

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **23** (1995/1996)

Številka 1

Strani 2–4

Janez Žerovnik:

NA OBISKU PRI BARBARI

Ključne besede: matematika, teorija števil, številski sistemi.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/23/1252-Zerovnik.pdf>

© 1995 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

NA OBISKU PRI BARBARI

V nedeljo smo bili na družinskem obisku pri prijateljih. Prav gotovo vas zanima, kaj smo dobrega pojedli in popili, pa vas bom razočaral. Petošolka Barbara in njen oče sta mi pokazala zanimivo matematično nalogo. Pravzaprav je nalogo iz šole prinesla Barbarina sestra Alenka, ki je že gimnazijka, ampak Barbara se kljub temu ves čas ni ganila od mize. Takole je pisalo:

$$15732_{[8]} = x_{[6]}.$$

Drugače povedano: Število, dano v osmiškem številskem sistemu, zapiši v šestiškem številskem sistemu. Seveda smo nalogo znali rešiti, zanimalo pa nas je, če je res potrebno osmiško številko pretvoriti najprej v desetiško in to potem v šestiško, ali pa gre morda hitreje.

Odgovor je seveda pritrdilen, saj vemo, da desetiški številski sistem ni nič bolj 'naraven' od ostalih. Res je, da imamo deset prstov na rokah. Prav toliko so jih imeli tudi Babilonci, pa so vseeno uporabljali šestdesetiški sistem. Osnova 60 se je do danes ohranila pri merjenju časa, povsod drugje je prevladal desetiški številski sistem. (O zgodovini matematike, tudi o začetkih številskih sistemov, si lahko preberete več v knjigi Matematika skozi kulture in epohe Vladimirja Devideja iz knjižnice Sigma.) Poleg dandanes prevladujočega desetiškega sistema v računalništvu veliko uporabljajo tudi dvojiški (ali binarni) in njegova 'bratranca', osmiški in šestnajstiški številski sistem.

Torej smo se lotili dela. Osmiška številka $a_k a_{k-1} \dots a_2 a_1 a_0$ je zapis števila

$$a_k 8^k + a_{k-1} 8^{k-1} + \dots + a_2 8^2 + a_1 8 + a_0.$$

Torej je treba števila, ki nastopajo v gornjem izrazu, najprej zapisati v šestiškem zapisu, potem pa jih zmnožiti in sešteti (pozor!) 'po šestiško'. To pomeni, da je treba računati v šestiškem številskem sistemu.

Poskusimo z gornjo nalogo.

Najprej si pripravimo zapise potenc osnove 8:

$$8 = 12_{[6]}$$

$$8^2 = 64_{[10]} = 144_{[6]}$$

$$8^3 = 512_{[10]} = 2212_{[6]}$$

$$8^4 = 4096_{[10]} = 30544_{[6]}$$

Zdaj pa zapišimo v šestiškem zapisu še števke $a_0, a_1, \dots, a_4$: $a_0 = 2_{[8]} = 2_{[6]}$, $a_1 = 3_{[8]} = 3_{[6]}$, $a_2 = 7_{[8]} = 11_{[6]}$, $a_3 = 5_{[8]} = 5_{[6]}$, $a_4 = 1_{[8]} = 1_{[6]}$ in jih po šestiško pomnožimo z ustreznimi potencami osnove 8.

$$a_0 = 2_{[6]}$$

$$a_1 8 = 3_{[6]} 12_{[6]} = 40_{[6]}$$

To gre po šestiško takole: 3 krat 2 je $6_{[10]} = 10_{[6]}$, zapišemo 0, 1 dalje; 3 krat 1 je 3 in 1 je 4 (tako v desetiškem kot šestiškem sistemu).

$$a_2 8^2 = 11_{[6]} 144_{[6]} = 2024_{[6]}$$

$$a_3 8^3 = 5_{[6]} 2212_{[6]} = 15504_{[6]}$$

$$a_4 8^4 = 1_{[6]} 30544_{[6]} = 30544_{[6]}$$

Po šestiško seštejmo!

$$2_{[6]} + 40_{[6]} + 2024_{[6]} + 15504_{[6]} + 30544_{[6]} = 53002_{[6]}$$

Za kontrolo lahko naredimo račun po starem: Zapišemo $15732_{[8]} = 7130_{[10]}$ in delimo: $7130 : 6 = 1188$ z ostankom 2, $1188 : 6 = 198$ z ostankom 0, $198 : 6 = 33$ z ostankom 0, $33 : 6 = 5$ z ostankom 3. Lahko rečemo še $5 : 6 = 0$ z ostankom 5, zberemo ostanke in sklenemo: $7130 = 53002_{[6]}$.

Osnovi 8 in 6 nista nič posebnega. Prav tak postopek kot prej lahko naredimo za poljuben par številskih sistemov, recimo z osnovama p in q . Naloga je sedaj splošnejša: Dano imamo število, zapisano v p -iškem številskem sistemu s števki $a_k \dots a_1 a_0$, želimo ga zapisati v q -iškem številskem sistemu. Naredili bomo takole:

1. Zapišemo $p^0, p^1, p^2, \dots, p^k$ v q -iškem sistemu.
2. Zapišemo $a_k, \dots, a_1, a_0$, v q -iškem sistemu.
3. Zmnožimo $a_1 p, a_2 p^2, \dots, a_k p^k$ v q -iškem sistemu.
4. Seštejemo $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_k p^k$ v q -iškem sistemu.

Za konec še dve opombi.

Če kak par osnov uporabljamo večkrat, je bolje zapise potenc preračunati vnaprej in jih hraniti v tabeli. Potem delo pri točki 1 naredimo samo prvič.

Za nekatere pare osnov p in q je račun še precej preprostejši. Vzemimo na primer $p = 4$, $q = 2$. Vsaka števka v štiriškem zapisu da dve števki v dvojiškem zapisu.

$$\text{Primer: } 31203_{[4]} = \underbrace{11}_{[2]} \underbrace{01}_{[2]} \underbrace{10}_{[2]} \underbrace{00}_{[2]} \underbrace{11}_{[2]}_{[2]}$$

Če pa vzamemo $p = 2$ in $q = 4$, po dve števki dvojiškega zapisa določita števko v štiriskem zapisu.

$$\text{Primer: } 111011001_{[2]} = \underbrace{1}_{[2]} \underbrace{11}_{[2]} \underbrace{01}_{[2]} \underbrace{10}_{[2]} \underbrace{01}_{[2]}_{[2]} = 13121_{[4]}$$

Verjetno ste že uganili, da tako preprosta zveza velja, kadar je p potenca q ali ko je q potenca p . Za bistre glave, ki jih $\star$ -iški številski sistemi še niso povsem utrudili, pa še naloga: Poiščite bližnjico za prepis iz p -iškega številskega sistema v q -iški številski sistem, če sta p in q potenci z isto osnovo, na primer $p = r^i$ in $q = r^j$!

Janez Žerovnik

**PRI NASTAJANJU PRESEKA POMAGAJO S
PROGRAMSKO OPREMO PODJETJA:
MARAND, MARMIS IN SKUPINA ATLANTIS**