

Heron iz Aleksandrije, Josip Plemelj in skoraj pravilni sedemkotnik



BOŠTJAN KUZMAN

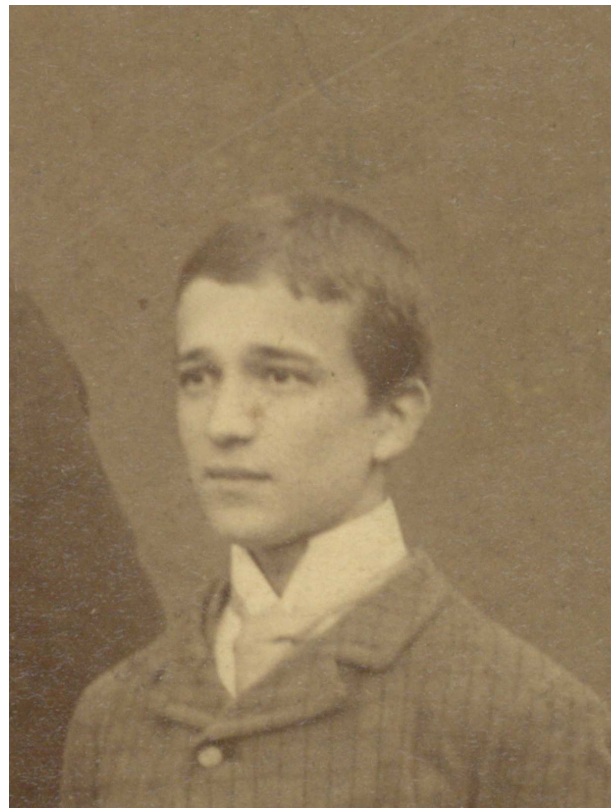
→ Geometrijske konstrukcije z ravnilom in šestilom so antičnim geometrom predstavljale matematični ideal. Znali so konstruirati pravilni 3-, 4- in 5-kotnik in že dobljenim likom še podvojiti število stranic, s čimer so lahko konstruirali tudi pravilne 6-, 8-, 10-, 12- in druge mnogokotnike. Konstrukcije pravilnega 7-kotnika pa v antiki seveda niso odkrili, saj danes vemo, da taka konstrukcija sploh ne obstaja¹. V tokratnem kotičku si bomo zato ogledali dve konstrukciji skoraj pravilnega 7-kotnika. Prvo je opisal znameniti Heron iz Aleksandrije v 1. stoletju, drugo pa je leta 1892 še kot nadarjeni gimnazijec odkril tedaj 19-letni Josip Plemelj.

Heronova konstrukcija

Konstrukcijo skoraj pravilnega 7-kotnika z včrtavanjem v dano krožnico je prvi opisal Heron v svojem delu Metrica, a so jo antični geometri verjetno poznali že mnogo prej. Pri različnih likovnih izdelkih so jo pogosto uporabljali tudi kasnejši obrtniki islamske dobe in renesančni slikarji, saj je dovolj natančna in precej preprosta za uporabo.

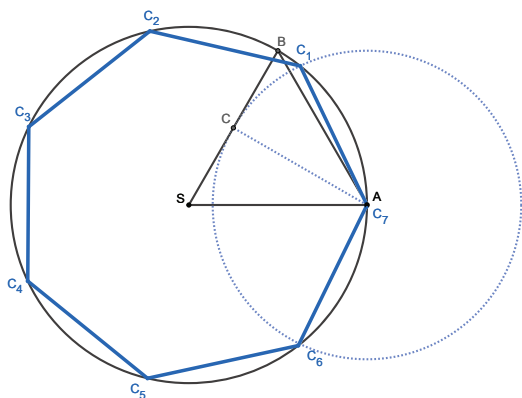
¹Šele konec 18. stoletja je znameniti nemški matematik Gauss s pomočjo zahtevnih orodij teorije števil dokazal, da je mogoče konstruirati vse pravilne n -kotnike, za katere je $n = 2^m p_1 \dots p_k$, kjer je $m, k \geq 0$ in so $p_1, \dots, p_k$ različna praštevila oblike $2^{2^r} + 1$. Gauss je brez dokaza tudi zapisal, da drugih pravilnih n -kotnikov ni mogoče konstruirati, kar je prvi zares dokazal Pierre Wantzel leta 1839. V skladu z njunimi ugotovitvami je $n = 7$ najmanjše naravno število, za katerega konstrukcija pravilnega n -kotnika z ravnilom in šestilom ne obstaja.

Naj bo točka S središče krožnice s polmerom 1. Na krožnici izberemo poljubno točko A in s šestilom na krožnici označimo še točko B tako, da bo trikotnik $\triangle SAB$ enakostraničen (slika 2). Označimo s C razpolovišče daljice SB , torej je daljica CA višina enakostraničnega trikotnika, ki je enaka $\frac{\sqrt{3}}{2}$ oziroma približno 0,866025. Kot so opazili antični geometri, je ta dolžina zelo dober približek za stranico pravilnega



SLIKA 1.

