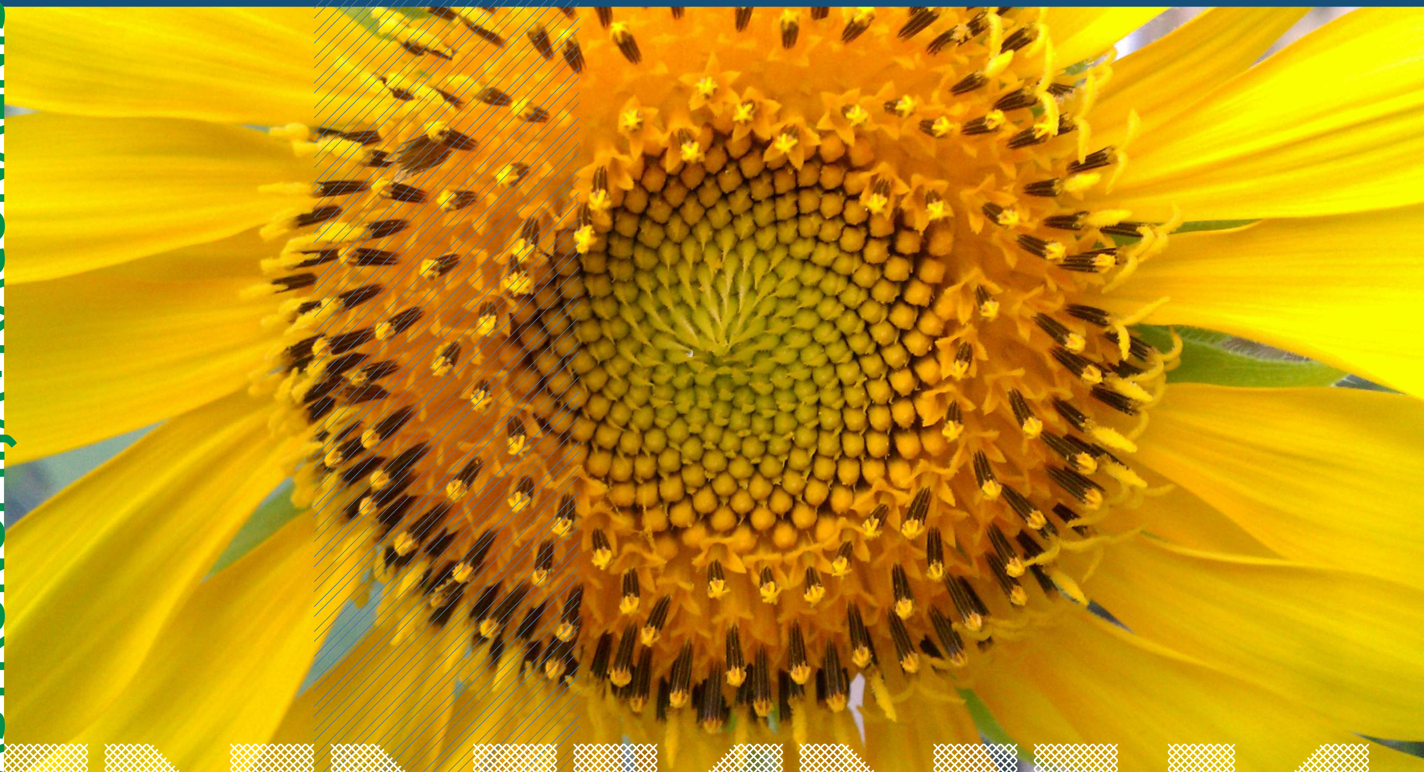
1

PRESEK LETNIK 41 (2013/2014) ŠTEVILKA **1**

MATEMATIKA+FIZIKA+ASTRONOMIJA+RAČUNALNIŠTVO#



PRESEK

→ GEOMETRIJSKI DOKAZI NEKATERIH TRIGONOMETRIJSKIH ENAKOSTI

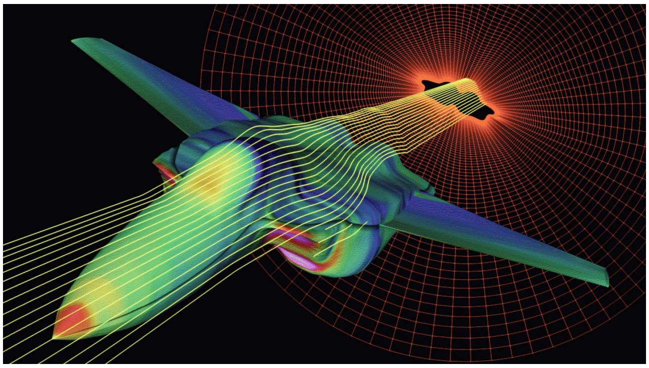
→ DODATI ALI ODVZETI, TO JE ZDAJ VPRAŠANJE

→ PRIHAJA VELIKI KOMET STOLETJA

→ KORENSKO UREJANJE

ISSN 0351-6652

Načrtovanje letal



→ Kljub temu, da znanstveniki preučujejo pretok zraka in vode že več kot sto let, šele v zadnjem času bolje razumejo zapletene pojave turbulenc, ki so pomemben del aerodinamike. S pomočjo matematike in sodobnih računalnikov se lahko pri oblikovanju letal velikokrat izognemo uporabi vetrovnikov.

Pretok tekočine opisujejo Navier-Stokesove enačbe. To so parcialne diferencialne enačbe, ki jih žal ne znamo natančno rešiti. Z naraščajočo hitrostjo toka se v enačbah povečujejo tudi nelinearni členi, ki zelo otežijo numerično iskanje rešitev enačb. Zato je težko razumeti turbulence, ki vplivajo na let letala. Kos jim niso niti današnji superračunalniki. Nujna so nova teoretična dognanja, ki bi ta problem poenostavila do te mere, da bi bil rešljiv z dostopno tehnologijo. Matematiki trenutno preverjajo Richardsonove in Kolmogorove zakone, hipoteze, ki poskušajo pojasniti turbulence.

Več si lahko preberete v tretjem delu knjige *What's happening in Mathematical Sciences*, ki ga je napisal Barry Cipra.

Pojasnilo: *Gornji prispevek je prevod iz rubrike »The Mathematical Moments«, ki jo objavlja Ameriško matematično društvo AMS na spletni strani www.ams.org/mathmoments.*

Kolofon

Presek
list za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje
letnik 41, šolsko leto 2013/2014, številka 1

Dopisi in naročnine: DMFA–založništvo, Presek, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana, telefon (01) 4766 553, telefaks (01) 4232 460, 2517 281.

Internet: www.presek.si
Elektronska pošta: presek@dmfa.si

Naročnina za šolsko leto 2013/2014 je za posamezne naročnike 18,00 EUR – posamezno naročilo velja do preklica, za skupinska naročila učencev šol 15,75 EUR, posamezna številka 3,76 EUR, dvojna številka 6,89 EUR, stara številka 2,71 EUR, letna naročnina za tujino pa znaša 25 EUR.

Transakcijski račun: 03100–1000018787.

Devizna nakazila: SKB banka d.d. Ljubljana, Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana, SWIFT (BIC): SKBASI2X, IBAN: SI56 0310 0100 0018 787.

Založilo DMFA–založništvo

Oblikovanje Tadeja Šekoranja

Tisk Tiskarna Pleško, Ljubljana

Naklada 2000 izvodov

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana.

Navodila sodelavcem Preseka za oddajo prispevkov

Presek objavlja poljudne in strokovne članke iz matematike, fizike, astronomije in računalništva. Poleg člankov objavlja Prikaze novih knjig s teh področij in poročila z osnovnošolskih in srednješolskih tekmovanj v matematiki in fiziki. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, učencem višjih razredov osnovnih šol in srednješolcem.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev) in sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo). Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Slike v elektronski obliki morajo biti visoke kakovosti (jpeg, tiff, eps, ...), velikosti vsaj 8 cm pri ločljivosti 300 dpi. V primeru slabše kakovosti se slika primerno pomanjša ali ne objavi. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmak med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku na naslov uredništva **DMFA–založništvo, Uredništvo revije Presek, p. p. 2964, 1001 Ljubljana** ali na naslov elektronske pošte **presek@dmfa.si**.

Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki oceni primernost članka za objavo. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem uredništvo prosi avtorja za izvorne datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TeX oziroma LaTeX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Kazalo

Slika na naslovnici: Kolikšna je filotaksa sončničnega cveta? Odgovor lahko poiščete v prejšnji številki Preseka.

Geometrijski dokazi nekaterih trigonometrijskih enakosti

Alija Muminagić

V tem članku bomo predstavili geometrijske dokaze za nekatere trigonometrijske enakosti.

Naloga 1. Dokaži, da velja enakost

- $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ enakokraki, $AB = AC = 1$ in $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = 20^\circ$. Na osnovnici BC določimo točki D in E tako, da je $BD = AB = 1$ in $DE = AD$. Hitro se prepričamo, da koti merijo toliko, kot je prikazano na sliki 1.

Naj bodo točke F, G in H nožišča višin iz oglišč B, D in E v enakokrakih trikotnikih $\triangle ABD$, $\triangle ADE$ in $\triangle AEC$. Potem je

- $AF = \cos 80^\circ$ (glej pravokotni trikotnik $\triangle ABF$) in $\mathrm{AD} = 2 \cdot AF = 2 \cdot \cos 80^\circ$ (ker je $\triangle ABD$ enakokraki).

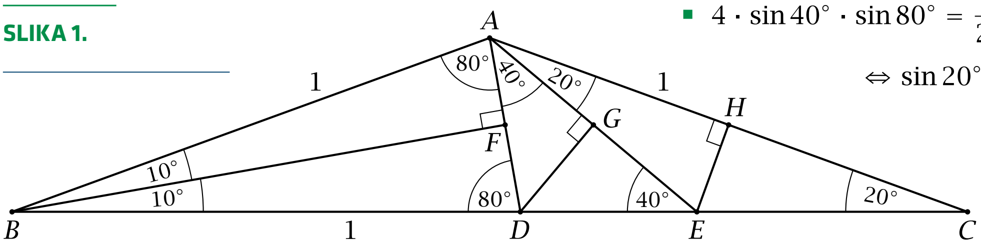
Na podoben način dobimo

- $$\begin{aligned} \mathrm{AG} &= AD \cdot \cos 40^\circ = 2 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ, \\ AE &= 2 \cdot AG = 4 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ, \\ AH &= AE \cdot \cos 20^\circ = 4 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ, \\ AC &= 2 \cdot AH = 8 \cdot \cos 80^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 20^\circ, \end{aligned}$$

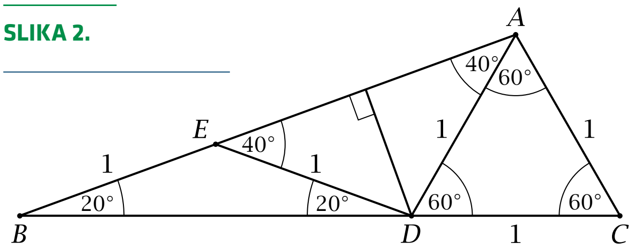
od tod pa zaradi $AC = 1$ sledi

- $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ = \frac{1}{8}.$ ■

SLIKA 1.



SLIKA 2.



Naloga 2. Dokaži, da je

- $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$

Dokaz. Opazujmo trikotnik $\triangle ABC$ s koti $\sphericalangle A = 100^\circ$, $\sphericalangle B = 20^\circ$, $\sphericalangle C = 60^\circ$ in stranico $AC = 1$. Naj bosta točki D in E na stranicah BC in AB takšni, da je $DC = ED = AC = AD = 1$. Tedaj so velikosti kotov kot na sliki 2 in $BE = 1$. (Pojasni!) Sedaj imamo

- $$\begin{aligned} AB = AE + EB &= 2 \cdot \cos 40^\circ + 1 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos 40^\circ\right) = 2 \cdot (\cos 60^\circ + \cos 40^\circ) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ \\ &= 4 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ. \end{aligned} \tag{1}$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\frac{1}{2} = \cos 60^\circ$, $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ in $\cos(90^\circ - x) = \sin x$. Z uporabo sinusnega izreka v trikotniku $\triangle ABC$ dobimo

- $$\frac{AB}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{\sin 20^\circ} \Leftrightarrow AB = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 20^\circ}. \tag{2}$$

Končno iz (1) in (2) dobimo

- $$4 \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 20^\circ} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$ ■

Naloga 3. Dokaži, da je

$$\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ.$$

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ pravokotni, $\sphericalangle C = 90^\circ$ in naj bo $\sphericalangle A = 70^\circ$ in $AC = 1$. Na kateti BC določimo točke D, E in F tako, da je $\sphericalangle BAD = 10^\circ$, $\sphericalangle DAE = 20^\circ$ in $\sphericalangle EAF = 30^\circ$. Sledi, da je $\sphericalangle FAC = 10^\circ$ in $\sphericalangle ABC = 20^\circ$ (glej sliko 3).

V pravokotnih trikotnikih $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle AEC$ in $\triangle AFC$ iz $AC = 1$ sledi $\operatorname{tg} 70^\circ = BC$, $\operatorname{tg} 60^\circ = DC$, $\operatorname{tg} 40^\circ = EC$ in $\operatorname{tg} 10^\circ = FC$. Če želimo dokazati enakost $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$, moramo dokazati, da je $BC = FC + EC + DC$, kar lahko zaradi $BC = BD + DC$ zapišemo

$$BD + DC = FC + EC + DC \Leftrightarrow BD = FC + EC. \quad (3)$$

Na podaljšani kateti BC preko točke C določimo točko G tako, da je $\sphericalangle CAG = 10^\circ$. Iz skladnosti trikotnikov $\triangle FAC$ in $\triangle GAC$ sledi, da je $FC = CG$. Zato je enakost (3) ekvivalentna $BD = CG + EC \Leftrightarrow BD = EG$. Iz dokaza, da je $BD = EG$, bo torej sledilo, da je $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 70^\circ$.

