R ✓ Cole

Anton Suhadolc

POSPLOŠITEV FOURIER-LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Ljubljana 1964

Nastanek tega dela dolgujem ustanovi Aleksandra von Humboldta, katere štipendist sem bil od novembra 1961 do junija 1963. V tem času sem študiral v Heidelbergu pri profesorjih G.Kötheju in H.G.Tillmannu.

Na tem mestu se najtopleje zahvaljujem prof. H.G.Tillmannu za ideje, napotke pri delu in študiju in prof. I.Vidavu za njegovo dragoceno pomoč pri dokončni izdelavi spisa.

0. UVOD

Laplaceova in Fourierova transformacija sta že dolgo predmet študija mnogih matematikov. Klasično Fourierovo transformacijo, definirano na Hilbertovem prostoru merljivih in s kvadratom integrabilnih funkcij na realni premici so posplošili v mnogih smereh. Študij transformacij je podžgala tudi njih uporaba v fiziki. Operatorskemu računu so dali matematiki zadovoljivo osnovo šele s pomočjo teorije Laplaceove transformacije. Uporaba transformacij v operatorskem računu sloni na nekaterih lastnosih Fourierove transformacije in analognih lastnosih Laplaceove transformacije.

Naj bo $F(f)$ Fourierova transformiranka funkcije $f \in L^2$ in $\bar{F}(f)$ inverzna Fourierova transformiranka:

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itx}\,dt$$

$$\bar{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itx}\,dt$$

Konvergenca integralov je mišljena v smislu norme v L^2.
Za nekatere funkcije iz L^2 veljajo pravila

$$F(tf(t)) = -i\,\frac{d}{dx}(F(f)) \qquad (1)$$

$$F(f'(t)) = (-ix)F(f) \qquad (2)$$

$$F(e^{ikt}f) = F(f)(x+k) \qquad (3)$$

k realen

$$F(f(t-k)) = e^{ikx}F(f) \qquad (4)$$

Pomembna je tudi lastnost $F(f * g) = F(f).F(g)$, tj. transformacija priredi konvoluciji dveh funkcij produkt transformirank posameznih funkcij. Z $f*g$ smo označili konvolucijo funkcij f in g: $f*g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt$.

Za uporabo v praksi so nezaželene omejitve, pri katerih formule (1) do (4) veljajo. Npr. v formuli (2) mora biti funkcija f v L^2, mora biti odvedljiva in njen odvod tudi element iz L^2. Formula (3) pa velja samo za realne k.

Cilj nekaterih posplošitev je v tem, da bi bil prostor, na katerem je posplošena transformacija definirana, čim širši in da bi veljale formule (1) do (4) s čim manj omejitvami. Z drugimi posplošitvami Fourierove in Laplaceove transformacije pa se da definirati operatorski račun za različne razrede funkcij in operatorjev. S to smerjo se ne bomo ukvarjali.

Nadaljnji razvoj posplošitvam je omogočila teorija lokalno-konveksnih linearnih prostorov, ki se je razvila v zadnjih 40 letih. L. Schwartz je definiral distribucije ali posplošene funkcije in razširil transformacijo na nekatere razrede distribucij. ([4]) Z uporabo teorije projektivnih in induktivnih limit je posplošil J.S. e Silva ([3]) Laplaceovo transformacijo na prostore analitičnih funkcij A_k, ki so regularne na polravnini $\mathrm{Re}\, z \geq k$ in tam ne naraščajo hitreje kot polinom stopnje k. Induktivno limito Banachovih prostorov A_k, $A = \lim_{k} \mathrm{ind}\, A_k$, je Silva imenoval prostor ultradistribucij. Na njem je definiral Laplaceovo transformacijo, ki preslika prostor A na nek podprostor distribucij "z nosilcem, omejenem na levi"; ta prostor je označil z E in na njem definiral "obratno" Laplaceovo transformacijo, ki preslika prostor E nazaj na prostor A. Formule (1) do (4) veljajo za vse elemente iz A oziroma E.

