešanih odvodov, s katerim je naposled prišel do odvisnosti specifične toplote od gostote magnetnega polja, pravilen.

Stefanov postopek se nam poleg tega danes zdi nekoliko preokoren. Do nemara najbolj zanimivega rezultata, to je odvisnosti specifične toplote od gostote magnetnega polja (8), namreč hitreje pridemo s primernim termodinamičnim potencialom. Izhajajoč iz enačbe (1) bi na prvi pogled dejali, da je to prosta energija. Natančnejši premislek pokaže, da lahko pri magnetnih sistemih vpeljemo dve vrsti dela [5]. Prva, ki jo je uporabil Stefan, je oblike $-pdB$ in se nanaša na interakcijo permanentnega dipola s konstantnim, čeprav krajevno odvisnim magnetnim poljem. Druga pa je enaka Bdp in vključuje tudi prispevek zaradi tokov proti inducirani napetosti ob premiku dipola. V skladu z dogovorom, da je delo produkt intenzivne spremenljivke in diferenciala ekstenzivne spremenljivke, bi danes Stefanovi magnetni notranji energiji torej točneje rekli magnetna entalpija H, saj med obema oblikama dela preskočimo z Legendrovo transformacijo. Zato je termodinamični potencial, iz katerega dobimo enačbo (8), prav imenovati magnetna prosta entalpija $G = H - TS$ [3, 5]; tu smo W_n iz zveze (1) že preimenovali v H. Totalni diferencial G dobimo iz energijskega zakona (1) in iz entropijskega zakona za reverzibilno spremembo $dS = dQ/T$: $dG = dH - TdS - SdT = (dH - dQ) - SdT = -SdT - pdB$. Razberemo, da je $(\partial G/\partial T)_B = -S$ in $(\partial G/\partial B)_T = -p$. Kot prej prvi izraz odvajamo po B in drugega po T, izenačimo dobljena mešana odvoda in dobimo Maxwellovo relacijo:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial B}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_B . \tag{10}$$

Zdaj ni daleč do totalnega diferenciala entropije $dS = (\partial S/\partial T)_B \, dT + (\partial S/\partial B)_T \, dB$. Ker je toplotna kapaciteta definirana s

$$C_B = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B , \tag{11}$$

imamo

$$dS = \frac{C_B}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_B dB.$$

Za $dS = 0$ sledi enačba (6). Enačbo (8) dobimo tako, da enačbo (11) odvajamo po B in upoštevamo enačbo (10):

$$\frac{\partial C_B}{\partial B} = T \left(\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial B} \right) = T \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right) = T \frac{\partial^2 p}{\partial T^2}.$$

To integriramo po B in sledi enačba (8).

Ta bližnjica je udobnejša, a seveda ne vsebuje ničesar razen prvega in drugega zakona termodinamike, kakor ju je uporabil tudi Stefan – le da ju v prosti energiji vnaprej združimo. Obenem z Legendrovo transformacijo presedlamo na B in T kot tisti neodvisni termodinamični spremenljivki, ki sta za ta račun najbolj prikladni, in se s tem izognemo nekaj vrsticam. Ko se je leta 1888 Stefan ukvarjal s problemom termomagnetnih motorjev, najbrž še ni vedel za prosto energijo. Gibbs in neodvisno od njega kasneje Helmholtz sta jo namreč vpeljala leta 1875 oziroma 1882 in povsem verjetno je, da novost Stefana takrat še ni dosegla.

Primerjava Stefanove in današnje izpeljave ima tudi pedagoški nauk. Spomni nas namreč na to, da sta osnovna termodinamična potenciala vendarle notranja energija W_n in entropija S, iz katerih tvorimo druge potenciale, ki so v izbranih okoliščinah bolj priročni. Teh je lahko pri večjem številu termodinamičnih spremenljivk precej [6] in vsaka od tako skonstruiranih funkcij sistem v izbranih okoliščinah opiše pregledneje kot W_n in S (prosta energija F npr. pomeni delo, ki ga sistem lahko izmenja z okolico pri stalni temperaturi). Kljub temu se njihova fizikalna vsebina ne oddalji od prvega in drugega zakona termodinamike, saj se seveda ne more.

Vrnimo se k Stefanovemu računu. Njegova ugotovitev, da je toplotna kapaciteta feromagnetne snovi v magnetnem polju večja kot zunaj polja, je pravilna, hiba njegovega izvajanja pa je v privzetku, da je magnetni moment sicer odvisen od temperature, a neodvisen od gostote magnetnega polja. Ta poenostavitev je sorodna temu, da bi vzeli, da se prostornina kake kapljevine spreminja s temperaturo, toda ni odvisna od tlaka, in vodi do nevzdržnih sklepov. Toplotna kapaciteta pri stalnem magnetnem momentu C_p, ki je analog toplotne kapacitete plina ali kapljevine pri stalni prostornini, bi bila pri takem magnetu neskončna, kar izhaja iz tega, da v Stefanovem modelu iz $p = konst.$ sledi $T = konst.$ Zato se pri stalnem momentu kljub končni dovedeni toploti temperatura magneta ne bi spremenila, kar ustreza neskončni vrednosti C_p in seveda ni fizikalno smiselno. Istočasno bi bila neskončna tudi razlika toplotnih kapacitet pri stalnih B in p

$$C_B - C_p = T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_B^2 \left(\frac{\partial p}{\partial B} \right)_T^{-1}$$

ter s tem tudi C_B, kajti v Stefanovem modelu je $(\partial p / \partial B)_T = 0$. To seveda prav tako ni sprejemljivo. Sklepanje bi lahko tudi obrnili in zahtevali, da je

C_B končna, pa bi preko razlike $C_B - C_p$ prišli do negativne C_p, kar zopet ne gre. Teh anomalij ne dobimo pri fizikalno konsistentnih enačbah stanja, kot je npr. Curiejev zakon, ki opisuje paramagnetne snovi. V Stefanovem času magnetizma niso poznali tako podrobno kot danes (Curiejev zakon izvira iz leta 1895 in Curie-Weissov zakon iz leta 1907), ko delovanja termomagnetnih strojev ne obravnavamo na Stefanov način [7, 8].

O toploti pri pojavih v magnetnem polju

Spremembe magnetnega polja na temperaturo feromagnetnega telesa vplivajo na tri načine. Spremenljivo magnetno polje inducira vrtinčne tokove, ki segrevajo telo z Joulovo toploto. Michael Faraday je leta 1831 odkril indukcijski zakon. Njegov poskus velja za enega od najpomembnejših poskusov 19. stoletja. James Prescott Joule je leta 1843 ugotovil, da se zaradi induciranih tokov sprosti toplota enako, kot se sprosti pri vsakem drugem toku.

Toplota se sprosti pri magnetni histerezi, ko se tarejo Weissove domene. Histerezo je pri železu prvi ugotovil Emil Warburg leta 1881, objavil histerezno krivuljo in ugotovil, da je delo pri krožni spremembi sorazmerno z njeno ploščino. Neodvisno od njega je magnetno histerezo odkril James Alfred Ewing in ji leto pozneje dal ime.

Na tretji način se sprošča ali porabi toplota zaradi sprememb magnetnega polja reverzibilno pri *magnetokaloričnem pojavu.* Na termodinamični osnovi je pojav napovedal z enačbo (7) William Thomson, poznejši lord Kelvin, leta 1860 v enciklopediji in leta 1878 v članku, kot je omenil Stefan. Telo se segreje, ko počasi vključimo magnetno polje ali ga premaknemo v magnetno polje, in ohladi, ko magnetno polje izključimo ali telo premaknemo iz polja. Ni jasno, ali je Thomson vedel, da velja to tudi nad Curiejevo temperaturo v paramagnetni snovi. Pri merjenju je bilo pojav težko razločevati od prvih dveh pojavov. Warburg je leta 1882 skupaj z Ludwigom Hönigom jasno razločil tri z magnetnim poljem povezane pojave, pri katerih se sprošča toplota. Mislila sta, da se pri Thomsonovem pojavu sprosti tako majhna toplota, da je ne bo mogoče izmeriti. Stefan je v članku o zakonih elektromagnetne indukcije leta 1871 vedel, da telo nad določeno temperaturo izgubi feromagnetne lastnosti in napovedal možnost termomagnetnih strojev. V članku leta 1888 je omenil, da je Thomas Alva Edison izdelal tak stroj in da sta Edwin James Houston in Elihu Thomson o stroju poročala leta 1879. Stefan je izločil segrevanje zaradi vrtinčnih tokov. Magnetne histereze ni omenil, tako da ne poznamo njegovega stališča o njej. Izpeljal je Thomsonovo enačbo (7) in delal poskuse, a ni posebej poskusil izmeriti ali oceniti toplote v zvezi z njo. Edison in Nikola Tesla sta patentirala termomagnetni stroj, prvi leta 1888, drugi leta 1889.

