Neskončni Hilbertov hotel

Niko Tratnik

Kaj je neskončnost?

Vsakdo se je verjetno že kdaj vprašal, kaj je neskončnost. Označujemo jo s simbolom ∞, na preprost način pa bi jo lahko opisali kot koncept, ki opisuje nekaj, kar nima meje oziroma je večje od kateregakoli števila. Vendar pa neskončnost ne more biti običajno naravno število, saj bi takšna predpostavka pripeljala do očitnih protislovij. Če bi takšnemu številu npr. prišteli ena, bi dobili strogo večje število, ki pa bi bilo še vedno neskončno. Prav tako pa se ne bi mogli opredeliti, ali bi bilo takšno število sodo ali liho. Podobnih navideznih paradoksov, ki so povezani z neskončnostjo, je še veliko.

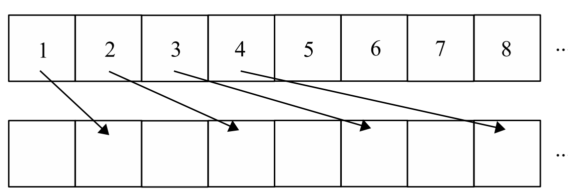
Beseda neskončnost je latinskega izvora in izhaja iz besede *infinitas*, kar pomeni nevezan oz. brezkončen. Pojem neskončnosti je zaradi svoje nepredstavljivosti vedno vznemirjal človeka. Zgodovinsko gledano se je prvič pojavil v stari Grčiji, eden izmed prvih ljudi, ki so ta pojem raziskovali, pa je bil Zenon (starogrški filozof in matematik, okoli 450 pr. n. št.), ki je znan po svojih paradoksih, povezanih z neskončnostjo. Neskončnost pa je razburjala in sprožala številne debate v filozofiji in matematiki tudi v nadaljnjih stoletjih. Kljub temu pa je koncept neskončnosti našel svojo uporabo v sodobni matematiki, pa tudi v fiziki in v ostalih znanostih. V matematiki zasledimo uporabo neskončnosti na področjih, kot so analiza (limita, zaporedja, vrste, posplošeni integral), teorija množic (neskončne množice), geometrija, topologija.

Hilbertov hotel

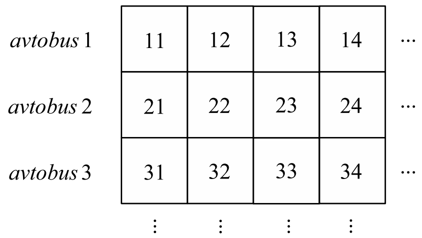
Prva resna teorija o neskončnosti je nastala konec 19. stoletja, ko je nemški matematik Georg Cantor odkrival začetke teorije množic, ki je danes ena izmed temeljnih matematičnih disciplin. Zanimale so ga predvsem neskončne množice, npr. množica naravnih števil in množica vseh točk na premici (množica realnih števil). Dokazal je, da so nekatere neskončnosti večje kot druge in da obstaja neskončno različnih neskončnosti. Za tisti čas je bila njegova teorija veliko presenečenje in je sprožila veliko neodobravanja med različnimi matematiki. Henri Poincaré je njegove ideje označil za bolezen, Leopold Kronecker pa ga je opisal kot znanstvenega šarlatana. Po drugi strani pa je nemški matematik David Hilbert, ki je bil v tistem času eden izmed najvplivnejših matematikov, Cantorjeve ideje sprejel z navdušenjem. David Hilbert je za ponazoritev Cantorjeve nenavadne teorije pogosto uporabljal zgodbo o neskončnem hotelu, ki je danes znan kot Hilbertov hotel.

Hilbertov hotel si lahko zamišljamo kot zelo velik hotel, ki nima samo več tisoč sob, ampak jih ima neskončno. Sobe v njem so označene z naravnimi števili, torej $1, 2, 3, \ldots$ Recimo, da je hotel popolnoma poln in v recepcijo pride nov gost. Receptor lahko premakne gosta iz sobe 1 v sobo 2, gosta iz sobe 2 v sobo 3, gosta iz sobe 3 v sobo 4 in tako naprej. Na ta način sprosti sobo 1 za novega gosta. V hotelu je torej vedno prostor še vsaj za enega gosta. Zato v Hilbertovem hotelu velja, da izjavi *hotel je popolnoma zaseden* in *v hotelu ni prostora za novega gosta* nista ekvivalentni.