Nadaljnje razširjave so omogočile ideje G. Kötheja in H. G. Tillmanna ([1], [1]a, [2], [2]a, [2]b). Študirala sta prostore P(O) "lokalno-analitičnih" funkcij na odprti množici O v kompleksni ravnini. Študirala sta tudi prostor A(Z), kjer je Z komplement odprte množice O. V ta prostora sta uvedla primerni likalno-konveksni topologiji, pri čemer je bil glavni pripomoček teorija prostorov tipa (F) in teorija induktivnih limit. Izkazalo se je, da sta si prostora A(Z) in P(O) drug drugemu prostora zveznih linearnih funkcionalov, pri čemer je npr. izomorfizem med prostoroma A(Z)′, opremljenim s krepko topologijo in prostorom P(O) tudi topološki.

S pomočjo teh ugotovitev sta pokazala, kako se da reprezentirati vsaka Schwartzova distribucija kot "posplošena robna vrednost" na realni osi para analitičnih funkcij, od katerih je ena regularna za $\mathrm{Im}\, z > 0$, druga pa za $\mathrm{Im}\, z < 0$. Za različne tipe prostorov distribucij sta pokazala izomorfizem med izbranim prostorom distribucij in primernim prostorom parov analitičnih funkcij, ki zadoščajo nekaterim omejitvam glede naraščanja proti neskončnosti in proti realni osi. Naj bo $f^+(z)$ in $f^-(z)$ par takih analitičnih funkcij! Funkciji $f^+(x+i\varepsilon)$ in $f^-(x-i\varepsilon)$ sta zvezni funkciji x-a. Za limito razlike, tj. $\lim\ f^+(x+i\varepsilon) - f^-(x-i\varepsilon)$, ko gre $\varepsilon \to 0$, velja, da konvergira npr. v smislu topologije prostora distribucij proti distribuciji izbranega tipa. Velja tudi obratno: vsako distribucijo takega tipa moremo dobiti na ta način.

Na osnovi idej J.S. e Silve in pravkar opisanih idej je G. Pantelidis v svoji doktorski disertaciji ([6]) posplošil ideje J.S. e Silve v več smeri: študiral je namesto Laplaceove Fourierovo transformacijo, definiral podobno kot Silva prostor ultradistribucij in prostor "distribucij eksponentnega tipa". Na njih je definiral Fourierovo transformacijo. Ker se da vsak prostor distribucij reprezentirati po zgornjem s primernim prostorom parov analitičnih funkcij, je tako Pantelidis dobil Fourierovo transformacijo med dvema prostoroma parov analitičnih funkcij. Transformacija je enolična in obratno enolična, v obe smeri zvezna preslikava prostorov. Formule (1) do (4) veljajo z edino omejitvijo, da je k realno število. Poleg tega je Pantelidis izpeljal teorijo za primer dveh kompleksnih spremenljivk.

Cilj tega dela je naslednji: prostor ultradistribucij Λ in prostor $\mathfrak{D}_{exp}$ distribucij eksponentnega tipa bomo razširili s privzetjem novih elementov, ki jih ne moremo tolmačiti kot distribucije. V nastalem prostoru $\mathcal{H}$ bomo definirali posplošeno Fourier-Laplaceovo transformacijo in v prostor vpeljali tako lokalno-konveksno topologijo, da bodo v njej definirane posplošene transformacije zvezne preslikave prostora $H = \mathcal{H}/G$ nase. (H je faktorski prostor prostora $\mathcal{H}$ po podprostoru G vseh celih funkcij eksponentnega naraščanja.) Fourier-Laplaceova transformacija ima vse lastnosti od (1) do (4), ki veljajo brez sleherne omejitve. Za transformacijo F in njeno inverzno $\bar{F}$ velja tudi sedaj formula $F\bar{F}f = \bar{F}Ff = 2\pi f$. Nato dokažemo, da je tako definirana transformacija res prava razširjava klasične Fourierove transformacije v L^2. To napravimo v dveh korakih: najprej pokažemo, da naš prostor vsebuje izomorfno L^2 kot svoj podprostor. Topologija, ki jo v L^2 kot podprostoru prostora H inducira topologija iz H, je šibkejša od topologije po normi v L^2. Nato pokažemo, da na funkcijah v H, ki so zastopniki elementov iz L^2, nova in stara transformacija sovpadata. Torej moremo novo Fourier-Laplaceovo transformacijo smatrati za razširjavo klasične transformacije.