Po letu 1999 so navajali, da je magnetokalorični pojav odkril Warburg leta 1881. Anders Smith pa je po pregledu objav leta 2013 prišel do prepričanja, da ni tako [9]. Po njegovem mnenju sta ga odkrila Pierre Weiss in Auguste Piccard leta 1917. Zavedala sta se, da je pojav reverzibilen in da je najizrazitejši blizu Curiejeve temperature. Pri niklju sta izmerila povišanje temperature za 0,7 stopinje Celzija v magnetnem polju z gostoto 1 tesla. Zares ga ni izmeril nihče pred njima. Ni znano, ali sta poznala Thomsonovo delo. Preseneča, da Smith med odkritelji ni omenil Williama Thomsona, ki je pojav napovedal v okviru termodinamike, čeprav je res, da ni meril in ni poskusil oceniti spremembe temperature. Omenil je Stefanovo napoved termomagnetnih strojev. Vsaj mi omenimo, da je Stefan raziskal termodinamiko termomagnetnih strojev v okviru privzetka, da magnetni moment ni odvisen od gostote magnetnega polja, in podprl Thomsonovo enačbo.

Magnetokalorični pojav je postal zelo pomemben. Na začetku 20. stoletja so z njim raziskovali magnetno zgradbo železa in podobnih snovi. Peter Debye leta 1926 in William Francis Giauque leta 1927 sta neodvisno drug od drugega ugotovila, da je mogoče doseči zelo nizko temperaturo z *adiabatno demagnetizacijo* paramagnetnih soli. V soli, ki je v stiku s toplotnim rezervoarjem pri nizki temperaturi, na primer s helijevo kopeljo, so ustvarili magnetno polje. Potem so sol toplotno izolirali in izključili magnetno polje ter tako dosegli nižjo temperaturo. S ponavljanjem so znižali temperaturo do tisočine kelvina. Pogosto so uporabili cerijev magnezijev nitrat, po odkritju gadolinija leta 1935 pa so prešli na gadolinijev sulfat. Odkar so odkrili snovi z velikim magnetokaloričnim pojavom blizu sobne temperature, v zadnjih petnajstih letih vneto raziskujejo magnetno hlajenje. Na ta način je mogoče izdelati učinkovite in zanesljive hladilnike, ki delujejo tudi pri sobni temperaturi.

Zgodba o odkriteljih s toploto povezanih pojavov v magnetnem polju se zdi dokaj razgibana. Morda jo bolje razumemo, če se opremo na pripombo Alana G. Grossa: »Odkritje ni zgodovinski dogodek, ampak naknadna družbena presoja« [10].

LITERATURA

[1] J. Stefan, *Über thermomagnetische Motoren*, Sitzungsberichte d. kais, Akademie d. Wissenschaften in Wien. Math. naturw. Classe **97** (1888), 70–81; Annalen der Physik **274** (1889), 427–440.

[2] J. Strnad in P. Ziherl, *Stefanov termomagnetni motor*, Presek **43** (2015), 13–15.

[3] I. Kuščer in S. Žumer, *Toplota*, DMFA & ZOTK, Ljubljana 1987, str. 13, 14.

[4] J. Strnad, *Fizika, tretji del*, DMFA, Ljubljana 1998, str. 200.

[5] M. Bailyn, *A survey of thermodynamics*, AIP Press, New York 1994, str. 348.

[6] R. A. Alberty, *Use of Legendre transforms in chemical thermodynamics*, Pure and Applied Chemistry **73** (2001), 1349–1380.

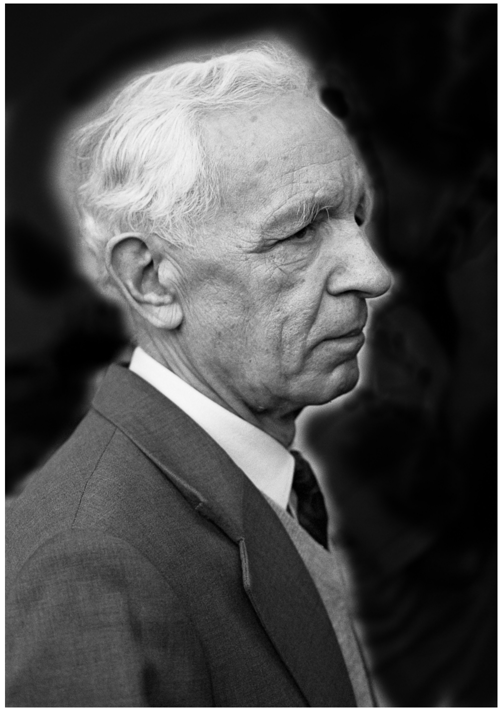
[7] K. N. Andreevskii, A. G. Mandzhavidze, I. G. Margvelashvili in S. V. Sobolevskaya, *Investigation of the thermodynamic and physical characteristics of a thermomagnetic engine with a gadolinium working element*, Technical Physics **41** (1998), 119–122.

[8] A. Karle, *The thermomagnetic Curie-motor for the conversion of heat into mechanical energy*, International Journal of Thermal Science **40** (2001), 834–842.

[9] A. Smith, *Who discovered the magnetocaloric effect?*, The European Physical Journal H **38** (2013), 507–517.

[10] A. G. Gross, *Do disputes over priority tell us anything about science?*, Science in Context **11** (1998), 161–179.

V SPOMIN AKADEMIKU IVANU VIDAVU (1918–2015)[1]



Akademik Ivan Vidav, matematik, je bil rojen leta 1918 na Opčinah pri Trstu. Klasično gimnazijo je obiskoval v Mariboru. Po maturi leta 1937 je študiral matematiko in fiziko na Filozofski fakulteti Univerze v Ljubljani. Diplomiral je leta 1941 in istega leta tudi promoviral z disertacijo, v kateri je rešil problem, ki mu ga je profesor Plemelj predlagal leto prej, ob koncu tretjega letnika študija. Leta 1943 je postal honorarni asistent, leta 1946 docent, leta 1949 izredni profesor in leta 1953 redni profesor za matematiko na Filozofski fakulteti Univerze v Ljubljani. Na Univerzi v Ljubljani je delal vse do leta 1986, ko se je upokojil kot profesor matematike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo.

Leta 1954 je postal predstojnik prirodoslovno-matematičnega oddelka na takratni Prirodoslovno-matematično-filozofski fakulteti, dve leti kasneje njen prodekan, leta 1957 pa prvi dekan novonastale Naravoslovne fakultete. Vrsto let je bil predstojnik katedre oziroma kasneje odseka za matematiko na leta 1960 nastali Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, kar je ostal do leta 1975. Sodeloval je tudi na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani. Profesor Vidav je raziskovalno delal na različnih področjih matematične analize. Njegova disertacija je s področja diferencialnih enačb. V začetku petdesetih let je bil dvakrat na izpopolnjevanju pri S. Mandelbrojtu v Parizu. V tem času se je ukvarjal s teorijo aproksimacij. Naslednje področje njegovega delovanja je bila funkcionalna analiza, kjer je posebej znana njegova slovita metrična karakterizacija sebiadjungiranih operatorjev, ki jo je našel leta 1956 in je rezultat, ki je pomembno vplival na teorijo Banachovih algeber. Pomembno področje njegovega dela je bila

[1] Govor na žalni seji SAZU dne 13. oktobra 2015 in na žalni seji Fakultete za matematiko in fiziko dne 14. oktobra 2015.

tudi uporaba funkcionalne analize v transportni teoriji nevtronov, kjer je objavil daljšo razpravo leta 1970 – ta je njegovo največkrat citirano delo – še več del s tega področja pa je objavil skupaj s svojimi sodelavci.

Profesor Vidav je bil izvrsten predavatelj. Njegova predavanja so bila jasna in razumljiva. Ko je predaval še predmete v prvem letniku, so bila njegova predavanja vzor, kako je treba krmariti med matematično strogostjo, geometrijsko nazornostjo in uporabnostjo. Bila so tako dodelana, da je bilo videti, kot da ni mogoče nič več vprašati. Imel je izredno človeški odnos do študentov na izpitih. Profesor Vidav je bil na ljubljanski univerzi mentor petinosemdesetim diplomantom, štirinajstim magistrandom in šestnajstim doktorandom. Profesor Vidav je imel ključno vlogo pri razvoju podiplomskega študija matematike v Sloveniji, ki ga je kot prvi predavatelj na tem študiju na ljubljanski univerzi začel v sedemdesetih letih.

Profesor Vidav je avtor več knjig (pretežno učbenikov) iz matematike: Višja matematika I (1949, predelana izdaja 1968), Višja matematika II (1952), Rešeni in nerešeni problemi matematike (1959), Števila in matematične teorije (1965), Algebra (1972), Afina in projektivna geometrija (1981), Diferencialna geometrija (1989), Eliptične krivulje in eliptične funkcije (1991).

Profesor Vidav je bil dejaven tudi v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije od ustanovitve leta 1949 dalje. Bil je njegov predsednik in podpredsednik. Leta 1988 je postal njegov častni član. Bil je član uredniškega odbora Obzornika za matematiko in fiziko od leta 1952 do leta 1983. Do leta 1992 je urejal Knjižnico Sigma. Imel je vrsto predavanj za javnost ter za dijake in srednješolske profesorje na seminarjih za strokovno izpopolnjevanje učiteljev. Napisal je vrsto člankov v Obzorniku za matematiko in fiziko ter vrsto člankov v Preseku za mlade, ki jih zanima matematika.

