PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **27** (1999/2000)
Številka 4
Strani 200–205

Ivan Vidav:

O ŠTEVILIH, KI JIH LAHKO ZAPIŠEMO S SAMIMI ENAKIMI ŠTEVKAMI

Ključne besede: matematika, teorija števil, številski sestavi.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/27/1406-Vidav.pdf

O ŠTEVILIH, KI JIH LAHKO ZAPIŠEMO S SAMIMI ENAKIMI ŠTEVKAMI

Če bi naleteli na enakost

$$55^2 = 4444\,, \tag{1}$$

bi bila prva misel ta, da ni pravilna, ker je leva stran kvadrat lihega števila 55, se pravi liho število, desna stran pa je sodo število. Kaj pa, če števila niso zapisana v običajnem desetiškem številskem sestavu in se nam zdi račun zato napačen? Vsak bralec bo zlahka odkril, da enakost (1) velja v sestavu z osnovo 7. V tem sestavu pomeni 55 število $5 \cdot 7 + 5 = 40$, desna stran 4444 pa število

$$4 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 + 4 = 1600\,.$$

Res je $40^2 = 1600$.

Število 40 ima, zapisano v sestavu z osnovo 7, enaki števki. Njegov kvadrat 1600 pa se v istem sestavu spet izraža s samimi enakimi števkami, in sicer štirimi. Ali obstaja morda še kakšno drugo naravno število, ki se da v primerno izbranem sestavu zapisati z dvema enakima števkama, njegov kvadrat pa s štirimi enakimi števkami? Odgovor na to vprašanje dajejo rešitve enačbe

$$aa_{(r)}^2 = bbbb_{(r)}\,. \tag{2}$$

Indeks (r) pove, da velja ta račun v številskem sestavu z osnovo r. Iskano število smo zapisali v tem sestavu z enakima števkama a, njegov kvadrat pa s štirimi enakimi števkami b. Na koliko načinov lahko izberemo osnovo r ter števki a in b, da velja enačba (2)? Ugotovili bomo, da je rešitev nešteto, toda v nekem smislu je rešitev ena sama, namreč tista, podana z enakostjo (1).

Osnova številskega sestava je lahko katerokoli naravno število $r > 1$, števke pa so znaki za števila od 0 do $r-1$. V enačbi (2) ne sme biti $a = 0$, saj aa pri $a = 0$ ni dvomestno število (temveč $= 0$). Prav tako ni $b = 0$. Zato veljajo ocene

$$r > 1\,, \quad 1 \le a \le r-1 \quad \text{in} \quad 1 \le b \le r-1\,. \tag{3}$$

Ker pomeni aa v sestavu z osnovo r število $ar + a = a(r+1)$, $bbbb$ pa število

$$br^3 + br^2 + br + b = b(r^3 + r^2 + r + 1) = b(r+1)(r^2+1)\,,$$

lahko zapišemo enačbo (2) v obliki

$$a^2(r+1)^2 = b(r+1)(r^2+1)\,. \tag{4}$$

Iščemo tiste rešitve te enačbe v naravnih številih a, b, r, ki zadoščajo pogojem (3).

Pripomba. V enačbi (2) pomenita a in b števki, v (4) pa pripadajoči naravni števili.

Iz (4) izračunamo

$$b = \frac{a^2(r+1)}{r^2+1}\,. \tag{4*}$$

Ker je b naravno število, mora biti produkt $a^2(r+1)$ v števcu ulomka na desni deljiv z imenovalcem r^2+1. Enakost

$$r^2+1 = (r+1)^2 - 2r$$

pove, da imata $r+1$ in r^2+1 kvečjemu skupni faktor 2 (števili r in $r+1$ sta si namreč tuji). Zato sta samo dve možnosti:

a) Največji skupni delitelj števil $r+1$ in r^2+1 je 1. Iz enačbe (4*) izhaja, da je v tem primeru a^2 deljiv z r^2+1, torej $a^2 = k(r^2+1)$, kjer je k celo število. Potem je $b = k(r+1)$ in velja, ker je $k \geq 1$, ocena $b \geq r+1 > r$, tako da tretji pogoj (3) ni izpolnjen. Rešitve potemtakem ni.