Prav lahko pokažemo, da lastnost $F(f * g) = F(f).F(g)$, ki velja za klasično Fourierovo transformacijo, sedaj ne velja več. V prostoru H je namreč produkt dveh elementov, definiran na običajen način, lahko enak nič, ne da bi bil eden ali drug faktor nič!

1. DEFINICIJA FOURIER-LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

Definicija prostorov $M_{k,l}$ in $\mathcal{H}$

Za vsak k,l, par nenegativnih celih števil bodi $M_{k,l}$ prostor parov funkcij $f(z)=(f^+(z),f^-(z))$ z lastnostmi

1. $f^+(z)$ je regularna za $\mathrm{Im}\ z>k$, na premici $\mathrm{Im}\ z=k$ še zvezna;

$f^-(z)$ je regularna za $\mathrm{Im}\ z<-k$, na premici $\mathrm{Im}\ z=-k$ še zvezna;

2. za vsak par $(f^+(z),f^-(z))$ eksistira konstanta M, odvisna od para taka, da velja ocena

$|f^+(z)|\leq M.e^{l|z|}$ za $\mathrm{Im}\ z\geq k$, $|f^-(z)|\leq M.e^{l|z|}$ za $\mathrm{Im}\ z\leq -k$.

Zadnji neenačbi pišemo krajše simbolično $|f(z)|\leq M.e^{l|z|}$, za $|\mathrm{Im}\ z|\geq k$.

Prostor $\mathcal{H}$ bodi unija prostorov $M_{k,l}$: $\mathcal{H}=\bigcup M_{k,l}$. Elementi $f(z)\in\mathcal{H}$ so torej funkcije, analitične v zunanjosti nekega pasu vzdolž realne osi, ki ne naraščajo bolj kot $e^{l|z|}$ pri nekem naravnem številu l.

Če sta funkciji $f^+(z)$ in $f^-(z)$ zvezni še na realni osi, je razlika $f^+(x+i0) - f^-(x-i0)$ funkcija realne spremenljivke. To razliko imenujemo "robno vrednost" elementa (para) $f(z)\in\mathcal{H}$ in jo označimo zopet s črko f: $f(x)=f^+(x+i0) - f^-(x-i0)$. Da je ta označba smiselna, bomo spoznali pozneje. Izkazalo se bo, da tudi funkcija realne spremenljivke f(x) v nekem smislu določa izhodni par f(z)!

<u>Definicija Fourier-Laplacove transformacije*</u>

Za $f(z) \in M_{k,1}$ definiramo FLT takole:

$F_{k,1}(f) = (\hat{f}^+(\zeta), \hat{f}^-(\zeta)) = \hat{f}(\zeta)$, kjer je

$$\hat{f}^+(\zeta) = \int_{I_3} f^+(z)e^{iz\zeta}\,dz - \int_{I_4} f^-(z)e^{iz\zeta}\,dz$$

$$\hat{f}^-(\zeta) = -\int_{I_1} f^+(z)e^{iz\zeta}\,dz + \int_{I_2} f^-(z)e^{iz\zeta}\,dz \tag{5}$$

I_1 do I_4 so poltraki v razdalji k od realne osi:

I_1: $(-\infty+ik, ik)$ I_2: $(-\infty-ik, ik)$

I_3: $(ik, \infty+ik)$ I_4: $(-ik, \infty-ik)$

Po vseh poltrakih integriramo od leve na desno.

1.1. <u>Funkciji $\hat{f}^+(\zeta)$ oziroma $\hat{f}^-(\zeta)$ sta analitični za $\mathrm{Im}\,\zeta >$ >1 oziroma za $\mathrm{Im}\,\zeta < -1$ ter zadoščata oceni $|\hat{f}(\zeta)| \leq M' e^{k|\zeta|}$, $|\mathrm{Im}\,\zeta| > 1$. $\hat{f}(\zeta)$ je torej element prostora $M_{g,k}$ za vsak $g \geq 1+1$.</u>

<u>FLT preslika prostore $M_{k,1}$ v prostor $\mathcal{H}$.</u>

Ugotovimo npr., da zadošča trditvam izreka del funkcije $\hat{f}(\zeta)$, ki ga v (5) definira integral po poltraku I_3! Bodi $z=x+iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $iz\zeta = i(x\xi - y\eta) - (\xi y + x\eta)$!

