Hermann Brandl
Ing. Assist.

# Theorie des Erddruckes

## und Bestimmung der Stärke von Stütz- und Futtermauern.

Nach den Vorträgen des Prof. F. Lippich
an der Grazer Technik.
Autographirt und verlegt von Radivoj Poznik.

A. Breindl

1875.

Druck von Klein & Kovač in Laibach

# Theorie des Erddruckes.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen sind unendlich kleine Theilchen zu denken, welche nicht fest zusammenhängen, sondern durch äußere Kräfte, durch Scherkräfte gegen einander verschoben werden können. Bei den Erdmassen kommen gewisse innere Kräfte vor, welche nicht so groß sind, wie die bei den elastischen Körpern, daß sie großen äußeren Kräften einen Widerstand entgegensetzen würden, wohl aber kleineren Kräften.

Diese inneren Kräfte sind zweierlei Natur: 1. der Reibungswiderstand, 2. die Kohäsion der Erdmassen. Reibungswiderstand und Kohäsion wirken derartig, daß sie ein Aufeinanderhaften der Erdmassentheile hervorbringen.

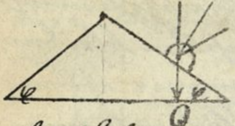
Für den ersten Augenblick könnte es vielleicht überflüssig erscheinen, diese inneren Kräfte in zwei zu trennen, denn es müßten beide dem Verschieben entgegenwirken. Es ist jedoch ein großer Unterschied zwischen den beiden Einflüssen. Der Widerstand wächst mit dem Drucke, die Kohäsion denkt man sich aber als ein Zusammenkleben der Erdmasse von einer bestimmten Größe, unabhängig von der Masse, unabhängig von dem Drucke.

Was die Kohäsion anbelangt, so kann man häufig von derselben ganz absehen. Sie wird meist durch einen gewissen Feuchtigkeitsgrad hervorgerufen, wodurch sich die Masse in größere Stücke zusammenballt. Nimmt man aber vollkommen trockenen Flugsand in Betracht, so kann man von keiner Kohäsion sprechen.

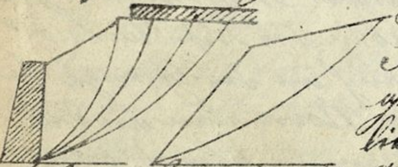
Die Kohäsion bildet eine unbestimmte Größe und man kann nicht für eine bestimmte Qualität die Kohäsion bestimmen. Eine Erdmasse, die kurz vor dem Versuche befeuchtet wurde, wird eine andere Kohäsion besitzen als eine abgestandene. Man kann nur dann die Kohäsion angeben, wenn auch die näheren Umstände bekannt sind.

Die Kohäsion ist diejenige Kraft, welche in den Untersuchungen über Erddruck die Formeln und Constructionen compliziert macht. Ist sie = 0, so sind sie einfach. – Nun ist aber der Fall, wenn man diese vernachlässigt, der ungünstigste; man wird an einer Stütze einen größeren Druck bekommen, als wenn man die Kohäsion berücksichtigt. Die Kohäsion ist außerdem meist sehr klein und es wird in den gewöhnlichen Fällen unbedingt erlaubt sein, sie wegzulassen, in manchen Fällen sogar notwendig, weil man keine Kenntnis von derselben hat.

**Vorkommende Benennungen.** Wenn man sich eine Erdmasse aufgeschüttet denkt, z. B. lockere Erde, so wird dieselbe einen Kegel von einer gewissen Steigung bilden. Wenn man neue Massen auf die Spitze gibt, so kann man den Neigungswinkel des Kegels nicht vergrößern. Diesen Winkel nennt man den natürlichen Böschungswinkel, oder natürliche Böschung. Dieser



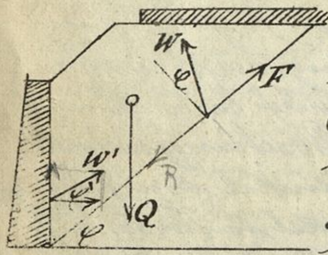

natürliche Böschungswinkel ist bei vollkommen trockener Erde nichts anderes als der Reibungswinkel von Erde auf Erde. Wenn auf einen Körper auf einer schiefen Ebene keine andere Kraft als die Schwerkraft wirkt, und es soll noch die Grenze des Gleichgewichtes erreicht werden, so muß der Neigungswinkel der schiefen Ebene gerade so groß sein als der Reibungswinkel, welcher den Reibungscoëfficienten gibt. Ist der Reibungscoëfficient von Erde auf Erde $= f$. und man bestimmt $f = tg\,\rho$, so ist $\rho$ der natürliche Böschungswinkel. Man kann sagen, der natürliche Böschungswinkel von frisch geförderter, trockener Erde ist der Reibungswinkel von Erde auf Erde. Das gibt ein geeignetes Mittel, um für jede Art von Erde den Reibungswinkel zu bestimmen, man braucht nur frische Erde zu fördern und anzuschütten.



Bei Erdmassen hat man namentlich folgende Aufgabe zu lösen: Es ist eine beliebige Fläche gegeben, an welche sich eine Erdmasse von beliebiger Form, vielleicht auch belastet, stützt. Es soll die Lage und die Größe des Druckes auf diese Wand bestimmt werden. – Ist keine Wand vorhanden, so kann man fragen: Wie hoch kann eine Erdmasse steigen, ohne daß das Gleichgewicht zu bestehen aufhört?

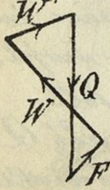
Wenn man eine Erdmasse abschneidet, so wird die Länge des Abschnittes nicht beliebig sein, sonst löst sich ein Theil los und stürzt ein. Der Druck also auf diese Wand wird dadurch entstehen, dass sich von der Erdmasse ein gewisser Theil ablöst und längs der Fläche herunterrutscht. Die Wand hat dann das Gleichgewicht zu halten. — Die Fläche, in welcher der Körper das Bestreben hat, sich zu trennen und zu gleiten, nennt man die Gleitfläche und den ganzen Körper das abrutschende Erdprisma. — Durch das Innere der Erdmasse kann man sich verschiedene Flächen durchgelegt denken, von allen wird aber nur eine die Gleitfläche sein; sie muss so bestimmt werden, dass darin das Bestreben der Erdtheile schon vorhanden ist, sich von den andern Erdtheilen loszulösen. — Die Gleitfläche ist diejenige Fläche, für welche sich das abrutschende Erdprisma gerade an der Grenze des Gleichgewichtes befindet. — Bezüglich der Form der Gleitfläche ist leicht einzusehen, dass sie im Allgemeinen eine Kreiszylinderfläche sein muss, weil nur bei dieser die Krümmungsradien dieselben bleiben. Nun aber zeigt die Erfahrung, dass diese Zylinderfläche immer einen sehr grossen Radius besitzt. Man nimmt daher die Gleitfläche als eine Ebene an und darauf basiren auch die weiteren Untersuchungen.

## Statische Untersuchungen.

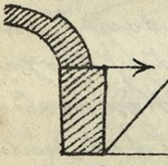



OB wäre die ebene Gleitfläche. Das Prisma wirkt mit seinem Gewichte sammt der darauf ruhenden Belastung = Q. Dasselbe stemmt sich wie ein Keil an zwei feste Flächen, an die Stütz- und an die Gleitfläche. Die wirkenden Kräfte, damit sich das Prisma an der Grenze des Gleichgewichtes befindet, sind: An der Wandfläche ein Normaldruck, der durch den Widerstand der Mauer hervorgebracht wird; außerdem wird der Reibungswiderstand in entgegengesetzter Richtung des Gleitens thätig sein. Diese beiden Kräfte geben die Resultante W'. Weil sich das Gleichgewicht an der Wand auch an der Grenze befinden muss, so muss der Druck mit der Normalen an die Wand den Reibungswinkel $\varphi'$ einschließen. — Etwas ganz Ähnliches gilt bezüglich der Gleitfläche. Sie setzt dem Körper einen normalen Widerstand entgegen, und wenn der Erdkörper das

Bestreben hat, abzugleiten, auch einen Reibungswiderstand, der in die Ebene fällt. Diese beiden Widerstände geben die Resultante W, welche wieder mit der Normalen den Reibungswinkel $\varphi$ einschließen wird, weil der Reibungswiderstand das maximum seiner Größe erreicht haben muß. Außerdem wirkt aber auch die Kohäsion F in der Ebene, ebenfalls dem Abrutschen entgegen. Alle diese Kräfte zusammengesetzt, müssen für den Fall des Gleichgewichtes die Resultierte = 0 geben, was man durch ein Kräftepolygon ausdrücken kann.




Die Annahme war die, daß das Erdreich das Bestreben hat herunterzugleiten; das ist dann der Fall, wenn die Wand eine Stützwand ist. Es gibt aber noch eine zweite Grenze, wenn nämlich das Erdreich durch die Kräfte das Bestreben hat, sich über die schiefe Ebene hinauf zu bewegen, wenn z. B. die Stützfläche ein Widerlager ist, auf den ein horizontaler Schub ausgeübt wird. Hier ist das Bestreben des Erdreichs nach aufwärts zu gleiten, die Richtungen der Reibungskräfte werden sich umkehren müssen.

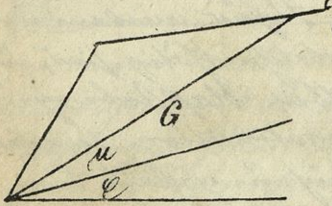


In solchen Fällen müssen die Verhältnisse derart gewählt werden, daß der Schub nicht im Stande ist, das Erdreich hinauf zu bewegen, weil der Widerlager nachgeben müßte.

Das ist der Unterschied zwischen Erddruck und Erdschub.

Wenn gar keine stützende Wand vorhanden ist, so wird $W' = 0$.

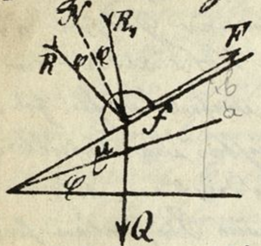
## Gleichgewicht nicht gestützter Erdmassen.



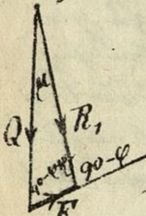

Man denke sich folgenden Fall: Eine nicht gestützte Erdmasse sei bis zu einer gewissen Höhe angeschnitten, darüber hinaus irgend wie begrenzt; es soll angegeben werden, wie hoch dieser Anschnitt gemacht werden darf, damit die Erdwand nicht einstürze, damit das Gleichgewicht nicht aufhöre.

Man hat sich vorzustellen, daß das Erdreich das Bestreben hat, längs einer Fläche, der Gleitfläche, herunterzurutschen. Zwischen dem Gewichte des Körpers und den in der Stützfläche G wirkenden Kräften soll Gleichgewicht bestehen.

Dieser Fall ist ebenso zu behandeln, als hätte man auf einer schiefen Ebene einen Körper ruhen, der sich mit Reibung darauf bewegt, und außerdem noch eine Kraft, die Kohäsion, tangential wirkt. — Man hat zu untersuchen, unter welchen Bedingungen der Körper im Gleichgewichte sein wird. Das ist leicht. Der Neigungs-



winkel muß größer sein als der Reibungswinkel, wenn noch eine nach aufwärts wirkende Kraft nötig sein soll, um den Körper im Gleichgewichte zu halten. — Wenn man sich auf die schiefe Ebene einen schweren Körper vom Gewichte Q gestellt denkt, wenn der Reibungscoëfficient f wäre und man soll eine Kraft F in der schiefen Ebene oder parallel zu derselben bestimmen, welche den Körper im Gleichgewichte erhalten soll. Die zu erfüllende Bedingung ist die, daß die Resultante aus Q und F mit der Normalen zur schiefen Ebene den Reibungswinkel einschließen muß. Man zeichne sich ein Kräftedreieck; in dem einen



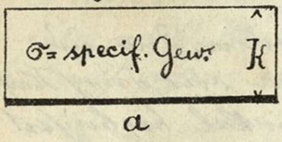
Endpunkte von Q eine Parallele zu F und im anderen eine Parallele zu $R_1$, so schneidet diese von F ein Stück ab, welches die Kraft repräsentirt, die den Körper noch am Heruntergleiten hindern kann. Man braucht also nur ein Dreieck mit der Seite Q und den anliegenden Winkeln $\mu$ und $90-(\varphi+\mu)$ zu zeichnen, so hat man das gegebene Kräftedreieck. — Wenn man dieses auf den gegebenen Fall anwendet, so ist F die Kohäsion, $\mu$ der Winkel der Gleitfläche mit der natürlichen Böschung.