Za svoje delo je prejel različna priznanja in nagrade: Prešernovo nagrado je prejel leta 1952 za delo Višja matematika I in II ter Kidričevo nagrado leta 1970 za dela s področja uporabe funkcionalne analize v transportni teoriji nevtronov. Leta 1981 je prejel prestižno jugoslovansko nagrado Avnoj. Leta 1992 pa je prejel nagrado Republike Slovenije za znanstvenoraziskovalno delo (ta nagrada ima danes ime Zoisova nagrada). Prejel je več državnih odlikovanj: leta 1965 red dela z rdečo zastavo, leta 1974 red republike s srebrnim vencem, leta 2008 pa je prejel zlati red za zasluge za izjemne zasluge pri razvoju znanosti in izobraževanja v Sloveniji. Ljubljanska univerza mu je leta 1987 podelila naziv zaslužni profesor, leta 1997 pa častni doktorat. Za izrednega člana Slovenske akademije znanosti in umetnosti je bil izvoljen leta 1958, za njenega rednega člana pa leta 1962.

Profesor Vidav je združeval v sebi veliko različnih sposobnosti in odlik: bil je v svetu uveljavljen znanstvenik, vzgojitelj novih raziskovalcev, izjemen predavatelj, učitelj in mentor številnim generacijam študentov matematike, avtor znanstvenih in strokovnih monografij, pisec prvovrstnih učbenikov, poljudnih knjig in strokovnih člankov, dolgoletni vodja matematičnega oddelka na Univerzi v Ljubljani z občutkom odgovornosti do razvoja matematike pri nas in do celotne matematične skupnosti, človek z brezhibno osebno integriteto, ob vsem tem pa do vseh prijazen in pregovorno skromen. Od sredine prejšnjega stoletja je prav on odločilno vplival na razvoj matematike kot organizirane znanstvene discipline v Sloveniji. S svojim delom je postavil trajno merilo kakovosti v raziskovanju in poučevanju. Njegova umirjena in preudarna beseda ostajata vzor strpnosti in modrosti v vodenju matematične skupnosti. Bil je vljuden gospod stare šole, ki je žal že skoraj izumrla, vedno prijazen in poln vzpodbud, blaga, očetovska figura. Od leta 2000 je dajal člansko nagrado SAZU za štipendiranje podiplomskih študentov matematike in naravoslovja.

Doktorski študenti profesorja Vidava smo pri delu prišli z njim v tesnejši stik in ga, vsak zase, spoznali kot krasnega človeka. Sam sem imel izredno srečo, ker je ta stik trajal vrsto let. Naj mi bo dovoljeno, da o tem povem nekaj besed. Potem ko mi je predlagal problem, ki naj bi ga za doktorat obdelal, sem mojega matematičnega očeta najprej spoznal kot matematika, ko sem mu enkrat na teden prišel poročat, kaj sem premišljeval pretekli teden. Videl sem, kako neznansko spreten je v računanju in kako hitro zna v enakosti, napisani na tabli, kaj videti in iz nje kaj zaključiti. Ko sem mu kaj pripovedoval, je vedno pozorno poslušal in mi ni nikoli segel v besedo, nato pa je vedno kaj pametnega povedal. Dal mi je problem, pri reševanju katerega je bilo mogoče narediti dosti novega. Potem, ko sem leta 1972 doktoriral, sem še naprej prihajal k profesorju vsak teden ob isti uri in mu povedal, o čem v matematiki sem razmišljal v preteklem tednu. Najprej sva se pogovarjala o matematiki, nato pa počasi še o vedno več drugih rečeh. Ti redni tedenski pogovori so trajali še nadaljnjih dvaindvajset let. Dolgoletni obiski pri profesorju so bili za mene zelo dragoceni. Spoznal sem, kako notranje bogat človek je, kako veliko razmišlja o najrazličnejših rečeh in kako zelo izobražen je na mnogih področjih, ki nimajo zveze z matematiko.

V veliko osebno zadovoljstvo mi je, da se mi je uspelo vsaj malo nalesti profesorjeve skromnosti in izredno obzirnega načina in previdnosti pri izražanju mnenj in sodb o dogodkih ali ljudeh. Hvaležen sem ob misli, da sem bil deležen njegove modrosti in pomirjujočih nasvetov in da sem bil pri njem deležen izvrstne šole tolerantnosti.

Kadar sem bil daljši čas v tujini, sem profesorju rad pisal. Nobeno pismo ni ostalo brez odgovora. Njegova pisma niso bila dolga, a povedala so veliko. Napisana so bila naravno, skromno, skoraj v samih prostih stavkih. Lepo jih je bilo brati.

Ob koncu še tole: V šestdesetih in sedemdesetih letih prejšnjega stoletja je bila še v rabi beseda tovariš, tako da je bilo reči »tovariš profesor« popolnoma običajno. No, profesorja Vidava nisem in ne bi mogel nikoli drugače imenovati kot gospod profesor. Zame je pač vedno bil in bo v mojem spominu za vedno ostal gospod. V najbolj žlahtnem pomenu te besede.

Josip Globevnik

RAZMIŠLJANJA O PROFESORJU IVANU VIDAVU[1]

Profesor Vidav je bil že za življenja pojem slovenske matematike. Njegovo ime so poznale številne generacije matematikov, fizikov, naravoslovcev, inženirjev in tudi drugih izobražencev. Danes je legenda. Tako kot je Plemelj matematično zaznamoval prvo polovico 20. stoletja v Sloveniji, je Vidav zaznamoval drugo. Bil je vreden Plemljev naslednik.

Že njegov vzpon v matematiko je bil silovit; kot študent je zgodaj pokazal svoj matematični talent. Kasneje je njegov mentor Plemelj zapisal: »Podpisani sem spoznal njegovo izvanredno nadarjenost že takoj ob prvem razgovoru na koncu njegovega prvega semestra« (takrat je bil namreč v študijskem programu obvezni kolokvij, ki ga je Plemelj uvedel za preverjanje sposobnosti študentov) »in ga zato vzel za knjižničarja. Tako je dobil možnost delati v knjižnici, jaz pa sem imel priliko do dobrega se seznaniti z njegovimi sposobnostmi. Najini pomenki niso bili v okviru mojih predavanj ali vaj, ampak so mogli cel čas obsegati najrazličnejša vprašanja vseh področij matematike.«

Nadaljnja zgodba je dobro znana. Poleti leta 1940 je Vidav rešil problem, ki mu ga je bil Plemelj spomladi mimogrede omenil. Presenečenje učitelja nad dosežkom svojega učenca najbolje kažejo Plemljeve besede, zapisane nekaj let kasneje v neki strokovni oceni v zvezi z Vidavovim napredovanjem: »Tedaj nisem niti mislil na to, da si bo on vzel ta problem v razmišljavo,

[1]Prirejeno in nekoliko dopolnjeno besedilo govora na žalni seji na Fakulteti za matematiko in fiziko dne 14. oktobra 2015.

kaj še da bi mogel uspeti. To je bilo koncem njegovega šestega semestra in ne malo je bilo moje začudenje, ko mi je nato v jeseni povedal, da mu je med počitnicami uspelo rešiti ono uganko.« Problem je namreč bil po Plemlju »prav na kraju tega, kamor je prodrlo do sedaj naše znanje v teoriji analitičnih funkcij« in je spadal med tiste, »ki so že marsikoga matematika na svetu zainteresirali in ki jim nihče ni mogel priti do jedra.« Vidav je rešitev zapisal v obliki znanstvene študije, ki jo je na profesorjevo priporočilo naslednje leto izdala Akademija znanosti. Na osnovi te razprave (kot doktorske disertacije) je Vidav leta 1941 doktoriral, in to samo dober mesec po diplomi. Kako je Plemelj cenil Vidava kot matematika in njegovo samostojno rešitev problema, beremo na drugem mestu: »Študija je poseben dokaz matematične invencije g. Vidava.« In spet drugje: »Vsak matematik sme biti upravičeno ponosen, če ima delo te višine med svojimi spisi. Dasi je prvi spis Ivana Vidava, le nima prav nič začetniškega na sebi, ampak očituje popolnoma zrelega matematika. Poudarim naj, da nimam na njegovem delu nikakega deleža.«

Teh nekaj izbranih Plemljevih besed dovolj nazorno pokaže, s kako velikim in odločnim korakom je Ivan Vidav vstopil v svet znanosti in izpričal velik talent za matematiko, pa tudi to, kakšen vtis je naredil na svojega učitelja. Čeprav se na osnovi povedanega zdi, kot da je bil Vidav že od samega začetka pravi matematik, je gotovo moral tudi on vložiti dosti napora in časa tako v študij stare kot v ustvarjanje nove matematike. Vendar so kasneje le redki med nami imeli priložnost pobliže spoznati, kako res deluje Vidavov ustvarjalni um. Ostali smo ves čas vedeli zgolj to, da profesor Vidav ne dá od sebe nič, kar ne bi bilo popolno. Vse, kar je prihajalo izpod njegovega peresa, je bilo do konca izdelano in premišljeno. Svoj čas so o njem po hodnikih fakultete celo pripovedovali, da vsak dokončan članek najprej spravi vsaj za en mesec v predal, da dozori, preden ga pošlje v tisk.