$$\int_{I_3} f^+(z)e^{iz\zeta}\,dz = e^{-k\xi - ik\eta}\int_0^\infty f^+(x+ik)e^{ix\xi - x\eta}\,dx$$

Ker zadošča f^+ oceni $|f^+(z)| \leq M.e^{1|z|}$, $\mathrm{Im}\, z \geq k$, imamo

---

* V nadaljnjem bomo pisali zanjo kratico FLT.

$$\left|\int_{J_3}\right| \leq M.e^{k|\xi|}\int_0^{\infty} e^{l|x+ik|}e^{-x\eta}\,dx$$

Za velike x-e se obnaša integrand kot $\exp(-(\eta-1)x)$, zato integral konvergira za vsak ξ in $\eta>1$ ter predstavlja za $\operatorname{Im}\zeta>1$ analitično funkcijo, majorizirano z $e^{k|\xi|}$. Za integral $\int_0^{\infty}\exp(l|x+ik|)e^{-x\eta}\,dx$ dobimo oceno $\int_0^{\infty}\exp(l|x+ik|)e^{-x\eta}\,dx\leq e^{lk}$, za $\eta\geq l+1$. Podobno ocenimo ostale integrale v (5). Za M' smemo torej vzeti kar $2M.e^{lk}$.

Podprostor G. Z G označimo podprostor v $\mathcal{H}$, ki ga tvorijo vse cele funkcije, ki ne naraščajo bolj kot eksponentne. Bodi $f(z)$ cela funkcija eksponentnega naraščanja, $|f(z)|\leq$ $\leq e^{k|z|}$. Ta ima za "robno vrednost" funkcijo 0: $f(x)=f(x+i0)-$ $-f(x-i0)=0$; zato bomo smatrali elementa $g(z)$ in $h(z)$ iz $\mathcal{H}$ za enaka, če se razlikujeta le za kakšno celo funkcijo eksponentnega naraščanja. Študirali bomo namesto prostora $\mathcal{H}$ kvocientni prostor $H=\mathcal{H}/G$ prostora $\mathcal{H}$ po podprostoru celih funkcij eksponentnega naraščanja.

Na podprostorih $M_{k,l}$ je FLT $F_{k,l}$ enolično definirana kot preslikava iz $M_{k,l}$ v $\mathcal{H}$. FLT pa ne moremo definirati enolično kot preslikavo prostora $\mathcal{H}$ vase. Res! Vzemimo poljuben element $f(z)\in\mathcal{H}$! Ta je vsebovan v nekem podprostoru $M_{k,l}$, potem pa avtomatično v vseh podprostorih $M_{g,h}$, če je le $g\geq k$ in $h>l$. V vsakem od teh podprostorov je definirana FLT $F_{g,h}$ funkcije $f(z)$. Funkciji $f(z)\in\mathcal{H}$ pripada tako neskončno transformirank $F_{g,h}(f)$, ki so vse v splošnem med seboj različne. Vendar moremo definirati enolično FLT kot preslikavo F prostora $\mathcal{H}$ v kvocientni prostor takole: bodi $f(z)\in\mathcal{H}$, $f(z)\in M_{k,l}$; $F(f)=[F_{g,h}(f)]$, kjer sta h in g poljubni števili s $h\geq l$ in $g\geq k$. Označba $[F_{g,h}(f)]$ pomeni ekvivalenčni razred elementov iz $\mathcal{H}$, ki se razlikujejo od elementa $F_{g,h}f$ le za kakšno celo funkcijo iz G.

