PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **23** (1995/1996)
Številka 6
Strani 340–342

Matej Mencinger:

KONSTRUKCIJA ZAPOREDJA $x^2, x^3, \ldots$

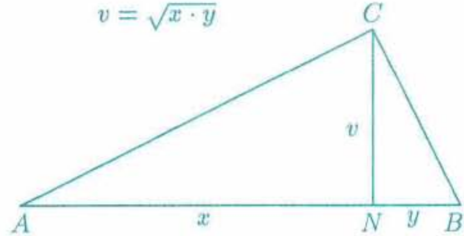
Ključne besede: matematika, geometrija, Talesov izrek, višinski izrek, geometrijska sredina.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/23/1278-Mencinger.pdf

KONSTRUKCIJA ZAPOREDJA x^2, $x^3, \ldots$

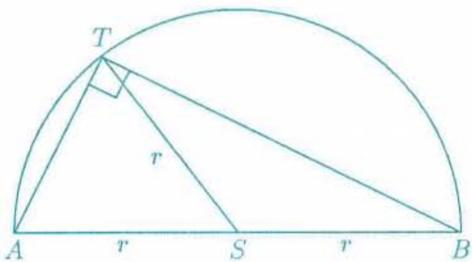
O konstrukciji geometrijske sredine števil je bilo v Preseku[1] že veliko napisanega. Najpreprostejša je konstrukcija s pomočjo *višinskega* in *Talesovega izreka*.

Višinski izrek pravi, da je v pravokotnem trikotniku kvadrat višine enak produktu pravokotnih projekcij katet na hipotenuzo (glej sliko 1).



Slika 1.

Talesov izrek pa nam pove, da je poljubni obodni kot nad premerom pravi (slika 2).



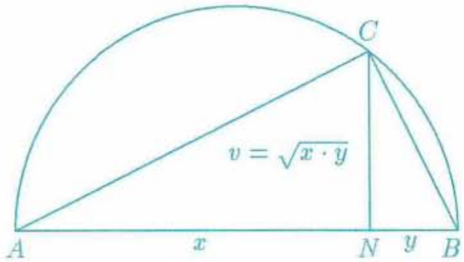
Slika 2.

Konstrukcija geometrijske sredine števil x in y je sledeča (glej sliko 3):

- Nad daljico AB dolžine $x + y$, ki jo točka N razdeli na daljici z dolžinama x in y ($\overline{AN} = x$ in $\overline{NB} = y$), narišemo krožnico s premerom $\overline{AB} = x + y$.
- Presečišče te krožnice s pravokotnico na daljico AB v točki N označimo s C.

---

[1] Glej Neža Mramor: Malo geometrijske sredine, Presek, letnik 22, št. 1, 54-61 in Uroš Milutinovič: Kaj so sredine in kako jih uporabljamo, Presek, letnik 20, št. 6, 332-342.



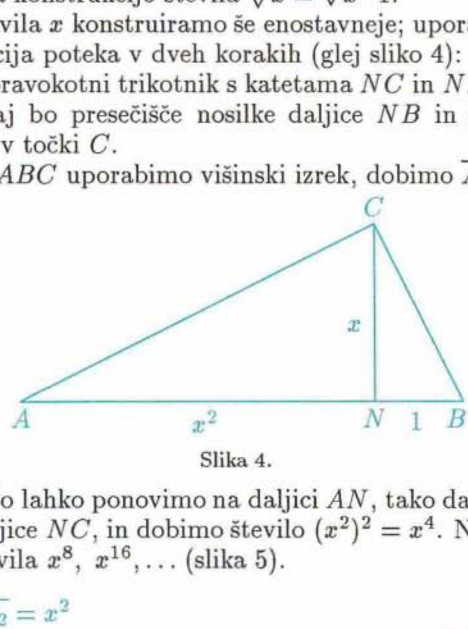
Slika 3.

Daljica NC je geometrijska sredina števil x in y. Posebni primer, ko je $y = 1$, nam da konstrukcijo števila $\sqrt{x} = \sqrt{x \cdot 1}$.

Kvadrat števila x konstruiramo še enostavneje; uporabimo le višinski izrek. Konstrukcija poteka v dveh korakih (glej sliko 4):

- Načrtamo pravokotni trikotnik s katetama NC in NB dolžine x in 1.
- Točka A naj bo presečišče nosilke daljice NB in pravokotnice na daljico CB v točki C.

Če za trikotnik ABC uporabimo višinski izrek, dobimo $\overline{AN} = x^2$.



Slika 4.

Konstrukcijo lahko ponovimo na daljici AN, tako da daljica AN prevzame vlogo daljice NC, in dobimo število $(x^2)^2 = x^4$. Na ta način lahko dobimo tudi števila x^8, $x^{16}, \ldots$ (slika 5).

Slika 5.

Toda kako konstruirati število x^3? Rešitev je na dlani, saj je x^3 geometrijska sredina števil x^2 in x^4 ($\sqrt{x^2 \cdot x^4} = \sqrt{x^6} = x^3$). V naslovu smo obljubili konstrukcijo zaporedja x^2, x^3, $x^4, \ldots$ Pa poglejmo, kako daleč smo že: narisati znamo že števila x^2, x^3, x^4 pa x^8, x^{16}, $x^{32}, \ldots$ in, če dobro premislimo, tudi x^6, $x^{12}, \ldots$, saj je $x^6 = (x^3)^2$, $x^{12} = (x^6)^2, \ldots$ Prve tri (in nekatere nadaljnje) člene željenega zaporedja že imamo, razmislimo še splošno!

Recimo, da smo uspeli konstruirati števila x^2, $x^3, \ldots$, x^n. Ali lahko konstruiramo število x^{n+1}?

Če je n liho število, je $\frac{n+1}{2}$ naravno število; ustrezno potenco že imamo, zato lahko dobimo x^{n+1} s kvadriranjem števila $x^{\frac{n+1}{2}}$.

Če pa je n sodo, je $\frac{n+2}{2}$ naravno število, zato lahko x^{n+2} dobimo s kvadriranjem števila $x^{\frac{n+2}{2}}$, x^{n+1} pa nato konstruiramo kot geometrijsko sredino števil x^n in x^{n+2}.

Bralec naj sam ugotovi, kako bi konstruirali x^{-1}! "Opremljen" še s to konstrukcijo bo znal konstruirati števila x^m, $m \in \mathbb{Z}$ (saj za vsako naravno število n velja $x^{-n} = (x^n)^{-1}$).

Matej Mencinger