

PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652

Letnik **21** (1993/1994)

Številka 4

Strani 216-222

Jože Grasselli:

ZAPIS ŠTEVIL V NEGATIVNI OSNOVI

Ključne besede: matematika, teorija števil.

Elektronska verzija: <http://www.presek.si/21/1185-Grasselli.pdf>

© 1993 Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

© 2010 DMFA – založništvo

Vse pravice pridržane. Razmnoževanje ali reproduciranje celote ali posameznih delov brez poprejšnjega dovoljenja založnika ni dovoljeno.

ZAPIS ŠTEVIL V NEGATIVNI OSNOVI

Če preberemo stavek: Šolo obiskuje 307 učencev, ob številu 307 pomislimo, da je okrajšava za

$$3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 7.$$

Pravimo, da je število 307 zapisano z osnovo 10 ali v desetiškem sestavu. V vsakdanji rabi srečujemo števila zmeraj podana na tak način. Moremo pa namesto 10 za osnovo vzeti katero koli od 1 različno naravno število. O tem govori naslednja ugotovitev, ki je bralcu najbrž poznana:

A. Če je b od 1 večje naravno število, se vsako naravno število a enolično izrazi v obliki

$$a = c_t b^t + c_{t-1} b^{t-1} + \dots + c_1 b + c_0, \quad (1)$$

kjer so številke (cifre) $c_0, c_1, \dots, c_{t-1}, c_t$ vzete izmed vrednosti $0, 1, \dots, b-1$ in je $c_t > 0$.

Podobno kot pri osnovi 10 tudi v izrazitvi (1) obdržimo le številke in pišemo

$$a = c_t c_{t-1} \dots c_1 c_0 (b). \quad (2)$$

Iz $307 = 2 \cdot 11^2 + 5 \cdot 11 + 10$ najdemo $307 = 25(10)_{(11)}$. Številko 10 smo dali v oklepaj, saj 2510 v osnovi 11 pomeni $2 \cdot 11^3 + 5 \cdot 11^2 + 1 \cdot 11 = 3278$. Tako je treba ravnati z vsako več kot enomestno številko.

Ob ugotovitvi A se vsiljuje vprašanje: Ali smemo za osnovo izbrati negativno celo število n ? Številke so potem $0, 1, \dots, |n| - 1$; ker naj bodo med njimi od nič različne vrednosti, mora biti $n < -1$.

Oglejmo si za začetek, kako je z osnovo $n = -2$. Enakosti

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2) + 0 \\ 3 &= 1 \cdot (-2)^2 + 1 \cdot (-2) + 1 \\ -1 &= 1 \cdot (-2) + 1 \\ -2 &= 1 \cdot (-2) + 0 \\ -3 &= 1 \cdot (-2)^3 + 1 \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2) + 1 \end{aligned} \quad (3)$$

povedo, da imajo 1, 2, 3, -1, -2, -3 v osnovi -2 izrazitve

$$\begin{aligned} 1 &= 1_{(-2)} & -1 &= 11_{(-2)} \\ 2 &= 110_{(-2)} & -2 &= 10_{(-2)} \\ 3 &= 111_{(-2)} & -3 &= 1101_{(-2)} \end{aligned} \quad (4)$$

Sedaj bomo pokazali, da se dá vsako od nič različno celo število enolično zapisati z osnovo -2. Naslonili se bomo na indukcijo in izrek o deljenju.

Izhajajmo iz privzetka, da smo našli izrazitev v osnovi -2 za števila

$$-a, -a+1, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, a-1, a, \quad (5)$$

kjer je a neko naravno število in $a \geq 3$.