Wenn man die Construction auf die frühere Figur anwenden will, so muß Q und F entsprechend den Kräften, welche thätig sind, durch Linien ausgedrückt werden, beide nach demselben Maßstabe gemessen. Man denke sich nun behufs der Construction von dem Erdkörper einen solchen, welcher senkrecht zur Zeichnungsfläche die Dimension 1 besitzt. Dann wird das Gewicht dieses Erdprisma über der Gleitfläche $G = \frac{as}{2} \times h$. Wenn man die halbe Basis als Reduktionsbasis der Kräfte annimmt, so wird durch die Höhe eine Größe dargestellt werden, welche die Größe des Gewichtes darzustellen hat.

Die Kohäsionskraft muß auf die Flächeneinheit bezogen werden und bezeichne sie für diese mit H. Weil man jedoch in der Construction Linien braucht, die die Gewichte von Erdkörpern darstellen,

(für die Flächeneinheit) - - - H

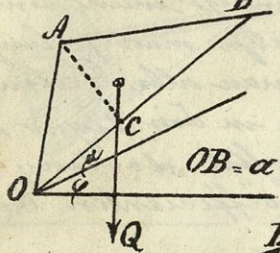
so ist es gut, auch das K durch ein Gewicht eines Erdkörpers festzusetzen. Die Kohäsion wird man durch die Höhe eines Prisma messen, dessen Gewicht gleich der Kohäsion in dieser Fläche ist.




Die Kohäsion $\mathfrak{F}$ ist in der Fläche $a$ .... $\mathcal{K}a$

$$\mathfrak{F} = \mathcal{K}.a = \sigma.a.K \;;\quad \mathcal{K} = \sigma.K$$

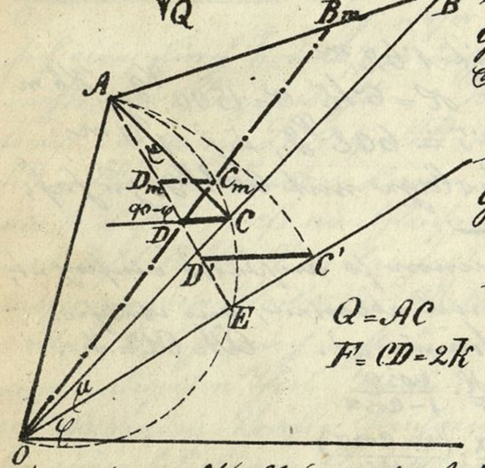
$$Q = \sigma.\frac{OB}{2}.AC \;;\quad \mathfrak{F} = \mathcal{K}.OB = \sigma.\frac{OB}{2}.2K$$




Wenn man Q durch die Höhe AC misst, so wird die Kraft $F = 2K$, woraus man auch $\mathcal{K}$ finden kann. Man braucht das Kräftedreieck nur um den Winkel $(\mu+\varphi)$ zu drehen, so wird Q in die Richtung von AC fallen. F wird dann horizontal und man bekommt es in der Grösse CD, wenn man von AC mit dem Scheitel in A den Winkel $\mu$ zeichnet.

Man kann also für jede angenommene Trennungsebene OA sehr leicht die Grösse CD oder die Kohäsion bestimmen.

Nun soll folgende Aufgabe gestellt werden: Was für eine Lage müsste die Ebene OB annehmen, damit die Kraft F, somit auch die Kohäsion, ein Maximum wird?



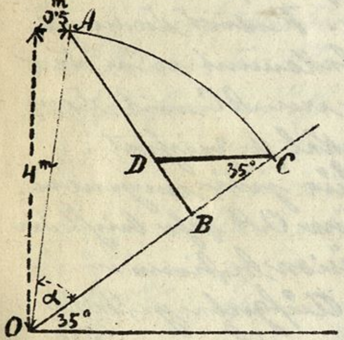

Man beschreibt sich mit OA als Durchmesser einen Halbkreis, so ist dieser der Ort aller Fusspunkte von den Senkrechten aus A für die verschiedenen Ebenen OB. Man suche nun denjenigen Punkt auf, aus welchem die Horizontale CD ein Maximum wird. Durch diesen Fusspunkt geht jene Ebene hindurch, für welche die Kohäsion ein Maximum wird. Der Punkt liegt in der Mitte des Bogens AE. — Man sieht, dass, wenn der angenommene Erdkörper mit der Schnittfläche OA überhaupt noch im Gleichgewichte bleiben soll, so muss die Kohäsion mindestens so gross sein, wie sie der Linie $C_mD_m$ entspricht.

Man sieht auch da arc $AC_m$ = arc $EC_m$, dass auch $\measuredangle AOB_m = \measuredangle BOE$, d. h. diejenige Ebene, in welcher die Kraft F ein Maximum wird, halbirt den Winkel zwischen der natürlichen Böschung und der Wand. Man nennt sie die Gleitebene.

Wenn man aber mit dem Halbmesser OA einen Bogen beschreibt, so erhält man $\max F = C'D' = 4k$.

Diese Construction kann gut verwendet werden, um aus Beobachtungen die Kohäsion $k$ durch Construction oder durch Rechnung zu finden. Den natürlichen Böschungswinkel beobachtet man, wenn man Erde frisch fördert. Dann macht man einen Aufschnitt mit einer bestimmten Böschung, welche man so lange fortführt, bis die Wand einstürzt. So findet man alle Daten.

**Beispiel.** Bei einer Erdmasse sei $\varphi = 35^0$ und die in der Figur eingeschriebenen Daten beobachtet worden; man soll den Kohäsionscoëfficienten bestimmen.




CD findet man mit $1{\cdot}62^m$

$k = 1{\cdot}62 : 4 = 0{\cdot}405^m$; $K = \gamma k$. $\gamma = 1500 \frac{Kg}{}$ pr $Kbm$

$K = 1500 \times 0{\cdot}405 = 607{\cdot}5 \doteq 608^{Kg}$, d. h. $1^{\square m}$ sucht auf der Unterlage mit $608^{Kg}$ zu haften.

Da diese Construction so äußerst einfach ist, so kann man sehr leicht daraus die Formel ableiten, aus welcher man die Kohäsion zu bestimmen im Stande ist. $OA = OC = x$.

$$CB = OC - OB = x - x\cos\alpha = CD\cos\varphi$$
$$= x(1-\cos\alpha) = 4k\cos\varphi$$
$$= \gamma x(1-\cos\alpha) = 4K\cos\varphi$$

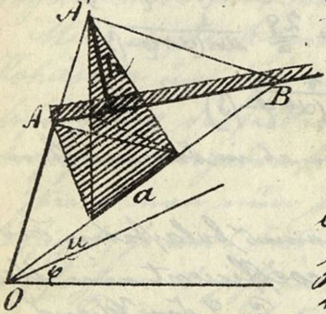
$$x = \frac{4K}{\gamma}\cdot\frac{\cos\varphi}{1-\cos\alpha}$$
$$K = \frac{\gamma x}{4}\cdot\frac{(1-\cos\alpha)}{\cos\varphi}$$

In der Praxis wird man nicht diesen Grenzwert $x$ nehmen dürfen, sondern wird z. B. $\frac{x}{2}$ noch als praktisch ausführbar betrachten.

Gewöhnlich pflegt man bei theoretischen Untersuchungen bloß den Fall zu betrachten, wo die vordere Wand vertikal steht, weil hier die Formel am einfachsten wird und auch der Kohäsionscoëfficient aus der Höhe einer vertikalen Wand leicht zu beobachten ist. Dann ist $\alpha = 90 - \varphi$ und $x = \frac{4K}{\gamma}\cdot\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$. Nennt man die Höhe eines vertikalen Schnittes, für welchen noch Gleichgewicht stattfinden soll, $h_0$, so ist $h_0 = \frac{4K}{\gamma}\cdot\frac{\cos\varphi}{1-\sin\varphi}$

Bisher ist immer angenommen worden, dass die obere Begrenzung des Erdkörpers eine ganz beliebige war; sie hat auch auf das Gleichgenicht das Erdprisma keinen Einfluß, weil je nach der Neigung das Gewicht und die Fläche, auf welche es sich bezieht, proporzional wachsen.

Es wäre aber noch ein Fall zu behandeln, der häufig berücksichtigt werden muß. Wir wollen annehmen, daß die obere Begrenzungsfläche durch irgend ein Gewicht belastet sei. Die Aufgaben werden sehr umständlich und die Berechnung sehr schwierig, wenn man die Last ungleichförmig vertheilt annimmt. Man pflegt daher eine gleichförmig vertheilte Last anzunehmen.




Es fragt sich nun, wie kann man diese Belastung berücksichtigen, wenn es sich um das Gleichgewicht dieses Erdprisma handelt. — Es ist gleichgiltig, woher diese Belastung kommt; man kann sich eine durch Erdmassen vorhandene Belastung denken, das ändert nichts am Gleichgewichte. Wenn die Belastung pro Flächeneinheit $q$ ist, so ist die ganze Last $q \cdot AB$, welche man sich durch eine Erdmasse über $AB$ entstanden denken kann; die Höhe der Aufschüttung muß man nur so wählen, daß am Gleichgewichte nichts geändert wird. — Denkt man sich $OA$ bis $A'$ verlängert, und $A'$ so gewählt, daß $OA'B = OAB +$ dem entsprechenden Theile der Belastung über $AB$.

Man braucht jedoch nicht die ganze Länge $OB$ zu nehmen, sondern bloß einen aliquoten Theil. Wenn überhaupt in der Trennungsfläche in Folge der wirkenden Kräfte Gleichgewicht bestehen soll, muß dieses Gleichgewicht für jeden beliebigen Theil $a$ auch bestehen.

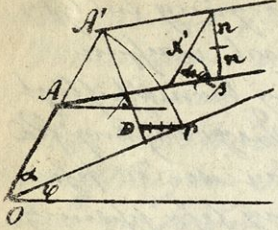
$A'$ kann leicht gefunden werden: das hinzugekommene Erdprisma $AA'B$ muß denselben Druck ausüben wie die gegebene Belastung $q \cdot AB$.

Das Gewicht $\gamma \cdot AB \cdot \frac{h}{2} = q \cdot AB$ ; $q = \frac{\gamma h}{2}$ ; $h = \frac{2q}{\gamma}$

$\frac{q}{\gamma}$ ist die Höhe einer Erdanschüttung, welche dasselbe Gewicht über einer beliebigen Basis gibt, wie die Belastung $q$ über derselben Basis.

