PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **18** (1990/1991)
Številka 3
Strani 192–XII

Boris Lavrič:

# ZASUKAJ PREMICO

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija:
http://www.presek.si/18/1036-Lavric-premica.pdf

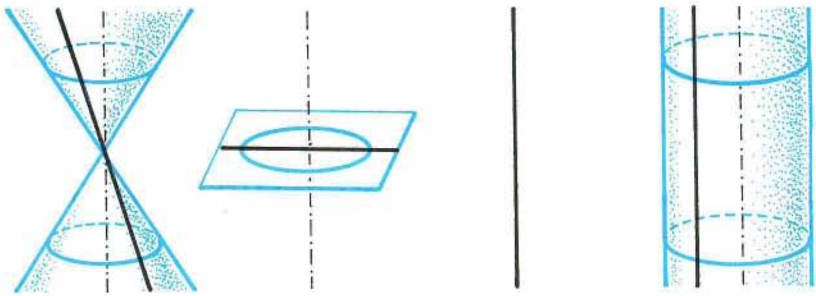
## ZASUKAJ PREMICO

Kakšno ploskev opiše premica, ko jo sučemo okoli dane osi? Nekaj posebnih položajev premice zlahka obvladamo:

**a)** *Premica seka os vrtenja.*

**b)** *Premica je vzporedna osi vrtenja.*

V obeh primerih premica in os ležita na skupni ravnini, zato iskano rotacijsko ploskev takoj prepoznamo:



**A** plašč neomejenega dvojnega stožca — **A** ravnina — **A, B** premica — **B** plašč neomejenega valja

Drugače je pri splošnem položaju premice, ki ga nismo zajeli v a) ali b).

c) *Premica in os vrtenja sta mimobežni.*

Tu si bomo pomagali z ravnino, ki bo šla skozi os vrtenja, in si ogledali presek iskane rotacijske ploskve s to ravnino. Dobljena presečna krivulja namreč pri vrtenju okoli osi opiše ploskev, ki si jo želimo ogledati.

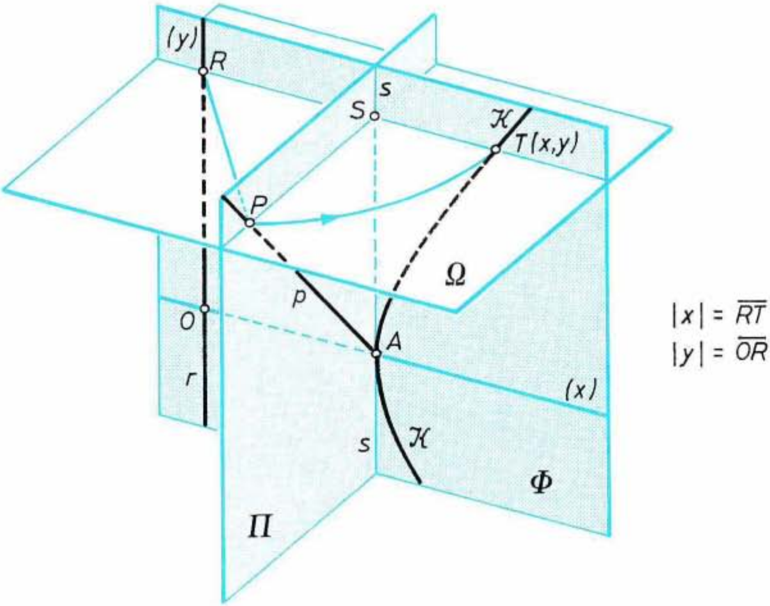
Označimo s $p$ premico, ki jo bomo zavrteli okoli osi $r$. Položimo skozi $p$ ravnino $\Pi$, ki je vzporedna $r$. Pri konstrukciji te ravnine si lahko pomagamo z ugotovitvijo, da na njej ležijo vse vzporednice z $r$, ki sekajo $p$. Nato pravokotno na $\Pi$ postavimo ravnino $\Phi$ , ki vsebuje $r$; premico, vzdolž katere se sekata $\Pi$ in $\Phi$, pa označimo s $s$. Na $s$ leži prebodišče $A$ premice $p$ z ravnino $\Phi$. Na to ravnino vpeljemo pravokotni koordinatni sistem, katerega ordinato os naj nosi premica $r$, abscisna os pa naj teče skozi $A$ in seka $r$ v koordinatnem izhodišču $O$. Označimo z $a = \overline{OA}$ razdaljo med točkama $O$ in $A$.

Brez težav lahko vidimo, da sta $A$ in $O$ najbližje ležeči točki premic $p$ in $r$ in je tako $a$ razdalja med $p$ in $r$.