Število $a+1$ delimo z -2 in dobimo za količnik od nič različno celo število k , ostanek r pa je 0 ali 1. To pomeni, da je

$$a+1 = (-2)k + r; \quad 0 \leq r < 2 \quad (6)$$

in od tod

$$|k| = \left| \frac{a+1-r}{-2} \right| = \frac{|a+1-r|}{|-2|} \leq \frac{a+1}{2}.$$

Za $a > 1$ je izpolnjena ocena $\frac{a+1}{2} < a$. Ker imamo $a \geq 3$, je torej $|k| \leq \frac{a+1}{2} < a$. Vidimo, da je število k zajeto v (5). Zato ima zapis

$$k = c'_j(-2)^j + c'_{j-1}(-2)^{j-1} + \dots + c'_1(-2) + c'_0$$

pri števkih $c'_0, \dots, c'_{j-1}$, ki so 0 ali 1, in $c'_j = 1$. Ko k vnesemo v (6), je

$$a+1 = c_{j+1}(-2)^{j+1} + c_j(-2)^j + \dots + c_1(-2) + c_0$$

pri števkih

$$c_{j+1} = c'_j = 1, c_j = c'_{j-1}, \dots, c_1 = c'_0, c_0 = r$$

in našli smo za število $a+1$ izrazitev z osnovo -2.

Podobno daje delitev negativnega celega števila $-a-1$ z -2

$$-a-1 = (-2)k' + r'; \quad 0 \leq r' < 2. \quad (7)$$

Količnik k' je od nič različno celo število, ostanek r' je 0 ali 1. Zaradi $a \geq 3$ je

$$|k'| = \left| \frac{-a-1-r'}{-2} \right| \leq \frac{a+1+1}{2} = \frac{a}{2} + 1 < a.$$

Po tej oceni je k' eno od števil v (5), zato izrazljivo z osnovo -2 in potem po (7) tudi $-a-1$ tako izrazljiv.

Prišli smo do ugotovitve:

B. Če so števila v (5) izrazljiva z osnovo -2 , sta tudi števili $a+1$, $-a-1$ tako izrazljivi.

Če je $a = 3$, so v (5) števila $-3, -2, -1, 1, 2, 3$ in zanja imamo v (3) oz. (4) izrazitev v osnovi -2 . Po ugotovitvi B potem 4 in -4 lahko zapišemo z osnovo -2 . V (5) smemo torej vzeti $a = 4$ in po ugotovitvi B sledi, da je mogoče tudi 5 in -5 izraziti z osnovo -2 . Ko tako nadaljujemo, vidimo, da premore vsako od nič različno celo število izrazitev z osnovo -2 .

Prepričajmo se še o enoličnosti zapisa. Recimo, da se od nič različno celo število m izraža

$$m = c_s(-2)^s + \dots + c_1(-2) + c_0 \quad \text{in} \quad m = c'_t(-2)^t + \dots + c'_1(-2) + c'_0$$

in je $s \leq t$. Po odštetju dobimo

$$c'_t(-2)^t + \dots + c'_1(-2) - c_s(-2)^s - \dots - c_1(-2) = c_0 - c'_0. \quad (8)$$

Na levi je sodo število, saj so vsi sumandi sodi. Zato je tudi število na desni $c_0 - c'_0$ sodo. Ker sta za c_0, c'_0 mogoči le vrednosti 0, 1, je $c_0 - c'_0$ lahko le $-1, 0, 1$. Od teh števil je edino 0 sodo število. Torej je $c_0 - c'_0 = 0$ in $c_0 = c'_0$. V (8) stoji tako na desni 0. Krajšamo z -2 in imamo

$$c'_t(-2)^{t-1} + \dots + c'_2(-2) - c_s(-2)^{s-1} - \dots - c_2(-2) = c_1 - c'_1.$$

Spet je na levi sodo število, zato število $c_1 - c'_1$ sodo in kot prej nujno $c_1 = c'_1$. Ravno tako doženemo $c_2 = c'_2, \dots, c_s = c'_s$. Pri $t > s$ bi veljalo

$$c'_t(-2)^{t-s-1} + \dots + c'_{s+1} = 0. \quad (9)$$

To pa ne gre. Ker je $c'_t = 1$, je pri sodem eksponentu $t-s-1$ število na levi v (9) pozitivno, pri lihem $t-s-1$ pa negativno. Mora torej biti $t = s$ in izrazitev je enolična.

