PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **28** (2000/2001)
Številka 5
Strani 264–268

Dragan Marušič in Tomaž Pisanski:

MÖBIUS-KANTORJEVA KONFIGURACIJA V POLITIKI

Ključne besede: matematika, kombinatorika, konfiguracije, aplikacije, politika.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/28/1452-Marusic-Pisanski.pdf

MÖBIUS-KANTORJEVA KONFIGURACIJA V POLITIKI

Znano je, da morajo v predvolilni tekmi v politiki veljati stroga pravila, sicer lahko pride do zlorab političnih nasprotnikov, ki poskušajo na vse načine izboljšati položaj svojega kandidata na račun tekmecev. Zato si tudi mediji prizadevajo enako pozornost namenjati vsem kandidatom. Tako včasih do sekunde natančno omejujejo čas, ki ga ima na razpolago posamezni kandidat.

Včasih pa brez znanja matematike ne gre. Oglejmo si konkretni primer, ki se je zgodil v Sloveniji pred leti, natančneje jeseni leta 1997 pred volitvami predsednika Republike Slovenije. TV se je odločila, da bo v osmih oddajah predstavila 8 kandidatov tako, da so v vsaki oddaji nastopali po trije kandidati in je vsak kandidat prišel trikrat na vrsto. Oddaje so se vrstile v dveh tednih, od ponedeljka do četrtka. S stališča gledalca in potencialnega volilca bi bilo zanimivo čimbolj pestro soočanje, tako da bi se vsak kandidat pojavil vsakič z drugimi tekmeci. V idealnih razmerah se lahko en kandidat sreča z največ šestimi tekmeci (na vsaki od treh oddaj s po dvema). Če se dva kandidata srečata dvakrat, se tako nujno zmanjša pestrost srečanj, saj se potemtakem vsak od njiju sreča največ s petimi kandidati.

Leta 1997 so bili kandidati za predsednika republike naslednji: Marjan Poljšak, Janez Podobnik, Bogomir Kovač, Milan Kučan, Tone Peršak, Franc Miklavčič, Marjan Cerar in Jože Bernik. V konkretnem primeru se voditeljem TV žal ni posrečilo najti prave rešitve, čeprav obstaja. Tako sta se npr. Janez Podobnik in Milan Kučan soočila dvakrat. Poglejmo, kaj bi morali narediti televizijci, če bi znali dovolj matematike.

Recimo, da imamo 8 kandidatov, začasno jih označimo kar takole:

$$A, B, C, D, E, F, G, H\,.$$

Oglejmo si vse tri pojavitve kandidata A: $AX_1X_2, AX_3X_4, AX_5X_6$, Če se noben par kandidatov ne sooči dvakrat, so kandidati $A, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ vsi različni. Manjka natančno eden, s katerim se kandidat A ne sooči. Označimo ga z A'. Seznam kandidatov lahko zdaj brez škode za splošnost preimenujemo takole: $A, B, C, D, A', B', C', D'$.

Dokažimo naslednjo trditev:

Če se soočijo kandidati XYZ, se soočijo tudi kandidati $X'Y'Z'$.

Pri tem razumemo, da je za vsakega kandidata $X'' = X$. To pomeni, da npr. trdimo, da ob soočanju ABD' pride tudi do soočanja $A'B'D$.

Takole razmišljamo za poljubno soočanje XYZ in poljubnega kandidata X te pojavitve: Iz XYZ izhaja $XY'W$ in $XZ'W'$. Če ta razmislek ponovimo za soočanje $XY'W$ in kandidata Y', dobimo ali ($Y'X'Z$ in $Y'W'Z'$) ali ($Y'X'Z'$ in $Y'W'Z$). Prva možnost odpade, saj bi se kandidata Z' in W' srečala dvakrat.

Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da se soočijo kandidati ABC. Od tod sklepamo na $AC'D$ in $AB'D'$. Pri tem bi lahko še zamenjali D in D', vendar bi to pomenilo le drugačno poimenovanje kandidatov, na rešitev pa ne bi vplivalo. Od tod dobimo ob zgornji trditvi šest pojavitev:

$$ABC, A'B'C', AC'D, A'CD', AB'D', A'BD\,.$$

Manjkata le še dve soočanji, ki sta enolično določeni, in sicer $BC'D'$ in $B'CD$.