Zdi se, da je vedno ustvarjal doma, v tišini svoje sobe. Tudi na seminarje ni rad hodil, čeprav smo ga sem in tja vabili; razen seveda na uradni podiplomski seminar iz funkcionalne analize, ki ga je vodil vrsto let. Ko smo ga kdaj povprašali za pomoč pri reševanju kakšnega problema, ki nam je delal težave, se je vedno izgovoril, da se ne razume na snov in da bo premislil, že takoj naslednji dan pa je prinesel popolnoma izdelano, dokončno in skoraj vedno tudi elegantno rešitev. Take rešitve so ga zmeraj zanimale. Ko je kasneje, že v starosti več kot devetdeset let, v svoji sobi na Taboru nekoč reševal zahteven Eulerjev algebraični problem in ga tudi rešil, z rezultatom ni bil zadovoljen. Rad bi našel bolj elementarno oziroma bolj preprosto rešitev. O uporabljeni metodi reševanja je tedaj rekel: »To je tako, kot bi šel čez Triglav na Šmarno goro.«

Nič drugače ni bilo na njegovih predavanjih. Matematična vsebina, ki je nastajala pod njegovimi prsti na tabli, nas je vedno očarala. Kot da bi bil predavatelj veliki svečenik skrivnostne religije, ki se imenuje matematika, mi pa smo se z njegovim posredovanjem poglabljali v njene skrivnosti. Vse se je zdelo tako jasno in preprosto, vse tako razumljivo, da še vprašanj nismo znali zastavljati. Veliko je predaval in rad je predaval, pri tem celo užival, posebno takrat, ko je na tabli lahko prikazal kako lepo in presenetljivo preprosto rešitev zapletenega problema. Ne spomnim se, da bi Vidav kdaj za sabo popravljal napake. Predaval je na pamet (tako kot Plemelj). Tudi na tretji stopnji je, kolikor vem iz lastne izkušnje, enkrat samkrat iz žepa sramežljivo potegnil listek in z njega na tablo prerisal dolgo in komplicirano formulo, zdi se mi, da v zvezi s Steinbergovimi simboli. Znano je, da je bila Plemlju matematika »življenjska nuja in umetniški užitek«. O Vidavovih predavanjih pa lahko uporabimo kar besede kolegice Marije Vencelj, zapisane ob profesorjevi sedemdesetletnici: »Sam sposoben preplezati najtežje previsne stene je neprekosljiv in skrben vodnik svojim učencem po hribovju in sredogorju matematike, izbirajoč pri tem najlepša in najbolj uglajena pota.«

Tako kot je začel svojo kariero, jo je tudi nadaljeval. Ne glede na bolj ali manj ugodne razmere za delovanje univerzitetnega učitelja in ne glede na dodatne obveznosti, ki jih je moral prevzemati, se kakovost njegovega znanstvenega in pedagoškega dela ni spreminjala. Njegove delnice na matematični borzi niso padale, niti niso nihale. Obdržal je konstantno vrednost vseh parametrov svojega delovanja. Njegovo stalno kvaliteto je nekoč posrečeno izrazil profesor Bohte, ko je izjavil, da je »on edini, katerega odvod je enak nič,« namreč konstanten, se pravi vedno enak, vedno enako zanesljiv.

Ko smo že pri funkcijah in njihovih odvodih, naj mi bo dovoljeno navesti njegove besede izpred nekaj let, ko je bil fizično že šibak, umsko pa luciden kot vedno: »Vedno sem mislil, da je staranje zvezna počasi padajoča funkcija, zdaj pa vidim, da ima ta funkcija skoke.« V mislih je seveda imel nenadne padce. Kako pronicljiva in matematično natančna ugotovitev o poteku staranja in dokaz, da se je globoko zavedal človeške minljivosti! Razumljivo je, da je bilo staranje že prej pogosto tema njegovih pogovorov z obiskovalci. Nekoč je izjavil: »Ko sem še učil, sploh nisem opazil, da se staram. Le študentje, ki so me prihajali poslušat, so se mi zdeli vsako leto mlajši.« In ob neki drugi priliki: »Da sem že v letih, sem se zavedel šele tedaj, ko se je upokojila moja prva diplomantka.« Smisel za dovtipe ga ni zapustil niti v visoki starosti. Pred kakšnimi tremi leti je nenadoma rekel: »No, zdaj sem pa prehitel Plemlja.« Slednji je namreč umrl maja 1967, ko še ni dopolnil štiriindevetdeset let starosti, profesor Vidav pa jih je dočakal skoraj osemindevetdeset.

Tudi sicer je bil profesor Vidav v sproščenem pogovoru pogosto prav duhovit, čeprav morda na zunaj ni dajal takega vtisa. O tem bi najbrž znali veliko zanimivega povedati njegovi ožji sodelavci in stalni sogovorniki. Naj tu navedem samo neko manj znano anekdoto, ki je zapisana in ki kaže na to, da se je znal pošaliti tudi na svoj račun. V intervjuju, ki ga je po prejemu nagrade Avnoj leta 1981 dal za sarajevski časnik Oslobođenje, je na novinarjevo opazko, da se zadnjih dvajset let ni premaknil iz Ljubljane, odvrnil: »To je za mlade, jaz pa sem v letih, ko oni prihajajo k meni. Po malem se počutim kot Nasredin hodža, ki so ga nekoč, ko je bil mojih let, vprašali, kako je kaj pri močeh; pa jim je odgovoril, da se počuti kot kakšen mladenič. Ko je videl njihovo začudenje, jim je pojasnil: ›Na dvorišču imam velik kamen. Ko sem bil mlad, ga nisem mogel dvigniti; a ga ne morem dvigniti niti danes.‹ Tako je tudi z mano: v mladosti nisem mogel rešiti Fermatovega problema, a ga ne morem rešiti niti danes.« Na novinarjevo nadaljnjo pripombo, da morda Fermatov problem le ne bo ostal nerešen, v kolikor spada v funkcionalno analizo (novinar je morda hotel reči: če se bo Vidav ukvarjal z njim), pa je izstrelil kot iz topa: »Matematika je zelo zelo stara gospa, ki pa ima rada zgolj mlade. Jaz sem že dodobra zakoračil v sedmo desetletje. Bolje je, da mlade dobro pripravim na to srečanje.«

S Plemljem je imel profesor Vidav veliko skupnega, ne le strast in talent za odkrivanje novega v matematiki. Ne nazadnje sta imela tudi dokaj podobno življenjsko usodo. Oba sta npr. dočakala visoko starost, čeprav si je nobeden od njiju ni želel. Bile pa so tudi razlike. Plemelj je bil klasični matematik in ni imel posluha za moderne matematične discipline, npr. za funkcionalno analizo, v kateri je blestel Vidav in v njej dosegal največje uspehe. Škoda, da danes ravno to (Vidavovo) področje v slovenski matematiki študijsko in raziskovalno zamira, kljub temu da na njem še vedno delajo nekateri izvrstni posamezniki.

Vidav je brez dvoma občudoval svojega učitelja in mu v marsičem sledil, čeprav se v matematičnem smislu ni maral z njim primerjati. V intervjuju za Obzornik je leta 2007 npr. povedal: »Plemlju niti do kolen ne sežem. Jaz nisem nič posebnega napravil. Plemelj pa je rešil Riemannov problem. Posebej v integralskih enačbah je dosegel zelo lepe rezultate in se nikakor ne morem primerjati z njim.« V tem mnenju se seveda kaže zlasti Vidavova skromnost. V resnici je tudi njemu uspelo zelo veliko, ne le v smislu osebnega znanstvenega prestiža. Ustanovil je slovensko matematično šolo, postavil na noge redni podiplomski študij ter vzgojil veliko novih raziskovalcev matematike, da niti ne govorimo o tem, da je napisal prve slovenske visokošolske matematične učbenike in mnogo storil za popularizacijo matematike med mladimi. Razvoj matematike na Slovenskem v drugi polovici 20. stoletja je pravzaprav njegova zasluga. Če uporabimo besede Marije Vencelj, je »pot povojnega razvoja slovenske matematike« v resnici njegova »pot matematika znanstvenika, pot pisca in učitelja«.

Profesor Vidav je čutil odgovornost do celotne matematične skupnosti. Kot pred njim Plemelj je tudi on moral na račun svojega raziskovalnega in pedagoškega dela na fakulteti prevzemati nekatere neprijetne vodstvene oziroma administrativne funkcije. Plemelj se jih je otepal rekoč, da zanje nima smisla. Vidav pa se teh funkcij ni izogibal. Verjetno jih prav tako ni maral; ni pa znano, da bi se čeznje pritoževal. Bil je moder in preudaren usmerjevalec našega razvoja. Na oddelku za matematiko je imel nesporno avtoriteto, tudi tedaj, ko je že odložil vse svoje funkcije. Prav tako je vestno skrbel za različne druge zadeve, povezane z notranjo skladnostjo in dostojno javno podobo slovenske matematike. Npr. pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, kjer je ne samo opravljal vodilne funkcije ter urejal društveno glasilo in knjižne zbirke, ampak je dolga leta skrbel tudi za tekmovanja srednješolcev, predaval dijakom in njihovim učiteljem, pisal poljudne članke za mlade, sodeloval pri vodenju društva, pri organizaciji društvenih seminarjev in proslav itd.

Tako kot Plemelj je bil tudi profesor Vidav strog, vendar korekten izpraševalec na izpitih; strog zlasti v prvih povojnih letih. Po letu 1970 pa je bil pri njem ustni izpit bolj podoben pogovoru kot izpitnemu zaslišanju. Pazljivo in potrpežljivo nas je poslušal in nas ni prekinjal, le včasih je nenadoma vprašal, kot da ne bi razumel: »Kako ste rekli, prosim?« Tedaj smo že vedeli, da smo ga polomili, in bilo nam je nerodno. Zdelo se je, da je tudi njemu neprijetno; zaradi česar je bilo potem nam še bolj nerodno. Vedno se je potrudil razumeti težave svojih študentov v prizadevanju, da se dokopljejo do znanja. Pomagal jim je s strokovnimi nasveti in večkrat celo finančno. Po nasvet in pomoč smo se nanj pogosto obračali tudi sodelavci na oddelku.