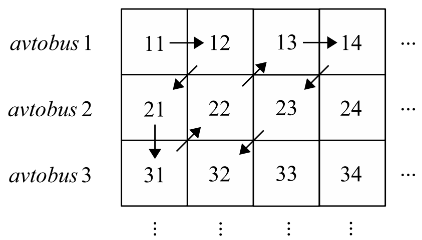
Kaj pa se zgodi, če v hotel prispe avtobus z neskončno gosti (ki jih je toliko, kot je naravnih števil)? V tem primeru lahko receptor prestavi gosta iz sobe 1 v sobo 2, gosta iz sobe 2 v sobo 4, gosta iz sobe 3 v sobo 6 in tako naprej. Na ta način sprosti vse lihe sobe in dobi neskončno prostih sob. Prispele goste nato po vrsti razvrsti v sobe $1, 3, 5, \ldots$ in tako bo vsak prišel do svoje sobe, (glej sliko 1).



SLIKA 1.
Prerazporejanje gostov v sode sobe.



SLIKA 2.
Situacija, ko v Hilbertov hotel prispe neskončno avtobusov.



SLIKA 3.
Razporejanje gostov po diagonalnem postopku.

Naslednji dan pa v hotel prispe neskončno avtobusov. Da je situacija še hujša, je na vsakem izmed avtobusov neskončno gostov. Ali bo lahko hotel sprejel vse te goste? Da bomo problem lažje razumeli, bomo označili goste iz avtobusa 1 kot $11, 12, 13, \ldots$, goste iz avtobusa 2 kot $21, 22, 23, \ldots$ in tako naprej (glej sliko 2).

Receptor podobno kot prej prestavi goste, ki so že v hotelu, in sprosti vse lihe sobe v hotelu. Nato se loti razvrščanja ljudi v sobe in začne po vrsti razporejati ljudi iz avtobusa 1. Hitro pa ugotovi, da na ta način ne bo šlo, saj gosti iz avtobusa 2 ne bodo nikoli prišli na vrsto, ker je že gostov na avtobusu 1 neskončno.

Zato se spomni drugačnega trika in začne ljudi razporejati na drug način. Gosta 11 razporedi v sobo 1, gosta 12 v sobo 3, gosta 21 v sobo 5, gosta 31 v sobo 7, gosta 22 v sobo 9, gosta 13 v sobo 11, gosta 14 v sobo 13, gosta 23 v sobo 15 in tako naprej (glej sliko 3). S tem diagonalnim postopkom bo čisto vsak prispeli gost prišel na vrsto in dobil svojo sobo v hotelu.

Zelo podoben diagonalni postopek v teoriji množic uporabimo za dokaz, da je vseh racionalnih števil enako število kot naravnih. Vse, kar moramo narediti, je, da ulomke razporedimo v sobe Hilbertovega hotela. Če si gosta, ki smo ga zgoraj označili kot mn, predstavljamo kot ulomek $\frac{m}{n}$, smo to z opisanim postopkom že naredili.

Nazadnje razmislimo še, kaj se zgodi, če v recepcijo prispe toliko ljudi, kot je števil na odprtem intervalu $(0, 1)$. Recimo, da goste, ki jih bomo označevali kar z realnimi števili med 0 in 1, receptor nekako razporedi v sobe hotela. Dobi torej seznam sob in gostov, ki zgleda nekako takole:

številka sobe	gost
soba 1	0,3488657857...
soba 2	0,1284768311...
soba 3	0,6745213657...
soba 4	0,1188446782...
...	...

V tem seznamu morajo biti zajete vse sobe hotela in vsa realna števila med 0 in 1. Razmisliti moramo, ali je to sploh možno. Najprej z jemanjem števk po diagonali tvorimo novo število (števke, ki so označene krepko v spodnji tabeli):

številka sobe	gost
soba 1	0,**3**488657857...
soba 2	0,1**2**84768311...
soba 3	0,67**4**5213657...
soba 4	0,118**8**446782...
...	...

Na ta način torej dobimo število 0,3248... Na koncu vsako števko tega novega števila nadomestimo z neko drugo števko med 1 in 8. Števko 3 lahko npr. zamenjamo z 2, 2 lahko zamenjamo s 5, 4 lahko zamenjamo s 7, 8 lahko zamenjamo s 3. Na ta način bomo dobili število med 0 in 1, ki ne bo spadalo k nobeni izmed sob, saj se bo od vsakega števila razlikovalo v vsaj eni števki. To pomeni, da gosta, ki je označen s tem številom, nismo razporedili v nobeno izmed sob hotela. Kakorkoli že receptor razporedi prispele goste, ne more zagotoviti sob za vse. S tem smo dokazali, da je števil na intervalu $(0, 1)$ strogo več kot naravnih števil. To seveda pomeni, da je tudi vseh realnih števil več kot naravnih. S tem smo preverili, da obstaja več kot samo ena neskončnost. Pravzaprav je Cantor pokazal še več, obstaja namreč neskončno različnih neskončnosti.

× × ×