Wenn man also die gegebene Belastung wegläßt, die vordere Wand aber bis $A'$ in einer Höhe von $\frac{2q}{\gamma}$ über $AB$ verlängert, so wird dieses Erdprisma ebenso im Gleichgewichte sein müssen wie bei der gegebenen Belastung. — Dieser Fall ist also sehr leicht constructiv, oder wenn man will, durch Rechnung zu behandeln

Man rechnet $\frac{q}{\gamma} = n$ und trägt $2n$ in einer Senkrechten über




AB auf, so findet man A', welches jetzt dieselbe Rolle spielt wie früher A. —
Man kann noch die dazu gehörige Formel aufstellen:

$OA = x$, $AA' = x'$, $OC = x + x'$

$OC = (x+x')\cos\alpha + 4K\cos\varphi$ | $\frac{2q}{\sigma} = x'\sin(\alpha+\varphi-\beta)$

$x+x' = \frac{4K\cos\varphi}{1-\cos\alpha} = \frac{4H.\cos\varphi}{\sigma(1-\cos\alpha)}$ | $x' = \frac{2q}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi-\beta)}$

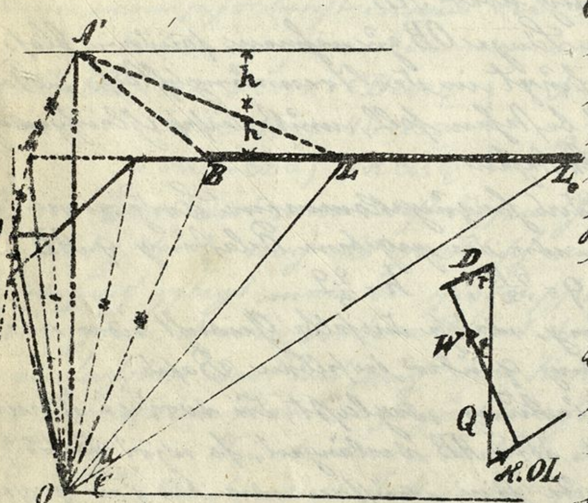
$$x = \frac{4H.\cos\varphi}{\sigma(1-\cos\alpha)} - \frac{2q}{\sigma}\,\frac{1}{\sin(\alpha+\varphi-\beta)}$$

Die Formel wird etwas einfacher, wenn $\beta=0$ ist, wie es in den meisten Fällen bei belasteten Erdkörpern der Fall ist.

Es ist zu bemerken, daß auch für diesen Fall eines belasteten Erdkörpers die Gleitfläche, in welcher der Kohäsionscoëfficient ein Max. ist, den Winkel zwischen der natürlichen Böschung und der Wand halbieren muß. Wenn das Gleichgewicht aufhört, muß an dieser Stelle das Abrutschen zuerst beginnen.

## Gleichgewicht gestützter Erdmassen und Bestimmung des Druckes auf die Wand.

Die Aufgabe soll gleich möglichst allgemein gestellt werden.




OA sei die Fläche der Wand, welche mit dem Erdkörper in Berührung steht; der Erdkörper selbst sei in irgend einer Weise begrenzt, außerdem an der oberen Begrenzungsfläche durch eine gleichförmig verteilte Last belastet.

OL sei die Trennungsfläche. Das Gewicht des Körpers OAL = Q.

Den Druck D findet man aus dem Kräftepolygon.

Es ist jetzt eine beliebige Trennungsfläche angenommen worden und es ist der Druck D im Kräftepolygon dargestellt. Wenn man OL anders und anders annimmt, so wird sich D ändern müssen. Man kann nun diejenige Lage der Trennungsfläche suchen, für welche der Druck D ein Maximum wird und es soll für diese Stellung der Druck auf die vordere Wand bestimmt werden.

Das Prisma, welches durch diese Ebene abgeschnitten wird, nennt man das **Erdprisma vom grössten Drucke.**

Die Aufgabe kann ziemlich einfach gelöst werden, wenn man die Kohäsion vernachlässigen will; wenn aber nicht, ist sie sehr complicirt. (In dieser allgemeinsten Form ist sie bis heute noch nicht berechnet worden, sondern nur für spezielle Fälle.)

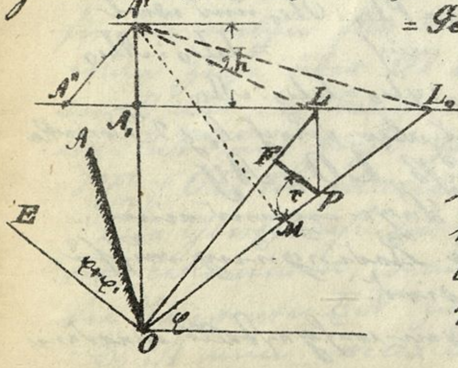
Man wähle folgenden Vorgang: Zuerst vernachlässige man die Kohäsion und sehe erst später nach, welche Änderungen die Berücksichtigung derselben hervorbringt. Es wird sich ein Annäherungsverfahren angeben lassen, welches ziemlich schnell zum Ziele führen wird.

Wenn man nun die Kohäsion in der Trennungsfläche OL vernachlässigt, so wird das Kräftepolygon zur Bestimmung von **D** viel einfacher: es geht in ein Kräftedreieck über. Die Kohäsion verringert den Druck auf die Wand und man bestimmt ihn auf diese Weise zu gross.


Die Bestimmung des Druckes **D** soll durch ein geometrisches Verfahren angegeben werden.

Es ist zunächst nöthig, das Gewicht Q, welches einer bestimmten Trennungsfläche OL entspricht, in bekannter Weise auszudrücken. Die Grösse der Belastung drückt man auch durch das Gewicht eines dreiseitigen Prismas aus. Man bestimmt, wenn q die gleichförmig vertheilte Last pro Flächeneinheit und $\sigma$ das spez. Gew. der Erdmasse bedeutet, $\frac{q}{\sigma} = k$ und trägt dies über der oberen Begrenzung auf, und bestimmt A' durch eine Flächenverwandlung und verbindet A' mit L, so ist das Gewicht des Erdprismas $OA'L = Q$ ; $Q =$ Erdprisma $(OABL) + q(BL)$

$= \text{Gew.}(OABL) + (A'BL) = \text{Gew.}(OA'L)$




Man will jedoch nicht die wirkliche Grösse von Q auftragen, sondern nur einen proportionalen Theil. Man kann das Gewicht auch auf folgende Weise durch eine Linie ausdrücken:

$A'M \perp OL_0$ ; $LP \parallel A'O$, so ist

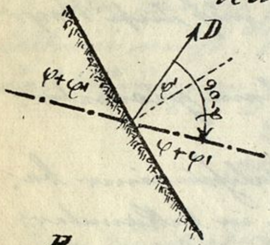
$\Delta\, OA'L = \frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{A'M}$ ; $Q = \sigma\cdot\frac{1}{2}\overline{OP}\cdot\overline{A'M}$.

Wie immer man OA ändern mag, OP bleibt

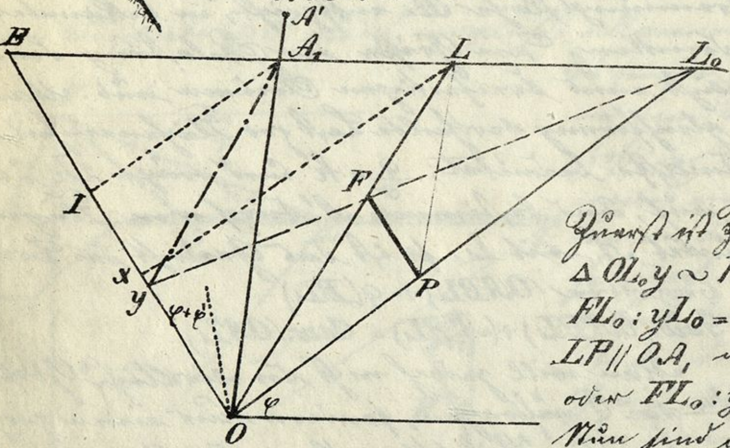
ungeändert. Es ist daher vortheilhaft, die Kraft Q durch die Länge $\overline{OP}$ darzustellen, welche dem Gewichte immer proporzional wird; man denke sich dieselbe nur noch mit dem Coëfficienten $\frac{1}{2}\gamma A'M$ multiplizirt und ebenso auf alle anderen Längen des Kräftedreiecks, um die wirklichen Größen zu bekommen.

Eine weitere Vereinfachung kann man auch dadurch erzielen, dass man Q nicht vertikal, sondern in der natürlichen Böschung zeichnet. Dadurch wird das ganze Dreieck um $90-\varphi$ gedreht. W schließt mit der Vertikalen den Winkel $\mu$ ein, es muss nach der Drehung in die Linie OL zu liegen kommen. Man braucht nur noch die Richtung von D zu kennen. Nach der Drehung um $90-\varphi$ kommt D in die Linie zu liegen, welche mit der Wand den $\sphericalangle(\varphi+\varphi')$ einschließt.


Man zeichnet in der Figur ein für allemal den $\sphericalangle(\varphi+\varphi')$ an die Wand und zieht $PF \parallel OE$, so gibt PF den Druck an.




Aus dieser Construction kann man die Lage der Gleitebene aufsuchen, für welche PF ein Maximum wird.




Man zieht $FL_0$ bis $y$, ferner $AI \parallel Lx \parallel OL_0$. Von diesen Punkten ist $AI$ constant, $x$ und $y$ sind variabel.

Zuerst ist zu beweisen, dass $A_1y \parallel OL$.
$\Delta OL_0y \sim PL_0F$, folglich
$FL_0 : yL_0 = PL_0 : OL_0$ und weil
$LP \parallel OA$, auch $= LL_0 : AL_0$
oder $FL_0 : yL_0 = LL_0 : AL_0$.
Nun sind aber durch $A_1y$ 2 Dreiecke entstanden: $A_1yL_0$ und $LFL_0$, folglich muss $LO \parallel A_1y$.

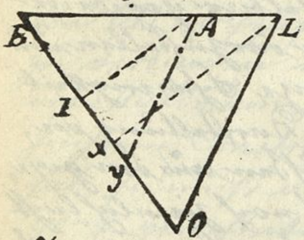
Man hat nur die Linie PF durch die Lage irgend eines Punktes x und y auszudrücken und die Bedingung aufzusuchen, für welche PF ein Maximum wird.

Zunächst sollen folgende Gleichungen aufgestellt werden.

$$PF : Oy = FL_0 : yL_0 \quad \text{und weil} \quad FL \parallel yA,$$
$$= LL_0 : AL_0 \quad \text{und} \quad A,I \parallel Lx$$
$$= xO : IO$$

$$PF = \frac{Oy \cdot xO}{IO} = \frac{(BO-By)(BO-Bx)}{IO} = \frac{1}{IO}\left[\overline{BO}^2 - BO(By+Bx) + By \cdot Bx\right]$$

Nun ist aber das Produkt $Bx \cdot By$ für jede beliebige Lage der Linie $OL$ constant. Das kann man auf folgende Weise zeigen: Vermöge der Construction ist $\triangle BAy \sim \triangle BLO$, folglich ergibt sich



$BA : BL = By : BO$ und weil $AI \parallel Lx$, auch
$BI : Bx = By : BO$. Daraus ist
$Bx \cdot By = BI \cdot BO$. Weil $I$ und $O$ fixe Punkte sind, so ist dieses Produkt constant.
Wenn man dieses einsetzt, so ist

$$PF = \frac{BO}{BI}\left[BO + BI - (By+Bx)\right]$$

Jetzt kann man die Frage über das Maximum von $PF$ erledigen: Die Summe des veränderlichen Theiles $(By+Bx)$ muss ein Minimum werden. Es muss man so wählen, dass diese Summe ein Minimum wird, deren Glieder ein constantes Produkt geben. Das ist nur dann möglich wenn die beiden Summanden gleich sind. $Bx = By = \sqrt{BI \cdot BO}$. Die Lage von $L$ muss so beschaffen sein, dass $x$ und $y$ zusammenfallen. Es ist jedoch einfacher, $PF$ nach der ersten Gleichung auszudrücken:

$$PF = \frac{Oy \cdot Ox}{IO}\,; \quad \max PF = \frac{\overline{Oy}^2}{IO}.$$

Hat man $x$ oder $y$ bestimmt, ergibt sich $PF$

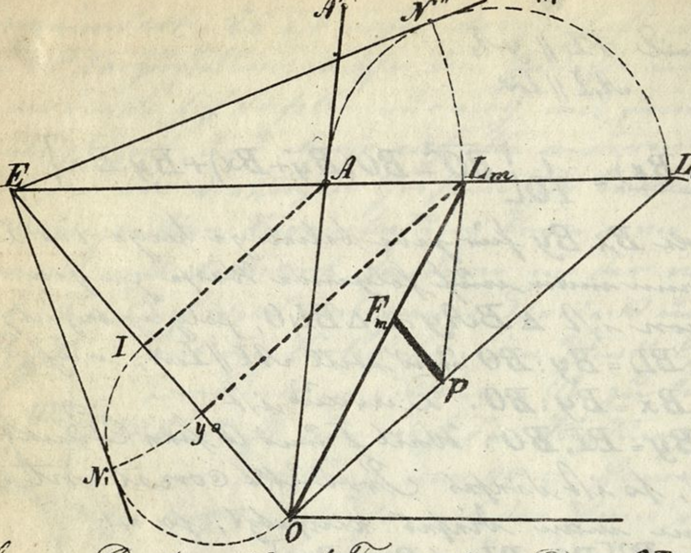
$$Oy = BO - By = BO\left(1 - \sqrt{\frac{BI}{BO}}\right)$$

$$\max PF = \frac{\overline{BO}^2}{IO}\left(1 - \sqrt{\frac{BI}{BO}}\right)^2$$

Wie kann man nun den Punkt $y$ finden, welcher für die Lage von $OL$ das max des Druckes gibt? Man ziehe über $OI$ als Durchmesser einen Kreis, zu diesem von $E$ aus die Tangente $EN'$, so ist $\overline{EN'}^2 = EI \cdot EO$. Man mache $Ey = EN'$ und ziehe $yL_m \parallel OL_0$, so bekommt man durch $PF_m \parallel OE$ das Maximum des Druckes.