Dijak Josip Plemelj okoli leta 1890 (izrez iz skupinske fotografije, vir [4])


SLIKA 2.

Pri Heronovi konstrukciji dolžino stranice 7-kotnika predstavlja višina enakostraničnega trikotnika $\triangle SAB$. Točki A in C_7 se ne ujemata povsem, zato je ena od stranic malce daljša od drugih.

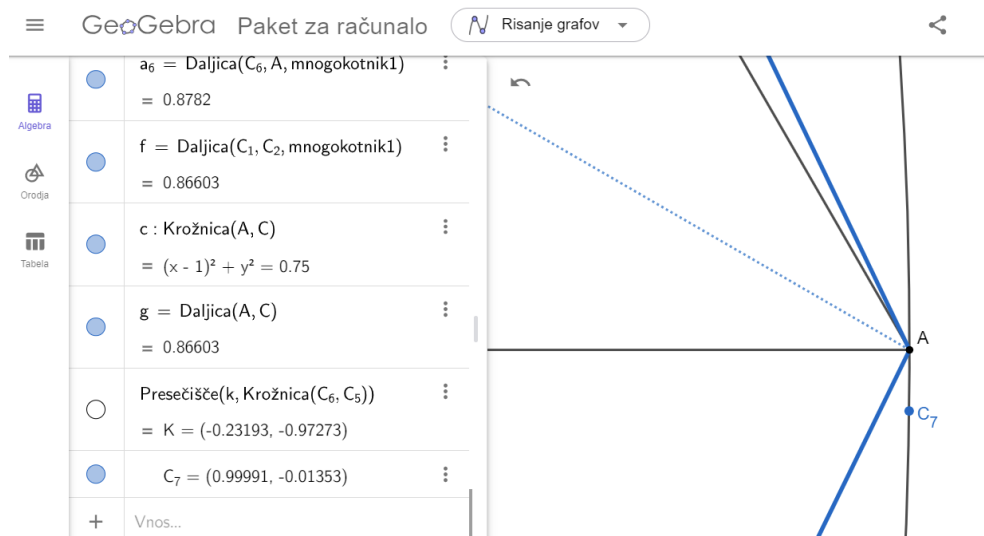
7-kotnika, ki ga včrtamo v narisano krožnico. Njeno točno vrednost namreč danes zlahka določimo s pomočjo kotnih funkcij: $a = 2 \sin \frac{\pi}{7} \doteq 0,867767$, kar znaša komaj 0,2 % več.

Da bi konstruirali skoraj pravilni sedemkotnik, lahko zdaj narišemo novo krožnico s središčem v A skozi točko C, ki seka začetno krožnico v točki C_1 . Nato razdaljo AC prenašamo naprej po krožnici in s šestilom iz točke C_1 konstruiramo še točke $C_2, \dots, C_7$. Zdi se, da je zadnja točka C_7 enaka točki A, toda

to ni res. Dobljene točke lahko zapored povežemo v 7-kotnik, ki ni povsem pravilen, saj je zadnja stranica C_7C_1 malce daljša od drugih.

Z GeoGebro lahko Heronovo konstrukcijo ponazorimo z naslednjimi koraki:

- Na prazni risalni površini označimo točki $S=(0,0)$ in $A=(1,0)$ ter narišemo krožnico k s središčem S skozi točko A. To lahko naredimo v algebrskem oknu z ukazom $k=\text{Krožnica}(S,A)$.
- Za točko B izberemo eno od dveh presečišč krožnice k s krožnico $\text{Krožnica}(A,S)$. Točko po potrebi preimenujemo.
- Z ukazom $C=\text{Središče}(S,B)$ označimo razpolovišče daljice SB, nato narišemo daljico $a=\text{Daljica}(A,C)$. Njena dolžina predstavlja dolžino stranice približnega 7-kotnika.
- Zdaj s šestilom rišemo oglišča iskanega lika. Namesto klikanja z miško lahko objekte vnašamo tudi z ukazi. Z ukazom $\text{Presečišče}(k,\text{Krožnica}(A,a))$ dobimo dve presečišči začetne krožnice z novo krožnico s središčem v A in polmerom a .
- Enega od presečišč izberemo in preimenujemo v C_1 . Nato z ukazom $\text{Presečišče}(k,\text{Krožnica}(C_1,a))$ določimo naslednji dve presečišči in enega preimenujemo v C_2 . Isti postopek ponavljamo do oglišča C_7 .
- Oglišča $C_1, \dots, C_7$ povežemo z ukazom $\text{Mnogokotnik}(C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,C_7)$.
- S povečevanjem slike si lahko ogledamo, za koliko se razlikujeta točki A in C_7 .


SLIKA 3.

Iz algebrskega okna v GeoGebri opazimo razlike med dolžinami stranic, šele velika povečava pa pokaže, da sta A in C_7 različni točki.

