PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **14** (1986/1987)
Številka 2
Strani 106–107

Dragoljub M. Milošević, prevod Sandi Klavžar:

ZANIMIVOSTI V ZVEZI S PASCALOVIM TRIKOTNIKOM

Ključne besede: matematika, razvedrilo.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/14/826-Milosevic-Klavzar.pdf

ZANIMIVOSTI V ZVEZI S PASCALOVIM TRIKOTNIKOM

V Preseku smo že večkrat srečali Pascalov trikotnik. To je neskončna trikotna shema števil. Prvo in zadnje število v vsaki vrstici je 1, za vsako drugo število pa velja, da je dobljeno kot vsota dveh števil, ki sta zapisani neposredno nad njim (tabela 1).

(0)					1				
(1)				1		1			
(2)			1		2		1		
(3)		1		3		3		1	
(4)	1		4		6		4		1

. . . .

Tabela 1

(0)	1
(1)	11
(2)	121
(3)	1331
(4)	14641

Tabela 2

Napišimo cifre iz vsake vrstice trikotnika brez presledkov (tabela 2).

1.) Opazimo, da so števila iz ničte, prve, druge, tretje in četrte vrstice po vrsti ničta, prva, druga, tretja in četrta potenca števila 11, tj.

$$\begin{aligned} 1 &= 11^0 \\ 11 &= 11^1 \\ 121 &= 11^2 \\ 1331 &= 11^3 \\ 14641 &= 11^4 \end{aligned}$$

Ali velja pravilo tudi za nadaljnja števila iz tabele 2?

2.) Iz tabele 2 vidimo število 121. Zapis tega števila (121) predstavlja razen števila v desetiškem številskem sistemu tudi števila v sistemih, ki imajo osnovo večjo od 2. Število 121 je zanimivo, ker je popolni kvadrat tako za osnovo 10 ($121 = 11^2$) kot tudi za vsako drugo osnovo, ki je večja kot 2. Če je osnova sistema x, ($x > 2$), velja:

$$121_{(x)} = 1.x^2 + 2.x + 1 = (x+1)^2$$

Poiščimo podobno lastnost še za števili iz naslednjih dveh vrstic v tabeli 2. Ker je

$$1331_{(x)} = 1.x^3 + 3.x^2 + 3.x + 1 = (x+1)^3 \text{ in}$$

$$14641_{(x)} = 1.x^4 + 4.x^3 + 6.x^3 + 4.x + 1 = (x+1)^4$$

vidimo, da je število 1331 kub nekega števila in 14641 četrta potenca nekega števila, neodvisno od izbire osnove številskega sistema. Pri številu 1331 mora biti osnova večja kot 3 in pri 14641 večja kot 6, sicer števili nimata pomena.

Vprašajmo se še, ali je poleg števila 14641 še kako drugo petmestno število $ABCDE$, ki je četrta potenca nekega naravnega števila, neodvisno od izbire osnove številskega sistema. Če je osnova številskega sistema x, potem zapis $ABCDE$ pomeni:

$$ABCDE_{(x)} = A.x^4 + B.x^3 + C.x^2 + D.x + E$$
$$0 < A < x \quad \text{in} \quad 0 \leqslant B, C, D, E < x$$

Preizkusimo, ali je lahko število $ABCDE_{(x)}$ četrta potenca nekega dvomestnega števila $ab_{(x)} = a\,x + b$ $(0 < a < x, b < x)$, neodvisno od osnove x. Da bi to veljalo, mora biti izpolnjen pogoj:

$$A.x^4 + B.x^3 + C.x^2 + D.x + E = (ax + b)^4 = a^4x^4 + 4a^3bx^3 + 6a^2b^2x^2 + 4ab^3x + b^4$$

Če izenačimo istoležne koeficiente, dobimo identitete: $A = a^4$, $B = 4a^3b$, $C = 6a^2b^2$, $D = 4ab^3$ in $E = b^4$. A in E morata biti četrti potenci naravnih števil, medtem ko med koeficienti veljajo naslednje zveze, ki jih lahko neposredno preverimo:

$$C = 3B^2/8A \qquad D = B^3/16\,A^2 \qquad E = B^4/256\,A^3 \qquad (1)$$

Koeficient A je lahko samo 1, medtem ko je E lahko 0 ali pa 1. Če je $A = 1$ in $E = 0$, potem iz (1) dobimo $B = C = D = 0$, če pa je $A = E = 1$, dobimo $B = D = 4$ in $C = 6$. V drugem primeru smo dobili število 14641 (11^4), ki smo ga srečali že prej, v prvem pa imamo število 10000 (10^4). Zapis 10000 ima pomen v vsakem številskem sistemu, medtem ko ima zapis 14641 pomen v sistemih z osnovo, večjo kot 6.

Primer: $14641_{(8)} = 1.8^4 + 4.8^3 + 6.8^2 + 4.8 + 1 = 9^4$

Naloga. Razišči, kako je s podobno lastnostjo za štirimestna števila in kako za trimestna števila.

Dragoljub M. Milošević
Prevod in priredba *Sandi Klavžar*