Die Gleitfläche für den Maximaldruck kann man auch direkt bekommen, wenn man aus $E$ an den Bogen über $AL_0$ die Tangente $EN''$ zieht und $EL_m = EN''$ macht.

Es ist nun $\max D = \left(\frac{1}{2}\gamma A'M\right) PF_m$

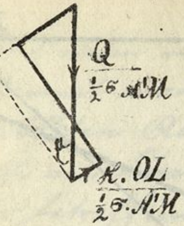



Die allgemeine Aufgabe, die gestellt worden ist, ist bezüglich der Construction vollkommen als erledigt anzusehen. Bezüglich des Maximaldruckes ist es aber erforderlich, $Oy$ und $OI$ durch unmittelbar gegebene Größen darzustellen und die ganze Schwierigkeit ist die Darstellung dieser Größen aus den gegebenen Daten durch Formeln. Der $OI$ läßt sich noch ziemlich leicht aus den Daten berechnen, man braucht nur die Lage von A zu kennen. Schwieriger ist aber die Berechnung von $Oy$.

Man hat daher schon in früherer Zeit ein Verfahren eingeschlagen, welches theilweise auf Rechnung, theilweise auf Construction beruht. Dieses Verfahren rührt von Poncelet her, der überhaupt der erste die Daten über den Erddruck aufgestellt hat. Er construirte $Oy$ und rechnete $OI$. Dadurch werden die Daten einfach.

Die Berechnung von $PF_m$ hat übrigens nur in solchen Fällen einen Wert, wo es sich darum handelt, bei gegebenen Stützmauern sich Aufschlüsse über die günstigste Form und Dimensionen derselben bei gegebenem Erddrucke zu verschaffen. Wenn es sich aber blos darum handelt, für eine bestimmte Stützfläche den Druck zu bestimmen, wird man am zweckmäßigsten immer zur Construction und nicht zur Rechnung greifen.
Es soll auch die Formel zur Bestimmung des Erddruckes ähnlich entwickelt werden, um daran gewisse allgemeine Regeln für die Anordnung der Stütz- oder Schutzmauern anschließen zu können. Alles Übrige wird sich aus der Construction ergeben.

Bevor soll aber noch angegeben werden, wie man den Einfluss der Kohäsion in Berücksichtigung ziehen kann. Wenn man die Kohäsion berücksichtigt, so wird dadurch der Druck




kleiner und es wäre die zu lösende Aufgabe folgende: Die Trennungsfläche zu finden, für welche dieser wirkliche Druck ein Maximum wird. Man wird finden, daß diese Trennungsfläche mit der früher gefundenen nicht übereinstimmen wird.

Wenn man hiebei wenigstens angenähert die Lage der Trennungsfläche für das Maximum suchen will, so bleibt nichts anderes übrig, als die Construction für mehrere angenommene Lagen von OL durchzuführen, dann die Punkte F durch eine Curve zu verbinden und daraus denjenigen Punkt zu finden, welcher das Maximum des Druckes liefert. Sowie man bei den früheren Constructionen das Kräftepolygon um $(90-\varphi)^\circ$ gedreht hat, so muß auch jetzt die Kohäsion mit der Linie OL um $90-\varphi$ gedreht werden, damit Q in die natürliche Böschungsfläche fällt.

Wenn man diese Construction für eine beliebige Trennungsfläche OL ausführt, so schneide man zuerst das Gewicht Q ab, indem man $LP \parallel A''O$ zieht und $PF \parallel OE$, so ist PF der Druck. Jetzt hat man noch die Kohäsion hinzuzufügen; sie ist proporzional der Länge OL. Kohäsion $= \frac{CD}{\frac{1}{2}\sigma . OL}$. CD wird gefunden, wenn man einen Halbkreis über $OA''$ beschreibt und vom Durchschnittspunkte C die Horizontale CD führt.

Die Kohäsion K.OL ist jedoch wie die übrigen Größen des frühern Kräftedreieckes OPF auch noch zu dividieren durch $\frac{1}{2}\sigma . A''M$.

Die erste Proporzionalität kann man auf die zweite durch folgende Relation bringen.

Aus dem Kräftedreiecke $A''CD$ ist $Q = (\frac{1}{2}\sigma . OL)\, A''C$

" " " $OPF$ " $Q = (\frac{1}{2}\sigma . A''M) . OP$. Daraus ist

$OL . A''C = A''M . OP$

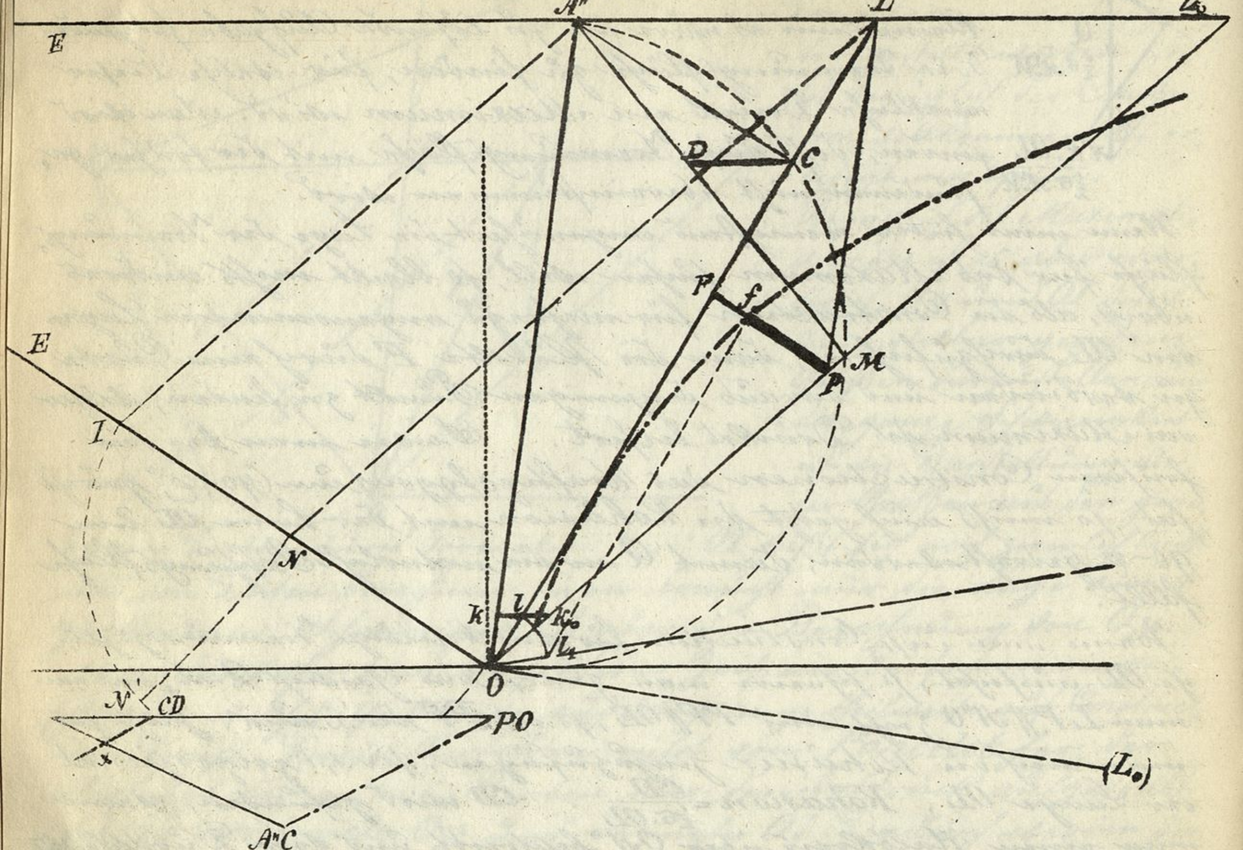
$OL = \frac{A''M . OP}{A''C}$ Kohäsion $= \frac{1}{\frac{1}{2}\sigma . A''M} \cdot \frac{CD}{\frac{OP}{A''C}} = \frac{x}{\frac{1}{2}\sigma A''M}$, wenn

$\frac{CD . A''C}{OP} = x$ gesetzt wird.

x kann man leicht finden, wenn man die Proporzion

$x : CD = A''C : OP$ construirt.

Nun trägt man in der Ebene OL von O aus das x auf




und zieht von seinem Endpunkte eine Parallele $K_0K$ zur obern Begrenzungsfläche $L_0L$, so kann man dann für jede beliebige Trennungsfläche aus der Strecke zwischen O und dieser Parallelen $K_0K$ die Kohäsion $Ol$ auf der beliebigen Trennungsfläche entnehmen. Und nun wird diese Kohäsionsstrecke um $90-\varphi$ gedreht.

Wenn man die natürliche Böschung $OL_0$ um $90-\varphi$ dreht, nach $O(L_0)$, so braucht man an $O(L_0)$ nur den betreffenden Winkel $\mu$ zu zeichnen, beschreibt dann mit $Ol$ den Bogen $ll_1$ und zieht $l_1f \parallel OL$, so bekommt man als den nunmehrigen wirklichen Druck $Pf$.

Ebenso bestimmt man sich für beliebige andere Trennungsflächen aus den bezüglichen Kräftepolygonen den wirklichen Druck und wenn man alle Punkte f durch eine Linie verbindet, so bekommt man dort das Maximum des Druckes, wo diese Linie den größten Abstand von der natürlichen Böschung zeigt. Man zieht also eine Tangente parallel zu $OZ_0$ an die Curve, so findet in der betreffenden Trennungsfläche das Maximum des Druckes statt.

Nun braucht man aber auf diese complicirte Weise nicht vorzugehen, um den Einfluß der Kohäsion zu bestimmen, weil dieser ohnehin sehr klein ist. Wenn man diese Curve zeichnet und die Stellung von $OZ_m$ sucht, so findet man, daß dieses Maximum des Druckes einer Linie entspricht, die äußerst nahe zur früheren Linie $OZ_m$ fällt.

Man kann behaupten, daß wenigstens sehr nahezu diejenige Trennungslinie, welche ohne Rücksicht auf Kohäsion das Maximum des Druckes liefert, auch mit Rücksicht der Kohäsion das Maximum des Druckes geben wird.

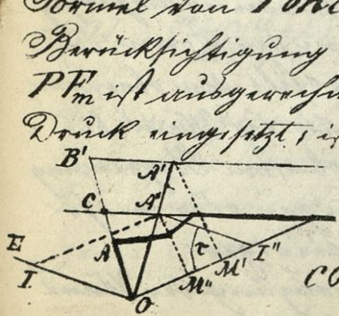
Damit vereinfacht sich aber die Construction sehr. Man rechnet sich nur für $OZ_m$ die Kohäsionstrecke, dreht sie um $90-\varphi$ und zieht die Parallele.