Nasploh je imel profesor Vidav izjemno korekten in osebno človeški odnos do vseh ljudi, od študentov in sodelavcev do gostujočih profesorjev in preprostih naključnih obiskovalcev. Izredno težko je bilo z njim tekmovati že v čisto običajni vljudnosti, kar vemo vsi, ki smo kdaj poskušali za njim vstopiti skozi ozka vrata. Prav tako je bil odličen sogovornik v pogovorih npr. o znanstvenih odkritjih na drugih področjih ali pa npr. o zgodovini, saj je bil široko razgledan. Še v pozni starosti je redno prebiral časopise in spremljal dnevna dogajanja, bil z vsem na tekočem in imel o vsem svoje mnenje, ki pa ga nikoli ni vsiljeval drugim. Bil je ne samo velik matematik, odličen predavatelj in dober učitelj oziroma mentor svojim študentom, bil je tudi velik človek.

Danes, ob zadnjem slovesu od profesorja Vidava, se nam njegova podoba kaže kot podoba vrhunskega znanstvenika, ki je svoj matematični talent v precejšnji meri žrtvoval v korist razvoja slovenske matematike in v dobro vsej slovenski matematični skupnosti. Del svoje strokovne pozornosti je namreč namenil tudi na videz manj pomembnim dejavnostim. V tem pogledu je med vrhunskimi matematiki, nekdanjimi in današnjimi, domačimi in tujimi, prej izjema kot pravilo. Šele ob primerjavi njegovega izjemnega znanstvenega in pedagoškega dela z njegovo drugo, rekli bi postransko, a za širšo skupnost nemara še bolj potrebno dejavnostjo se lahko v celoti in zares zavemo njegove človeške in strokovne veličine.

Milan Hladnik

STROKOVNO SREČANJE IN 67. OBČNI ZBOR DMFA, LJUBLJANA, 25. IN 26. 9. 2015

Po dolgih letih je bilo strokovno srečanje in občni zbor v Ljubljani, in sicer na Fakulteti za matematiko in fiziko (FMF). Organizirali smo ga skupaj s FMF. Matematični del strokovnega srečanja je namreč potekal skupno s tradicionalnim seminarjem za učitelje matematike z delovnim naslovom *Moderni izzivi poučevanja matematike*, ki ga na FMF organizira dr. Damjan Kobal.

Zaradi prenove strežnika letos predhodna prijava na seminar ni bila možna. Morda je to tudi razlog, da je bila udeležba na fizikalnem delu slabša kot prejšnja leta.

Povzetke in razporede predavanj smo že v začetku septembra objavili na domači strani društva. Prav tako je bil predhodno objavljen tudi urnik.

V biltenu, ki smo ga letos prvič izdali le v elektronski obliki, smo objavili poročila o delu društva in povzetke predavanj.

Ker so povzetki predavanj objavljeni tudi na spletni strani društva, naj navedemo le predavatelje in naslove predavanj v enakem vrstnem redu, kot so se zvrstili:

Petek, 25. septembra 2015

Fizika:

- Robert Repnik, Matic Laneger: *Uspešnost reševanja teoretičnih in eksperimentalnih nalog z državnih tekmovanj iz fizike za osnovnošolce od leta 1993 do 2012*
- Blaž Karner: *46. mednarodna fizikalna olimpijada, Mumbaj 2015*
- Janez Strnad: *Newtonova razlaga Newtonovih kolobarjev, Goethejev Nauk o svetlobi*
- Boris Kham: *Avgustovsko srečanje z Venero, Zorni kot teleskopa*
- Jože Rakovec: *Svetlobni pojavi na nebu*
- Mihael Gojkošek: *Razvoj računalniških simulacij pri pripravi interaktivnega učbenika: Razširjanje, odboj in lom svetlobe*
- Andrej Likar, Nada Razpet: *Poskusi iz optike, delavnica*
- Andrej Guštin: *Astronomska opazovanja v šoli, delavnica*

Matematika:

- David Dolžan: *Tropska matematika*
- Marko Razpet: *Tudi matematiki se motimo*
- Nada Lavrač: *Umetna inteligenca*

- Pino Koc: *Mehansko reševanje diferencialnih enačb*
- Klavdija Cof Mlinšek, Lucijana Kračun-Berc, Matjaž Željko: *Spremembe pri tekmovanjih v znanju matematike v OŠ in SŠ*

Ob 17. uri je bil napovedan občni zbor. Ker je bilo tedaj prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, je občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije pričel z delom ob 17.30. V tem vmesnem času smo imeli še dve predavanji, ki sta nas popeljali v svet umetnosti: Peter Koštrun: *Svetloba – senca*, Boštjan Botas Kenda: *Svetloba – prostor*. Oba predavatelja sta z Akademije za likovno umetnost in oblikovanje.

Sobota, 26. septembra 2015

Začeli smo z vabljenima predavanjema:

- Tomaž Pisanski: *Nekaj let pozneje*
- Igor Muševič: *Fotonika s tekočimi kristali*

Nadaljnja predavanja so zopet potekala v dveh sekcijah.

Fizika:

- Mitja Rosina: *Mavrica*
- Jurij Bajc: *Projekt eEksperimenti*
- Dušanka Colnar, Renata Humar, Jelka Gradnik: *Škatla z luknjico*
- Majda Srna: *Optični instrumenti – delavnica*

Matematika:

- Gregor Cigler: *Frizijski vzorci in njihove grupe simetrij*
- Jana Dular: *Topla afriška srca*

67. občni zbor DMFA

Občnega zbora se je udeležilo 49 članov DMFA Slovenije (od tega 8 častnih članov). Imel je naslednji dnevni red:

1. Otvoritev
2. Izvolitev delovnega predsedstva

3. Društvena priznanja
4. Poročila o delu društva
5. Razprava o poročilih
6. Vprašanja in pobude
7. Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2014
8. Razno

Ad 1. Ker je bilo ob 17.00 uri prisotnih manj kot polovica članov DMFA Slovenije, se je občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA Slovenije pričel ob 17.30.

Ad 2. V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: predsednik Mitja Rosina, člana Milan Hladnik in Boštjan Kuzman, zapisnikar Janez Krušič. Za overovatelja zapisnika sta bila izbrana Marko Razpet ter Matjaž Željko.

Ad 3. Za častna člana DMFA Slovenije sta bila imenovana **dr. Andrej Likar** in **dr. Tomaž Pisanski**.

Društveno priznanje sta prejela: **dr. Bojan Golli** in **dr. Zlatan Magajna** (Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta).

Vse utemeljitve je prebral dr. Boštjan Kuzman.

Ad 4. Poročila o delu društva so bila objavljena v biltenu 67. občnega zbora, ki je v elektronski obliki dostopen na `http://www.dmfa.si/OZ2015-bilten.pdf`.

Dodatno so poročali:

1. Anja Petković o srečanju srednješolcev MARS 2015
2. Maja Alif o Plemljevem študentskem vikendu
3. Veno Mramor o organizaciji srednjeevropske matematične olimpijade MEMO 2015
4. Barbara Rovšek o udeležbi na mednarodni fizikalni olimpijadi IPhO 2015
5. Gregor Dolinar o specifičnosti mednarodne matematične olimpijade IMO 2015 na Tajskem
6. Andrej Guštin o udeležbi na mednarodnih tekmovanjih iz astronomije
7. Matjaž Željko o prenovi društvenega informacijskega strežnika

Ad 5. Poročila so bila sprejeta brez razprav.

Ad 6. Maja Alif je povedala, da bo njeno delo pri študentski sekciji DMFA Slovenije nadaljevala Vesna Iršič. Udeležence občnega zbora je povabila k sodelovanju pri prvem srečanju alumnov FMF, ki bo organizirano v torek, 20. oktobra 2015.

Boštjan Kuzman je povabil na društveni izobraževalni seminar z naslovom »Delo z nadarjenimi mladimi matematiki«, ki bo predvidoma potekal v petek in soboto, 5. in 6. februarja 2016, na Pedagoški fakulteti v Ljubljani v skupnem obsegu 16 ur. Prosil je tudi za predloge prispevkov za program društvene podelitve priznanj Bistroumi 2016.

Mitja Rosina je vabil na društveno ekskurzijo v Zagreb (sobota, 3. 10. 2015) in k boljšemu izkoristku Plemljeve vile za društvene dejavnosti.

Nada Razpet je prosila za mnenja o najprimernejšem času za organizacijo naslednjih strokovnih srečanj in občnih zborov (september ali kasneje).

Potrjen je bil sklep upravnega odbora, da se prijavnina za udeležbo na tekmovanjih v šolskem letu 2015/2016 **ne spremeni, če se ne bodo bistveno spremenili pogoji sofinanciranja**: Za tekmovanja, ki se končajo z mednarodno olimpijado (MaSŠ-A, FiSŠ, astronomija SŠ), je prijavnina na najnižji stopnji **2,50 EUR**, za vsa druga tekmovanja v organizaciji DMFA Slovenije pa **1,50 EUR**. Za udeležbo na višjih stopnjah tekmovanja prijavnine ni.