Strnimo najdeno v ugotovitev:

C. Vsako od nič različno celo število a se izrazi z osnovo -2 enolično na način

$$a = c_s(-2)^s + c_{s-1}(-2)^{s-1} + \dots + c_1(-2) + c_0, \quad (10)$$

pri čemer so števke $c_0, \dots, c_s$ vzete izmed vrednosti 0, 1 in je $c_s = 1$. Na kratko (10) zapišemo

$$a = c_s c_{s-1} \dots c_1 c_0 (-2). \quad (11)$$

Iz zgornje izpeljave povzemamo, da vodi k izrazitvi (10) izrek o deljenju z -2 , naveden v (6) in (7). Razvijmo za zgled število -35 . Računamo

$$\begin{aligned} -35 &= (-2) \cdot 18 + 1 \\ 18 &= (-2) \cdot (-9) + 0 \\ -9 &= (-2) \cdot 5 + 1 \\ 5 &= (-2) \cdot (-2) + 1 = (-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

Zadnja enakost daje za 5 izrazitev v osnovi -2 . Ko jo upoštevamo v predzadnji enakosti, dobimo -9 zapisan v osnovi -2 . Ko tako napredujemo navzgor, dobimo

$$\begin{aligned} -9 &= (-2)^3 + (-2) + 1 \\ 18 &= (-2)^4 + (-2)^2 + (-2) \\ -35 &= (-2)^5 + (-2)^3 + (-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

ali $-35 = 101101_{(-2)}$.

Kako seštevamo števila, podana v obliki (11)? Vemo, kako ravnamo v desetiškem zapisu: Števila pišemo drugo pod drugim in seštevamo števke po stolpcih, začenši na skrajni desni. Ko dosežemo v stolpcu števk vsoto 10, štejemo ena "naprej", torej v naslednjem stolpcu. V primeru osnove -2 upoštevamo, da je

$$(-2)^j + (-2)^j = -(-2)^{j+1} \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \dots \quad (12)$$

Za vsaki dve števk 1 v j -tem stolpcu je po (12) treba število števk, enakih 1 v stolpcu $j+1$, zmanjšati za ena. Drugače povedano: Po dve števk 1 v j -tem stolpcu "uničita" eno števko 1 v stolpcu $j+1$. Če v stolpcu $j+1$ ni števk 1, ali pa so se vse števke 1 že uničile, upoštevamo, da iz $2 = (-2)^2 + (-2)$ sledi

$$(-2)^j + (-2)^j = 2(-2)^j = (-2)^{j+2} + (-2)^{j+1} \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

Po dve števki 1 v j -tem stolpcu zdaj zaradi (13) nadomestimo s številom $110\dots 0$, ki ima j ničel, in to število zapišemo ot nadaljnji seštevanec k prejšnjim seštevancem. V zgledu

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \\
 + \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \\
 \hline
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \cancel{1} \ 1 \ 0 \ \underline{1} \ 0 \ \underline{1} \\
 \cancel{1} \ 0 \ \underline{1} \ \underline{1} \ \underline{1} \ \underline{1} \\
 \hline
 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0
 \end{array}$$

se enako podčrtane števke uničijo, namesto prečrtanih števk smo glede na (13) dodali seštevanec 1100000.

Ker imamo samo števki 0, 1 in je $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$, preide množenje števil (11) na seštevanje. Zgled:

$$\begin{array}{r}
 1 \ 1 \ 0 \ 1 \times 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\
 \underline{1} \ \underline{1} \ 0 \ 1 \\
 \underline{1} \ 1 \ 0 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1
 \end{array}$$

Odštevanje dveh števil (11) teče običajno, če sta v istem stolpcu enaki števki, ali pa ima zmanjševanec števko 1, odštevaneč števko 0. Je pač $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$. Kadar ima zmanjševanec števko 0 in odštevaneč v istem stolpcu števko 1, si pomagamo po (12) takole

$$-(-2)^j = (-2)^{j+1} + (-2)^j \quad \text{za } j = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