Nur in einem bestimmten Falle, das zeigt zwar nicht die Construction, wol aber die analytische Entwicklung, fällt die Linie mit Berücksichtigung der Kohäsion zusammen mit der ohne Berücksichtigung der Kohäsion, wenn nämlich die Verhältnisse so sind, daß $OZ_m$ ohne Rücksicht auf Kohäsion $A''OZ_0$ halbirt.

In den meisten Fällen wird, namentlich bei praktischen Anwendungen, die Kohäsion vernachlässigt.

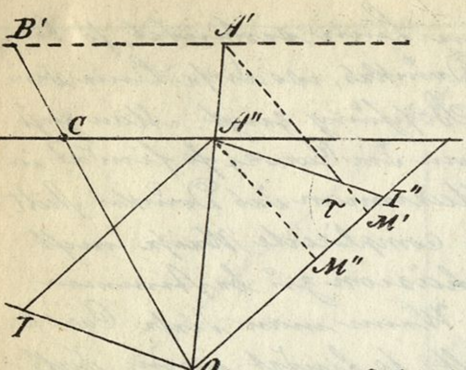
Es handelt sich nur noch darum, aus dieser Construction die Formel zur Berechnung des Erddruckes abzuleiten. Zuerst soll die Formel von **Poncelet** für den allgemeinsten Fall mit und ohne Berücksichtigung der Kohäsion aufgeschrieben werden.

$PF_m$ ist ausgerechnet worden $= \frac{\overline{ON}^2}{OI}$. Das in die Formel für den Druck eingesetzt, ist $D = \frac{1}{2}\delta \cdot A'M' \cdot \frac{\overline{ON}^2}{OI}$




$$\frac{A'M'}{A''M''} = \frac{A'O}{A''O} = \frac{B'O}{CO};$$ Nun ist aber $$\frac{B'O}{CO} = \frac{CO+CB'}{CO} = \frac{x+2h'}{x}$$

$CO = x$; $CA = x'$; $CB' = 2h'$

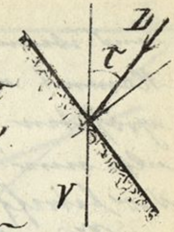



$$A'M' = A''M'' \cdot \frac{x+2h'}{x}$$

$$A''M'' = A''I'' \cdot \sin\tau = OI \sin\tau$$

$$D = \frac{1}{2}\gamma \cdot OI \cdot \frac{\overline{ON}^2}{OI} \cdot \sin\tau \cdot \frac{x+2h'}{x}$$

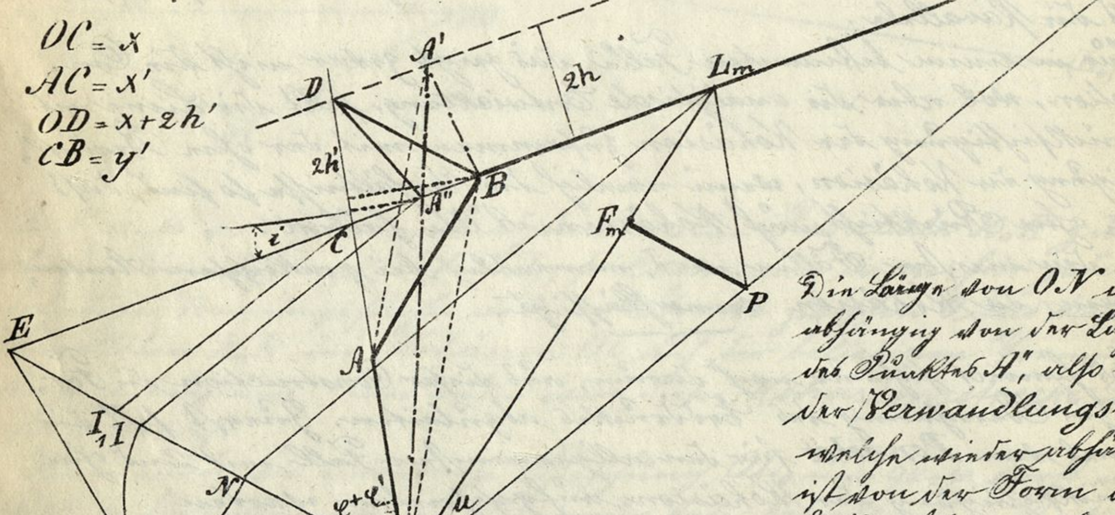
$$D = \frac{1}{2}\gamma\, \overline{ON}^2 \sin\tau \cdot \frac{x+2h'}{x}$$




Das ist die Formel von Poncelet. $\tau$ ist der Winkel der Druckrichtung auf die Wand mit der Vertikalen.

Mit Ausnahme von $ON$ sind alle anderen Größen in der Formel als gegeben zu betrachten. Die Bestimmung von $ON$ erfordert aber auch die Bestimmung der Stellung von $A''$ und alle Schwierigkeiten rühren nur daher, daß es einer langwierigen Rechnung erfordert, um $A''$ zu ermitteln. Poncelet verfährt aber so, daß er $A''$ nicht durch Rechnung, sondern durch Construction sucht, was am einfachsten ist. In gewissen einfachen Belastungsfällen kann man $ON$ leicht ausrechnen.

$OC = x$
$AC = x'$
$OD = x + 2h'$
$CB = y'$




Die Länge von $ON$ ist abhängig von der Lage des Punktes $A''$, also von der Verwandlungslinie welche wieder abhängig ist von der Form des Erdprofils vom obersten Punkte der Wand bis zur obersten Begrenzung des Erdkörpers. Je nachdem dieses Profil weniger oder mehr complizirt ist, ist die Formel einfacher oder schwieriger.

Es soll angenommen werden, daß die Begrenzung der Wand

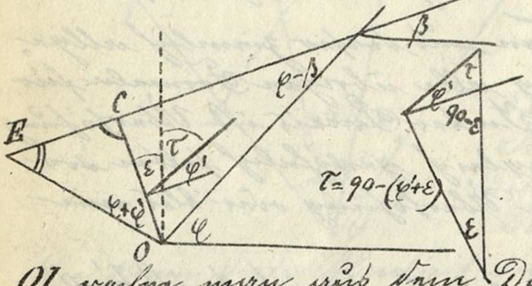
bis zur obersten Grenze des Erdkörpers in einer Ebene begrenzt.
Aber schon bei dieser einfachen Annahme wird die Formel ziemlich complicirt. — Man zieht die Hilfslinie $CI_1 \parallel OL_0$. Die Lage von $I_1$ ist nur von der Lage der hinteren Wandfläche abhängig.
Nun kann man $ON$ so darstellen:

$$ON = OE - NE$$
$$NE = \sqrt{OE \cdot IE}$$
$$IE = I_1E + II_1$$
$$ON = OE - \sqrt{OE(I_1E + II_1)}$$
$$\overline{ON}^2 = OE\{\sqrt{OE} - \sqrt{I_1E + II_1}\}^2$$

$II_1$ ist abhängig von der Lage der Verwandlungslinie $OA''$, alle übrigen Linien sind von der Verwandlungslinie unabhängig.

Man muß im Auge behalten, daß die Länge der Wand und $OC$ gegeben ist.
Meist hat man den Winkel, den die rückwärtige Wandlinie mit der Vertikalen bildet, gegeben und man denselben links von der Vertikalen als positiv. — Außerdem wären noch $\beta$ und $\varphi$ gegeben. Im Dreiecke $OEC$ verhält sich

$$OE : x = \sin\sphericalangle : \sin\sphericalangle\!\!\sphericalangle$$
$$\sphericalangle = 90 - \varphi + \varepsilon + \varphi - \beta = 90 - (\beta - \varepsilon) = 90 + (\varepsilon - \beta)$$
$$\sphericalangle\!\!\sphericalangle = 180 - (\sphericalangle + \varphi + \varphi') = 90 - \varepsilon - \varphi - \varphi' + \beta = 90 - (\varphi + \varphi' + \varepsilon - \beta)$$




$$OE = \frac{x \cdot \sin\sphericalangle}{\sin\sphericalangle\!\!\sphericalangle}$$
$$OE = x\underbrace{\left\{\frac{\cos(\varepsilon-\beta)}{\cos(\varphi+\varphi'+\varepsilon-\beta)}\right\}}_{\lambda} = x.\lambda$$
$$I_1E = OE - OI_1 = x\lambda - OI_1$$

$OI_1$ rechnet man aus dem Dreiecke $OI_1C$

$$OI_1 : x = \sin(90 - \varphi + \varepsilon) : \sin\tau \quad ; \quad \sin\tau = \cos(\varphi' + \varepsilon)$$
$$OI_1 = x\,\frac{\cos(\varphi-\varepsilon)}{\cos(\varphi'+\varepsilon)} = x.\mu \; ; \qquad I_1E = x(\lambda - \mu)$$

Es erübrigt noch die Berechnung von $II_1$, welches von $A''$ abhängig ist. Durch die Verwandlung wird $\Delta\, OAB = \Delta\, OA''B$
Die Lage des Punktes $A''$ in der Verwandlungslinie sucht man auf folgende Art: Die Fläche $ODA''B$ kann man auf doppelte Art ausdrücken.

$$ODA'B = ODA'' + \cancel{DA'A''} + \cancel{OA'B} = \cancel{OAB} + ADB + \cancel{DA'B}$$

$AD' \parallel BC$ ; $DA'A'' = DA'B$ , folglich ist

$$ODA'' = ADB$$

Die Flächen dieser beiden Dreiecke sind nun auszurechnen.
Von $A''$ eine Senkrechte auf die Basis $OD$

$$ODA'' = \tfrac{1}{2}(x+2h')\,CA''\sin\tau \qquad\Big|\qquad (x+2h')\,CA'' = (x'+2h')\,CB$$

$$ADB = \tfrac{1}{2}(x'+2h')\,CB.\sin i \qquad\qquad CA'' = \frac{x'+2h'}{x+2h'}\cdot y'$$

$$II_1 : CA'' = \sin(\varphi-\beta) : \sin\tau$$

$$II_1 = \frac{x'+2h'}{x+2h'}\cdot y'\,\frac{\sin(\varphi-\beta)}{\cos(\varphi'+\varepsilon)} = \frac{x'+2h'}{x+2h'}\,y'\cdot\nu$$

Jetzt kann man $\overline{ON}^2$ ausrechnen, indem man die Werte von $OE$, $I_1E$ $(OI_1)$ und $II_1$ substituirt.

$$\overline{ON}^2 = x\lambda\left\{\sqrt{x\lambda} - \sqrt{x(\lambda-\mu) + \frac{x'+2h'}{x+2h'}\cdot y'\cdot\nu}\right\}^2$$

$$D = \tfrac{1}{2}\sigma\,\overline{ON}^2\cdot\sin\tau\cdot\frac{x+2h'}{x}$$

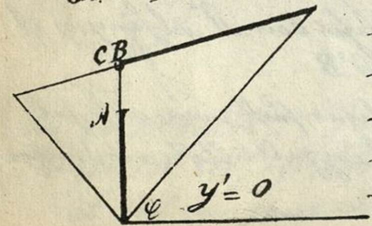
$$D = \tfrac{1}{2}\sigma\cdot\cos(\varphi'+\varepsilon)\,\lambda\left[\sqrt{x(x+2h')\lambda} - \sqrt{x(x+2h')(\lambda-\mu) + (x'+2h')\,y'\cdot\nu}\right]^2$$

$\lambda\ \mu\ \nu$ sind Größen, welche nur von gewissen Winkeln abhängig sind, die als unmittelbar gegeben zu betrachten sind.

Man hat den Vortheil, daß man aus dieser ziemlich allgemeinen Formel durch Spezialisirung alle übrigen Formeln für einfachere Fälle herausleiten kann. In der Praxis ist Überhöhung des Erdkörpers und Belastung zugleich gewöhnlich selten vorhanden, sondern entweder blos eine Überhöhung oder blos eine gleichförmige Belastung.