Soočenja lahko zapišemo v preglednico. Vsak stolpec ustreza soočanju. V okrajšani obliki dobimo tole razporeditev:

$$\begin{bmatrix} A & B & C' & D & A' & B' & C & D' \\ B & C' & D & A' & B' & C & D' & A \\ C & D' & A & B & C' & D & A' & B' \end{bmatrix}$$

Kot vidimo, se vsak kandidat pojavi trikrat, vsakič v eni od treh vrstic. To pomeni, da ga vsakič lahko posedejo na drug stol in da odgovarja enkrat prvi, drugič drugi in tretjič tretji. Tako so možnosti kandidatov resnično izenačene.

odgovarja	po I	to I	sr I	če I	po II	to II	sr II	če II
1.	A	B	C'	D	A'	B'	C	D'
2.	B	C'	D	A'	B'	C	D'	A
3.	C	D'	A	B	C'	D	A'	B'

Tabela 1. Pravilni razpored TV soočanj osmih predsedniških kandidatov

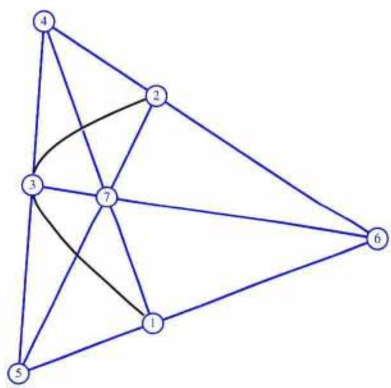
Geometri 19. stoletja so se veliko ukvarjali s ti. v_3 konfiguracijami. To so matematične strukture v točk in v premic, tako da potekajo skozi vsako točko tri premice in ležijo na vsaki premici po tri točke konfiguracije. Seveda se lahko dve premici konfiguracije sekata največ v eni skupni točki. Izkaže se, da je najmanjši v, pri katerem obstaja takšna konfiguracija, $v = 7$. Obstaja ena sama 7_3 konfiguracija, imenuje se Fanova konfiguracija. Če jo želimo prikazati v običajni ravnini, moramo eno od premic modelirati s krožnico. V tem prispevku smo pokazali, da obstaja tudi ena sama 8_3 konfiguiracija. Imenuje se Möbius-Kantorjeva konfiguracija. Tudi tu moramo eno od premic modelirati s krožnico. Z naraščajočim v pa se število konfiguracij hitro veča. Pred kratkim so z računalnikom izračunali število v_3 konfiguracij za $7 \leq v \leq 18$.

v	štev. v_3 konfiguracij
7	1
8	1
9	3
10	10
11	31
12	229
13	2,036
14	21,399
15	245,342
16	3,004,881
17	38,904,499
18	530,452,205

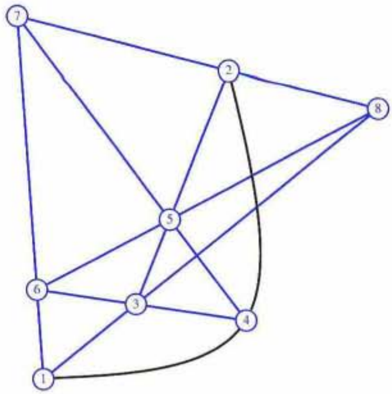
Tabela 2. Število v_3 konfiguracij

To pomeni, da bi lahko pri večjem številu kandidatov problem rešili na več različnih načinov. Oglejmo si preprost recept, ki nam za vsak $v \geq 7$ daje rešitev. Zapišimo najprej podatek za Fanovo konfiguracijo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