1.2. <u>FLT F je enolična preslikava prostora $\mathcal{H}$ v prostor H.</u>

Treba je pokazati, da se za poljuben $f \in M_{k,l}$ transformiranki $F_{k,l}f$ in $F_{g,h}f$, $g \geq k$, $h \geq l$, razlikujeta le za celo funkcijo eksponentnega naraščanja. $F_{k,l}$ je definirana s formulo (5). Integrirajmo tu namesto po premici Im z=k po premici Im z=g! Spremenita se le integrala po poltrakih I_1 in I_3. Integral $\int^{ig+\infty}$ po novem poltraku se razlikuje od integrala $\int_{ik}^{ik+\infty} = \int_{J_3}$ po starem poltraku le za funkcijo $Q(\zeta) = -\int_{ik}^{ig} f^+(z)e^{iz\zeta}\,dz$. Integral po pravokotniku z oglišči ki, gi, gi+N, ki+N je po Cauchyjevem izreku enak 0, ker je $f^+(z)$ v notranjosti pravokotnika regularna in na robu še zvezna. Ko gre $N \to \infty$, gre del integrala po pravokotniku, $\int_{ik+N}^{ig+N} f^+(z)e^{iz\zeta}\,dz$, enakomerno proti 0, če je $\mathrm{Im}\,\zeta \geq l+1$, kot pokaže preprosta ocena. Prav tako ugotovimo, da se integrala $-\int_{ig-\infty}^{ig}$ in $-\int_{ik-\infty}^{ik} = -\int_{J_1}$ razlikujeta le za isto celo funkcijo $Q(\zeta)$. Funkcija $Q(\zeta)$ je cela funkcija eksponentnega naraščanja, kot pokaže ocena $|Q(\zeta)| \leq$ $\leq M(g-k)e^{lg}e^{|\zeta|g}$; $Q(\zeta)$ je torej element iz G. Komponenti $\hat{f}^+(\zeta)$ in $\hat{f}^-(\zeta)$, če jih računamo z integracijo po premici Im z=k ali po premici Im z=g, se razlikujeta le za celo funkcijo iz G.

Analogen rezultat dobimo, če integriramo v formulah (5) namesto po premici Im z=-k po premici Im z=-g. To pomeni, da je $F_{g,h}f$ v istem razredu kot $F_{k,l}f$, ali, F je res enolična preslikava iz $\mathcal{H}$ v H.

1.3. $Ff \in H$ ni odvisna od razdelišča A med poltrakoma I_1 in I_3 oziroma od razdelišča B med poltrakoma I_2 in I_4.

Namesto poltraka $(-\infty+ik, 0+ik)$ vzemimo za integracijsko pot poltrak $(-\infty+ik, a+ik)$, kjer je a poljubno realno število, namesto poltraka $(0+ik,\infty+ik)$ poltrak $(a+ik, \infty+ik)$. Integrala po novih poltrakih se v obeh primerih razlikujeta od integralov po starih poltrakih za $P(\zeta) = \int_{a+ik}^{ik} f^+(z)e^{iz\zeta}\,dz$, ki je cela funkcija eksponentnega naraščanja: $|P(\zeta)| \leq M.e^{(k+|a|)|\zeta|}$. S tem je izrek dokazan.

1.4. Preslikava F preslika podprostor G v element $[0] \in H$.

Bodi res f(z) cela funkcija, $|f(z)| \leq M.e^{l|z|}$. f(z) je tedaj element podprostorov $M_{k,l}$ za vsak $k \geq 0$. Po Cauchyjevem izreku je $\int_W f(z)e^{iz\zeta}\,dz = 0$, kjer je W pravokotnik z oglišči $(-ik, -ik+N, ik+N, ik)$. Ko raste $N \to \infty$, gre del integrala po desni vertikalni stranici proti 0 enakomerno, če je le $\eta \geq l_0 > l$. Integrala po zgornji in spodnji horizontalni stranici pravokotnika W gresta proti integraloma $\int_{I_4} - \int_{I_3}$, od koder sledi

$$\hat{f}^+(\zeta) = \int_{I_3} - \int_{I_4} = -\int_{-ik}^{ik} f(z)e^{iz\zeta}\,dz, \quad \mathrm{Im}\,\zeta > l.$$

Podobno dobimo tudi

$$\hat{f}^-(\zeta) = -\int_{I_1} + \int_{I_2} = -\int_{-ik}^{ik} f(z)e^{iz\zeta}\,dz, \quad \mathrm{Im}\,\zeta < -l.$$

Ker je funkcija $\int_{-ik}^{ik} f(z)e^{iz\zeta}\,dz$ cela funkcija eksponentnega naraščanja, torej element iz G, smemo smatrati $\hat{f}^+(\zeta)$ in $\hat{f}^-(\zeta)$ kot dela iste cele funkcije: $F_{k,l}f$ je cela funkcija eksponentnega naraščanja, tj. element v G, ali, zastopnik razreda $[0] \in H$.

Definicija Fourier-Laplaceove transformacije $\mathfrak{F}$ na H.