Wenn keine gleichförmige Belastung vorhanden ist, so ist $h'=0$. Dann pflegt man die Reibung auf die vordere Wand zu vernachlässigen und nimmt den Druck auf die Wand als senkrecht an, $\varphi'=0$

Eine andere Vereinfachung, die aber noch eine ziemliche Allgemeinheit besitzt, tritt dann ein, wenn $y'=0$, wo aber noch immer eine Überhöhung des Erdkörpers und zugleich eine Belastung sein kann. $OA''$ fällt auch in die Wand hinein.

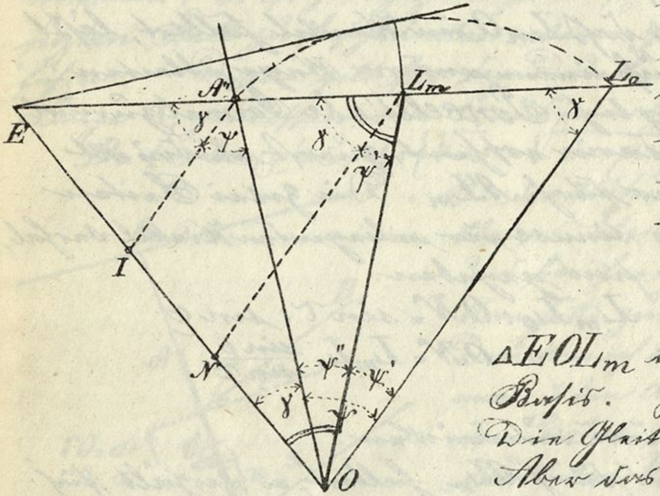



$$D = \tfrac{1}{2}\sigma\cdot\cos(\varphi'+\varepsilon)\,\lambda x(x+2h')\left\{\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda-\mu}\right\}^2$$

In den meisten Fällen, wie sie in der Praxis vorkommen, wird die Flächenverwandlung so ausgeführt, dass ein beliebiger Fall auf diesen zurückgeführt wird. Aber dies Verfahren ist nicht vollkommen richtig und kann nur als annähernd betrachtet werden.

Die rückwärtige Wand denkt man sich verlängert, dann bestimmt man sich eine neue Horizontale und denkt sich das neue Profil für das wirkliche substituirt. Die weggenommene Fläche muss aber so gross sein als die hinzugefügte. Man begeht dadurch zwar einen Fehler, aber man kann die viel einfachere Formel anwenden.

In gewissen speziellen Fällen tritt noch dadurch eine Vereinfachung ein, dass die Ebene, welche das Prisma vom grössten Drucke begrenzt, den Winkel zwischen der natürlichen Böschung und der Verwandlungslinie $A''O$ halbirt.




Es soll gezeigt werden, dass dieß dann der Fall ist, wenn der Winkel $\gamma = \sphericalangle OE, OA''$

$$EL_m^2 = EA'' \cdot EL_0$$
$$EA'' : EO = \sin\gamma : \sin(\gamma+\psi)$$
$$EL_0 : EO = \sin(\gamma+\psi) : \sin\gamma$$
$$\overline{EO}^2 = EA'' \cdot EL_0$$
$$EO = EL_m$$

$\triangle EOL_m$ ist gleichschenklig, $L_mO$ ist die Basis. $\gamma+\psi'' = \gamma+\psi'$ ; $\psi'' = \psi'$

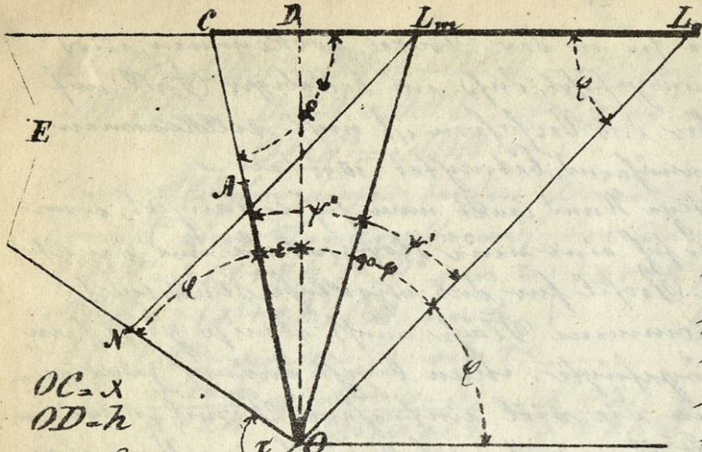
Die Gleitungslinie halbirt den $\sphericalangle\psi$

Aber das geschieht nur in diesem Falle.

Wie kann diese Gleichheit der Winkel zu Stande kommen?

In folgendem speziellen Falle, der sehr häufig vorkommt und für die Formeln vorausgesetzt wird.

Es soll nämlich angenommen werden, der Körper sei oben horizontal abgegrenzt. Man macht häufig die Annahme, dass der Reibungswinkel der Erde auf Wand, $\varphi' = 0$ ist. Dieß ist zwar unmöglich, aber man kann ihn doch vernachlässigen, weil er der Dimension der Mauer zu gute kommt. Man hat dann an der vordern Wand nur $\varphi$ aufzutragen, um OE zu bekommen.




In diesem gezeichneten Falle fällt auch die Verwandlungslinie $OA'$ mit der Wand zusammen. Jetzt wird die Linie vom größten Druckprisma den Winkel zwischen der Wand und der natürlichen Böschung halbieren. Dabei kann, wie ersichtlich, eine Überhöhung des Erdkörpers und eine Entlastung vorhanden sein, aber die Erhöhung darf nur in der Richtung der Wand erfolgen und die Oberfläche des Körpers muß horizontal liegen.

Für diesen speziellen Fall wird man leicht den Ausdruck für $D$ aus der allgemeinen Formel finden können.

Aus der Bemerkung aber, daß $L_m O$ den Winkel halbiert, läßt sich der Ausdruck auch noch auf einem andern Wege ableiten, indem man auf die ursprüngliche Poncelet'sche Formel zurückgeht und die Linie $ON$, die darin erscheint, zuerst ausdrückt durch $L_0 L_m$ und dann wieder durch $A'L_m$. Die zwei Seiten müssen sich verkehrt wie die sinuse der anliegenden Winkel verhalten. Die Winkel $\varepsilon$ und $\varphi$ sind gegeben.

$$D = \tfrac{1}{2}\delta \sin\tau \frac{x+2h'}{x} \cdot \overline{ON}^2 ; \quad L_m L_0 : ON = \sin\tau : \sin\varphi$$

$$D = \tfrac{1}{2}\delta \cdot \frac{\sin^2\varphi \, L_m L_0^2}{\sin\tau} \cdot \frac{x+2h'}{x} \qquad ON = L_m L_0 \frac{\sin\varphi}{\sin\tau}$$

$L_m L_0$ kann man noch anders ausdrücken.

Der Scheitelwinkel $COL_0$ wird durch $OL_m$ halbiert, so verhält sich demnach im $\Delta\, COL_0$:

$$CL_m : \cancel{OL_m} = \cancel{\sin\psi'} : \cos\varepsilon$$
$$\cancel{OL_m} : L_m L_0 = \sin\varphi : \cancel{\sin\psi'}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$CL_m : L_m L_0 = \sin\varphi : \cos\varepsilon$$

$L_m L_0 = CL_m \dfrac{\cos\varepsilon}{\sin\varphi}$. Diesen Wert setzt man in die Gleichung von $D$ ein.

$$D = \tfrac{1}{2}\delta \cdot \cos\varepsilon \cdot CL_m^2 \, \frac{x+2h'}{x} ; \quad \tau = 90 - \varepsilon ; \quad CL_m = CD + DL_m$$
$$CD = h \cdot tg\,\varepsilon$$
$$DL_m = h \cdot tg\left(\frac{\psi}{2} - \varepsilon\right)$$

$D = \tfrac{1}{2}\delta \cdot \cos\varepsilon \cdot \dfrac{x+2h'}{x} \cdot h^2 \left\{ tg\,\varepsilon + tg\left(\frac{\psi}{2} - \varepsilon\right) \right\}^2$. Wenn der Körper unbelastet ist, so ist $h' = 0$. Dann ist: $\underbrace{D = \tfrac{1}{2}\delta \cdot \cos\varepsilon \cdot h^2 \left\{ tg\,\varepsilon + tg\left(\frac{\psi}{2} - \varepsilon\right) \right\}^2}$.

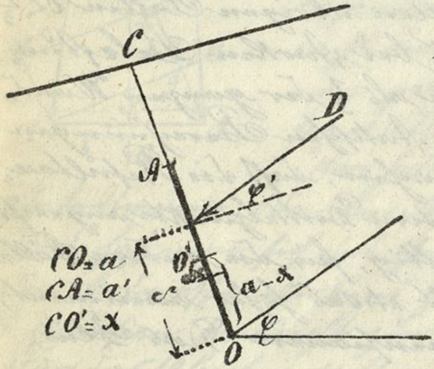
# Angriffspunkt-Bestimmung der Druckresultante.

Um die Stabilitätsbedingung der Mauer aufzustellen, braucht man das Moment, folglich auch den Punkt, in welchem die Resultante aller Druckkräfte an der Wand angreift.

Auch diese Frage läßt sich kaum im Allgemeinen auflösen, selbst wenn man die Kohäsion vernachlässigt. Um den Ort des Angriffspunktes zu finden, muß man sich die Mauer in die einzelnen Theile getheilt denken und dann die Momentensumme und den Druck bestimmen.

Im allgemeinen Falle hat man für jede Wand die Verwandlungslinie gezogen. Man würde also für jede Wandlänge eine andere Verwandlungslinie bekommen und die Rechnung wäre ungemein complicirt. Es ist jedoch genügend, sich auf den früher auseinandergesetzten Fall zu beschränken, wenn $y'=0$ ist und die Rechnung durchzuführen. Dann gilt für den Druck auf ein Stück der Wand von der Länge $x$, gemessen von $C$ aus, die Gleichung:

$$D = \frac{1}{2}\sigma \cos(\varphi'+\varepsilon)\,\lambda\left\{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-\mu}\right\}^2 \cdot x\,(x+2h')$$




In der Nähe von $O'$ denke man sich ein sehr kleines Element der Wand von der Länge $dx$ und berechne den Druck auf dieses Element. Man hätte zuerst für die Wandfläche $CO'$ den Druck nach der Formel zu suchen; dann lasse man $x$ um $dx$ wachsen und suche wieder den Druck, oder man differenziere den Ausdruck von $D$ nach $x$.

$$\frac{1}{2}\sigma \cos(\varphi'+\varepsilon)\,\lambda\left\{\sqrt{\lambda}-\sqrt{\lambda-\mu}\right\}^2 = F$$

$$D = F x\,(x+2h')$$

$$dD = F(x+h')\,2\,.\,dx = 2F\,(x+h')\,dx$$

Nun braucht man den Abstand der Resultante aller Druckkräfte auf dieser Länge $CO$ von $O$ aus. $BO=\delta$. Der Hebelarm von $D$ in Bezug auf $O$ ist $\delta\cos\varphi'$. Nun setzt man das resultirende Moment $D.\delta\cos\varphi' =$ der Summe der Momente der einzelnen Druckkräfte. Auf das $dx$ entfällt der Druck $dD$. Der Abstand dieses Punktes $O'$ von $O$ ist $a-x$, folglich wird das Moment dieses Druckes sein: $dD(a-x)\cos\varphi'$ und nun muß die Gleichung bestehen:

$$D.\delta\cos\varphi' = \int dD(a-x)\cos\varphi'$$

$$D\delta = \int dD(a-x) = 2\mathfrak{F}\int_a^{a'}(x+h')(a-x)\,dx = 2\mathfrak{F}\int_a^{a'}(ax+ah'-x^2-h'x)\,dx$$

$$D\delta = 2\mathfrak{F}\left\{\tfrac{1}{2}ax^2+ah'x-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{2}h'x^2\right\}_a^{a'} = 2\mathfrak{F}\left\{ah'x+\tfrac{1}{2}(a-h')x^2-\tfrac{1}{3}x^3\right\}_a^{a'} =$$

$$= 2\mathfrak{F}\left\{ah'(a-a')+\tfrac{1}{2}(a-h')(a-a')^2-\tfrac{1}{3}(a-a')^3\right\}$$

$$D = \mathfrak{F}a(a+2h')$$

$$\delta = 2.\frac{(a-a')\left\{ah'+\frac{1}{2}(a-a')(a-h')-\frac{1}{3}(a-a')^2\right\}}{a(a+2h')}$$

Wenn wir annehmen, daß keine Belastung vorhanden ist, also $h'=0$ und ferner, daß keine Überhöhung des Erdkörpers vorkommt, also $a'=0$, so erhält man:

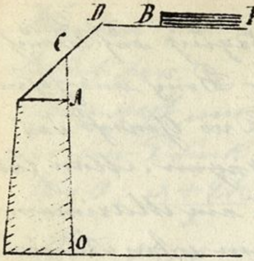
$$\delta = \frac{2a.\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a^2\right)}{a^2} = \frac{1}{3}a = \frac{1}{3}CO$$

In diesem Falle wird der Angriffspunkt des Druckes von der unteren Wand um $\frac{1}{3}$ von der ganzen Wandlänge entfernt sein; aber nur in diesem Falle, sonst wird die Entfernung etwas kleiner sein. Wenn man blos $a'=0$ setzt, so kommt auch nicht $\frac{1}{3}$ heraus.