Namesto da bi odšteli število $10\dots 0$, kjer za 1 stoji $j - 1$ ničel, lahko glede na (14) prištejemo $110\dots 0$, kjer za 11 pride $j - 1$ ničel. Po tej opazki je mogoče odštevanje prevesti kar na seštevanje. Hitreje pridemo do cilja, če v stolpcih, kjer se gladko odšteva, to napravimo, nato po potrebi uporabimo (14). Zgled:

$$\begin{array}{r}
 \textcircled{1}\textcircled{1}0\textcircled{1}0\textcircled{1}0 \\
 - \textcircled{1}\textcircled{1}00\textcircled{1}1
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{r}
 1001000 \\
 - 10001
 \end{array}
 \longrightarrow
 + \left\{ \begin{array}{r}
 1001000 \\
 11 \\
 \underline{110000} \\
 1111011
 \end{array} \right.$$

Obkrožili smo stolpce, v katerih je bilo mogoče takoj odštevati. Namesto da bi odšteli 1, smo po (14) prišteli 11, namesto da bi odšteli 10000, smo po (14) prišteli 110000.

Še pripomba o negativni osnovi n , manjši od -2 . Enakosti

$$1 = 1$$

$$2 = 2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|n| - 1 = |n| - 1$$

$$|n| = 1 \cdot n^2 + (|n| - 1)n + 0$$

$$|n| + 1 = 1 \cdot n^2 + (|n| - 1)n + 1$$

$$-1 = 1 \cdot n + (|n| - 1)$$

$$-2 = 1 \cdot n + (|n| - 2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$n = 1 \cdot n + 0$$

$$n - 1 = 2 \cdot n + (|n| - 1)$$

kažejo, da se števila $n - 1, n, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, |n|, |n| + 1$ izrazijo v osnovi n . Z indukcijo in izrekom o deljenju čisto podobno kot pri $n = -2$ izpeljemo ugotovitev:

D. Naj bo n izbrano negativno celo število, manjše od -1 . Vsako od nič različno celo število a enolično izrazimo v obliki

$$a = c_t n^t + c_{t-1} n^{t-1} + \dots + c_1 n + c_0. \quad (15)$$

Števke $c_0, \dots, c_t$ so vzete izmed vrednosti $0, 1, \dots, |n| - 1$ in $c_t > 0$.

Namesto (15) pišemo krajše

$$a = c_t c_{t-1} \dots c_1 c_0 (n). \quad (16)$$

Do izrazitve (15), (16) pripelje zaporedno deljenje z n . Razvoj števila -3841 v osnovi -12 dobimo iz

$$-3841 = (-12) \cdot 321 + 11$$

$$321 = (-12) \cdot (-26) + 9$$

$$-26 = (-12) \cdot 3 + 10$$

Velja torej $-3841 = 3(10)9(11)_{(-12)}$.

Videli smo, kako seštevamo in množimo števila, zapisana s števkami v osnovi -2 . Podobna pravila veljajo za seštevaje in množenje števil, danih v obliki (16). Množenje lahko izvršimo tudi le prek seštevaja.

Naloge:

1. V desetiškem zapisu imamo števila 500, 1021, -2035 . Izrazi jih z osnovo -2 .

2. V osnovi -2 so dana števila 11011010, 110111011, 1001110101. Seštej jih in izid preveri z računom v desetiškem sestavu.

3. Števila 1101, 1110, 11010 so zapisana v osnovi -2 . Zmnoži jih in izid preveri z računom v desetiškem sestavu.

4. Števila 591, -1025 , 2141, dana v desetiškem sestavu, izrazi v osnovi -12 .

5. Poišči zapis števila a v osnovi -7 in -12 , če je $a = 101101101_{(-2)}$.

6. Poišči zapis števila a v osnovi -13 in -20 , če je $a = 21402_{(-5)}$.

7. Za negativno osnovo n je

$$|n| n^j = -n^{j+1}$$

$$|n| n^j = n^{j+2} + (|n| - 1)n^{j+1}$$

pri $j = 0, 1, 2, \dots$. Kako od tod dobimo pravilo za seštevanje števil oblike (16)?

Jože Grasselli