S preslikavo F prostora $\mathcal{H}$ v prostor H moremo definirati tudi preslikavo $\mathfrak{F}$ prostora H vase takole: naj bo $[f] \in H$ poljuben razred v H, f nek zastopnik iz razreda $[f]$. Sliko razreda $[f]$ definiramo takole: $\mathfrak{F}[f] = [Ff] = Ff + G$. Treba je videti, da je preslikava $\mathfrak{F}$ enolična, tj. neodvisna od tega, katerega zastopnika f vzamemo iz razreda $[f]$. Vzemimo kak drug element f_1 iz razreda $[f]$! Po definiciji razredov je $f=f_1+g$, kjer je $g \in G$. Transformiranki Ff in Ff_1 se razlikujeta le za celo funkcijo Fg iz G: $Ff-Ff_1=F(f-f_1)= Fg$. Ff in Ff_1 definirata torej isti razred $[Ff] \in H$.

1.5. Preslikava $\mathfrak{F}$ ima naslednje lastnosti:

a. $$\mathfrak{F}(z^n f(z)) = (-i)^n \frac{d^n}{d\zeta^n}\left[\mathfrak{F}(f(z))\right] \qquad n = 1,2,..$$

b. $$\mathfrak{F}(f^{(n)}(z)) = (-i\zeta)^n\, \mathfrak{F}(f(z))$$

c. $$\mathfrak{F}(e^{az}f(z)) = \mathfrak{F}(f(z))(\zeta-ia) \qquad a \in C$$

d. $$\mathfrak{F}(f(z-a)) = e^{ia\zeta}\,\mathfrak{F}(f(z))$$

Lastnosti a. in c. preverimo direktno tako, da izračunamo obe strani in ju primerjamo. Težav zaradi odvajanj nimamo, ker so vse nastopajoče funkcije analitične.

Dokaz lastnosti b. Integrirajmo npr. integral po I_3 "per partes"!

$$\int_{I_3} f^{+\prime}(z)e^{iz\zeta}\,dz = f^{+}(z)e^{iz\zeta}\Big|_{ik}^{ik+\infty} - i\zeta\int_{I_3} f^{+}(z)e^{iz\zeta}\,dz$$

Podobno dobimo za integrale po I_1, I_2 in I_4, od koder sledi

$$(\hat{f'})^+(\zeta) = (-i\zeta)\hat{f}^+(\zeta) + (f^-(-ik)e^{k\zeta} - f^+(ik)e^{-k\zeta}), \quad \mathrm{Im}\zeta > 1$$

$$(\hat{f'})^-(\zeta) = (-i\zeta)\hat{f}^-(\zeta) + (f^-(-ik)e^{k\zeta} - f^+(ik)e^{-k\zeta}), \quad \mathrm{Im}\zeta < -1.$$

V oklepaju stoji obakrat ista cela funkcija iz G, torej je $F(f')$ v istem razredu prostora H kot $(-i\zeta)F(f)$.

Pri dokazu lastnosti d. vzamemo namesto poltrakov I_1 do I_4 poltrake I'_1 do I'_4, definirane takole:

$I'_1 = (-\infty + i(k'+q),\ p+i(k'+q))$

$I'_2 = (-\infty - i(k'-q),\ p-i(k'-q))$

$I'_3 = (p+i(k'+q),\ \infty + i(k'+q))$

$I'_4 = (p-i(k'-q),\ \infty - i(k'-q))$

Tu pomeni $a = p+iq$, k' pa vzamemo tako velik, da je istočasno $-k'+q < -k$ ter $k'+q > k$, tj. $k' > k+|q|$. I izreku 1.2 in 1.3 se transformiranka $\mathcal{F}f$ ne spremeni, če integriramo namesto po starih poltrakih I_j po novih poltrakih I'_j. Za integral po I'_3 funkcije $f(z-a)$ velja

$$\int_{I'_3} f^+(z-a)e^{iz\zeta}\,dz = e^{ia\zeta}\int_{ik'}^{ik'+\infty} f^+(z)e^{iz\zeta}\,dz$$

in podobno za ostale tri integrale, od koder sledi lastnost d.