Sinusni izrek v trikotniku $\triangle ABD$ nam da:

$$\frac{AB}{\sin 150^\circ} = \frac{BD}{\sin 10^\circ} \Leftrightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin 10^\circ}{\sin 150^\circ},$$

od koder zaradi $\sin 150^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ dobimo

$$BD = 2 \cdot AB \cdot \sin 10^\circ. \quad (4)$$

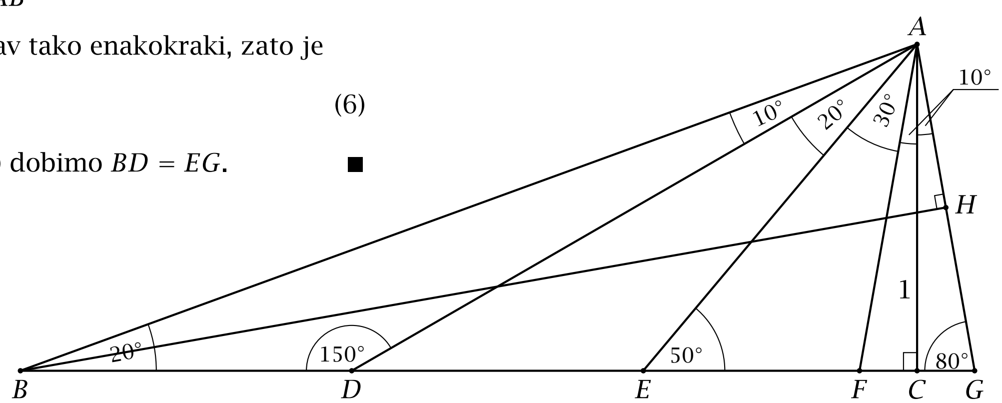
V enakokrakem trikotniku $\triangle ABG$ narišimo višino BH. Tako je (glej $\triangle ABH$)

$$\sin 10^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{AG}{2 \cdot AB} \Leftrightarrow AG = 2 \cdot AB \cdot \sin 10^\circ. \quad (5)$$

Trikotnik $\triangle AEG$ je prav tako enakokraki, zato je

$$AG = EG. \quad (6)$$

Končno iz (4), (5) in (6) dobimo $BD = EG$. ∎

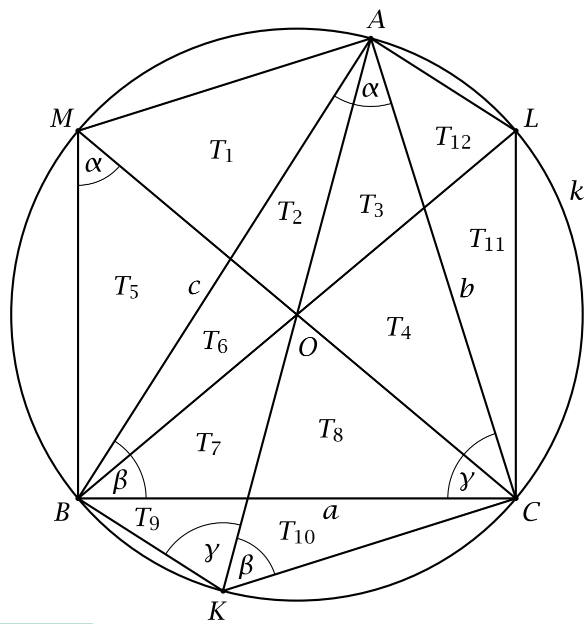


SLIKA 3.

Naloga 4. Dokaži, da v (nepravokotnem) trikotniku velja enakost

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma.$$

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ nepravokotni in naj bodo $BC = a$, $CA = b$ in $AB = c$ in α, β in γ notranji koti $\triangle ABC$. Naj bo točka O središče očrtane krožnice k okoli trikotnika $\triangle ABC$ in naj bodo točke K, L in M presečne točke smeri AO, BO in CO s krožnico k. Na ta način je šesterokotnik $AMBKCL$ razdeljen na 12 manjših trikotnikov, katerih površine so označene s $T_1, T_2, \ldots, T_{12}$ (glej sliko 4).



SLIKA 4.

Na sliki 4 opazimo šest trikotnikov, ki imajo eno stranico enako premeru. Vsak od teh trikotnikov je razdeljen na dva manjša trikotnika z enakima površinama. (Zakaj?) Imamo torej:

$$T_3 + T_4 = T_8 + T_{10} \qquad T_2 + T_6 = T_3 + T_{12}$$
$$T_2 + T_6 = T_7 + T_9 \qquad T_7 + T_8 = T_5 + T_6$$
$$T_7 + T_8 = T_4 + T_{11} \qquad T_3 + T_4 = T_1 + T_2$$

Iz vsote vseh teh enakosti dobimo $2 \cdot (T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) = (T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8) + (T_1 + T_5) + (T_9 + T_{10}) + (T_{11} + T_{12})$, oz. $T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 + T_8 = (T_1 + T_5) + (T_9 + T_{10}) + (T_{11} + T_{12})$, kar lahko, če z $[XYZ]$ označimo površino trikotnika $\triangle XYZ$, napišemo krajše

$$[ABC] = [ABM] + [BCK] + [ACL]. \tag{7}$$

Iz skladnosti trikotnikov $\triangle OLC \cong \triangle OMB$ sledi

$$LC = MB \text{ in podobno } KC = MA \text{ in } AL = BK. \tag{8}$$

Znano je, da je $[ACB] = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, kjer je R polmer očrtanega kroga, torej lahko zapišemo

$$[ABM] = \frac{AM \cdot BM \cdot AB}{4R} = \frac{c \cdot AM \cdot BM}{4R},$$
$$[BCK] = \frac{BC \cdot CK \cdot KB}{4R} = \frac{a \cdot CK \cdot KB}{4R},$$
$$[ACL] = \frac{AC \cdot CL \cdot LA}{4R} = \frac{b \cdot CL \cdot LA}{4R}.$$

Enakost (7) lahko sedaj zapišemo:

$$a \cdot b \cdot c = c \cdot AM \cdot BM + a \cdot CK \cdot KB + b \cdot CL \cdot LA. \tag{9}$$

Nadalje je $\sphericalangle CMB = \alpha$ (ker je to obodni kot nad BC) v pravokotnem trikotniku $\triangle CMB$ ($\sphericalangle CBM = 90°$, ker je to kot nad premerom), zato je

$$\operatorname{tg} \sphericalangle CMB = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{BM} = \frac{a}{BM} \text{ in podobno}$$
$$\operatorname{tg} \sphericalangle AKC = \operatorname{tg} \beta = \frac{AC}{KC} \overset{(8)}{=} \frac{b}{MA} \text{ in}$$
$$\operatorname{tg} \sphericalangle AKB = \operatorname{tg} \gamma = \frac{AB}{BK} = \frac{c}{BK}. \tag{10}$$

Končno dobimo

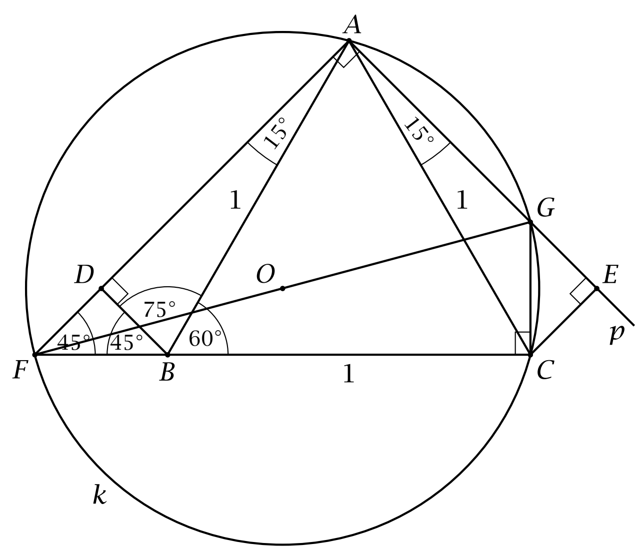
$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{BM} + \frac{b}{MA} + \frac{c}{BK} =$$
$$= \frac{a \cdot MA \cdot BK + b \cdot BM \cdot BK + c \cdot BM \cdot MA}{BM \cdot MA \cdot BK}$$
$$\overset{(8)}{=} \frac{a \cdot KC \cdot BK + b \cdot CL \cdot AL + c \cdot BM \cdot MA}{BM \cdot MA \cdot BK}$$
$$\overset{(9)}{=} \frac{a \cdot b \cdot c}{BM \cdot MA \cdot BK} = \frac{a}{BM} \cdot \frac{b}{MA} \cdot \frac{c}{BK}$$
$$\overset{(10)}{=} \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma. \qquad \blacksquare$$

Naloga 5. Dokaži, da je

$$\frac{\cos 15° + \sin 15°}{\cos 15° - \sin 15°} = \sqrt{3}.$$

Dokaz. Naj bo trikotnik $\triangle ABC$ enakostranični ($AB = BC = CA = 1$). Na podaljšku stranice BC preko točke B izberimo točko F tako, da je $\sphericalangle FAB = 15°$ (glej sliko 5). Naj bo k krožnica, očrtana trikotniku $\triangle AFC$. Skozi točko A povlečimo premico p, ki krožnico k seče v točki G tako, da je $\sphericalangle CAG = 15°$. Tako je $\sphericalangle FAG = 90°$ ($15° + 60° + 15° = 90°$) in FG premer krožnice k. (Zakaj?) Sledi, da je $\sphericalangle FCG = 90°$. Naj bo D nožišče normale iz točke B na AF. V pravokotnem trikotniku $\triangle ADB$ zaradi $AB = 1$ velja $AD = \cos 15°$ in $BD = \sin 15°$. Trikotnik $\triangle DFB$ je enakokraki ($\sphericalangle DFB = \sphericalangle DBF = 45°$), zato je $DF = BD = \sin 15°$. Nadalje je

$$AF = AD + DF = \cos 15° + \sin 15°. \tag{11}$$



SLIKA 5.

Z E označimo nožišče normale iz točke C na premico p. V trikotniku $\triangle AEC$ je $AE = \cos 15^\circ$ in $CE = \sin 15^\circ$. Nadalje je $\sphericalangle GFC = \sphericalangle CAG = 15^\circ$ (kot obodni koti nad CG), in je $\sphericalangle FGC = 75^\circ$. Zaradi $\sphericalangle BFD = 45^\circ$ je $\sphericalangle GFA = 30^\circ$ $(45^\circ - 15^\circ)$, sledi, da je $\sphericalangle AGF = 60^\circ$ (glej $\triangle AFG$). Sedaj, zaradi $\sphericalangle AGF + \sphericalangle FGC + \sphericalangle CGE = 180^\circ \iff 60^\circ + 75^\circ + \sphericalangle CGE = 180^\circ \iff \sphericalangle CGE = 45^\circ$ dobimo, da je $\triangle GEC$ enakokraki. Zaradi $AC = 1$ (glej $\triangle ACE$) je $AE = \cos 15^\circ$, $EC = GE = \sin 15^\circ$ in imamo

$$AG = AE - GE = \cos 15^\circ - \sin 15^\circ. \tag{12}$$

V pravokotnem trikotniku $\triangle AFG$ je

$$\operatorname{tg} \sphericalangle AGF = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = \frac{AF}{AG} \overset{(11),(12)}{=\!=} \frac{\cos 15^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ},$$

kar je bilo potrebno dokazati. ■

Verjetno bi se le redki lotili reševanja teh nalog na prikazan način, razen če ni izrazito zahtevana geometrijska rešitev (kar se ne zgodi pogosto). Obravnavane naloge imajo verjetno tudi druge geometrijske rešitve, zato priporočam bralcem, da jih poskušajo najti.

V vsakem primeru je to zanimivo za »zbiralce« neobičajnih rešitev. Za te je ta članek tudi napisan.

Literatura

[1] Opgavehjørnet 1983–1993, Jens Carstensen og Matematikloererforeningen, 1993.

[2] J. Carstensen in A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Triangle **1** (1997) 2, Udružnje matematičara Bosne i Hercegovine, Sarajevo, 87–88.

[3] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije iz elementarne matematike*, Grafičar promet, d.o.o., Sarajevo 2006, 205–214 (9 dokazov za primer 2).

[4] J. Carstensen in A. Muminagić, *Geometrijski dokazi nekih trigonometrijskih jednakosti*, Matematičko-fizički list **LIII** (2002–2003) 3, 210–213.

× × ×

49. tekmovanje za zlato Vegovo priznanje

Klavdija Cof Mlinšek

→ Najboljši osnovnošolci s področnih tekmovanj so se v soboto 20. aprila 2013 pomerili v osmih regijah na državnem tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Nanj se po pravilniku uvrsti do 1% vseh sedmošolcev, osmošolcev in devetošolcev s posameznega področja ter še učenci, ki jih na podlagi dosežkov na področnem tekmovanju izbere državna tekmovalna komisija.

Najboljši tekmovalci so bili nagrajeni z zlatimi Vegovimi priznanji. V sedmem razredu smo podelili 64, v osmem 65 in v devetem 64 zlatih Vegovih priznanj.

Učenci, ki na tekmovanju Mednarodni matematični Kenguru dosežejo najboljši uspeh in hkrati dosežejo vsaj polovico točk na državnem tekmovanju, se udeležijo nagradnega izleta. V tem šolskem letu smo za najboljše učence zadnjih treh razredov osnovne šole organizirali nagradni izlet v Benetke. Povabili smo 112 najboljših učencev. S panoramsko ladjo smo se odpeljali do otoka Burano in Murano ter do glavnega trga sv. Marka. Ogledali smo si kako izdelujejo okrasje iz muranskega stekla, znamenitosti mesta ter se spopadli z gnečo v ozkih beneških ulicah. Izlet je bil nepozabno doživetje, marsikdo od učencev pa je spoznal tudi kakšnega novega prijatelja.

Nagrade, ki so bile podeljene v Cankarjevem domu, so prejeli najboljši tekmovalci, in sicer:

7. RAZRED

I. nagrada

- Ana Luetič, OŠ Vižmarje-Brod
- Jani Kure, OŠ Podzemelj

II. nagrada

- Eva Jug, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka
- Gašper Lotrič, OŠ Predoslje Kranj
- Matevž Miščič, OŠ Dragomelj

III. nagrada

- Jan Nipič, OŠ Rudolfa Maistra Šentilj
- Maja Popović, OŠ Koseze, Ljubljana

8. RAZRED

I. nagrada

- Luka Govedič, OŠ Pohorskega odreda Slovenska Bistrica
- Anja Zdovc, OŠ Jožeta Krajca, Rakek

II. nagrada

- Filip Rutar, OŠ narodnega heroja Maksa Pečarja, Ljubljana
- Leon Samotorčan, OŠ Vrhovci, Ljubljana

III. nagrada

- Luka Jevšenak, OŠ Mihe Pintarja-Toleda, Velenje
- Andraž Strgar, OŠ Stražišče Kranj
- Zala Potočnik, OŠ Trzin

SLIKA 1.

9. RAZRED

I. nagrada

- David Popović, OŠ Valentina Vodnika, Ljubljana
- Aleksej Jurca, OŠ Ledina, Ljubljana

II. nagrada

- Martina Lokar, OŠ Danila Lokarja Ajdovščina
- Timen Stepišnik Perdih, OŠ Šmarje pri Jelšah

III. nagrada

- Marija Krečič, OŠ Draga Bajca Vipava
- Maj Mejak, OŠ Mirana Jarca, Ljubljana
- Petra Vidmar, OŠ Ivana Groharja, Škofja Loka

× × ×

Naloga

Marko Razpet

→ **Poenostavi število**

- $$s = \sqrt[3]{50 + \sqrt{\frac{67375}{27}}} + \sqrt[3]{50 - \sqrt{\frac{67375}{27}}}.$$

× × ×

www.dmfa-zaloznistvo.si

www.presek.si

www.dmfa.si

Barvni sudoku

→ V 8×8 kvadratkov moraš vpisati začetna naravna števila od 1 do 8 tako, da bo v vsaki vrstici, v vsakem stolpcu in v kvadratkih iste barve (pravokotnikih 2×4) nastopalo vseh 8 števil.

							5
		1				6	
		6				4	
7	4				8	3	
	6		4		7		2
	3		8		4		
						7	
			6			5	

→ → → REŠITEV BARVNI SUDOKU

6	8	3	7	4	1	2	5
4	5	1	2	7	3	6	8
8	1	6	3	2	5	4	7
7	4	2	5	6	8	3	1
1	6	5	4	3	7	8	2
2	3	7	8	5	4	1	6
5	2	4	1	8	6	7	3
3	7	8	6	1	2	5	4

× × ×

Dodati ali odvzeti, to je zdaj vprašanje

Tine Golež

Nobena skrivnost ni, da večina kozarcev lepo zveni. In kako se spreminja višina tona (v glasbenem smislu, fizikalno bi temu rekli zven), če v kozarec nalijemo vodo? Odgovora sta pravzaprav dva in si nasprotujeta. Med samim vlivanjem vode slišimo vse višji ton, torej vse večjo frekvenco. Podrobno je pojav opisal Ivo Verovnik [1]. Če pa kozarec uporabljamo kot neke vrste tolkalo, pa trkanje z žličko po kozarcu povzroči višji ton, ko je kozarec prazen, nižjega pa tedaj, ko je poln. Enaka frekvenca se namesto s trkanjem pojavi, če s prstom drsamo po robu kozarca. Tako nekateri ljudje iz množice kozarcev ustvarijo »stekleno harfo« in igrajo zahtevne melodije. Ravno obratno torej kot sprememba zvena, ki ga slišimo ob nalivanju vode ali pihanju v različno napolnjene, sicer enake steklenice.