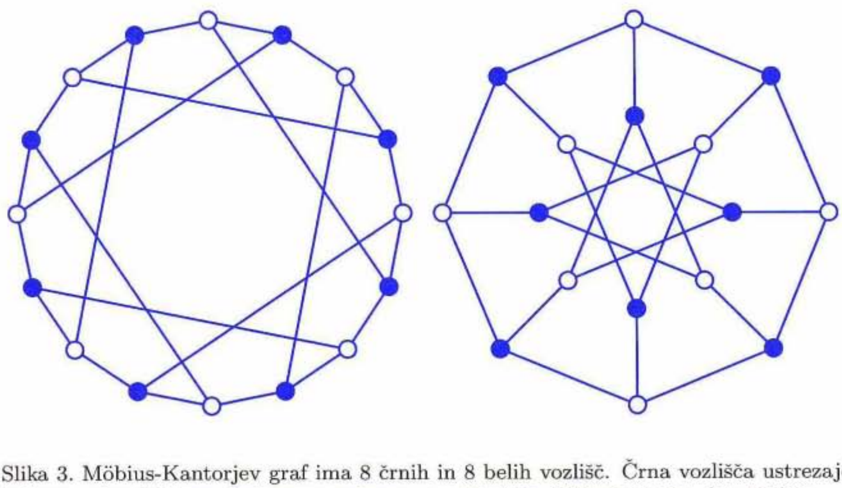
Slika 1. Fanova konfiguracija je edina 7_3 konfiguracija



Slika 2. Möbius-Kantorjeva konfiguracija, ki je rešitev naše naloge, je edina 8_3 konfiguracija

Če preoznačimo kandidate Möbius-Kantorjeve konfiguracije, dobimo naslednjo preglednico. Od zgornje se loči le po tem, da jo podaljšamo za eno mesto.

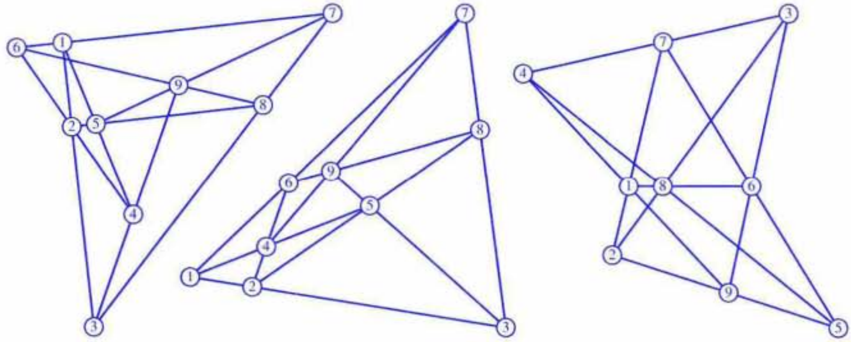
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



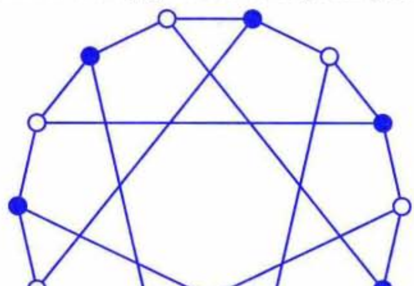
Slika 3. Möbius-Kantorjev graf ima 8 črnih in 8 belih vozlišč. Črna vozlišča ustrezajo točkam – kandidatom, bela pa premicam – soočanjem. Prikazan je na dva načina.

Za devet kandidatov, bi dobili takole reštev:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$



Slika 4. Obstajajo tri različne 9_3 konfiguracije



Slika 5. Vsaki konfiguraciji lahko priredimo dvodelen graf, ti. Levijev graf konfiguracije. Črna vozlišča pripadajo točkam, bela pa premicam konfiguracije. Vozlišči sta sosednji, če in samo če leži točka na premici. Na sliki vidimo Levijev graf Fanove konfiguracije.

Bralcu pa prepuščamo razmislek za splošno vrednost v. Študij konfiguracij sodi dandanes v kombinatoriko. Matematika pa ni uporabna le v politiki. Večkrat jo skrito srečamo v športu, ko moramo znati razporejati najrazličnejše turnirje, od nogometnih, teniških, šahovskih, do speedwaya. A to je že druga zgodba, ki bi zahtevala poseben prispevek.

Dragan Marušič in Tomaž Pisanski