Občni zbor je potrdil tudi naslednja sklepa:

1. Prvi natis priznanj in potrdil o sodelovanju je brezplačen. Cena nadaljnjih natisov (napačni podatki, izgubljeno ...) je 2 EUR za enoto in 3 EUR za poštnino.
2. Cena obravnave ugovora je 5 EUR. Če je ugovor ugodno rešen, se vplačani znesek vrne.

   Državna tekmovalna komisija samostojno odloča o zahtevi za plačilo ugovora za tekmovanje v njeni pristojnosti.

Ad 7. O sklepih nadzornega odbora je poročal Janez Krušič:

1. pravilnost finančnega poslovanja za leto 2014 je nadzorni odbor ugotovil na svoji seji 31. 3. 2015 (zapisnik je v prilogi zapisnika občnega zbora),
2. z delom upravnega odbora je nadzorni odbor vseskozi seznanjen, bodisi s prisotnostjo na sejah bodisi z zapisniki sej upravnega odbora.

Računovodsko in poslovno poročilo DMFA Slovenije za leto 2014 je bilo objavljeno v Biltenu in je bilo soglasno sprejeto.

Ad 8. Občni zbor se je končal ob 19.00 uri.

Nada Razpet in Janez Krušič

DR. ANDREJ LIKAR IN DR. TOMAŽ PISANSKI NOVA ČASTNA ČLANA, DR. BOJAN GOLLI IN DR. ZLATAN MAGAJNA PREJEMNIKA PRIZNANJ DMFA SLOVENIJE

Sedeminšestdeseti občni zbor DMFA Slovenije je 25. septembra 2015 na predlog upravnega odbora za nova častna člana DMFA Slovenije imenoval **dr. Tomaža Pisanskega in dr. Andreja Likarja**.

Dr. Andrej Likar

Raziskovalno delo prof. dr. Andreja Likarja obsega predvsem eksperimentalne in teoretične rezultate v fiziki jedrske strukture in instrumentacije. V svojih najbolj odmevnih delih se je posvetil radiativnemu zajetju nukleonov v jedra, strukturi dvojnomagičnih jeder in natančnemu modeliranju polvodniških detektorjev z metodo Monte-Carlo. Pri tem je postavil temelje sodelovanja ljubljanske skupine za strukturo jedra s skandinavskimi in nemškimi skupinami za jedrsko fiziko, kar je temeljito oblikovalo programsko usmeritev skupine.

Njegovo pedagoško delo je izjemno pestro in plodno. Kot mlad univerzitetni učitelj je poleg poučevanja osnovne fizike prevzel predmeta Fizikalna merjenja I in Uporaba mikroprocesorjev, za katera ni bilo ustaljenih učnih načrtov in učbenikov niti v mednarodnem prostoru. Oba predmeta je postavil na trdne temelje in napisal učbenika, ki sta doživela več ponatisov.

Njegovo zanimanje za izboljšave v poučevanju fizike pa ni omejeno zgolj na predmete, ki jih je poučeval. Poseben izziv so mu konceptualno in pedagoško snažni, obenem pa bogati in za opis zahtevni fizikalni problemi, ki sodijo v višje letnike študija fizike. Med najbolj bogate probleme, s katerimi se je ukvarjal v vlogi učitelja, sodita obravnava različnih valovanj s Hamiltonovim pristopom ter obravnava fluktuacijskega interferometra. V poglobljeno študijo omenjenih problemov, vključno z izdelavo originalnih didaktičnih poskusov, je pritegnil kolega in kolegico, ki sta pod njegovim mentorstvom tudi doktorirala.

Kljub polni raziskovalni in pedagoški obremenitvi na fakulteti pa je ves čas namenjal veliko energije in časa tudi srednješolskemu izobraževanju, predvsem na področju fizike in računalništva. Od leta 1993 do 1996 je bil predsednik maturitetne komisije za fiziko. Kot svetovalec Zavoda za šolstvo RS je v obdobju od 1994 do 1999 usmerjal smiselno uporabo računalnikov v srednji šoli, generacije učiteljev pa ga poznajo tudi kot prvega avtorja originalne zbirke računalniških simulacij fizikalnih pojavov *Animirane skice*. Sodeloval je pri izvedbi Fizikalne olimpijade v Portorožu leta 1985 kot avtor eksperimentalne naloge. Naloga je temeljila na uporabi računalniško vodenih meritev, kar je bila takrat novost tudi v mednarodnem merilu. Andrej Likar je izjemno ploden pisec poljudnoznanstvene literature. Rad ima naravo. Hodi z odprtimi očmi in najde pojave, ki jih domiselno pojasnjuje mladim. Tako lahko ti doživljajo fiziko kot del življenja in ne kot suho zbirko zakonov. Poglejmo le nekaj najbolj zanimivih naslovov iz opusa več kot devetdeset poljudnoznanstvenih člankov (večina je objavljena v Preseku): *Kako kameleon iztegne jezik?*, *Kako rastejo snežinke?*, *Živalski žiroskop*, *Plavajoče kapljice*.

Andrej Likar se je izkazal tudi kot ploden mentor. Bil je mentor pri 9 doktoratih, 6 magisterijih in 40 diplomah. Teme pod njegovim mentorstvom nikoli niso bile le serijska proizvodnja – prav vse odlikuje zanimiva iskrica v temeljnem vprašanju in originalen pristop k odgovoru. Njegovim varovancem ostane vtis izjemne razgledanosti, strokovne neizprosnosti in tople človeške prijetnosti, kar je verjetno največ, kar lahko iščemo v strokovnem mentorju.

Andrej Likar je opravljal različne vodstvene funkcije, v katerih se je izkazal kot moder in odločen. Bil je predstojnik Oddelka za fiziko FMF (1999–2001), dekan FMF (2009–2011), predsednik DMFA (2013–2014) ter član nadzornega odbora DMFA (2015). Pri reviji Presek je bil odgovorni urednik (1980–1983) in urednik za fiziko od leta 1990 dalje ter od leta 1993 odgovorni urednik Zbirke izbranih poglavij iz fizike.

Delo Andreja Likarja pomeni pomemben prispevek k razvoju in popularizaciji tako fizikalnih ved kot DMFA Slovenije.

Dr. Tomaž Pisanski

Prof. dr. Tomaž Pisanski se je rodil leta 1949, srednjo šolo je obiskoval v Ljubljani. Študij tehniške matematike na takratni FNT je končal leta 1972. Iz matematike je tudi magistriral v Ljubljani leta 1978, iz računalništva pa leto kasneje na Univerzi Park v Pensilvaniji. Doktorat s področja topološke teorije grafov je napisal pod mentorstvom Terrencea Parsonsa in ga uspešno zagovarjal leta 1981. Kot univerzitetni učitelj je bil zaposlen na Univerzi v Ljubljani od 1982 do delne upokojitve leta 2014, še vedno pa aktivno deluje na Univerzi na Primorskem.

Objavil je več kot 140 izvirnih znanstvenih člankov s področij diskretne in računalniške matematike, kombinatorike, teorije grafov, matematične kemije, diskretne geometrije in drugih. Med njegovimi najbolj znanimi rezultati je denimo metoda Whitea in Pisanskega za izračun roda kartezičnega produkta regularnih dvodelnih grafov. Skupaj z Brigitte Servatius je leta 2013 pri založbi Birkhäuser objavil monografijo Configurations from a Graphical Viewpoint, v kateri na izviren način povezuje geometrijsko navdahnjeno klasično teorijo konfiguracij s topološko in algebrsko teorijo grafov. Je nosilec številnih funkcij, raziskovalnih projektov in nagrad, med njimi projekta ERC Eurocores 2011 in članstva v evropski akademiji znanosti Academia Europaea. Med njegovimi 15 doktorandi so se doslej vsaj štirje samostojno izjemno uveljavili tudi v svetovnem merilu – skupaj z njihovimi doktorandi ima dr. Pisanski že več kot 60 akademskih potomcev.

Dr. Pisanski je vrsto let aktivno deloval v DMFA Slovenije in njegovem upravnem odboru. Bil je predsednik DMFA v mandatu 1998–99 in predsednik Slovenskega odbora za matematiko od leta 2006 do 2014. Iz obsežnega akademskega življenjepisa dr. Pisanskega zato izpostavimo nekaj njegovega dela in zanimivosti, ki so posebej povezane z dejavnostjo DMFA ali pa s širšim matematičnim utripom v Sloveniji.

Matematično kariero je dr. Pisanski začel že v srednji šoli, ko se je po številnih nagradah na republiških in zveznih tekmovanjih udeležil tudi mednarodnih olimpijad v Bolgariji (1967) in Jugoslaviji (1968); na slednji je kot najuspešnejši član jugoslovanske ekipe osvojil tudi 3. nagrado. Med študijem matematike na takratni FNT je aktivno sodeloval pri izvedbi tekmovanj in kasneje skupaj z V. Batageljem uredil prvi zbirki Rešenih nalog iz matematike z republiških tekmovanj za srednješolce (1973, 1976). Kot nadobuden študent je leta 1970 s skupino prijateljev ustanovil *Klub mladih matematikov Laar Getny* in (neuradni) *Seminar iz finitne matematike in matematične kibernetike*, ki se je zanimal za mlade veje matematike, kot so teorije avtomatov, jezikov, grafov in algoritmov, ki niso bile pokrite v študijskih programih. S tem je v veliki meri spodbudil nastanek prvih raziskovalnih seminarjev za matematiko na FNT in IMFM. V uredniškem odboru revije Presek je sodeloval od začetka izhajanja leta 1973 do leta 1986 in v njej objavil 40 prispevkov. Po študijskih izkušnjah v tujini je v osemdesetih letih v Sloveniji spodbudil intenzivnejše znanstveno sodelovanje z matematiki iz zahodnih držav in organiziral prve mednarodne konference iz teorije grafov. Z njimi je sčasoma postavil slovensko šolo med vplivnejše na tem področju – letošnja konferenca v Kranjski Gori je bila s skoraj 300 udeleženci iz 40 držav verjetno največja konferenca iz teorije grafov na svetu. Leta 2008 je skupaj z Draganom Marušičem pod okriljem DMFA in Univerze na Primorskem ustanovil znanstveno revijo *Ars Mathematica Contemporanea* z mednarodnim uredniškim odborom uglednih matematikov z vsega sveta, ki se po nekaj letih obstoja že uvršča med vplivnejše v svetovnem merilu.