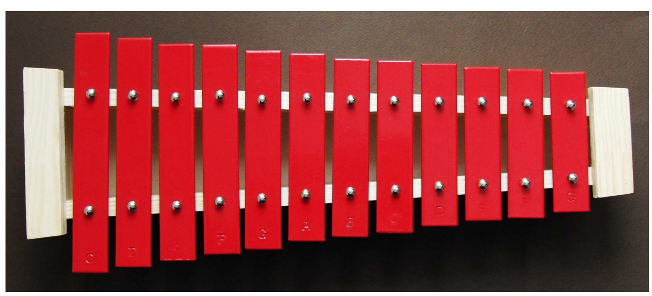
Nalivanje vode in pihanje v steklenico (kdor igra prečno flavto, to vsekakor dobro obvlada) povzroča šum, ki posebej izdatno resonira s frekvenco, ki ustreza lastni frekvenci zraka v kozarcu (ali steklenici). Ta je tem višja, čim bolj poln je kozarec. V prvem približku lahko rečemo, da gre za skrajševanje na eni strani zaprte piščali. Pri polnjenju kozarca ali udarjanju po kozarcu (ali drsanju z vlažnim prstom po robu kozarca) pa glasbilo ni padajoča voda, ki povzroča šum (ali šum pri pihanju v steklenico), in zrak nad njo, pač pa sam kozarec. Ker slišimo nižji ton, sklepamo, da nihajo v bolj polnem kozarcu stene kozarca zaradi dolite vodo bolj ovirano in s tem z nižjo frekvenco. Preden torej odgovorimo, kaj moramo storiti za znižanje tona, moramo vedeti, na kateri način bomo ton povzročali. Dolivanje vode tako lahko frekvenco zniža ali zviša, odvisno od vrste rabe tega preprostega glasbila.

Iz trgovine

Ko sem se pred dnevi odpravil v trgovino le po izdelek a in sem imel kmalu v vozičku še nenaročene izdelke b, c in d, me je pritegnil zvok kovinskih zvončkov ali metalofona. Preprosto glasbilo je preizkušala nakupovalka. Presenečen sem bil, saj je bil inštrument vrhunsko uglašen, kar pri cenenih glasbilih ni prav pogost pojav. Zvončki niso stali niti 20 evrov, zato so postali izdelek e in tako dopolnili moj nakup.

Bralci gotovo vedo, da struna, ki jo skrajšamo na polovico s pritiskom ob ubiralko, zveni natančno z dvakratno frekvenco. Glasbeno temu pravimo, da zveni za oktavo višji ton. Prav, pa poglejmo sedaj zvončke. Ploščica, ki zveni kot nižji c, je dolga 16,7 cm, medtem ko je ploščica za oktavo višji c, dolga le 11,85 cm. Kvocient teh dveh števil je 1,41. Zlahka posumimo, da gre za razmerje dolžin $\sqrt{2}$, medtem ko je razmerje frekvenc 2. Dodajmo še, da sta tako debelina kot širina vseh ploščic enaki.

Pred nami je že prvi izziv, prva meritev. Kako niha ravnilo, ki je na eni strani vpeto? Ga je res treba skrajšati le za faktor 1,41 in ne za 2, če želimo podvojiti frekvenco? Ravnilo vpnemo tako, da je nihajoči del dolg npr. 20,6 centimetrov. Vključimo



SLIKA 1.
Zvončki; dolžine ploščic, ki zvenijo kot oktava, so v razmerju $1:\sqrt{2}$.

program za snemanje zvoka, zanihamo ravnilo in se ga na rahlo dotaknemo s tršim predmetom. Snemalnik posname »trke« ravnila in predmeta, iz katerih dokaj natančno preberemo nihajni čas. (Sam še vedno uporabljam CoolEdit.) Potem nihajoči del ravnila skrajšamo na 16,6 cm in izmerimo, da se je frekvenca podvojila. Očitno so transverzalna nihanja palic drugačna od nihanja strune.

A če palico udarimo s kladivom na koncu v smeri simetrijske osi palice, hkrati pa jo držimo na sredini, bomo dobili longitudinalno (lastno) nihanje. Takrat pa je frekvenca nihanja obratnosorazmerna z dolžino palice, pa tudi višjeharmonske frekvence so celoštevilski večkratniki osnovne frekvence.

Premislimo še, kako je frekvenca osnovnega transverzalnega valovanja odvisna od preseka palice, ki je vpeta na enem krajišču, kot je bilo vpeto ravnilo na sliki 2. Naj ima palica presek v obliki pravokotnika, da nekoliko spominja na deščico. Če presekamo palico po dolžini, bo sila, ki je potrebna za upogib vsakega kosa palice, le polovico tolikšna, kot je bila pri nerazrezani palici. A tudi masa, ki jo mora polovična sila vrniti v začetno lego (in pri tem opravi četrt nihaja), je le polovična, zato pričakujemo, da se nihajni čas ne spremeni. Nihajni čas ni odvisen od širine palice. Drugačna zgodba pa je pri debelini. Če razrezano palico zlepimo v debelejšo (ali jo preprosto nadomestimo z debelejšo in ožjo), smo ohranili maso palice. Sila, ki je sedaj potrebna za upogib, je večja. Prav zato se tej večji sili posreči enako masivno palico vrniti do prvotne (ravnovesne) lege v krajšem času; prva četrtina nihajnega časa (ter vse ostale četrtine) in s tem nihajni čas je krajši. Frekvenca je kar

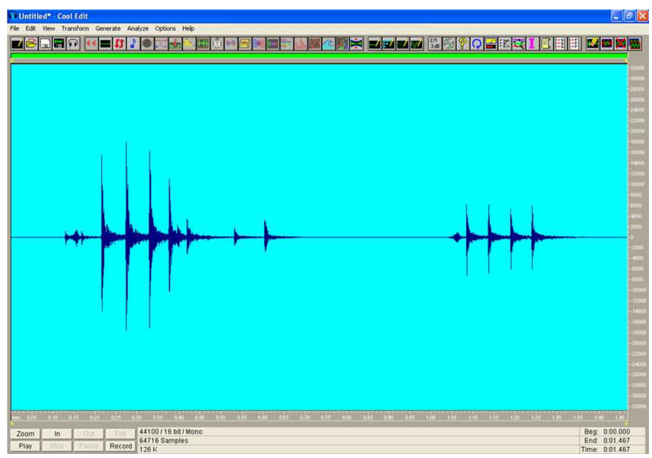
SLIKA 2.
Ravnilo je vpeto na mizo; geotrikotnik le pomaga sponi. Med nihanjem ravnilo rahlo zadeva pisalo, ki ga sicer držimo kakih 5 cm od prostega roba ravnila tik nad ravnilom.

premosorazmerna z debelino. Da gre res za premosorazmernost, lahko sami izmerimo z različno debelimi palicami ali pa uporabimo diferencialne enačbe.

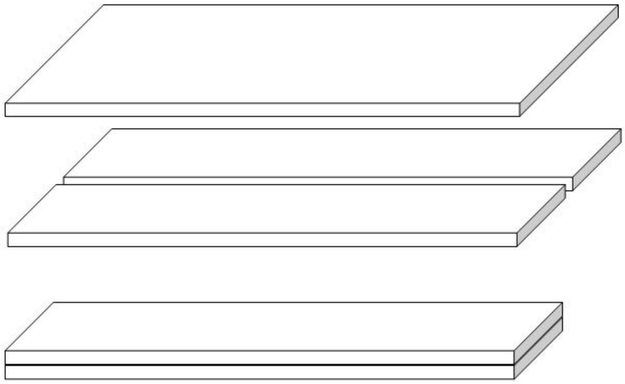
Povzemimo: frekvenca transverzalnega nihanja palice (ali podolgovate ploščice oz. jezička) je sorazmerna z debelino in obratnosorazmerna z dolžino palice na kvadrat; od širine palice pa ni odvisna. Če koga zanima še kaj več, bo pogledal, kaj je o tem napisal Iztok Kukman [2].

Iz kuhinjske omare

Ena izmed manj škodljivih posledic sladkosnednosti so tudi prazne skodelice različnih čokoladnih namazov. Že nekaj časa sta v naši kuhinjski omari dve. Ko sem ju prestavljal, se nista razbili, kot bi morda pričakoval bralec, pač pa le zazveneli. Prav to pa me je presenetilo; čeprav sta na prvi pogled enaki, je bil zven ene bistveno nižji od zvena druge. Naj se izrazim v glasbenem jeziku: prva je zvenela s tonom c, druga pa z (višjim) tonom f. Za nepoznavalce notnega zapisa povejmo, da je tolikšna razlika v frekvencah pri prvih dveh tonih slovenske himne. Očitno gre za nekaj več kot le majhno razliko, ki bi bila posledica naključja pri izdelavi.



SLIKA 3.
Prva skupina udarcev nihajočega ravnila ob pisalo je bila premočna, druga skupina pa dovolj nežna, da nihanja nismo znatno motili. Čas štirih udarcev je bil 0,155 s, kar pomeni, da je nihajni čas 0,155 s/3 = 0,05167 s (prvi udarec je udarec nič!) in frekvenca 19,4 Hz. Pri daljšem nihajočem delu ravnila (206 mm) pa je bila izmerjena frekvenca 9,4 Hz. Triodstotno odstopanje je povsem sprejemljivo za to preprosto meritev.



SLIKA 4.
Osnovna palica oz. jeziček, prerezani jeziček, iz katerega sta nastala dva (vsak zahteva polovično silo za upogib), in zlepljeni polovici. V zadnjem primeru je sila, ki je potrebna za enak upogib kot upogib prvotnega jezička, večja. Ni narisano, da so vsi jezički pritrjeni na levi strani tako, kot je pritrjeno ravnilo na sliki 2.

SLIKA 5.
Skodelici sta fotografirani proti svetlobi, zato je slika sicer fotografsko skromna, fizikalno pa kaže, da je desna skodelica tanjša, saj svetloba bistveno bolj proseva.

Ko sem skodelici ponovno vzel v roke, sem imel občutek, da nista obe enako težki. Kuhinjska tehtnica je potrdila mojo domnevo; pri eni je pokazala 222 g, pri drugi pa 274 g. Hm, katera je torej masivnejša? Če pomislimo na strune, bi rekli, da bo tista, ki ima večjo maso, zvenela z nižjim tonom. Na kitari, godalih in tudi v klavirju so strune za nižje tone (za manjše frekvence, da povemo še s fizikalnim izrazom) vidno debelejše. A dva udarca po skodelicah razkrijeta, da z nižjim tonom zveni skodelica, ki ima manjšo maso.

Po vsej verjetnosti ne gre za različno surovino, iz katere sta skodelici izdelani, pač pa za različno debelino. Pogled proti svetlobi potrdi domnevo, saj je skodelica z manjšo maso nekoliko prosojnejša.

Skodelica je neke vrste zvon. Vprašajmo se, kako bi opisali frekvence zvona. Kaj se zgodi z okroglo luknjo v kovinski plošči. Bo zaradi segrevanja plošče večja ali manjša? Ploščo si predstavljamo sestavljeno iz obročev. Vsak obroč lahko obravnavamo kot palico, ki se zaradi segrevanja raztegne. S tem je obseg vsakega obroča večji, kar pomeni, da je luknja večja.

Nekaj podobnega naredimo (v mislih) tudi z zvonom ali našo skodelico. Predstavljajmo si, da je sestavljena iz obročev. Ko udarimo po zvonu ali skodelici, povzročimo lastno nihanje vsakega obroča. To pomeni, da moramo proučiti nihanje palice, saj obroč ni nič drugega kot ustrezno zakrivljena palica oz. kovinski trak ali jeziček.

Toda prav to smo že storili! Ugotovili smo, da debelejše palice nihajo z večjo frekvenco oz. manjšim nihajnim časom. Zato se še vprašamo, ali naše ugotovitve pomenijo, da zvonove uglašujejo »navzdol« z odvzemanjem materiala oz. brušenjem. »Dr. Google« potrdi to domnevo, do katere nas je pripeljalo premikanje skodelic in nekaj dodatnih poskusov. Zvon, ki ga po notranji strani nekoliko obrusijo, zveni z nižjim (osnovnim) tonom.

Iz omare upokojene profesorice glasbe

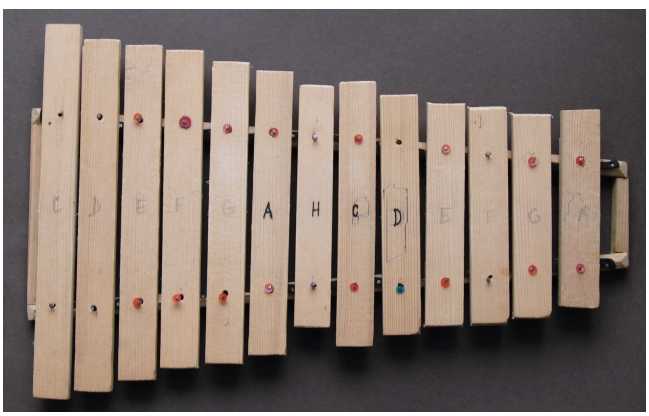
Da smem brskati po njeni omari, je krivo sorodstveno razmerje; sem namreč njen sin in nekatere njene omare lahko odprem. V eni izmed njih sem našel preprost ksilofon, ki je po sili razmer nastal pred pol stoletja. Na prvi pogled naj bi šlo za malomarno izdelano glasbilo, ki bi moralo biti še razglašeno, saj je ena deščica očitno prekratka. Uporaba pa priča, da je inštrument odličen, saj je dobro uglašen. Kako je torej mogoče, da je deščica za ton h krajša od tiste za sosednji ton c? Les – posebno cenene vrste – pač ni zelo homogen. Prav spremenjena gostota bi bila lahko vzrok; lahko pa gre za različno debelino. Meritev potrdi, da je deščica za ton h malo tanjša in zato navkljub manjši dožini uspe zveneti s pravo frekvenco. Po računu sodeč pa nekaj prispeva tudi sestava lesa, saj ta ni dovolj tanek, da bi le z debelino dosegel ustrezno nizko frekvenco. Očitno je, da je bil glavni razsodnik pri izdelavi natančno uho; merilni trak je služil le kot približno vodilo.

Po pričakovanju pa sta dolžini deščic, ki zvenita v razmiku oktave ($c^1 - c^2$, $d^1 - d^2$, $\ldots$), praktično pri vseh drugih tonih skoraj natančno v razmerju $1{,}41 : 1$.

Za konec spet k zvončkom

Še dve stvari izdajmo. Najprej moramo povedati, da v nasprotju z alikvotnimi toni, ki so pri strunah in piščalih celoštevilski večkratniki osnovne frekvence ($1, 2, 3, 4, \ldots$ oz. $1, 3, 5, \ldots$ pri piščalih, ki so na eni strani zaprte), take urejenosti in harmonije pri transverzalnem nihanju palic ni. Prav zato so alikvotni toni, ki bi zveneli, moteči, saj pomenijo tisto, kar imenujemo razglašenost. Pri zvončkih to težavo obidemo tako, da je ploščica podprta tam, kje sta vozla osnovnega lastnega nihanja. Taka podpora osnovnega lastnega nihanja ne moti, medtem ko znatno ovira naslednje alikvotne tone oz. višjeharmonska nihanja, katerih frekvence niso celoštevilski večkratniki osnovne frekvence, pač pa 2,76 kratnik, 5,40 kratnik ... Teoretična izpeljava teh frekvenc presega zahtevnost članka.