2. TOPOLOGIJA V PROSTORIH $\mathcal{H}$ IN H.

V prostoru $M_{k,l}$ parov analitičnih funkcij definirano normo elementa $f(z)$ takole:

$$\|f\|_{k,l} = \sup_{|\mathrm{Im}\, z| \geq k} \left(|f(z)| e^{-l|z|} \right).$$

Prav lahko se prepričamo, da ta norma izpolnjuje vsem zahtevam; prostor $M_{k,l}$ je normiran prostor. Prostor $M_{g,h}$ vsebuje prostor $M_{k,l}$, če je $g \geq k$, $h \geq l$. Injekcija I prostora $M_{k,l}$ v prostor $M_{g,h}$ je v normi zvezna preslikava, saj velja ocena

$$\|If\|_{g,h} = \sup_{|\mathrm{Im}\, z| \geq g} |f(z)| e^{-h|z|} \leq \sup_{|\mathrm{Im}\, z| \geq k} |f(z)| e^{-h|z|} \leq$$

$$\leq \|f\|_{k,l} \sup_{|\mathrm{Im}\, z| \geq k} e^{-(h-l)|z|}, \text{ torej } \|If\|_{g,h} \leq \|f\|_{k,l}.$$

Množica normiranih prostorov $M_{k,l}$ je delno urejena z relacijo vključitve $\subset$. Je tudi usmerjena množica, saj najdemo k poljubnima prostoroma $M_{k,l}$ in $M_{g,h}$ prostor $M_{p,q}$, da velja $M_{k,l} \subset M_{p,q}$ in $M_{g,h} \subset M_{p,q}$, če le vzamemo $p \geq \max(k,g)$ in $q \geq \max(h,l)$. Ker so injekcije iz prostorov $M_{k,l}$ v prostore $M_{g,h}$, $g \geq k$, $h \geq l$, zvezne, eksistira induktivna limita prostorov $M_{k,l}$.

$$\mathcal{H} = \lim \mathrm{ind}\, M_{k,l} = \bigcup M_{k,l}$$

Okolice niča v $\mathcal{H}$ so definirane takole: $U = \Gamma U_{k,l}$, kjer pomeni $\Gamma U_{k,l}$ absolutno konveksno lupino množic $U_{k,l}$: $f(z) \in U$ natanko tedaj, ko se da pisati v obliki $f(z) = a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z) + \ldots + a_n f_n(z)$, pri čemer je $\sum_{1}^{m} |a_k| \leq 1$, $f_k(z) \in U_{k,l}$, $U_{k,l}$ pa so poljubne okolice niča v prostorih $M_{k,l}$, iz vsakega po ena. Ker definira vsaka konfinalna* podmnožica usmerjene množice isto induktivno limito (glej [1] in [3] b!), se smemo omejiti le na zaporedje "diagonalnih" prostorov $M_k = M_{k,k}$:

$$\mathcal{H} = \lim\ \mathrm{ind}\ M_k = \bigcup M_k.$$

Prostori M_k tvorijo konfinalno podmnožico, saj je vsak prostor $M_{k,l}$ vsebovan v prostoru M_g, če je le $g \geq \max(k,l)$. Topologija v $\mathcal{H}$ je najfinejša lokalno-konveksna topologija v $\mathcal{H}$, ki inducira v vseh podprostorih M_k topologijo, ki je šibkejša od normske topologije v M_k. Tedaj so preslikave I_k prostorov M_k v prostor $\mathcal{H}$ zvezne. Znano je, da se prostor $\mathcal{H}$ ne da metrizirati, v posebnem, ne da se vanj vpeljati taka norma, ki bi ustvarila isto topologijo, kot je zgoraj definirana.

2.1. <u>Preslikava $I: M_k \to M_g$, $g \geq k$, je kompaktna** preslikava.</u>

Zadošča, da pokažemo, da je slika enotne krogle v M_k relativno kompaktna množica v M_g.

Videli smo že, da velja $\|f\|_g \leq \|f\|_k$ za $f \in M_k$, torej slika enotne krogle iz M_k je omejena množica v M_g. Iz definicije norme razberemo, da zaporedje funkcij $f_n(z) \in M_k$ konvergira proti $f(z) \in M_k$ natančno tedaj, ko konvergira enakomerno na množici $|\mathrm{Im}\ z| \geq k$ zaporedje funkcij $f_n(z)e^{-k|z|}$.

* Konfinalna podmnožica B usmerjene množice A je taka podmnožica v A, da za poljubna elementa iz A najdemo nekega naslednika obeh elementov že v podmnožici B.