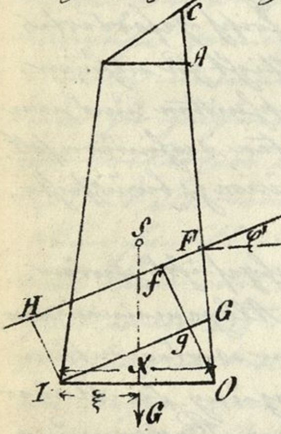
Man kann noch bemerken, daß in allen übrigen Fällen $\delta < \frac{1}{3}$ ist. Aber selbst bei starken Höhen und bei starken Belastungen wird $\delta$ nicht bedeutend kleiner sein als $\frac{1}{3}$ der ganzen Wandfläche. Dahingegen pflegt man bei allen statischen Berechnungen oder Constructionen die Annahme zu machen, daß die Resultante des Druckes an der Wandfläche im unteren Drittelpunkte angreift. Für den speziellen Fall ist dieß streng richtig, für die anderen Fälle aber nicht. Wenn man den Angriffspunkt etwas höher annimmt, bekommt man etwas zu große Wanddimensionen. Das Plus dient aber zur größeren Sicherheit.

# Berechnung der Mauerstärke.

Sobald man die Größe und den Angriffspunkt des Erddruckes kennt, unterliegt die Berechnung der Dimension einer Mauer keiner Schwierigkeit. Die Gleichung, aus welcher man die Dimension der Stützmauer zu berechnen hat, ist keine andere als die bekannte Stabilitätsgleichung.




Es sei nebst einer beliebigen Form der Stützwand und der beliebigen Abgrenzung des Erdkörpers eine Überhöhung und vom Punkte B aus eine gleichförmige Belastung gegeben, so wird man, um die Dimension zu finden, die Lage und Größe des Erddruckes zu bestimmen haben. OA ist die Wand, auf welche der Druck gesucht wird. OA wird zu verlängern sein und der Theil des Erdprisma, welcher sich noch außerhalb befindet, kommt der Stabilität zugute. Das Erdprofil ist OCDP. Dieses muß man in ein Dreieck verwandeln, dessen Spitze sich um 2h über der oberen Begrenzung befindet. Hat man die Größe des Druckes gefunden, so hat man den Angriffspunkt zu suchen. OC theilt man in 3 Theile. $OF = \frac{OC}{3}$




Will man den Reibungswiderstand gegen die Wand vernachlässigen, so wird man den Druck normal gegen die Wand annehmen. Will man aber genau verfahren, so hat man $\varphi'$ anzunehmen.

Der Druck sucht um I umzuwerfen. Die Höhe der Wand und die Böschungen werden als gegeben angenommen, es wird $OI = x$ gesucht. Man wird nicht den wirklichen Druck bestimmen, sondern einen größeren. Der berechnete Druck wird beiläufig $1.9D$ sein, also fast in der doppelten Größe.

Man hat sich den Schwerpunkt des Mauerquerschnittes zu bestimmen, oder den Abstand $\xi$ der Schwerlinie vom Punkte I. In S hat man sich das Gewicht der Mauer sammt der darauf liegenden Erdmasse wirkend zu denken, bezogen auf die Einheit in der Dimension senkrecht zur gezeichneten Ebene.

Für das Gleichgewicht müssen die Momente einander gleich sein.

$IH = fO - gO$; $fO = \frac{OC}{3}\cos\varphi'$; $gO = x\sin(\varepsilon+\varphi')$

$IH = \frac{OC}{3}\cos\varphi' - x\sin(\varepsilon+\varphi')$. Den Druck hat man doppelt zu nehmen.

$G\xi = 2D\left\{\frac{OC}{3}\cos\varphi' - x\sin(\varepsilon+\varphi')\right\}$. Hier kommt G als Funktion von x vor. Man muß sich den Durchschnitt in geeigneter Weise so zerlegen, daß nur ein Theil zurückbleibt, der von x abhängig ist, und daß die anderen berechnet werden können. Wenn man bloß x nicht kennt und die Böschungen sind gegeben, so wird man die Wand durch einen Schnitt von A nach I in 2 Dreiecke zerlegen.

Häufig ist man genötigt, die Mauerstärke in Bezug auf Bruch zu berechnen. Es wäre z. B. möglich, daß von I aus ein Bruch entstehen würde und der Druck würde die Mauer umwerfen. Das Gewicht des obern Mauerkörpers und die Kohäsion wirken entgegen. Man hat x für diejenige Neigung auszurechnen, für welche es ein Maximum wird. Ist dieses x kleiner, so begnügt man sich mit dem ersten Ausdruck.

## Constructives Verfahren, um die Stärke von Stütz- oder Futtermauern zu bestimmen.

Unter einer Stützmauer versteht man einen Mauerkörper, der dazu bestimmt ist, ein Erdreich, welches hinter der Mauer aufgeschüttet wird, am Abgleiten zu verhindern. Hier ist das Erdreich als ein frisch gefördertes zu betrachten, daher ist auf die Kohäsion keine Rücksicht zu nehmen.

Bei Futtermauern denkt man sich aber die Erde abgeschnitten und eine Mauer eingesetzt, die diese feste Erdmasse am Abgleiten verhindern soll. Die Mauerstärke wird hier geringer ausfallen, weil die Kohäsion zu berücksichtigen ist.

Es soll hier die Construction an einer Stützmauer durchgeführt werden. Die Construction hängt von den Annahmen ab. Im Allgemeinen werden die Böschungsverhältnisse der Mauer angenommen werden. Man kann entweder annehmen, daß die vordere Begrenzung der Mauer festgelegt ist und daß es sich darum handelt, die hintere Begrenzung zu finden. Oder es ist umgekehrt die hintere Grenze angenommen und es handelt sich um die vordere Wand. Der letztere Weg führt zu einer einfacheren Construction, denn wenn man blos die vordere Fläche ändert, so bleibt der Druck auf die rückwärtige Fläche immer derselbe. Sonst muß man aber für jede neue Lage der rückwärtigen Mauer den Druck bestimmen und die Construction ist in Folge davon weitläufiger, (aber nicht so weitläufig, daß man diese Construction deswegen aufgeben müßte.)

Es soll angenommen werden, daß die Form der Mauer dadurch bestimmt sei, daß man die vordere Mauerfläche kennt, von der rückwärtigen aber die Richtung der Böschung.

Es soll die Mauerdicke an der Basis bestimmt werden.

Weiters soll angenommen werden, daß der Erdkörper nicht belastet sei.

Man geht am bequemsten von der bekannten Gleichung aus, welche für den Druck aufgestellt wurde: $D = \frac{1}{2}\sigma \sin\tau . \overline{ON}^2$

$h' = 0$; $\frac{x+2h'}{x} = 1$ ; $\sigma' =$ das spezifische Gewicht der Mauermasse.

Für frisch geförderte Erde wäre der Böschungswinkel bekannt, z. B. $\varphi = 40°$, weiters $\varphi' = 20°$. Weiters entspricht die Annahme $\sigma' = 1.5\sigma$ vollkommen den vorkommenden Verhältnissen.

Um die Construction auszuführen, nehme man eine beliebige Lage der hinteren Mauer an. (Wenn man einige Übung hat, wird man sie schon mit dem ersten Versuche richtig annehmen; in der Figur soll jedoch die erste Annahme als eine wahrscheinlich unrichtige gemacht werden.

Man nimmt also den Punkt $O_1$ an und hat die Verwandlungslinie zu zeichnen. Der Punkt $A_1$ wird in der oberen Begrenzung des Erdkörpers liegen müssen, weil keine Belastung vorhanden ist. $O_1A_1$ ist die Verwandlungslinie.

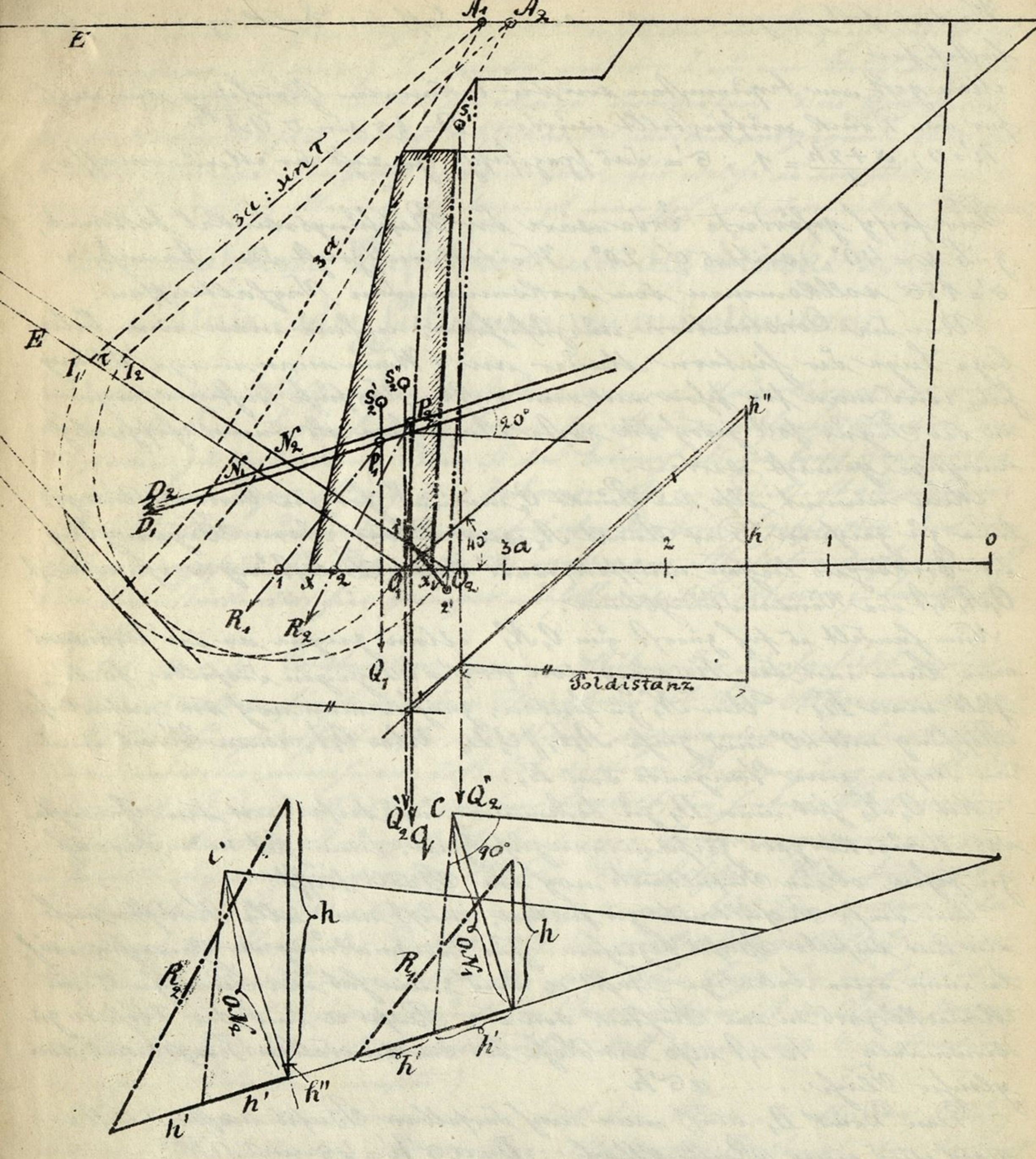
Nun handelt es sich zuerst um $O_1N_1$. Man zeichne an die Erdwand eine Linie mit der Neigung von $\varphi + \varphi' = 60°$ gegen dieselbe, so erhält man $E_1$. Um $N_1$ zu finden, zeichne man noch die natürliche Böschung mit $40°$ und ziehe $A_1I_1 \parallel O_1L_0$. Über $O_1I_1$ einen Kreis und an diesen eine Tangente von $E_1$.