Na koncu poglejmo, kako so zvončke uglasili. So tako zelo natančno odrezali ploščice? Ne, zadnje uglaševanje je skrito pod ploščico. Ko zvončke obrnemo, opazimo, da so v nekaterih ploščicah zvrtane vdolbine. Prav s temi vdolbinami je mogoče zelo natančno popraviti frekvenco. V katero smer pa? Ali frekvenco zvišamo ali znižamo? Če po branju pričujočega članka odgovor ni povsem razkrit, preverite kar sami. Kovinsko ploščico, ki jo dobite kot ostanek v trgovini z barvnimi kovinami, najprej podprite na ustreznih mestih, posnemite zvok, izmerite frekvenco in nato še ploščico malo navrtajte. Če uho ne izve, pa CoolEdit pove, v katero smer se je spremenila frekvenca. Na delo!



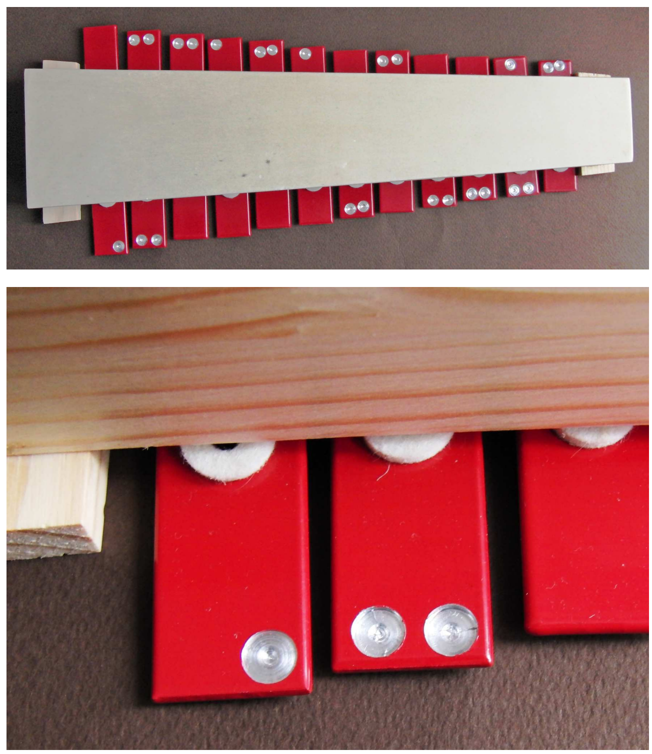
SLIKA 6.
Preprost ksilofon. Le za izdelavo deščice h je bil uporabljen malo drugačen les.

Literatura

[1] I. Verovnik in L. Mathelitsch, *Kaj slišiš, ko točiš vino v kozarec*, Fizika v šoli, 1998, 18–24.

[2] I. Kukman, *Nihanje jezičkov*, Fizika v šoli, 2010, 9–15.

[3] `https://ccrma.stanford.edu/CCRMA/Courses/152/percussion.html` (uporabljeno 12. 2. 2013).



SLIKA 7.
Zvrtane vdolbine, ki služijo za uglasitev zvončkov.

× × ×

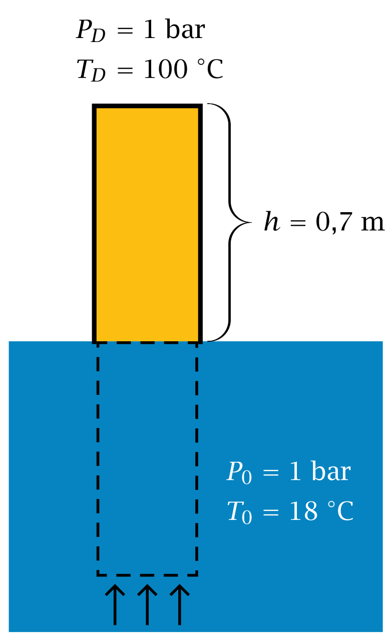
Zakaj se pločevinka stisne?

KOMENTAR NALOGE IN NEKAJ ŠTEVILK V OPOZORILO BODOČIM PREIZKUŠEVALCEM

Iztok Tiselj

V 4. številki lanskega Preseka smo brali o pločevinki polni pare, ki jo navzdol obrnjeno potopimo v hladno vodo. Hitra kondenzacija pare v stiku z mrzlo vodo pločevinko v hipu stisne. V 5. številki Preseka, je bil eksperiment ponovljen še s stekleno posodo. Fotografije potrjujejo varen in uspešen zaključek poskusa. Kljub ugodnemu izidu poskusa na fotografijah, pa me je malo zaskrbelo za morebitne nadobudne preizkuševalce, ki bi se morebiti lotili ponovitve poskusa. V industriji je namreč vroča para v stiku s hladno kapljevino zanesljiv recept za težave. Naj gre za vodo v jedrski elektrarni, za amonijak v hladilnem krogu tovarne sladoleda ali za kakšen drug stroj in snov: vroča para in mrzla kapljevina se ne smeta znajti na istem mestu. Srečanja takšne vrste imenujemo »vodni udar«, škoda, ki nastane ob takšnih pojavih, pa se lahko meri z velikimi vsotami denarja, včasih pa tudi s smrtnimi žrtvami.

Poskusimo s številkami pokazati, zakaj je potrebno opozorilo. Začnimo s poenostavljenim opisom poskusa, v katerem navpično cev polno pare (slika 1) spravimo v stik s hladno kapljevino. Poskus, ki so ga poimenovali Water-cannon experiment (verjamem, da prevod ni potreben), skiciran na sliki 1, so izvedli leta 1976. Cev dolga 70 centimetrov, s premerom 3,8 centimetre, je bila na vrhu zaprta, spodaj pa odprta in delno potopljena v večjo posodo s hladno vodo. V cev, ki je bila na začetku polna vode, so v najvišji točki skozi drobno cevko (ni narisana na sliki 1) dovajali vročo paro. Para je najprej kondenzirala in počasi segrevala zgornjo plast vode. Para se je na vrhu cevi začela nabirati, ko je temperatura kapljevine tam dosegla temperaturo vrelišča vode pri tlaku 1 bar, ki jo poznamo kot temperaturo 100 °C. Sledilo je izrivanje kapljevine proti spodnjemu odprtemu koncu cevi. Zanimiv del poskusa se je začel v trenutku, ko je para dosegla spodnji rob navpične cevi, odrinila plast vroče kapljevine in prišla v stik s hladno vodo v večji spodnji posodi. Ta trenutek prikazuje slika 1, kjer rumena barva predstavlja paro, modra pa kapljevino. Para v cevi ob stiku s hladno kapljevino zelo hitro kondenzira, kar povzroči podtlak. Ta podtlak v posodo potegne kapljevino, ki se



SLIKA 1.

zaleti v zgornji, zaprti konec cevi in povzroči močan porast tlaka v cevi. Vse skupaj se zgodi v nekaj desetinkah sekunde.

Največja neznanka v opisanem poskusu je hitrost kondenzacije pare. Ocenjevanje hitrosti kondenzacije pare je pravzaprav še danes glavni cilj večine poskusov in teoretičnih raziskav. Zato se bomo pri naših ocenah, ki jih želimo obdržati na nivoju osnovnošolske fizike, poslužili na videz neobičajne predpostavke, ki pravi, da para ob stiku s hladno kapljevino kondenzira neskončno hitro. Veljavnost takšne poenostavitve bomo preverili in komentirali naknadno.

Če para v stiku s hladno vodo kondenzira neskončno hitro, to pomeni, da tlak v navpični cevi v trenutku pade z 1 bara na praktično 0 barov. (Srednješolci višjih letnikov v resnici vedo, da tlak ne more pasti na 0 barov ampak samo do tlaka nasičenja, ki ustreza vrelišču vode pri temperaturi 18 °C. Iz tabel z lastnostmi vode razberemo, da voda pri temperaturi 18 °C zavre pri tlaku približno 0,02 bara, kar pa je za našo oceno približno enako 0 barom.)

Prva obremenitev, s katero se mora spoprijeti navpična cev, je torej nastanek podtlaka v notranjosti cevi, ki cev lahko stisne, če so njene stene dovolj tanke (npr. stene pločevinke).

Če so stene cevi dovolj močne, cev ohrani obliko. To predpostavimo tudi v našem računu, s katerim želimo oceniti, kakšen tlačni sunek se pojavi v cevi, ko podtlak v cev potegne hladno kapljevino. Najprej ocenimo hitrost, s katero bo kapljevina zadela zgornji zaprti konec cevi. Predpostavimo, da bo v cev potegnilo stolpec kapljevine, ki je na sliki označen s črtkano črto. S tem smo naredili približek, s katerim smo zanemarili vse mešanje vode med občrtanim stolpcem kapljevine in kapljevino zunaj stolpca. Hitrost stolpca izračunamo z drugim Newtonovim zakonom, ki ga zapišemo za označeni stolpec kapljevine v navpični smeri. Maso stolpca kapljevine izračunamo iz njegovega volumna V, ki je enak volumnu navpične cevi:

- $m = \rho V = \rho h S.$

Poznamo gostoto kapljevine $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, presek cevi smo označili z S, njeno višino pa s h.

Najpomembnejše sile, ki delujejo na stolpec kapljevine, so sile tlaka. Tlačne sile vedno delujejo pravokotno na površino, zato na gibanje stolpca v navpični smeri vplivata samo sili na spodnjo in zgornjo ploskev stolpca. Sile na zgornji ploskvi ni, saj smo tam predpostavili tlak 0 barov. Sila na spodnjo ploskev, ki je na sliki označena s puščicami, pa je

- $F_p = pS.$

Stolpec kapljevine se sicer ne premika brez upora, ki ga povzroča viskoznost, a te sile zanemarimo. Upoštevamo še silo teže in zapišemo drugi Newtonov zakon za stolpec kapljevine:

- $F_p - F_g = ma$
- $pS - \rho h S g = \rho h S a.$

Od tod izračunamo, da se stolpec v navpični smeri giblje s pospeškom

- $$a = \frac{p}{\rho h} - g = \frac{10^5\ \mathrm{Pa}}{0{,}7\ \mathrm{m} \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}} - 10\ \mathrm{m/s^2} \approx 130\ \mathrm{m/s^2}.$$

Iz številk je razvidno, de je prispevek sile teže precej manjši od tlačnih sil. Izračunajmo še hitrost, s katero stolpec zadene zaprti konec cevi. Uporabimo znano enačbo, ki popiše odvisnost med hitrostjo, potjo in pospeškom pri enakomerno pospešenem gibanju:

- $v = \sqrt{2ah}.$

Upoštevamo zgornji izraz za pospešek in dobimo hitrost

- $$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho} - gh} \approx 14\ \mathrm{m/s}.$$

Še ena enačba, »enačba Žukovskega«, je potrebna, da ocenimo tlačni sunek, ki ga povzroči stolpec vode, ki trči v zaprt konec cevi. Enačba je enostavna in razumljiva

- $\delta p \simeq \rho v c.$

Enačba Žukovskega pravi, da je prirastek tlaka sorazmeren z gostoto kapljevine ρ, s hitrostjo kapljevine pred trkom v in z zvočno hitrostjo v kapljevini c, ki je za vodo pri 18 °C približno 1470 m/s. Če vstavimo številke, izračunamo tlačni sunek približno 200 barov!

18 nadaljevanje na strani →

15 nadaljevanje s strani

Kritični bralec se seveda mora vprašati, kakšen čuden rezultat je sploh to. Ali nismo morda nekoliko pretiravali z našimi približki in zanemaritvami? Tlak 200 barov lahko polomi tudi zelo močne cevi, kaj šele stekleno posodo iz prejšnje številke Preseka.

Preden komentiramo natančnost svojih računov, zapišimo tlačni sunek, ki so ga izmerili v poskusu Water-cannon: pri večkratnih ponovitvah poskusa so dosegli tlačne sunke okoli 70 barov ± 30 %, kar je približno trikrat manj od naše močno poenostavljene ocene. Še vedno pa gre za zelo visok tlak, ki ga zdržijo dovolj močne jeklene cevi, običajna steklena posoda pa prav gotovo ne.

Izkaže se, da z našim poenostavljenim modelom lahko približno napovemo največji teoretično dosegljiv tlačni sunek, ki se lahko pojavi v obravnavani cevi. Za previsoko oceno je kriva predpostavka o neskončno hitri kondenzaciji pare, zanemarjena pa sta tudi mešanje vode in viskozni upor ob premikanju stolpca vodev navpično cev. V Water-cannon eksperimentu so tako izmerili, da tlak v cevi takoj po hitri kondenzaciji pare ne pade na 0 barov, kot smo predpostavili, ampak na približno 0,5 bara. Maksimalna izmerjena hitrost kapljevine pa ni 14 m/s, kot smo ocenili v našem računu, ampak okoli 6 m/s. Kakšnih 10 % k previsoki napovedi tlaka prispeva tudi enačba Žukovskega, v kateri je za natančnejšo oceno potrebno upoštevati zmanjšanje efektivne zvočne hitrosti, ki je posledica elastičnosti same cevi.

Ob zgornjih številkah in rezultatih Water-cannon eksperimenta pa še vedno ostaja nepojasnjeno dogajanje v stekleni erlenmajerici iz prejšnje številke Preseka, ki je poskus preživela kljub črnim napovedim. Malo zaslug ima oblika erlenmajerice, ključen za njeno »preživetje« pa je bil zrak, ki ga para pri vrenju kapljevine ni povsem izrinila iz posode. Ob potopitvi erlenmajerice v mrzlo kapljevino je para kondenzirala, zrak pa je ostal v plinastem stanju in deloval kot vzmet, ki je močno ublažila trk stolpca kapljevine ob dno erlenmajerice. Na podoben način delujejo tudi nekateri varovalni sistemi, ki cevovode varujejo pred vodnim udarom. Ob pojavu podtlaka v ceveh iz varovalnega sistema priteče zrak in ublaži tlačne sunke, ki običajno sledijo podtlaku. Več zraka pomeni bolj prožno vzmet in manjši tlačni sunek, manj zraka pa bolj trdo vzmet in večji tlačni sunek ob vodnem udaru.

Vsekakor tistim, ki bodo raziskovali vodni udar v steklenih ali kovinskih posodah svetujem razmislek o primerni zaščiti. Praktično nemogoče je namreč ugotoviti, ali je v naši pari dovolj zraka, da nas bo obvaroval pred neprijetnostmi. »Hitro in odločno« izveden eksperiment v posodah, ki niso ravno pločevinke za pijačo, se lahko slabo konča!

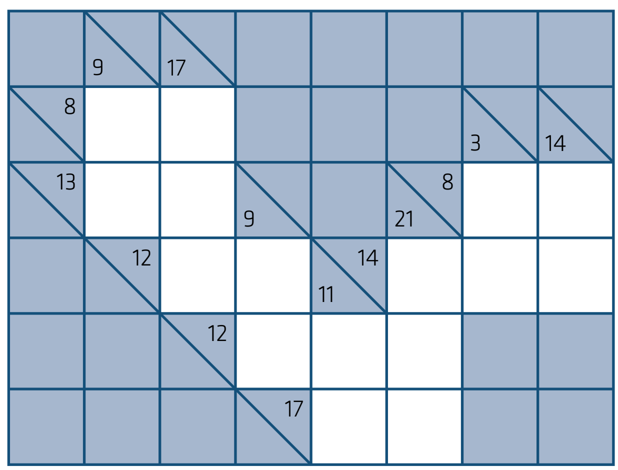
Literatura

[1] J. A. Block, P. H. Rothe, C. J. Crowley in G. B. Wallis, *An Evaluation of PWR Steam Generator water hammer*, NUREG-0291, 1976.