Plemljeva konstrukcija

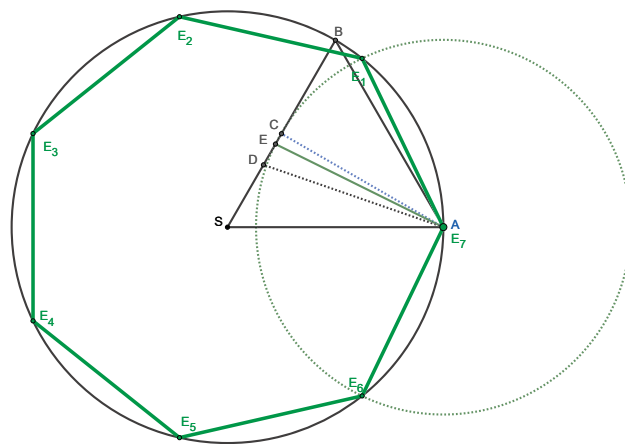
Josip Plemelj je svojo izvirno konstrukcijo (skoraj) pravičnega 7-kotnika odkril že kot dijak leta 1892, a je tedaj menil, da je takšna konstrukcija verjetno že znana. Ko slabih dvajset let kasneje ni našel omenjene v neki novejši knjigi o konstrukcijah, pa je svoje odkritje leta 1912 objavil v krajšem znanstvenem članku [2]. Plemelj je celo dokazal, da je mogoče pravični 7-kotnik konstruirati povsem točno, če lahko poleg ravnila in šestila uporabimo še trisekcijo oziroma delitev kota na tri enake dele, kar samo z ravnilom in šestilom ni mogoče. Če pa se trisekcija kota zamenja z delitvijo daljice na 3 enake dele, bomo dobili približno konstrukcijo, ki je precej natančnejša od Heronove.

Naj bo točka S središče krožnice s polmerom 1. Kot pri Heronovi konstrukciji na krožnici izberemo poljubno točko A in s šestilom na krožnici označimo še točko B tako, da bo trikotnik $\triangle SAB$ enakostraničen. Zdaj označimo s C razpolovišče daljice SB , točka D pa naj daljico SB razdeli v razmerju $SD : DB = 1 : 2$. Dodajmo še točko E , ki naj tretjini daljico CD , torej jo razdeli v razmerju $CE : ED = 1 : 2$. Dolžina daljice AE predstavlja odličen približek za stranico pravičnega sedemkotnika.² S pomočjo kosinusnega izreka v trikotniku $\triangle SAE$ lahko namreč preverimo, da je dolžina stranice AE enaka $\sqrt{\frac{61}{81}} \doteq 0,867805$, kar točno dolžino stranice pravičnega 7-kotnika presega le za 0,004%. Zdaj podobno kot pri Heronovi metodi narišemo krožnico s središčem v A skozi točko E , ki seka začetno krožnico v točki E_1 in nato s prenašanjem po krožnici konstruiramo še točke $E_2, E_3, \dots, E_7$, ki jih povežemo v skoraj pravičen 7-kotnik (slika 4).

Plemljeva konstrukcija v GeoGebri je podobna kot Heronova:

- Točke S, A, B, C in krožnico k narišemo enako kot prej.
- Točki D in E lahko v GeoGebri direktno vnesemo z ukazoma $D=S+(B-S)/3$ in $E=D+2(C-D)/3$, kar nam prihrani razdeljevanje daljice z ravnilom in šestilom.

²Kot je dokazal Plemelj, bi povsem točno konstrukcijo dobili, če bi točka E namesto daljice CD tretjinila kot $\angle CAD$.



SLIKA 4.

Pri Plemljevi približni konstrukciji dolžino stranice 7-kotnika predstavlja dolžina daljice AE , kjer točka E tretjini daljico CD in predstavlja $1/18$ polmera kroga.

- Zdaj označimo $b = \text{Daljica}(A, E)$ in s pomočjo krožnic s polmerom b označimo vsa oglišča iskanega 7-kotnika.

Bralce in bralke vabimo, da poskusijo še sami izračunati dolžine stranic 7-kotnika iz natančne ter približnih Heronove in Plemljeve konstrukcije. Več o tem, kako s pomočjo trisekcije kota konstruirati točen pravičen sedemkotnik, zakaj 7-kotnika ni mogoče točno konstruirati samo z ravnilom in šestilom, in kakšne posplošitve Plemljeve konstrukcije so kasneje prispevali še drugi matematiki pa si lahko preberete v nekoliko zahtevnejšem članku [1].

Literatura

- [1] Milan Hladnik, *Josip Plemelj in pravični sedemkotnik*, Obzornik za matematiko in fiziko, letnik 60, številka 5 (2013), 161–172.
- [2] Josip Plemelj, *Die Siebenteilung des Kreises*, Monatshefte für Mathematik und Physik, 23 (1912), 309–311.
- [3] Ivan Vidav, *Josip Plemelj ob 100-letnici rojstva*, DMFA SR Slovenije, 1975.
- [4] Arhiv RS, fond SI AS 2012 Plemelj Josip, 1873–1992.

× × ×