b) $r+1$ in r^2+1 imata največji skupni delitelj 2 (to je očitno tedaj, kadar je r lih). Ker je zdaj faktor $r+1$ v števcu na desni strani enačbe (4*) deljiv z 2, toda z nobenim drugim faktorjem imenovalca r^2+1, mora biti faktor a^2 deljiv z $(r^2+1)/2$, tako da je kvocient med a^2 in $(r^2+1)/2$ (le-ta je enak ulomku $2a^2/(r^2+1)$) celo število, ki ga zaznamujmo s h. Zdaj dobimo $b = h\frac{r+1}{2}$. Če bi bil $h \geq 2$, bi veljala ocena $b \geq r+1 > r$, ki je v nasprotju s tretjim pogojem (3). Zato mora biti $h = 1$, se pravi

$$b = \frac{r+1}{2} < r\,.$$

Ker je $h = 1$, imamo enakost $2a^2/(r^2+1) = 1$, ki jo zapišimo v obliki

$$2a^2 - r^2 = 1\,. \tag{5}$$

Zanimajo nas rešitve te enačbe v naravnih številih a in r. Najpreprostejša $a = 1$, $r = 1$ ne pride v poštev, ker ni izpolnjen pogoj $r > 1$. Če pa je a, r

taka rešitev v naravnih številih, pri katerih je $r > 1$, izračunamo iz (5), da je v tem primeru

$$a = \sqrt{\frac{r^2+1}{2}} < r\,.$$

Torej so vsi pogoji (3) izpolnjeni. Tako smo ugotovili:

Enakost (2) velja natanko tedaj, kadar sta naravni števili a in $r > 1$ rešitvi enačbe (5). Pripadajoči b pa je enak $(r+1)/2$.

Koliko rešitev ima enačba (5) v naravnih številih a in r? Če ustrezata a in r tej enačbi, velja isto za števili

$$a' = 3a + 2r \quad \text{in} \quad r' = 4a + 3r\,. \tag{6}$$

S preprostim računom namreč ugotovimo, da je

$$2a'^2 - r'^2 = 2(3a+2r)^2 - (4a+3r)^2 = 2a^2 - r^2 = 1\,.$$

Očitno sta a' in r' naravni števili, če sta taki a in r. Veljata tudi oceni $a' > a$ in $r' > r$. Rešitev $a = 1$, $r = 1$ nam da $a' = 5$, $r' = 7$ in $b' = 4$. Če zdaj vstavimo $a = 5$ in $r = 7$ v (6), izračunamo $a' = 29$, $r' = 41$ in $b' = 21$. Tako lahko nadaljujemo. Dobimo neskončno naraščajoče zaporedje rešitev enačbe (5). Brez dokaza povejmo, da so v tem zaporedju zajete prav vse njene rešitve v naravnih številih a in r.

Torej obstaja neskončno naravnih števil, ki jih lahko zapišemo v primerno izbrani osnovi z dvema enakima števkama, njihov kvadrat pa s štirimi enakimi števkami. Rešitvi $a = 5$, $r = 7$, $b = 4$ pripada najmanjše tako število, namreč $ar + a = 5 \cdot 7 + 5 = 40$, ki nam da enakost (1). Naslednja rešitev $a = 29$, $r = 41$, $b = 21$ določa število $ar + a = 29 \cdot 41 + 29 = 1218$. V sestavu z osnovo $r = 41$ potrebujemo 41 znakov (števk) za označitev števil od 0 do 40. Za prvih deset naravnih števil lahko obdržimo običajne števke $0, 1, \ldots, 9$, za nadaljnja, med njimi za $a = 29$ in $b = 21$, pa potrebujemo nove znake. Izberimo npr. znak $\triangle$ za 29 in znak $\square$ za 21. Število 1218 zapišemo potem v sestavu z osnovo $r = 41$ v obliki $\triangle\triangle$. Enakost (2), ki pripada drugi rešitvi enačbe (5), pa se glasi

$$\triangle\triangle^2 = \square\square\square\square\,.$$

Te enakosti pa seveda ne bi mogli zamenjati za račun v desetiškem sestavu. Pri nadaljnjih rešitvah je $a > 29$ in $b > 21$, tako da vselej potrebujemo novi števki za a in b. Zato je enakost (1) edina rešitev enačbe (2), ki jo lahko zapišemo samo s števkami desetiškega sestava.

— — —

Enačba (2) je poseben primer splošnejše enačbe

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n}{}^2_{(r)} = \underbrace{bb\ldots b}_{m}{}_{(r)}\,, \tag{7}$$

ki naj velja v sestavu z osnovo (r). Število, ki ga kvadriramo, se v njem zapiše z n enakimi števkami a, njegov kvadrat pa z m enakimi števkami b.

Primer $n = 1$ ni zanimiv, rešitev je tedaj nešteto in jih zlahka najdemo: Za a vzamemo poljubno naravno število, postavimo $b = a^2$, za osnovo r pa izberemo katerokoli naravno število, ki je večje od b. Zato bomo odslej privzeli, da je $n > 1$.

Ker je

$$\underbrace{aa\ldots a}_{n}{}_{(r)} = ar^{n-1}+ar^{n-2}\cdots+a \quad \text{in} \quad \underbrace{bb\ldots b}_{m}{}_{(r)} = br^{m-1}+br^{m-2}\cdots+b\,,$$

lahko zapišemo enačbo (7) v obliki

$$a^2(r^{n-1}+r^{n-2}\cdots+1)^2 = b(r^{m-1}+r^{m-2}\cdots+1)\,. \tag{8}$$

Naravna števila a, b in r morajo ustrezati tej enačbi, hkrati pa tudi pogojem (3).