× × ×

Križne vsote

→ Naloga reševalca je, da izpolni bele kvadratke s števkami od 1 do 9 tako, da bo vsota števk v zaporednih belih kvadratkih po vrsticah in po stolpcih enaka številu, ki je zapisano v sivem kvadratku na začetku vrstice (stolpca) nad (pod) diagonalo. Pri tem morajo biti vse števke v posamezni vrstici (stolpcu) različne.



× × ×

Prihaja Veliki komet stoletja

Bojan Kambič

→ Lovci na komete so tista podvrsta ljubiteljskih astronomov, ki najbolj uživajo, ko iščejo in opazujejo šibke, komaj vidne pikice ali lise svetlobe, za katerimi se morda vleče še šibkejša sled repa. Žal je večina kometov, ki zaidejo v notranje predele Osončja, prav takih. A mati narava nas enkrat ali dvakrat na stoletje preseneti s kakšnim kometom, ki na našem nebu pripravi nepozabno predstavo s svojim visokim sijem in lepim, pahljačastim repom, ki se vije za njim. In prav takšen naj bi bil po napovedih komet C/2012 S1 (ISON), ki naj bi na našem nebu blestel proti koncu tega in v začetku prihodnjega leta.

Odkritje

Komet, ki je dobil ime C/2012 S1 (ISON), sta 21. septembra 2012 na ruskem observatoriju International Scientific Optical Network (ISON) s 40-centimetrskim teleskopom odkrila Vitalij Nevski in Artjom Novičonok. Na posnetkih istega predela neba, posnetih v razmiku nekaj dni, sta našla šibko pikico 19. magnitude, ki je v tem času nekoliko spremenila svojo lego med zvezdami. Odkritje sta sporočila v Center za komete in male planete (MPC) in kmalu se je izkazalo – prva potrditev odkritja je prišla iz italijanskega observatorija Remanzacco – da gre za doslej še neznan komet.

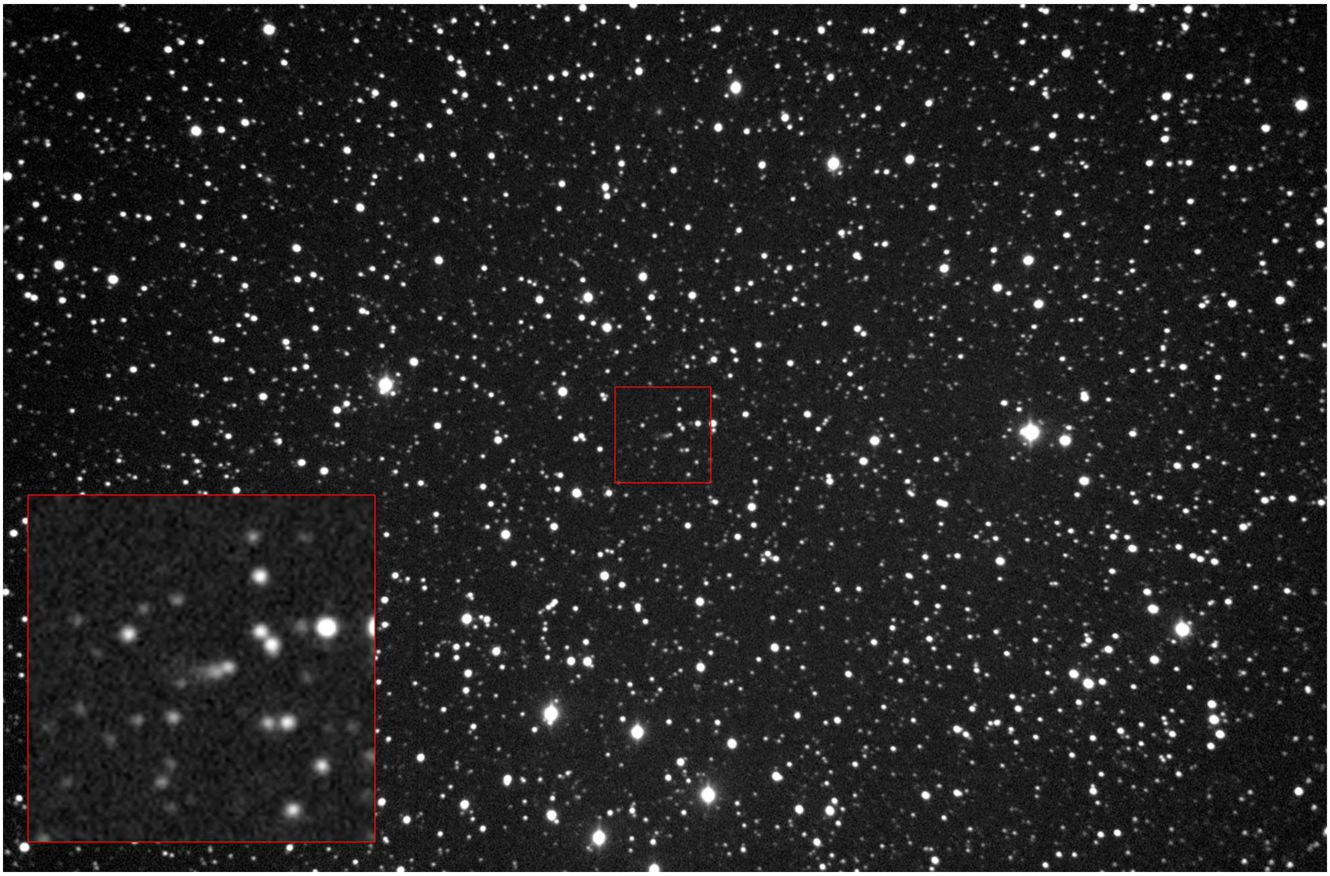
Strokovnjake je presenetilo, da komet na tako veliki oddaljenosti od Sonca že kaže prve znake aktivnosti. Iz tega so sklepali, da je komet še »svež« in da je to verjetno njegovo prvo potovanje k Soncu. V opazovanja so vpregli celo vesoljski teleskop Hubble, ki se ponavadi z opazovanjem »vesoljskih smeti«, kot astronomi v šali rečejo kometom in asteroidom, ne ukvarja. Ugotovili so, da je jedro kometa veliko od 5 do 6,5 kilometra. Če so meritve pravilne (komet je bil v času meritev še zelo daleč od nas), gre torej za manjši komet.

Ko je bilo zbranih dovolj opazovalnih podatkov, so lahko izračunali njegovo orbito in tudi gibanje po našem nebu. Komet bo do perihelija, ko bo najbliže Soncu, vseskozi pospeševal in 28. novembra 2013 švignil mimo naše zvezde na oddaljenosti vsega 1,2 milijona kilometrov nad njenim površjem. To se sliši za naše zemeljske razmere veliko, a v resnici ni (največje protuberance na Soncu se dvignejo do 600.000 kilometrov visoko nad njegovo površje). Kaj lahko se zgodi, da ga bo močno Sončevo sevanje tako segrelo, da bo razpadel na več kosov ali v najslabšem primeru popolnoma izparel. A ne prepustimo se malodušju in bodimo optimisti! Na svoji poti proti Soncu se ISON 1. oktobra sreča s planetom Mars, mimo katerega bo letel na oddaljenosti 10,8 milijona kilometrov. Že po obletu Sonca se bo Zemlji najbolj približal 26. decembra. Mimo nas bo letel na spoštljivi oddaljenosti 64 milijonov kilometrov.

Ne glede na to, ali bo komet preživel bližnje srečanje s Soncem ali ne, pa se moramo opazovalci na njegov prihod dobro pripraviti. Tu je nekaj koristnih nasvetov, ki vam bodo morda prišli prav.

Kdaj in kje bomo komet najlepše videli iz naših krajev

Ker ne vemo zagotovo, ali se bo komet po periheliju spet prikazal izza Sonca ali ne, je najbolje, da se ga nagledamo že prej. Po trenutnih napovedih (članek je nastal konec julija) naj bi bil komet s prostim očesom viden od sredine novembra 2013 pa vse do sredine januarja 2014. Najsvetlejši naj bi bil okoli perihelija, a takrat bo žal tudi najbliže Soncu in se bo skrival v njegovi svetlobi. Najdaljši rep, po najbolj optimističnih napovedih dolg kar 30 stopinj in več, naj bi imel okoli 5. decembra. Najbolj primerno obdobje za opazovanje bo torej med 4. in 14. de-



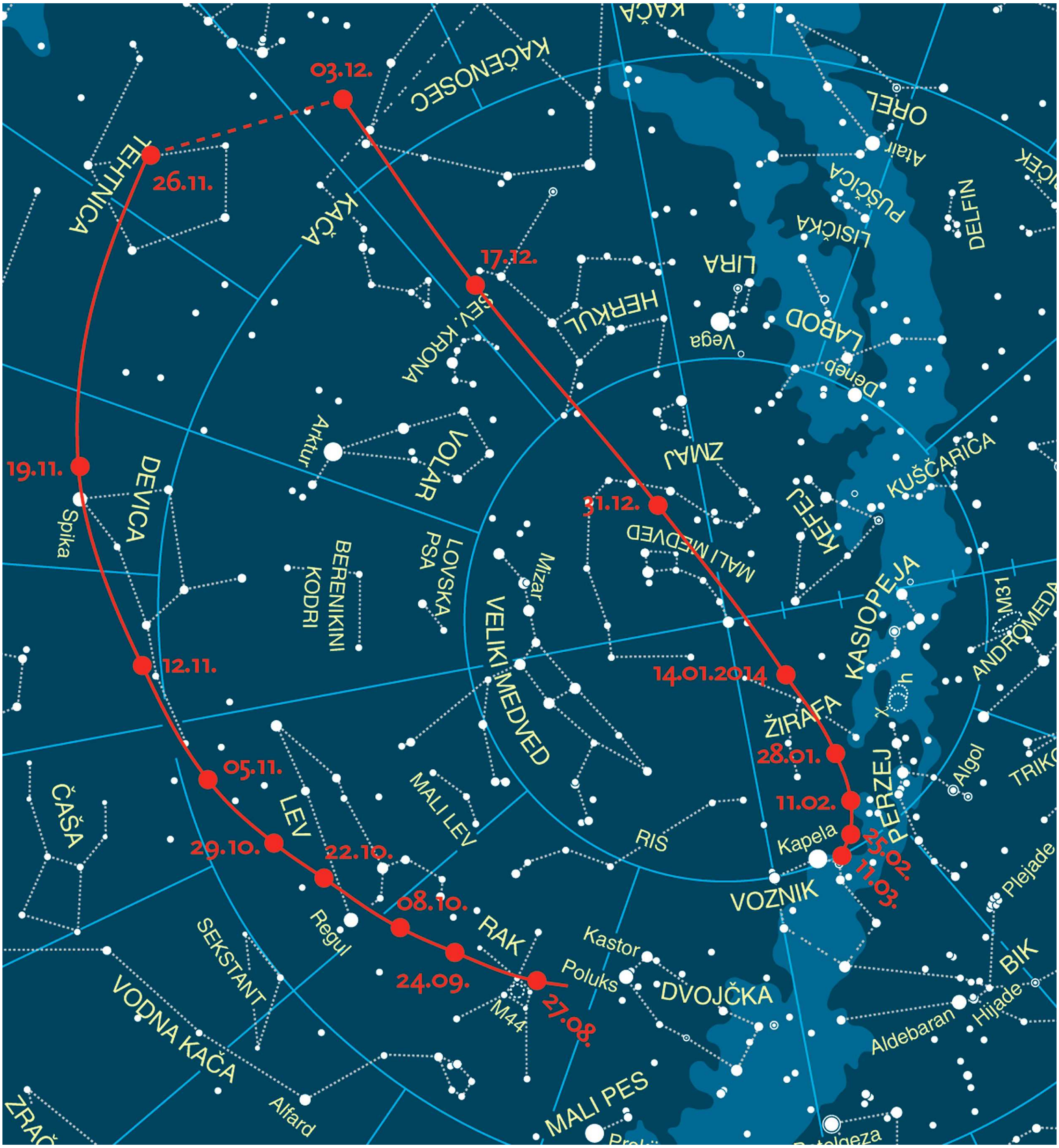
SLIKA 1.
Lahko iz tako majhnega zrase zares veliko in nepozabno? Ena izmed zgodnjih fotografij kometa C/2012 S1 (ISON), ki je nastala 13. aprila 2013 ob 20.21 UT na Prežganju z 20-centimetrskim f/3,7 teleskopom in CCD kamero G2-1600. Komet se je nahajal v ozvezdju Voznik, njegov sij pa je bil okrog 15,3 magnitude. Foto: Matej Mihelčič.

cembrom. Takrat naj bi bil še vedno zelo svetel, imel naj bi najdaljši rep, od Sonca pa bo že toliko odmaknjen, da bomo za opazovanja imeli na voljo dobro uro astronomske noči.

Toliko o češnji na torti, zdaj pa pojdimo lepo po vrsti. Kometovo pot po našem nebu od konca avgusta 2013 do sredine marca 2014 si lahko ogledate na karti, ki smo si jo sposodili iz astronomske revije Spika. Pike prikazujejo njegovo približno lego ob zraven zapisanih datumih. Komet bomo lahko na našem nebu vse tja do druge polovice decembra opazovali na jutranjem nebu. Septembra je v ozvezdju Rak, ki sredi meseca vzhaja okoli 3. ure in 30 minut. Za opazovanje imamo torej na voljo dobro uro in pol astronomske noči. Vendar pa komet v tem obdobju ni kakšen blesteč nebesni objekt, saj bo z napovedano 10. do 11. magnitudo sodil med težje zalogaje za majhne, pa tudi srednjevelike amaterske teleskope. Na srečo pa se bodo razmere iz noči v noč izboljševale v naš prid. Komet bo vsak dan sicer bliže Soncu, a bo tudi vse svetlejši.

V oktobru se komet pomika skozi pomladno ozvezdje Lev. V dneh okoli 15. oktobra je le nekaj stopinj severno od svetlega Regula (Alfa Leva), nekaj dni kasneje pa le dobro stopinjo severno od Marsa. Sredi oktobra vzhaja Regul okoli 3. ure in 30 minut, konec astronomske noči je približno ob 5. uri in 30 minut, Sonce pa vzide ob 7. uri in 20 minut. Vse ure so v poletnem času.

Novembra bo komet potoval čez ozvezdje Device.



SLIKA 2.
Pot kometa po našem nebu od septembra 2013 do marca 2014.

SLIKA 3.
Panoramski posnetek fantastičnega kometa Hale-Bopp iz aprila 1997. Foto: Jerry Lodriguss.

18. novembra bo le 20 ločnih minut vzhodno od svetle Spike (Alfa Device), ki je dala ime tudi naši astronomski reviji. To je tudi datum, ko lahko komet poiščete tudi tisti opazovalci, ki niste najbolj vešči pri rokovanju s teleskopi in iskanju ne prav svetlih objektov. Spika 18. novembra vzide ob 5. uri in 40 minut, konec astronomske noči je ob 5. uri in 25 minut, Sonce pa vzide okoli 7. ure. Komet bo torej treba poiskati nizko nad vzhodno-jugovzhodnim obzorjem v jutranji zarji, a če se bodo napovedi uresničile, bo dovolj svetel, da to ne bo težko.