Prof. Pisanski je od nekdaj aktivno sodeloval in spodbujal številne dogodke, namenjene promociji matematike. Ob obletnicah rojstva oziroma smrti Jurija Vege v letih 2004 in 2008 so tako potekale številne aktivnosti, izšel je tudi zbornik. Po Vegi pa je poimenoval tudi v mednarodni javnosti znano zbirko računalniških orodij za delo z grafi, ki so jo vrsto let razvijali slovenski matematiki. Na FMF v Ljubljani je leta 1998 ustanovil in vse do 2014 vodil cikel predavanj Matematični kolokviji, na katerem so se predstavljali mednarodno uveljavljeni slovenski in tuji raziskovalci. Uspešno je gojil številne stike z vrhunskimi tujimi znanstveniki ter formalne povezave DMFA z Evropskim matematičnim društvom in nacionalnimi društvi nekaterih drugih držav.

Ob matematiki se je od nekdaj zanimal tudi za druga področja, denimo jezikoslovje, rodoslovje, računalništvo, kemijo, in za povezovanje matematike in umetnosti. Plod njegovega sodelovanja s Colgate University je denimo umetniška skulptura *Grupa roda 2*, ki je razstavljena v Tehniškem muzeju Slovenije kot edini tovrstni matematični artefakt v Sloveniji. Večkrat je različne zanimivosti iz geometrije ali kombinatorike predstavljal tudi v poljudnih prispevkih za različne slovenske medije. O raznovrstnosti in neizmerni radovednosti prof. Pisanskega priča tudi njegova bibliografija, ki obsega več kot 700 enot, mnoge od teh so neposredno povezane tudi z društveno dejavnostjo.

Dr. Bojan Golli

Dr. Bojan Golli je diplomiral leta 1973 z delom *Približek za zvezo med entropijo in dvodelčno gostotno matriko*, magistriral 1977 z delom *Novi pogoji za dvodelčno gostotno matriko* in doktoriral leta 1983 z disertacijo *Variacijski račun sipanja piona v modelu s pionskim oblakom okoli golega nukleona in delca delta*, vse pod mentorstvom dr. Mitje Rosine. Leta 1975 se je zaposlil kot asistent na takratni FNT, leta 1978 je postal tudi znanstveni sodelavec na IJS. Od 1994 je zaposlen na Pedagoški fakulteti v Ljubljani.

Pretežni del svojega znanstvenega dela je dr. Bojan Golli usmeril v raziskave kiralnih kvarkovskih modelov hadronov. V okviru teh modelov se je posvečal tako računom statičnih lastnosti nukleonov, na primer magnetnim momentom, polariziranosti in šibkim sklopitvenim konstantam, kot tudi obravnavi dinamičnih količin v močnem sektorju, ki zajema na primer sipanje pionov na nukleonih, in elektrošibkem sektorju, kamor spadajo na primer elastični oblikovni faktorji, šibki oblikovni faktorji, fotoprodukcija in elektroprodukcija mezonov. Najodmevnejša dela v zadnjih letih vključujejo podrobne analize procesov sipanja ter foto- in elektroprodukcije v formalizmu sklopljenih kanalov, ki jih je zaradi njihove splošnosti mogoče uporabiti kot močno orodje za testiranje kvarkovskih modelov. Svoje znanstveno delo je predstavil na številnih mednarodnih konferencah in delavnicah, svoje znanje pa uspešno prenaša tudi na mlajše sodelavce, tako na fakulteti kot na IJS.

Že na začetku svojega dela na fakulteti je začel sodelovati z DMFA. Od šolskega leta 1976/77 sodeluje pri organizaciji in izvedbi tekmovanj v znanju fizike za srednješolce. Vedno se je rad odzval vabilom srednješolskih učiteljev in za dijake pripravil kakšno zanimivo predavanje ali pa z njimi reševal tekmovalne naloge na krožkih.

Leta 1984 se je prvič z mladimi fiziki udeležil fizikalne olimpijade, leto kasneje pa je bil eden od organizatorjev fizikalne olimpijade v Portorožu. Vse do leta 1998 je vodil slovensko ekipo mladih fizikov na olimpijade. Pri tem ne smemo pozabiti na priprave tekmovalcev za olimpijado, kjer dijakom pripravlja ne le teoretične ampak tudi eksperimentalne naloge. Mladi tekmovalci ga poznajo tudi po Zbirkah rešenih nalog s tekmovanj, ki jih je pripravil s soavtorji in so zbrane v šestih knjigah.

Ljubitelji TEX-a, urejevalnika besedil, ga poznajo kot predsednika TeX Ceha, predvsem pa po tem, kako sta z Vladom Batageljem zainteresiranim pomagala narediti prve korake v spoznavanje tega računalniškega orodja.

Na Pedagoški fakulteti je predaval različne predmete ne le rednim, ampak tudi izrednim študentom. Zanje je pripravil tudi različna gradiva. Je uspešen mentor pri izdelavi diplomskih in magistrskih del.

Vselej se je tudi rad odzval vabilom DMFA in za strokovna srečanja pripravil zanimiva predavanja.

Na Cobissu ima dr. Bojan Golli 214 zapisov, od tega kar 89 v angleškem jeziku. Ima priostren posluh za dober in pravilen jezik, kar se kaže pri pregledovanju besedil za tekmovalne naloge, kjer hitro najde dvoumnost in predlaga primernejše izraze oziroma razumljivejši opis pojava.

Dr. Zlatan Magajna

Dr. Zlatan Magajna je prve matematične uspehe doživel kot dijak Gimnazije Koper na takratnih republiških in zveznih tekmovanjih v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja. Po diplomi in magisteriju iz matematike na Univerzi v Ljubljani je še nekaj let opravljal delo asistenta na takratni FNT, nato pa se je zaposlil v industriji, kjer je več let uspešno razvijal programsko opremo za različne obdelovalne stroje.

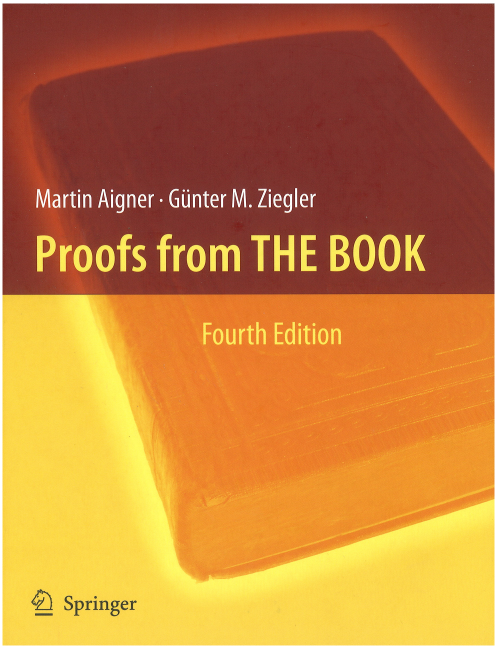
V začetku devetdesetih let se je z zaposlitvijo na Pedagoški fakulteti v Ljubljani vrnil k pedagoškemu delu. Na podlagi svojih izkušenj iz industrije je tedaj izvedel tudi več delavnic za učitelje o geometriji in njeni uporabi v kontekstu sodobnih tehnologij. Doktoriral je na Univerzi v Leedsu s tezo Geometric thinking in out of school contexts (Geometrijsko razmišljanje v zunajšolskih kontekstih). Kot docent za didaktiko matematike in elementarno matematiko na Pedagoški fakulteti velja za odličnega predavatelja in natančnega mentorja že 58 diplomantom, plodno pa sodeluje tudi z različnimi slovenskimi ustanovami pri vpeljavi novih tehnologij, didaktičnih pristopov, razvoju učnih načrtov, analizi mednarodnih evalvacij znanja in podobno. V mednarodni skupnosti je znan tudi po svojem izvirnem računalniškem programu *OK Geometry* za samodejno analiziranje in postavljanje domnev o relacijah v geometrijskih konstrukcijah.

Dr. Magajna je objavil ali predstavil več kot 100 strokovnih in znanstvenih prispevkov domači in mednarodni strokovni javnosti na različnih konferencah. S svojimi prispevki redno sodeluje tudi na strokovnih srečanjih in seminarjih, ki jih organizira DMFA Slovenije.