Mit $O_1N_1$ hat man $D_1$ zu bestimmen und dieses mit dem Gewichte des Mauerkörpers zusammenzusetzen; dann hat man darauf zu sehen, ob die Resultante noch die Basis trifft.

Um diese Resultante zu finden, muß man alle Kräfte auf ein und dieselbe Basis beziehen. Zur Verwandlung der Gewichte wähle man eine beliebige Basis $a$ und man hat den Querschnitt des Mauerkörpers in ein Rechteck von der Basis $a$ und der Höhe $h$ zu verwandeln. $h$ ist also die Höhe des verwandelten Rechteckes von gleicher Fläche ..... $a\sigma' h$.

Den Druck $D_1$ muß man nach derselben Basis messen, daß er gleich wird einer Rechteckfläche: $D = a\sigma' h' = \frac{1}{2}\sigma \sin\tau . \overline{ON}^2$

$$h' = \frac{\frac{1}{2}\sigma \sin\tau . \overline{ON}^2}{a\sigma'} = \frac{\overline{ON}^2}{2a\sigma' : \sigma \sin\tau} = \frac{\overline{ON}^2}{a : \frac{\sigma}{2\sigma'} \sin\tau} \; ; \; \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{1}{1.5} \; ; \; \frac{\sigma}{2\sigma'} = \frac{1}{3}$$


E
$A_1$
$A_2$
$S_1'$
3a : sin τ
3a
E
$I_1$
τ
$I_2$
$S_2'$
$S_2''$
$P_2$
$P_1$
20°
$N_2$
$N_1$
$D_2$
$D_1$
h''
40°
3a
k
2
1
0
x
$Q_1$
$x_1$
$Q_2$
2'
$R_1$
$R_2$
$Q_1$
Poldistanz
$Q_2''$
$Q_2$
$Q_1$
C
90°
i
h
$R_2$
$h'$
$h''$
$R_1$
h

$h' = \frac{\overline{ON}^2}{3a:\sin\tau}$. Um den Druck darzustellen, muß man denselben durch $h'$ messen, welches durch diese Gleichung gegeben ist. $h'$ ist auf folgende Weise zu bestimmen: $\tau$ ist der Winkel, welchen die natürliche Böschung mit der Linie $OE$ bildet. Den Quotienten der Gleichung kann man sich so bestimmen: Man zeichne sich ein rechtwinkliges Dreieck mit der Kathete $3a$ und dem gegenüberliegenden Winkel $\tau$, so ist die Hypothenuse $p = 3a:\sin\tau$

Die Kräfte aus dem Gewichte und dem Drucke hat man in einem Kräftepolygone zusammenzusetzen. Das Gewicht trage man auf einer Vertikalen auf. Das ganze Gewicht besteht aus einem kleinen dreiseitigen Erdprisma (: bei der ersten Annahme $= 0$ :) über der Mauer, dieses reduziere man auf die Basis $a$ und die Höhe $h''$; dann kommt noch eine Höhe $h$, die sich auf den gemauerten Körper bezieht, welche man bekommt, wenn man die trapezförmige Mauerfläche in ein Rechteck von der Basis $a$ verwandelt.

Um die Resultante des Gewichtes zu bekommen, setze man die beiden Gewichte, in den Schwerpunkten $s_1$ und $s_2$ wirkend, zusammen, und diese ist wieder mit dem Erddrucke zur Resultierenden zu bringen.

Der Erddruck wirkt in einem Punkte, welcher um $\frac{1}{3}$ der ganzen Mauerhöhe von $O$ absteht; seine Richtung bildet mit der Normalen auf die Wand den Winkel von $20°$. Nun bekommt man den Durchschnittspunkt $P_1$.

Um $R_1$ zu finden, construire man das Kräftedreieck. Die eine Componente ist die Vertikale $h + h''$ (: bei der ersten Annahme ist $h'' = 0$ :); an diese schließt sich $D_1$ an. Die Länge derselben, nämlich $h'$ construire man aus der Gleichung: $\overline{ON}^2 = h'(3a:\sin\tau)$

$h' : ON = ON : (3a:\sin\tau)$

$ON$ trage man auf der Senkrechten zu $D$ auf, die Länge $3a:\sin\tau$ aber in der Richtung von $D$ und construire ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel in $C$, so wird durch die Kathete die Größe $h'$ auf der Richtung von $D$ abgeschnitten.

Nun will man aber die Stabilität für den doppelten Erddruck construiren, man trage $h'$ noch einmal auf. Durch die

Verbindung der Endpunkte bekommt man die Resultante. Zu dieser Linie parallel wird der Druck durch den früher gefundenen Durchschnittspunkt $P_1$ gehen.

Nun findet man, daß diese Annahme falsch war. Der Druck fällt außerhalb der Basis.

Jetzt nimmt man eine andere Mauerfläche an und führt für diese Lage genau dieselbe Construction durch.

Beim ersten Versuche hat man den Punkt 1 bekommen, beim zweiten den Punkt 2. Eine weitere Probe macht man nicht mehr, sondern bestimmt sich den richtigen Punkt durch die Fehlercurve. X1 trage man auf der erst angenommenen rückwärtigen Wand auf, ebenso X2 auf der zweiten und verbinde diese Punkte, so bekommt man auf der Basis einen Punkt, durch welchen die rückwärtige Begrenzung der Mauer gezogen werden muß.

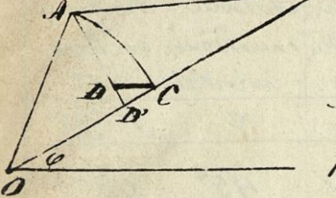
Hätte man die rückwärtige Wand unverändert gelassen und nur die vordere verschoben, wäre die Construction einfacher geworden, weil sich dann der Erddruck nicht ändert. Hier muß man aber immer eine neue Verwandlungslinie ziehen, im zweiten Falle construirt man aber ein für allemal ON, und was sich ändert, ist nichts anderes als das Gewicht des Mauerkörpers, also $h'' + h$. Das $2h'$ bleibt ungeändert. Sonst ist die Construction genau dieselbe.

Wenn es sich darum handelt, um die Stärke der Futtermauer zu bestimmen, ist es besser, das Kräftedreieck in die natürliche Böschung zu legen und als Basis, worauf man reduziert, die Senkrechte von A, gefällt auf die natürliche Böschung, zu wählen.

Für einfachere Objekte wird man weder rechnen, noch construiren; es sind bereits Tabellen angefertigt, aus welchen man, die Form der Mauer vorausgesetzt, die Mauerstärke entnehmen kann. Ein genaues Eingehen ist nur bei grösseren Objekten erforderlich. Da aber bei diesen meist eine unregelmäßige Erhöhung und noch eine Belastung vorzukommen pflegt, so führt die Construction viel schneller zum Ziele als die Rechnung.

# Nachtrag.

## zum Gleichgewichte nicht gestützter Erdmassen, und zur Kohäsion.

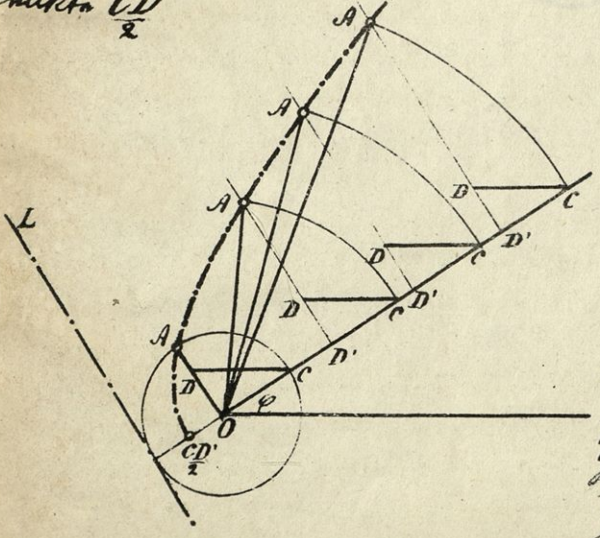



$OA$ ist diejenige Entfernung, für welche, wenn die Kohäsion den Wert $K$ besitzt, das Erdprisma noch im Gleichgewichte sich befindet.

Man könnte folgende Frage stellen: Wo würden die Punkte $A$ für andere Neigungen des Schnittes liegen, wenn $K$ constant, folglich auch $CD$ und die Projektion $CD'$ constant bleiben?

Der Grenze des Gleichgewichtes entspricht jeder Punkt $A$, für welchen die Länge $CD'$ constant ist.

Für die Curve, in welcher die Punkte $A$ liegen werden, nehme man $O$ als Pol für die verschiedenen Vectoren an, welche die vordere Begrenzung des Erdkörpers darstellen werden. Weil $OA = OC$, da jeder Radiusvektor um ein constantes Stück größer ist als die Abscisse $OD'$, so kann diese Curve nur eine Parabel sein, für welche $O$ der Brennpunkt ist. Die constante Länge $CD'$ ist die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie. Der Scheitel liegt in dem Punkte $\frac{CD'}{2}$




Diese Construction kann sehr gut zur Bestimmung der Höhen und der Böschungsanlagen für Erdausgrabungen benützt werden, man braucht blos einen Anschnitt mit einer bestimmten Böschung zu machen und diesen so lange fortzuführen, bis die Grenze des Gleichgewichtes erreicht wird, so hat man, wenn auch $\varphi$ beobachtet wurde, alle nötigen Daten.

| Bezeichnung der Erdart. | | Gewicht in Kilogr. für 1 Kubikmeter | Natürlicher Böschwinkel | Reibung coëfficient |
|---|---|---|---|---|
| | | $\sigma$ | $\varrho$ | $f = tg\varrho$ |
| Dammerde | natürlich feucht | 1363 | 45° | 1·000 |
| | staubtrocken | 1416 | 30° | 0·577 |
| | mit Wasser gesättigt | 1911 | 17° | 0·305 |
| Sand | natürlich feucht | 1660 | 32° | 0·624 |
| | vollkommen trocken | 1750 | 27° | 0·509 |
| | mit Wasser gesättigt | 1947 | 32° | 0·624 |
| Lehm | natürlich feucht | 1380 | 31° | 0·600 |
| | vollkommen trocken | 1504 | 31° | 0·600 |
| | mit Wasser gesättigt | 1982 | 39° | 0·809 |
| Kies . . . . . . . . . | | 1680 | 27° | 0·509 |