Do konca novembra, to je do perihelija, se bo komet Soncu vse bolj približeval in postajal vse svetlejši, a žal se bo tudi vse bolj izgubljal v jutranji zarji. Ko bo v periheliju, bo v ozvezdju Tehtnice in nekaj časa ne bo viden. V tem času naj bi se mu sij povečal tako, da bo dosegel negativno magnitudo. Kakšna bo, pa bomo videli. Tu so napovedi najbolj negotove.

Po periheliju se bo komet hitro pomikal proti severu in se zavihtel visoko na zahodno-severozahodno nebo. To bo tudi čas, kot smo že omenili, ko bomo komet iz naših geografskih širin najlepše videli. Viden bo zvečer takoj po zahodu Sonca v začetku še nizko, nato pa vedno više nad severozahodnim obzorjem. Še vedno naj bi bil zelo svetel in imel naj bi dolg, veličasten rep. Čez ozvezdja Kača, Severna krona in Herkul se bo pomaknil v ozvezdje Zmaj in v drugi polovici decembra postal cirkumpolaren. To pomeni, da bo za opazovalce naših geografskih širin vseskozi nad obzorjem in viden vso noč. Seveda pa v teh dneh ne smemo zamuditi nobene priložnosti za opazovanje, saj bo komet brzel proč od Sonca in bo zato z vsakim dnem vse šibkejši.

Okoli novega leta bo komet med ozvezdjema Zmaj in Mali medved, 8. januarja 2014 pa bo potoval le dobri 2 stopinji od Severnice (Alfa Malega medveda). Sredi januarja ga bomo našli v Žirafi, februarja in marca pa v ozvezdju Voznik. A takrat bo ISON že na poti proti domu v zunanjih območjih Osončja, od koder je tudi prišel.

Opazovanje

Če bo komet dosegel napovedani sij in velikost, potem ga bomo brez težav videli že s prostim očesom. Za opazovanje podrobnosti v komi in repu pridejo prav kakršnikoli daljnogledi z večjim zornim poljem, ki jih imamo skoraj zagotovo vsi doma. Z daljnogledi z do 10-kratnimi povečavami lahko brez težav opazujemo kar iz roke, a več podrobnosti bomo videli, če daljnoglede postavimo na trdno fotografsko stojalo. Samo poseben nastavek, ki ni drag, moramo dokupiti. Oktobra in novembra, kasneje pa februarja in marca bomo za opazovanje potrebovali vsaj manjši amaterski teleskop, ki zbere več svetlobe in omogoča večje povečave.

Enostavno fotografiranje

Zadnji zares svetel komet na našem nebu je bil Hale-Bopp, ki nas je razveseljeval spomladi leta 1997. To je bil dogodek, ki ga tisti, ki smo ga doživeli, ne bomo nikoli pozabili. Komet je bil dovolj svetel, da ga je vsak, ki je imel kakršenkoli fotoaparat, lahko posnel in sliko shranil za spomin. Takrat še ni bilo digitalnih fotoaparatov oz. so ravno začeli svoj osvajalski pohod. Zato je danes vse skupaj še mnogo bolj enostavno. Za dokumentarno fotografijo je praktično dober čisto vsak digitalni fotoaparat. Dobro je, če omogoča poljubno dolge čase osvetlitve in spreminjanje občutljivosti (spreminjanje vrednosti ISO), ni pa nujno.

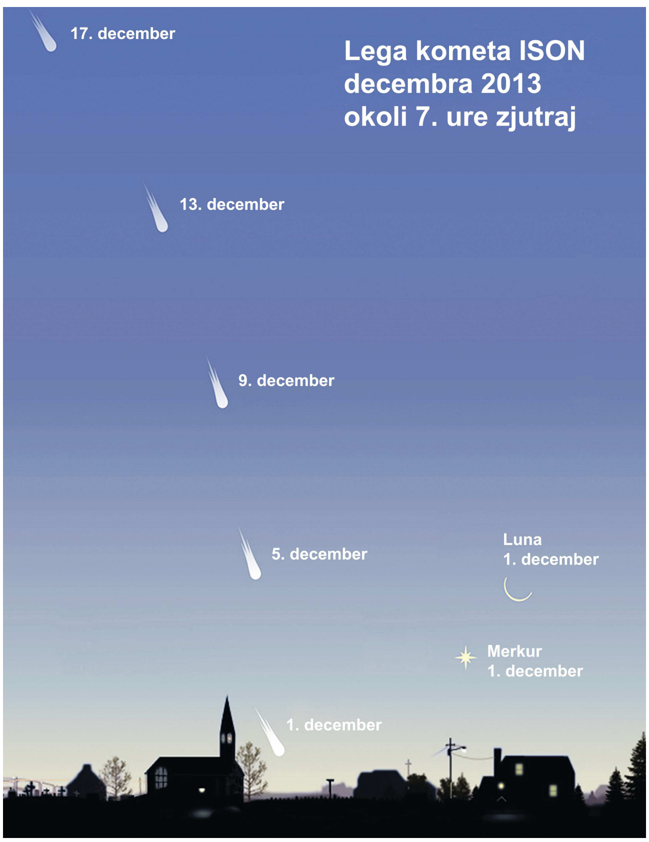
Kdor pa bo hotel posneti malo boljšo, kakovostnejšo fotografijo s podrobnostmi v komi in repu kometa, se bo moral malo bolj potruditi. Pri daljših časih osvetlitve moramo fotoaparat nujno postaviti na trdno stojalo, da slika ni stresena. Namesto proženja fotoaparata s prstom moramo uporabiti daljinski prožilec ali pa slikati s časovnim zamikom. Če hočemo na sliki kometa ujeti največ podrobnosti, moramo goriščno razdaljo objektiva fotoaparata izbrati tako, da bo komet skupaj z repom zavzel celotno zorno polje. Pri še daljših časih osvetlitve (več kot 10 minut) pa moramo nujno slediti gibanju kometa, če hočemo, da bo slika ostra. To najlaže storimo tako, da fotoaparat pritrdimo na teleskop in oba usmerimo proti kometu. S fotoaparatom slikamo, skozi teleskop pa pri čim večji povečavi sledimo kometu tako, da ga imamo ves čas v središču zornega polja. Za ta namen se dobijo posebni okularji z vgraviranim nitnim križem. Časa za priprave in testiranje opreme je več kot dovolj.

SLIKA 4.
Komet Hale-Bopp v času največje aktivnosti aprila 1997, posnet na observatoriju Črni Vrh z 19-centimetrsko f/4 Schmidt-Cassegrain kamero z ravnim poljem na film Kodak Ektacolor ProGold 1000. Zorno polje je okoli 4×4 stopinje. Foto: H. Mikuž in B. Kambič.

Nasvet: Če kometa s prostim očesom na nebu ne morete najti, si pomagajte s fotoaparatom. Slikajte nebo približno v smeri kometa. Sliko si oglejte na zaslonu fotoaparata; komet bo zagotovo viden. Nato primerjajte njegovo lego z opaznejšimi objekti na obzorju in ga nato poskusite poiskati še na nebu. Gotovo vam uspe.

Za konec

Kaj naj rečemo za konec? V prejšnjem stoletju so astronomi odkrili kar nekaj kometov, ki so daleč od Sonca še obetali veliko, spektakularno predstavo, ko pa so prišli v njegovo bližino, niso več upoštevali napovedi in se kot sive miške neopazno vrnili tja, od koder so prišli. Žal lahko z veliko natančnostjo izračunamo le tirnico vsakega odkritega kometa in njegovo pot po našem nebu, kaj pa se bo dogajalo z njim, ko ga bo ogrela Sončeva svetloba, pa ne. Počakajmo torej še teh nekaj mesecev in bodimo optimisti!



SLIKA 5.
Vidnost kometa ISON v decembru 2013 približno pol ure pred vzidom Sonca. Ilustracija: Sky&Telescope.

× × ×

Slovenci želi izjemen uspeh na mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike

Andrej Guštin

Čeprav se je slovenska ekipa dijakov prvič udeležila Mednarodne olimpijade iz astronomije in astrofizike (IOAA), ki je bila letos med 27. julijem in 5. avgustom v grškem Volusu, je domov prinesla dve srebrni medalji in dve pohvali. Tako so se naši mladi astronomi takoj zavihteli v prvo ligo med vrstniki iz vsega sveta. Uspeh je še toliko večji, če upoštevamo nekatera dejstva. IOAA ni nekakšno »vaško« tekmovanje, saj je na njem sodelovalo 36 držav, in to predvsem tistih, kjer je astronomija tradicionalno zelo močna in so vlaganja v to znanost in v mlade perspektivne dijake velika.

Državno tekmovanje iz znanja astronomije v Sloveniji poteka šele štiri leta, zato se je morda zdelo, da še nismo dovolj zreli za tovrstno mednarodno tekmovanje. Poleg tega se je ekipa, predvsem vodja Andrej Guštin, ubadala s finančnimi omejitvami, zaradi katerih smo se olimpijade udeležili le s štirimi in ne petimi dijaki ter z enim spremljevalcem – men-

SLIKA 1.
Logotip 7. olimpijade iz astronomije in astrofizike.

torjem, pa tudi priprave so bile sorazmerno kratkotrajne. Morda velja omeniti še to, da je IOAA organizirana tako, da dijaki samostojno tekmujejo v treh disciplinah. Teoretični del obsega 15 krajših in tri daljše astronomske in predvsem astrofizikalne naloge, ki jih dijaki rešujejo pet ur. Drugi del predstavljajo naloge iz obdelave astronomskih podatkov. Tretji del individualnega tekmovanja pa so astronomska opazovanja oz. praktična uporaba teleskopa. Prav zaradi tega lahko dober rezultat na olimpijadi dosežejo le dijaki, ki imajo zelo široko paleto astronomskega znanja in tudi izkušnje z astronomskimi opazovanj in meritvami.

SLIKA 2.
Slovenska ekipa na otvoritveni slovesnosti. Od leve proti desni: Michel Adamič, Jernej Černigoj, Krištof Skok, Žan Kokalj, Andrej Guštin.

Dijaki že desetletja tekmujejo na matematičnih in fizikalnih olimpijadah, če omenimo le dve naravoslovno-matematični panogi. Mednarodna tekmovanja iz znanja astronomije so nekoliko mlajša. Glavna razloga sta, da astronomija skoraj nikjer ni del rednega srednješolskega programa, kot sta to matematika in fizika, in le v manjšem številu držav potekajo državna tekmovanja iz astronomije. Prvo velja tudi za Slovenijo, medtem ko imamo državno tekmovanje »že« štiri leta. Letos smo se pri DMFA Slovenije kot organizatorju tekmovanja odločili, da je dozorel čas za sestavo prve astronomske reprezentance, ki nas je zastopala na 7. mednarodni olimpijadi iz astronomije in astrofizike v grškem Volosu.

SLIKA 3.
Krištof in Žan s srebrnima medaljama in oljčnim vencem na zaključni slovesnosti.

Na priprave in dodatni izbor za olimpijsko ekipo smo povabili osem, na državnem tekmovanju iz znanja astronomije najbolje uvrščenih srednješolcev. To so: Michel Adamič, Jan Rozman, Jakob Robnik, Gimnazija Bežigrad, mentor Sebastjan Zamuda; Jernej Černigoj, Srednja šola Veno Pilon Ajdovščina, mentor Andrej Rutar; Krištof Skok, I. gimnazija v Celju, mentor Roman Ocvirk; Žan Kokalj, II. gimnazija Maribor, mentor Gorazd Žiberna; Andrej Nabergoj, ŠC Srečka Kosovela Sežana, Gimnazija in ekonomska šola, mentorica Sonja Ivančič; Darko Kolar, Gimnazija Murska Sobota, mentor Renato Lukač.

Tridnevne priprave, ki sta jih vodila Dunja Fabjan (FMF Ljubljana) in Andrej Guštin, smo aprila organizirali v Plemljevi vili na Bledu. Povabljeni dijaki so tam spoznavali predvsem osnove in tudi težja poglavja astrofizike, ki sicer (še) niso del državnega tekmovanja, a je to znanje na olimpijadi zahtevano. Ob koncu priprav so dijaki dobili »domačo nalogo« z naslovom Ocena starosti razsutih in kroglastih zvezdnih kopic, katere ocena je štela kot del ocene pri izboru za reprezentanco.

Izborni teoretični del za uvrstitev v olimpijsko ekipo je bil 15. maja na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Pri pripravi nalog sta sodelovala Dunja Fabjan in Andrej Guštin, pri ocenjevanju izdelkov pa še Andreja Gomboc (FMF Ljubljana). Vseh osem udeležencev izbora je pokazalo izjemno astronomsko in astrofizikalno znanje in so za uvrstitev v reprezentanco odločale le malenkosti. Pri izboru smo upoštevali točke, dosežene na državnem tekmovanju iz astronomije, točke za domačo praktično nalogo in točke iz teoretičnih nalog izbirnega tekmovanja. v reprezentanco so se tako uvrstili Michel Adamič, Jernej Černigoj, Žan Kokalj in Krištof Skok.

SLIKA 4.
Dva srebra in dve pohvali! Od leve proti desni: Žan, Jernej, Krištof in Michel.

Med 20. in 23. julijem smo na Kovku nad Ajdovščino za udeležence olimpijade organizirali priprave, ki sta jih vodila Dunja Fabjan in Andrej Guštin. Pri organizaciji priprav je imel pomembno vlogo Andrej Rutar iz Srednje šole Veno Pilon Ajdovščina, saj nam je dobrohotno odstopil dom na Kovku in pomagal pri opazovalnem delu priprav.

Rezultat tega je bil izjemen uspeh na 7. olimpijadi iz astronomije in astrofizike. Žan Kokalj in Krištof Skok sta osvojila srebrni medalji, Michel Adamič in Jernej Černigoj pa pohvali. Dijake je na olimpijadi spremljal Andrej Guštin, ki je kot vodja ekipe tudi sodeloval pri strokovni razpravi o nalogah in pripravil prevode vseh nalog.

Organizatorji tekmovanja se zahvaljujemo vsem tekmovalcem, njihovim mentorjem, šolam, staršem in vsem drugim, ki so kakorkoli prispevali za prvi slovenski pohod proti astronomskemu Olimpu.

Za konec morda še ena zanimivost. Izbirnega tekmovanja za astronomsko olimpijsko reprezentanco, ne državnega tekmovanja (!), se je v Indiji udeležilo 50 000 dijakov. Za ekipo so jih izbrali pet.

Povezave:

- `www.ioaa2013.gr`
- `www.dmfa.si`
- `www.portalvvesolje.si`

Ena od kratkih teoretičnih nalog iz 7. olimpijade iz astronomije in astrofizike:

Nedavno je bila v Londonu takšna megla, da je bila navidezna vizualna magnituda Sonca na nebu enaka magnitudi polne Lune v popolnoma jasni noči. Predpostavi, da se gostota svetlobnega toka pri prehodu skozi meglo zmanjšuje eksponentno in izračunaj eksponentni koeficient τ, ki mu navadno pravimo optična globina.