Sodelavci dr. Magajne poleg njegovega širokega znanja matematike in kvalitetnega pedagoškega dela s študenti posebej cenimo njegov poglobljen pristop do različnih didaktičnih problemov ter potrpežljivost in razumevanje različnih vlog matematike v vsakdanjem življenju, s čimer se zna približati tudi matematično šibkejšim skupinam učencev v slovenskih šolah.

Na podlagi predlogov pripravila Nada Razpet

Martin Aigner, Günther M. Ziegler, Proofs from The Book, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2010, 274 strani.



Prva izdaja knjige, posvečene Paulu Erdösu (1911–1996), ki je sodeloval tudi pri njeni zasnovi in izboru briljantnih dokazov iz teorije števil, geometrije, analize, kombinatorike in teorije grafov, je izšla 1998, ob 85-letnici njegovega rojstva, dve leti po njegovi smrti. Erdös je rad govoril o idealni, onstran tega sveta obstoječi Knjigi, v kateri naj bi bili (kot v nekakšnih Platonovih nebesih) zbrani najlepši dokazi matematičnih resnic. Matematiki naj bi po njegovem verjeli vsaj v to Knjigo. Z drugimi besedami, zavzemal se je, podobno kot pred njim G. H. Hardy, za »lepo« matematiko. S svojo metaforo o Knjigi je, podobno kot Platon s svojo slavno metaforo o ujetnikih, ki so tako dolgo zaprti v votlini, da si ne morejo predstavljati sonca in so zadovoljni le z opazovanjem senc na njenih stenah, ki jih nanje meče ogenj v ozadju votline, opozoril na pomembnost stremljenja k najvišjemu idealu, v katerem se meja med resnico in lepoto razblini.

Starogrškim matematikom se moramo zahvaliti, da so matematiko iz utilitarne, računske vede in zbirke trikov in pravil brez prave utemeljitve povzdignili na raven logično urejenega miselnega sistema, v katerem je dokaz enako (ali včasih še bolj) pomemben kot trditev sama. Starejše matematične kulture so podajale le računske metode kot nekakšne skrivnostne recepte, praviloma ponazorjene le na posebnih primerih, le izjemoma pa tudi skopa pojasnila, zakaj delujejo. Receptu lahko enostavno slediš in ne razmišljaš, zakaj deluje. Tako npr. računalnikom vsakodnevno dajemo celo vrsto ukazov, ne da bi dejansko vedeli, kaj je v njihovem ozadju. Erdös je odločno zavračal idejo dokazovanja matematičnih izrekov z računalniki (ta trend se je začel s slovitim računalniškim dokazom izreka 4 barv). In čeprav moderna programska in spletna orodja omogočajo matematikom v trenutku dostopati do različnih baz podatkov (npr. o grupah, grafih ter njihovih lastnostih in parametrih), se matematika v nekem smislu tako vrača v predgrško obdobje: podobno, kot so nekoč morali zaupati receptom brez utemeljitve, moramo danes zaupati računalniškim dokazom in »certifikatom«. To nam sicer prihrani čas, prikrajša pa nas za razumevanje. Matematika postaja tako vse bolj uporabna, a vse manj lepa. Matematik ne odkriva več matematičnih resnic zaradi njih samih, iz ljubezni do resnice in lepote, ampak zaradi njihove uporabnosti. Ni več matematik filozof, ki je sposoben z enim pogledom zajeti celotno matematiko, ampak specialist za posamezno drobno področje, bolj ali manj vešč poznavalec ali mojster trikov s tega omejenega področja, dejansko pa izgubljen v temi nevednosti natanko tako kot ujetniki v Platonovi votlini senc.

Platon, ki je vselej poudarjal, da je treba vsako trditev podkrepiti z jasno razumljivim »logosom« (dokazom njene resničnosti), je sam v poetično-filozofskem jeziku odslikal fascinacijo starogrških matematikov nad dokazi v matematiki, ki je dosegla svoj vrh v Evklidovi aksiomatski predstavitvi geometrije. Po legendi je Pitagora ob dokazu izreka, ki ga po tradiciji pripisujejo njemu (ali vsaj njegovi matematično-filozofski šoli, ki je gojila pravi kult števil kot pravzorcev vesolja), bogovom v zahvalo daroval sto žrtvenih živali. Podobno navdušenje je z vzklikom »Heureka!« in golim tekom po atenskih ulicah pokazal Arhimed ob nepričakovani rešitvi problema, iz kako čistega zlata je narejena kraljeva krona: dokaz oziroma neposredni vpogled v resnico je bil v tem primeru veliko pomembnejši kot sam problem! Nič drugega matematiku ne prinese takšne slave, ki ji čas ne odvzame niti drobca njenega leska, kot bistroumen in izviren dokaz kakšnega izreka! Dokazi so torej najpomembnejša sestavina matematike. Čeprav bodo breme dokazovanja v prihodnosti vse bolj prevzemali računalniki (podobno kot so že breme računanja in memoriranja), bodo matematiki še vedno (ali še toliko bolj) občudovali nešablonske dokaze, ki niso dobljeni po šablonskih, univerzalno delujočih, prozaičnih in grdih metodah. Ali, kot so na začetku 20. stoletja dejali šahovski hipermodernisti (npr. Reti), ki so v šahu cenili lepoto in drzne kombinacije: »Ne zanimajo nas pravila, ampak izjeme!«

Vsak poskus »prizemljiti« takšno idealno knjigo, o kateri je govoril Erdös, je seveda neizogibno le nepopoln približek popolnemu idealu. Pa vendar se je Erdös z veseljem odzval povabilu avtorjev in sam predlagal ter izbral mnogo problemov in dokazov zanjo. V končni podobi je knjiga razdeljena na $5 \times 8 = 40$ poglavij. Problemi so namenoma izbrani tako, da so dostopni že dodiplomskim študentom, za razumevanje njihovih rešitev pa zadošča le poznavanje osnovnih konceptov in tehnik iz teorije števil, geometrije in analize ter nekaj malega linearne algebre in diskretne matematike.

Marsikatera trditev je v knjigi dokazana na več načinov. Tako je npr. podanih kar šest dokazov trditve, da je praštevil neskončno mnogo! Poleg klasičnega Evklidovega dokaza s protislovjem je tu še dokaz s pomočjo trditve, da sta si poljubni dve Fermatovi števili $F_n = 2^{n^n} + 1$ tuji. Tretji dokaz sloni na ugotovitvi, da je vsak praštevilski delitelj Mersennovega števila $2^p - 1$, kjer je p praštevilo, večji od p. Četrti, analitični, dokaz temelji na izpeljavi spodnje meje $\pi(x) \geq \log\, x - 1$ za število praštevil p, ki ne presegajo x. Peti dokaz sloni na topologiji, šesti pa na elegantni izpeljavi trditve, da je vrsta iz recipročnih vrednosti praštevil $1/2 + 1/3 + 1/5 \cdots$ divergentna.

V knjigi o dokazih seveda ni smel manjkati najpogosteje dokazani matematični izrek, kvadratni reciprocitetni zakon, katerega prvi korektni dokaz je podal Gauss 1801, do leta 2000 pa se je nabralo kar 196 dokazov. Prav tako je na tri načine dokazan Eulerjev klasični rezultat iz leta 1734 o vsoti recipročnih vrednosti kvadratov naravnih števil: $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Iz poglavja, posvečenega geometriji, je vredno omeniti dokaz tretjega od 23 slavnih Hilbertovih problemov iz leta 1900. Obstoj dveh tetraedrov z enako osnovno ploskvijo in višino, ki ju ni mogoče sestaviti iz manjših skladnih tetraedrov niti ne dopolniti s skladnimi tetraedri v skladen tetraeder, je dokazal Hilbertov študent Max Dehn v dveh člankih 1900 in 1902. Dokaz v knjigi temelji na t. i. »biserni lemi«, katere dvodimenzionalna verzija se glasi takole: Če sta P in Q ekvidekomponibilna, potem lahko vsem segmentom stranic dekompozicij P in Q priredimo pozitivna števila tako, da ustrezajoče si stranice ustreznih koščkov P_k in Q_k prejmejo ista števila (oz. enako število »biserov«).

Bolj ko se prebijamo skozi knjigo, večje občudovanje občutimo ob dokazih, ki niso le dokazi posameznih matematičnih trditev, ampak so tudi dokazi bistroumnosti in iznajdljivosti človekovega duha, pa čeprav so bili za nekatere dokaze potrebni uvidi in napori mnogih matematikov, ne le enega samega. Ko človek razmišlja o vsem tem, se ne more načuditi, da je nekaterim matematikom še vedno tako težko razumeti koncept sodelovanja, ki bo, še posebej v prihodnosti, ko bodo matematične trditve postajale vse kompleksnejše, njihovi dokazi pa vse zahtevnejši, postalo nujnost, na katero se bo pri reševanju matematičnih problemov treba navaditi.

Dodatno vrednost in privlačnost dajejo knjigi sprotne reference na članke in knjige ob vsakem poglavju, številne slike in ilustracije, pa tudi fotografije matematikov. Ko bodo v podobni Knjigi najlepših dokazov čez tisoč let le še fotografije računalnikov, ki so jih dokazali, se bo matematikom tistega časa – inteligentnim superračunalnikom – naša doba, v kateri posameznik tu in tam še kaj šteje oziroma lahko sam dokaže kaj izvirnega in tehtnega, verjetno zdela resnično zlata, romantična in zavidanja vredna!

Jurij Kovič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2015
Letnik 62, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Nekatera dela profesorja Ivana Vidava.