Iz ocen $1 \le a$ in $b \le r-1$ izpeljemo najprej tole zaporedje neenačb

$$\begin{aligned} r^{2n-2} &< (r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+1)^2 \le a^2(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+1)^2 = \\ &= b(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1) \le (r-1)(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1) = r^m-1 < r^m. \end{aligned}$$

Tu smo upoštevali enačbo (8) in identiteto

$$(r-1)(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1) = r^m-1\,.$$

Ker je osnova $r > 1$, vidimo, da mora biti eksponent $2n-2$ pri potenci števila r na začetku teh neenačb manjši od eksponenta m pri r na koncu, se pravi $2n-2 < m$.

Podobno nam dasta pogoja $r-1 \ge a$ in $b \ge 1$ zaporedje neenačb

$$\begin{aligned} r^{2n} &> (r^n-1)^2 = (r-1)^2(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+1)^2 \ge \\ &\ge a^2(r^{n-1}+r^{n-2}+\cdots+1)^2 = b(r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1) \ge \\ &\ge r^{m-1}+r^{m-2}+\cdots+1 > r^{m-1}\,. \end{aligned}$$

Od tod dobimo, da je $2n > m - 1$. Potemtakem leži m v tehle mejah

$$2n - 2 < m < 2n + 1\,.$$

Ker sta m in n naravni števili, imamo samo dve možnosti: ali je $m = 2n-1$ ali pa $m = 2n$. Oglejmo si obe po vrsti.

a) Če je $m = 2n - 1$, dobimo iz enačbe (8)

$$b = \frac{a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2}{r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1}\,. \tag{8*}$$

Ker je b celo število, je števec v ulomku na desni deljiv z imenovalcem. Identiteta

$$r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1 = (r^{n-1} + 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1) - r^{n-1}$$

pove, da števili $r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1$ in $r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1$ nimata od 1 različnega skupnega delitelja (s skupnim deliteljem bi moral biti deljiv tudi r^{n-1}, toda števili r^{n-1} in $r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1$ sta si očitno tuji). Od tod sklepamo, da je a^2 deljiv z imenovalcem $r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1$, torej kvocient $a^2/(r^{2n-2} + r^{2n-3} + \cdots + 1)$ je neko celo število $k \geq 1$. Potem je

$$b = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)^2 > r^{2n-2}\,.$$

Ker je $n > 1$, sledi od tod, da je $b > r$. Potemtakem tretji pogoj (3) ni izpolnjen in zato ne more biti m enak $2n - 1$.

b) Naj bo zdaj $m = 2n$. Ker je

$$r^{2n-1} + r^{2n-2} + \cdots + 1 = (r^n + 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)\,,$$

dobimo iz (8)

$$b = \frac{a^2(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1)}{r^n + 1}\,. \tag{8**}$$

Ker smo primer, ko je $n = 2$ in $m = 2n = 4$, obravnavali že na začetku, naj bo odslej $n > 2$. Iz identitete

$$r^n + 1 = r^n - 1 + 2 = (r - 1)(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1) + 2$$

razberemo, da imata števili $r^n + 1$ in $r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1$ kvečjemu skupni delitelj 2. Če je največji skupni delitelj 1, sta si tuji in je zato kvocient $a^2/(r^n + 1)$ neko celo število k. Če pa je največji skupni delitelj enak 2, je kvocient $2a^2/(r^n+1)$ celo število, ki ga imenujmo h. V prvem primeru dobimo iz (8^{**})

$$b = k(r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1) \geq r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1 > r\,,$$

v drugem pa

$$b = h\frac{r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1}{2} \geq \frac{r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1}{2} > \frac{r^{n-1}}{2} \geq r\,.$$

(Upoštevali smo, da je $k \geq 1$, $h \geq 1$, $n > 2$ in $r \geq 2$.) Spet ni izpolnjen tretji pogoj (3), tako da enačba (7) tudi pri $m = 2n$ nima nobene rešitve v naravnih številih, če je $n > 2$.

Povzemimo, kar smo dognali:

Enačba (7) je rešljiva z naravnimi števili a, b in r pri $n > 1$ le tedaj, kadar je $n = 2$ in $m = 4$. V tem primeru preide v enačbo (2), ki premore, kakor smo videli, nešteto rešitev.

Še tole naj omenimo: Enačba (5) nima rešitve v celih številih, pri kateri bi bil $r = 10$ (r je vselej lih). Zato v desetiškem sestavu nikoli ne velja enakost oblike (7), če je $n \geq 2$. Pri $n = 1$ pa so tele rešitve: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$ in $3^2 = 9$.

Ivan Vidav