× × ×

Korensko urejanje

Damjan Strnad

O tem, kako pomembna operacija je urejanje zaporedja števil, besed in drugih elementov v praksi, priča izjemno število obstoječih algoritmov urejanja. Ko govorimo o slednjih, najprej pomislimo na mehurčno urejanje, hitro urejanje ali urejanje s kopico. Skupna lastnost teh algoritmov je, da izvajajo neposredno primerjavo elementov zaporedja in izmenjujejo njihove položaje. Obstaja pa tudi drugačen način urejanja, ki namesto na primerjavi temelji na preštevanju elementov in ima teoretično celo ugodnejšo časovno zahtevnost od primerjalnih algoritmov. Enega izmed takšnih preštevalnih algoritmov urejanja bomo opisali v tem članku. Imenuje se *korensko urejanje* (angl. *radix sort*).

Takoj na začetku naj povemo, da bomo opis omejili samo na eno izmed možnih implementacij korenskega urejanja. Njeno delovanje bomo demonstrirali na urejanju seznama celih števil v naraščajoče zaporedje. Ime korenskega urejanja izhaja iz predpostavke, da so elementi zapisani z znaki v določenem skupnem *korenu* oz. *osnovi*. Desetiška števila so, denimo, zapisana v številskem sistemu z osnovo 10 kot nizi števk med 0 in 9. Vrstni red števk je definiran in zato vemo, da število 5 v urejenem seznamu nastopi prej kot število 8.

Primerjavo večjih števil lahko prevedemo na primerjavo istoležnih števk v njihovem znakovnem zapisu, pri čemer začnemo na levi strani in se pomikamo proti desni. Kot zgled vzemimo števili 1254 in 1281. Primerjava prve in druge števke, ki sta enaki v obeh zapisih, še ne da odločitve o vrstnem redu števil. Šele ob primerjavi tretje števke ugotovimo, da pride število 1254 pred številom 1282. Če želimo na tak način primerjati števila, ki imajo različno dolge znakovne zapise, je potrebno te najprej izenačiti na največjo skupno dolžino. Tako je npr. potrebno seznam števil $\{12, 3, 156, 78, 42\}$ najprej zapisati kot $\{012, 003, 156, 078, 042\}$. Seveda to velja samo za prikaz ročnega reševanja, v računalniku so števila na tak način dejansko že predstavljena.

Predpostavimo, da imamo seznam 100 števil, ki so zapisana kot enako dolgi nizi števk. Vemo, da bodo vsa števila, ki imajo na prvem mestu ničlo (zapišimo jih kot $0*$) v urejenem seznamu pred števili, ki imajo na prvem mestu enico (zapišimo jih kot $1*$). Če torej v (neurejenem) seznamu obstaja osem števil oblike $0*$, bodo po urejanju ta števila zasedala prvih osem mest urejenega seznama, števila oblike $1*$ pa jim bodo sledila od devetega mesta dalje. Prav tako bodo vsa števila oblike $0*$ in $1*$ pred števili oblike $2*$, t.j. števili, ki se pričnejo z dvojko. Če je števil oblike $1*$ v začetnem seznamu sedem, bodo po urejanju ta zasedala položaje 9 do 15, števila oblike $2*$ pa mesta od 16-tega naprej. S podobnim sklepanjem lahko zatrdimo, da bodo štiri števila oblike $9*$ po urejanju zasedala zadnja štiri mesta, t.j. položaje od 97 do 100. Vrstni red med števili, ki imajo na prvem mestu isto števko, je določen s števko na drugem mestu. Pri številih z enakima prvima števkama o vrstnem redu odloča tretja in tako naprej.

Za ljudi je opisani postopek bolj naraven, če ga izvajamo z zaporedno primerjavo števk od leve proti desni. V nadaljevanju bomo opisali različico korenskega urejanja, ki števila pregleduje od desne proti levi. V literaturi se ta algoritem imenuje *korensko urejanje z najmanj pomembno števko* (angl. *least significant digit (LSD) radix sort*). Osnovna ideja korenskega urejanja je v preštevanju elementov, ki imajo na določenem mestu v zapisu enak znak oz. števko. Ko je število elementov s posameznimi znaki znano, jih prepišemo na ustrezna mesta v pomožnem seznamu enake velikosti, kot bo opisano v nadaljevanju. Pri tem je ključnega pomena, da ohranjamo obstoječi vrstni red med elementi, ki imajo na opazovanem mestu isti znak in so bili pred tem že urejeni po števki desno od trenutno opazovane. Če opisani postopek ponavljamo s pregledovanjem števk od najbolj desne do najbolj leve, pri čemer vlogi osnovnega in pomožnega seznama izmenjujemo, bomo kot rezultat dobili urejen seznam števil.

Naj n_i označuje število elementov s števko i na opazovanem mestu, kjer je $i \in \{0, \dots, 9\}$ v primeru desetiških števil. Potem bodo v novem seznamu števila z opazovano števko j zasedala n_j mest od p_j do $p_j + n_j - 1$, kjer je:

$$p_j = \begin{cases} 1; & j = 0 \\ 1 + \sum_{k=0}^{j-1} n_k; & j \neq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Opazimo lahko, da za $j > 0$ velja $p_j = p_{j-1} + n_{j-1}$. Celotni algoritem lahko zapišemo v naslednjih korakih:

```
1. Postavi opazovani položaj na skrajno
   desno (t.j. položaj enic).
2. Sprehodi se skozi glavni seznam in
   preštej elemente, ki imajo na
   opazovanem položaju posamezno števko.
3. S pomočjo enačbe (1) določi
   nove začetne položaje elementov s
   posamezno števko.
4. S ponovnim prehodom skozi glavni
   seznam prepiši elemente na ustrezna
   mesta v pomožnem seznamu.
5. Zamenjaj vlogi glavnega in pomožnega
   seznama.
6. Če trenutni opazovani položaj ni
   skrajno levi, ga premakni za eno
   mesto v levo in pojdi na korak 2,
   sicer končaj.
```

Za zgled delovanja algoritma uporabimo seznam števil $\{87, 541, 303, 221, 34, 1231, 829, 705, 1041, 522, 92, 594\}$. V nadaljevanju bomo opazovani položaj v zapisih števil označevali s podčrtanim tiskom. Za ročno izvedbo moramo najprej števila zapisati z nizi enake dolžine, ki je v našem primeru 4. To nam da naslednji začetni seznam števil:

- $0087, 0541, 0303, 0221, 0034, 1231,$
  $0829, 0705, 1041, 0522, 0092, 0594.$

Urejati pričnemo s preštevanjem posameznih števk na položaju enic. Ugotovimo naslednje:

- $n_0 = 0$
  $n_1 = 4 \;\; (054\underline{1}, 022\underline{1}, 123\underline{1}, 104\underline{1})$
  $n_2 = 2 \;\; (052\underline{2}, 009\underline{2})$
  $n_3 = 1 \;\; (030\underline{3})$
  $n_4 = 2 \;\; (003\underline{4}, 059\underline{4})$
  $n_5 = 1 \;\; (070\underline{5})$
  $n_6 = 0$
  $n_7 = 1 \;\; (008\underline{7})$
  $n_8 = 0$
  $n_9 = 1 \;\; (082\underline{9})$

Z uporabo enačbe (1) izračunamo naslednje začetne položaje:

- $p_0 = 1$ $\quad p_1 = 1 + 0 = 1$
  $p_2 = 1 + 4 = 5$ $\quad p_3 = 5 + 2 = 7$
  $p_4 = 7 + 1 = 8$ $\quad p_5 = 8 + 2 = 10$
  $p_6 = 10 + 1 = 11$ $\quad p_7 = 11 + 0 = 11$
  $p_8 = 11 + 1 = 12$ $\quad p_9 = 12 + 0 = 12$

Sedaj izvedemo ponoven prehod skozi seznam in števila sproti prepisujemo na ustrezna mesta v pomožnem seznamu. Algoritmično to najlažje naredimo tako, da število z najdeno števko j zapišemo na položaj p_j in vrednost p_j povečamo za 1. Po prvem prepisovanju je vsebina seznama naslednja:

- $0541, 0221, 1231, 1041, 0522, 0092,$
  $0303, 0034, 0594, 0705, 0087, 0829.$

Vidimo lahko, da je relativni vrstni red števil, ki imajo na zadnjem mestu enako števko, ostal nespremenjen. Urejanju, ki ohranja takšno lastnost, pravimo *stabilno urejanje* (angl. *stable sort*).

V naslednjem koraku preštevamo števke na položaju desetic in dobimo:

- $n_0 = 2 \;\; (03\underline{0}3, 07\underline{0}5)$
  $n_1 = 0$
  $n_2 = 3 \;\; (02\underline{2}1, 05\underline{2}2, 08\underline{2}9)$
  $n_3 = 2 \;\; (12\underline{3}1, 00\underline{3}4)$
  $n_4 = 2 \;\; (05\underline{4}1, 10\underline{4}1)$

$n_5 = 0$
$n_6 = 0$
$n_7 = 0$
$n_8 = 1 \;\; (00\underline{8}7)$
$n_9 = 2 \;\; (00\underline{9}2, 05\underline{9}4)$

Novi začetni položaji so:

- $p_0 = 1$ $\quad p_1 = 1 + 2 = 3$
  $p_2 = 3 + 0 = 3$ $\quad p_3 = 3 + 3 = 6$
  $p_4 = 6 + 2 = 8$ $\quad p_5 = 8 + 2 = 10$
  $p_6 = 10 + 0 = 10$ $\quad p_7 = 10 + 0 = 10$
  $p_8 = 10 + 0 = 10$ $\quad p_9 = 10 + 1 = 11$

Rezultat prepisovanja je seznam:

- $0303, 0705, 0221, 0522, 0829, 1231,$
  $0034, 0541, 1041, 0087, 0092, 0594.$

V tretjem koraku s preštevanjem stotic dobimo:

- $n_0 = 4 \;\; (0\underline{0}34, 1\underline{0}41, 0\underline{0}87, 0\underline{0}92)$
  $n_1 = 0$
  $n_2 = 2 \;\; (0\underline{2}21, 1\underline{2}31)$
  $n_3 = 1 \;\; (0\underline{3}03)$
  $n_4 = 0$
  $n_5 = 3 \;\; (0\underline{5}22, 0\underline{5}41, 0\underline{5}94)$
  $n_6 = 0$
  $n_7 = 1 \;\; (0\underline{7}05)$
  $n_8 = 1 \;\; (0\underline{8}29)$
  $n_9 = 0$

Izračunani začetni položaji so tokrat:

- $p_0 = 1$ $\quad p_1 = 1 + 4 = 5$
  $p_2 = 5 + 0 = 5$ $\quad p_3 = 5 + 2 = 7$
  $p_4 = 7 + 1 = 8$ $\quad p_5 = 8 + 0 = 8$
  $p_6 = 8 + 3 = 11$ $\quad p_7 = 11 + 0 = 11$
  $p_8 = 11 + 1 = 12$ $\quad p_9 = 12 + 1 = 13$

S prepisovanjem pred zadnjim korakom dobimo seznam:

- $0034, 1041, 0087, 0092, 0221, 1231,$
  $0303, 0522, 0541, 0594, 0705, 0829.$

V zadnjem koraku s preštevanjem tisočic dobimo:

- $n_0 = 10 \;\; (\underline{0}034, \underline{0}087, \underline{0}092, \underline{0}221, \underline{0}303,$
  $\underline{0}522, \underline{0}541, \underline{0}594, \underline{0}705, \underline{0}829)$
  $n_1 = 2 \;\; (\underline{1}041, \underline{1}231)$
  $n_2 = 0$
  $n_3 = 0$
  $n_4 = 0$
  $n_5 = 0$
  $n_6 = 0$
  $n_7 = 0$
  $n_8 = 0$
  $n_9 = 0$

Ugotovimo še, da bomo števila s tisočico 0 zapisovali od položaja $p_0 = 1$, števili s tisočico 1 pa od položaja $p_1 = 11$ naprej, kar nam da končni urejen seznam:

- $0034, 0087, 0092, 0221, 0303, 0522,$
  $0541, 0594, 0705, 0829, 1041, 1231.$

Predstavljeni postopek je mogoče optimizirati tako, da elemente najprej grupiramo po dolžinah zapisa in ločeno uredimo elemente z eno, dvema, tremi ali štirimi števkami. Urejene podseznama na koncu združimo. Časovna zahtevnost takšnega korenskega urejanja je $\mathcal{O}(kN)$, kjer je k povprečno število števk, N pa število elementov seznama. Teoretično to pomeni, da je korensko urejanje učinkovitejše od najboljših algoritmov urejanja na podlagi primerjav elementov, katerih časovna zahtevnost je $\mathcal{O}(N \log N)$. V praksi se korensko urejanje izkaže pri velikem številu elementov, medtem ko se pri urejanju krajših seznamov števil bolje obnesejo drugi algoritmi. Ena od omejitev korenskega urejanja je tudi ta, da ga ne moremo uporabiti v kombinaciji s poljubnim kriterijem urejanja, ki ga lahko pri klasičnih algoritmih definiramo s primerjalno funkcijo. Je pa mogoče vse korake v tem članku opisanega postopka urejanja učinkovito paralelizirati, kar je v zadnjem času zelo zaželena lastnost algoritmov.

Literatura

[1] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest in C. Stein, *Introduction to Algorithms*, 3. izdaja, The MIT Press, 2009.

×××

Knjižnica Sigma

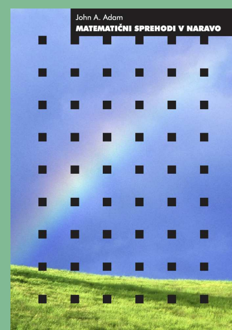
Že od leta 1959 nam Knjižnica Sigma prinaša poljudna in strokovna besedila za popularizacijo področij matematike, fizike, astronomije in računalništva. Vključuje tako zbirke nalog z različnih tekmovanj, dopolnilne učbenike, priročnike in drugo zanimivo branje domačih avtorjev, kot tudi nekaj prevodov tujih avtorjev.

Stephen Senn

KOCKANJE S SMRTJO
Slučajnost, tveganje in zdravje

296 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

29,99 EUR



John A. Adam

MATEMATIČNI SPREHODI V NARAVO

280 strani
format 14 × 20 cm
mehka vezava

27,31 EUR

Poleg omenjenih lahko v Knjižnici Sigma najdete še precej drugih del. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

http://www.knjiznica-sigma.si/

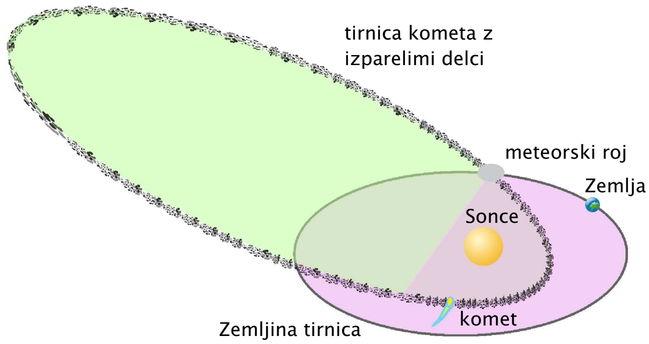
Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.

REŠITEV NAGRADNE KRIŽANKE PRESEK 40/6

→ Pravilna rešitev nagradne križanke iz šeste številke 40. letnika Preseka je **Častitljivi jubilej.** Izmed pravilnih rešitev so bili izžrebani Miha Šušteršič iz Postojne, Neda Tompa iz Odrancev in Marijana Marinšek iz Celja, ki so razpisane nagrade prejeli po pošti.