Zdaj določimo enačbo krivulje $K$, v kateri rotacijska ploskev seka ravnino

$\Phi$. Seveda bomo enačbo zapisali v koordinatnem sistemu, s katerim smo opremili ravnino $\Phi$. Pravokotno na $r$ postavimo poljubno ravnino $\Omega$. Ta naj seka premice $p$, $r$, $s$ zaporedoma v točkah $P$, $R$ in $S$. Razmerje dolžin $\overline{PS}$ in $\overline{AS}$ zaradi lege $P$ na premici $p$ ni odvisno od izbire ravnine $\Omega$, zato postavimo $k = \overline{PS}/\overline{AS}$. Z zasukom točke $P$ okoli osi $r$ naj $P$ preide v točko $T(x, y)$ krivulje $K$, ki leži na $\Phi$.

Poglejmo na sliko.




Upoštevajmo tudi, da velja $\overline{TR} = \overline{PR}$ in da je trikotnik $PRS$ pravokoten. Dobimo

$$x^2 = \overline{TR}^2 = \overline{PR}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{RS}^2 = (k\overline{AS})^2 + \overline{OA}^2 = k^2y^2 + a^2$$

torej je krivulja $K$ v izbranem koordinatnem sistemu na $\Phi$ dana z enačbo $x^2 - k^2y^2 = a^2$. Potemtakem je $K$ hiperbola, iskana ploskev je dobljena z rotacijo te hiperbole okrog premice $r$ in jo zato imenujemo (enodelni) *rotacijski hiperboloid*.

S tem smo odgovorili na uvodno vprašanje, prispevek pa sklenim z *nekaj* opombami in vprašanji za radovednega bralca:

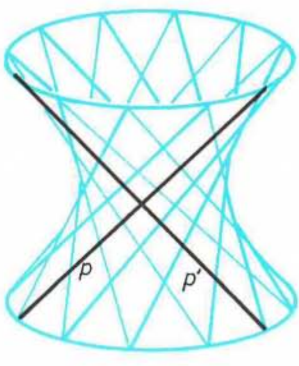
**1.** Pot, ki naj se pripeljala do rotacijskega hiperboloida, pove, da je le-ta sestavljen iz samih premic (je premonosna ploskev). Poleg premic, ki jih dobimo z vrtenjem $p$ okoli $r$, ležijo na njem tudi premice, ki jih dobimo z vrtenjem zrcalne slike $p'$ premice $p$ glede na $\Phi$ okoli osi $r$. Glej sliko.

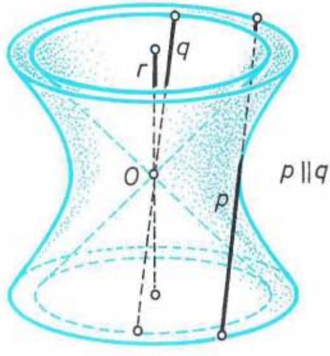
**2.** Pri izpeljavi enačbe krivulje $K$ smo brez besed privzeli, da premica $p$ ni pravokotna na ravnino $\Phi$. Kakšna je rotacijska ploskev, ki jo opiše $p$, če je $p$ pravokotna na $\Phi$?

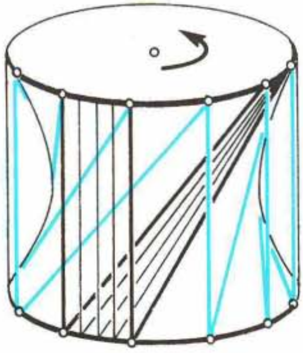
**3.** Zadržimo se še nekoliko pri opisani konstrukciji. Naj bo $q$ vzporednica s $p$ in naj vsebuje točko $O$. Zasukajmo $q$ okrog $r$, tako da obleži na ravnini $\Phi$. Dokaži, da smo dobili asimptoto hiperbole $K$. Dvojni stožec, ki ga opiše $q$ pri vrtenju okoli $r$, imenujemo *asimptotični stožec* rotacijskega hiperboloida.

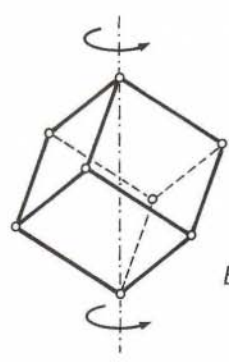
**4.** Plašč pokončnega valja z višino $v$ naj sestavljajo napete elastične nitke, vzporedne osi valja in pritrjene na robova osnovnih ploskev valja - krogov s polmerom $r$. Če zasučemo eno od osnovnih ploskev, torej krog, za pravi kot okrog središča, plašč valja preide v del rotacijskega hiperboloida. Kolikšen je kot ob vrhu osnega preseka njegovega asimptotičnega stožča?

**5.** Kakšno telo opiše kocka pri vrtenju okoli svoje glavne diagonale?





*Boris Lavrič*