Meteorski roj

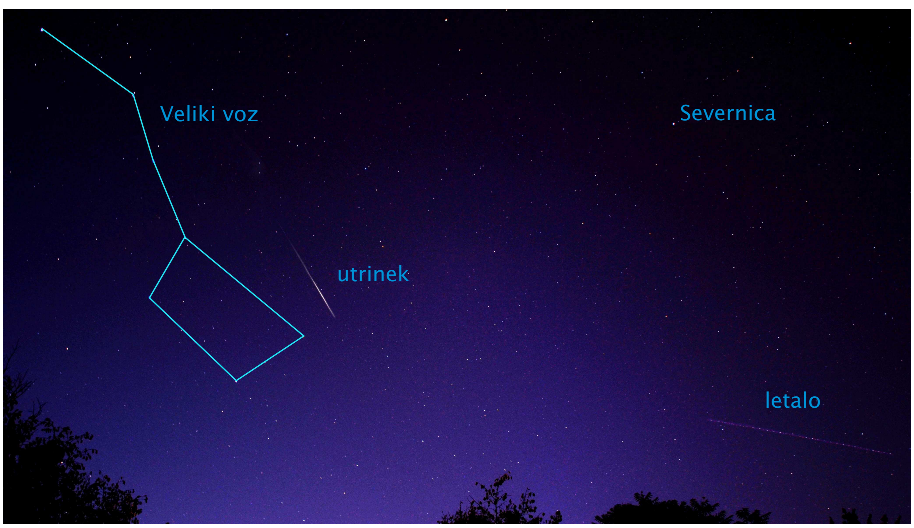
Aleš Mohorič



Na nočnem nebu lahko opazimo kratkotrajen svetlobni pojav, ki ga imenujemo utrinek. Videti je, kot da bi se utrnila zvezda. Utrinek se lahko zgodi kjerkoli na nebu. Če smo vztrajni, lahko vsako uro opazimo nekaj utrinkov. Pojav nastane, ko iz vesolja prileti v ozračje majhno nebesno telo in v njem zaradi velike hitrosti in trenja z ozračjem izgori. Nebesna telesa prihajajo iz Osončja. Osončje je območje, kjer Sonce s svojo težnostjo veže druga telesa, da se gibljejo po tirnicah okoli njega. Od teh teles je najbolj znanih osem planetov. Poleg planetov so v Osončju še naravni sateliti (približno 160), ki krožijo okoli planetov, planetoidi, asteroidi, kometi, meteoroidi in medzvezdni prah. Meteoroidi so lahko veliki od nekaj mikrometrov do nekaj metrov.

Večinoma so ostanki kometov in asteroidov ali pa so nastali pri trku teh z večjimi telesi – Luno ali Marsom. Po Osončju jih je polno in vsak dan jih nekaj tisoč trči z ozračjem. Večina jih je velikih kot riževo zrno ali še manjših. Vsak dan jih je nekaj velikih kot teniška žogica, redkeje pa so veliki kot košarkaška žoga. Približno enkrat na teden na Zemljo pade meteoroid velikosti avtomobila, enkrat na nekaj mesecev pa velikosti hiše. Ko meteoroid vstopi v ozračje, se zaradi trenja segreje in zažari. Take meteoroide imenujemo meteorji, po domače utrinki. Če je meteor dovolj majhen, izgori v ozračju, dovolj veliki pa preživijo to pot, padejo na površje in ti so meteoriti.

Kometi med potovanjem okoli Sonca za seboj puščajo sled delcev. Če se Zemljina tirnica seka s to sledjo, se pri vsakem potovanju Zemlje skozi ta pas delcev poveča število utrinkov, ki navidez izvirajo iz iste točke na nebu. Takrat opazujemo meteorski roj ali dež. Takrat je dobro vidnih tudi več deset utrinkov na uro.



Na fotografiji je utrinek, posnet avgusta 2013 med meteorskim rojem Perzeidov. Meteorski roj dobi ime po ozvezdju, iz katerega na videz izvira. Utrinek je viden ob dvojni zvezdi Dubhe asterizma Veliki voz, ki je del ozvezdja Veliki medved. V desnem spodnjem kotu posnetka je vidna tudi sled letala, ki je v času osvetljevanja letelo skozi kader.

× × ×

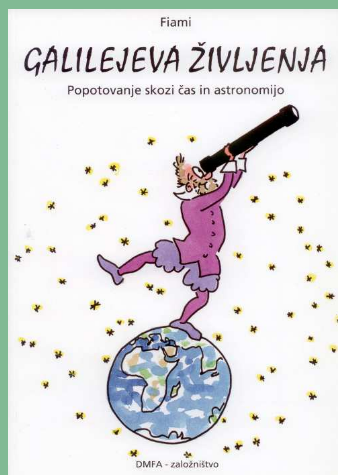
NARAVOSLOVNA FOTOGRAFIJA

Zgodovina znanosti v stripu

Sredi decembra 2012 je Center za mladinsko književnost in knjižničarstvo pri Mestni knjižnici Ljubljana že tretjič podelil priznanja Zlata hruška. Z njimi so tokrat odlikovali kakovostno najboljših deset odstotkov otroške in mladinske književnosti, ki je izšla v letu 2011. DMFA-založništvo je priznanje prejelo za strip *Življenja Marie Curie*.

Švicarski avtor Raphaël Fiammingo, s kratkim umetniškim imenom Fiami, v tem stripu večjega formata duhovito predstavlja nekaj izsekov iz zgodovine kemije, od Aristotela do današnjega časa. V vsakem razdelku nastopa dekle ali ženska, katere ime je različica imena Marija, v čast veliki znanstvenici Marie Curie. Zgodbice ilustrirajo tudi vlogo žensk v raznih zgodovinskih obdobjih. Predvsem pa so zabavne in obenem poučne, saj zvemo marsikakšno zanimivo podrobnost o nastanku znanstvenih odkritij. Med najbolj posrečenimi je zgodbica o Mendeljejevu in njegovem sestavljanju periodnega sistema elementov. Tudi druge pripovedi ne zaostajajo. Knjigo je odlično prevedel prof. dr. Alojz Kodre.

7,68 EUR



7,68 EUR

8,31 EUR

Pri DMFA-založništvo sta v Presekovi knjižnici izšli še dve knjigi istega avtorja

- *Galilejeva življenja*, z zgodbami iz zgodovine astronomije, od Babiloncev do danes, ter
- *Einsteinova življenja*, z zgodbami iz zgodovine fizike, vse od Sokrata do danes.

Ta dva stripa je prav tako izvrstno prevedel Alojz Kodre. Sta enako zanimiva, zabavna in poučna in bosta bralcu brez dvoma polepšala dan.

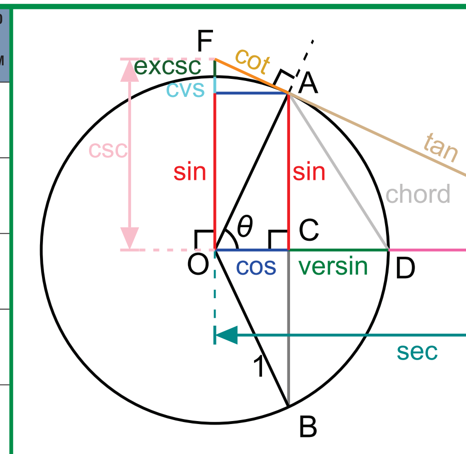
Poleg omenjenih ponujamo tudi druga matematična, fizikalna in astronomska dela. Podrobnejše predstavitve so na spodnjem naslovu, kjer lahko vse publikacije tudi naročite:

`http://www.dmfa-zaloznistvo.si/`

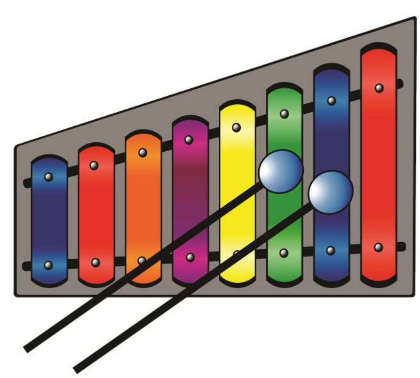
Individualni naročniki revije Presek, člani DMFA Slovenije, dijaki in študentje imate ob naročilu pri DMFA–založništvo 20 % popusta na zgornje cene – izkoristite ga! Dodatne informacije lahko dobite v uredništvu Preseka po telefonu (01) 4766 553.

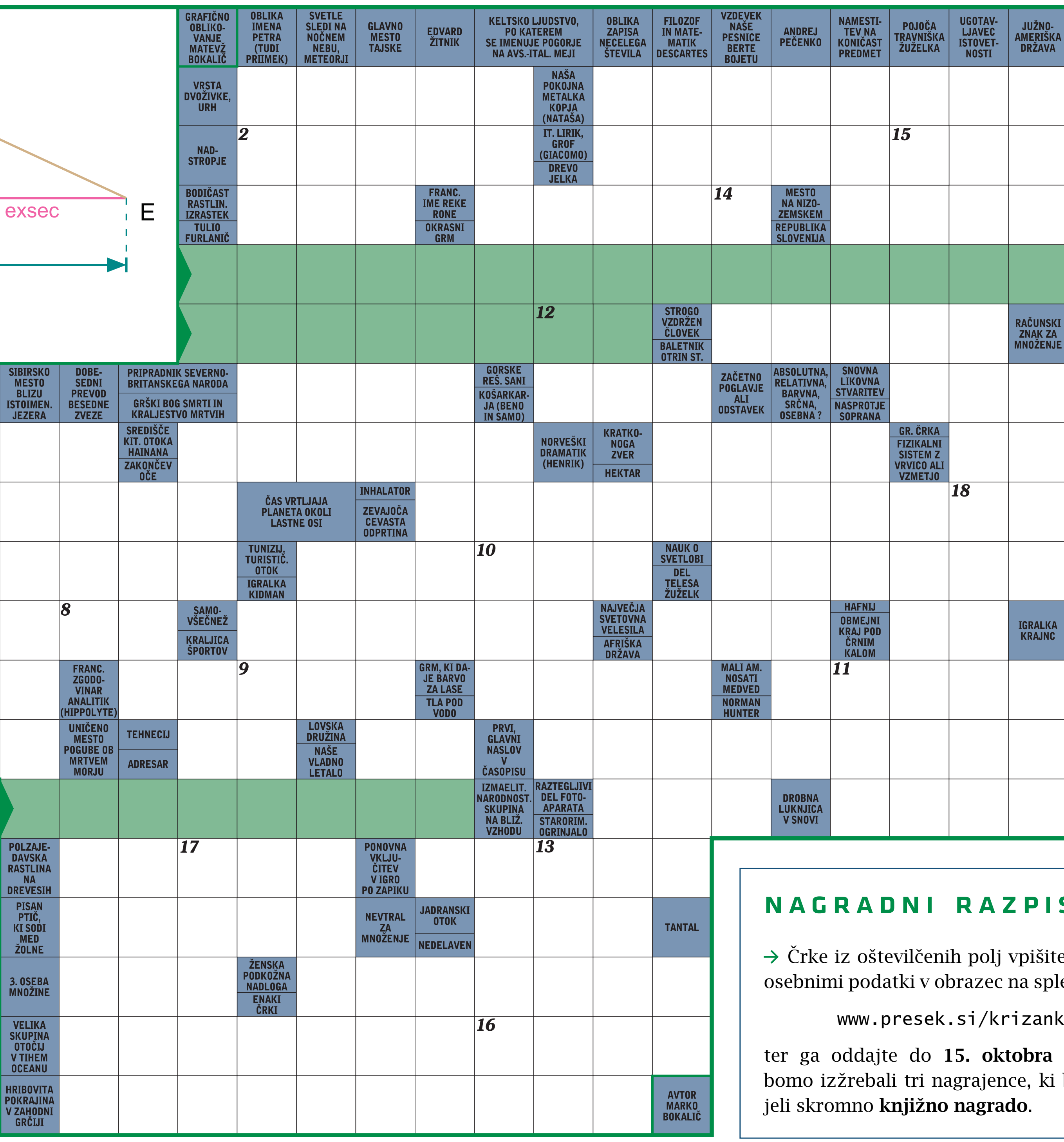
↓↓↓

Nagradna križanka



POMEMBEN IRSKI MATEMATIK, FIZIK IN ASTRONOM (WILLIAM ROWAN)
KRIVULJA ENAKE TEMPERATURE
DOLINA OB DRAVI NA AVS. KOROŠKEM
KDOR OBČUTI HUD STRAH PRED NASTOPOM
AMERIŠKO DREVO S TRDIM IN ŽILAVIM LESOM
NEMŠKI LETALSKI PIONIR (HELLMUTH)
PORTUGALSKO OTOČJE
UŽITNA GOBA, KOZJENOGI MESNATOVEC
HE, SHE, ?
MOLIBDEN
SVETOPISEMSKI OČAK
DOLGO ORODJE ZA LOVLJENJE PLAVAJOČ. HLODOV
RASTLIN. SPORE
SPOMENIK OB PRAZNEM GROBU
ŠKODLJIVEC NA SADNEM DREVJU
OLIVER HARDY
OBVEZNOSTI, DOLGOVI PODJETJA
ČRN VULKANIZIRAN KAVČUK, SUROVA GUMA
KRVNI REZUS FAKTOR
BOLJŠI POLOŽAJ PRI ŠPORTU, PREDNOST
POLJSKI ASTRONOM (NIKOLAJ)
OTROŠKA BOLEZEN
MUSLIMANSKI SVETI BOJEVNIK, ČLAN ISLAMSKIH ODPORNIŠKIH SKUPIN
STANJE BREZ HITENJA IN VZNEMIRJENJA
AM. PREDSEDNIK ZA NIXONOM (GERALD)
VZHODNOSIBIRSKI VELETOK
OZNAKA LITVE
DOBA, VEČNOST (V FILOZOFIJI)
INDIJSKI EP
PODREDNI VEZNIK
ROGAT GORSKI SORODNIK OVCE
VZDEVEK RADKA POLIČA
VELIKA, NEUREJENA KOLIČINA MATERIALA
PRIKRITA ZADEVA, O KATERI SE NE GOVORI
5. SOLMIZ. ZLOG
PEŠČENA MORSKA OBALA
FOND
UMSKA STVARITEV
TV VODITELJICA (ANJA KRIŽNIK)
POPLAVA
RUDARSKI DRUŽABNIŠKI DELEŽ
KARL ERJAVEC
HITER TEK
ODSEK TEKMOVALNE POTI
LEŽI NASPROTI HIPOTENUZE
UČENJE
VZDOLŽNI DROG ZA POVEZAVO SENA NA VOZU
SKLADAT. GALLUS
VOTLO MOČVIRSKO STEBLO
KAVČUKOV MLEČNI SOK
ANDREJ JERMAN
HUMORIST TONE FORNEZZI
IGRALKA IVANIČ
SLOVNIČAR KARADŽIĆ
FEVDALCU PODREJENI PLEMIČ
AM. FIZIK, SOODKRITELJ INDUKTIVNOSTI
VAŠKI ODBOR
INDIJSKO ŽENSKO OBLAČILO
CESTNA VIJUGA, SERPENTINA
PREJŠNJI GENERALNI SEKRETAR OZN (KOFI)
NEKDANJI TELOVADEC HODŽIĆ
MAVEC
IME SEVERNOKOREJSKIH VODITELJEV
RUSKA REKA ZAHODNO OD VOLGE
MLEČNA BELJAKOVINA
MURSKA SOBOTA
ITAL. IGRALKA (FILM *GOSPA ZA VSE*)
NIKOLA TESLA
PISATELJ ROZMAN





NAGRADNI RAZPIS

→ Črke iz oštevilčenih polj vpišite skupaj z osebnimi podatki v obrazec na spletni strani

www.presek.si/krizanka

ter ga oddajte do **15. oktobra 2013**, ko bomo izžrebali tri nagrajence, ki bodo prejeli skromno **knjižno nagrado**.

×××