** Kompaktna preslikava je preslikava, ki preslika omejene množice v relativno kompaktne množice. Relativno kompaktna je množica, katere zaprtje je kompaktna množica.

Območje $|\mathrm{Im}\, z| \geq k$ moremo kompaktificirati, če privzamemo k njemu še točko neskončno. Funkcije $h(z) = f(z)e^{-g|z|}$, kjer je $f \in M_k$, so v točki ∞ enake 0: $|h(z)| \leq \|f\|_k e^{-(g-k)|z|}$ gre proti 0, ko gre $z \to \infty$; to pomeni, da so $h(z)$ na kompaktni množici zvezne funkcije. Družina funkcij $\{h(z) : h(z) = f(z)e^{-g|z|},\ f(z) \in$ enotne krogle v $M_k\}$ je na območju $|\mathrm{Im}\, z| \geq g$ omejena s konstanto 1; če uvidimo še, da je ta družina v vsaki točki množice $|\mathrm{Im}\, z| \geq k$ enakozvezna,* je družina po izreku Ascoli-Arzela kompaktna in izrek 2.1. je s tem dokazan.

Naj bo sedaj w fiksna točka v območju $|\mathrm{Im}\, z| \geq g$, $g > k$. Potem velja $h(w)-h(z)=f(w)(e^{-g|w|}-e^{-g|w|}) + (f(w) - f(z))e^{-g|z|}$. Vzemimo sedaj $|w-z|<1/2$. Prvi člen vsote ocenimo takole:

$$|f(w)| \cdot |e^{-g|w|}-e^{-g|z|}| \leq \|f\|_k e^{k|w|} g\, \big||z|-|w|\big|\, e^{-g|z_1|}$$

kjer leži $|z_1|$ med $|z|$ in $|w|$, torej $|z_1| > |w|-1/2$, $\big||z|-|w|\big| \leq |z-w|$ in $e^{-g|z_1|} < e^{-g|w|+g/2}$. Od tod dobimo

$$|f(w)| \cdot |e^{-g|w|}-e^{-g|z|}| < g\, \|f\|_k e^{g/2-(g-k)|w|} |z-w|$$

Drugi člen ocenimo s pomočjo integralske reprezentacije za analitične funkcije:

$$f(z) - f(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|t-w|=1} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-w}\right) f(t)\, dt$$

Sedaj velja $|w-t|=1$, $|t-z|>1/2$. Preprosta ocena integrala nam da

$$|f(w) - f(z)|\, e^{-g|z|} \leq 2\, \|f\|_k |z-w| e^{-(g-k)\cdot|w|+2g}$$

---

* Družina funkcij $\{f_a\}$, $a \in A$, je v točki z enakozvezna, če po predpisu poljubnega $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da je $|f_a(z)-f_a(w)| < \varepsilon$, če je le $|w-z| < \delta$, pri čemer je δ dober za vse funkcije f_a iz družine istočasno.

Obe oceni združimo in dobimo

$$|f(w) - f(z)| \leq \|f\|_k |z-w| e^{-(g-k)|w|} \{g \cdot e^{g/2} + 2e^{2g}\}$$

Pri fiksnih g, k in w moremo najti tak δ, da je desna stran za vse f iz enotne krogle v M_k manjša od naprej predpisanega $\varepsilon > 0$, če je le $|z-w| < \delta$ in $\delta < 1/2$.

Iz teorije induktivne limite vemo, ([3]b), da je prostor $\mathcal{H}$ tipa (LN^*). Prostor tipa (LN^*) je poln. Preslikava A iz prostora $\mathcal{H}$ na lokalno-konveksni prostor L je zvezna natančno tedaj, ko so preslikave, ki jih inducira preslikava A v prostorih M_k, zvezne preslikave prostorov M_k v prostor E za vsak k.

Videli smo, da smo mogli definirati FLT na kvocientnem prostoru $H=\mathcal{H}/G$, kjer je G prostor celih funkcij eksponentnega naraščanja. Iz teorije topoloških prostorov vemo, da je kvocientni prostor lokalno-konveksnega prostora po zaprtem podprostoru zopet lokalno-konveksni prostor.

2.2. <u>Podprostor G celih funkcij eksponentnega naraščanja je zaprt podprostor v $\mathcal{H}$.</u>

V [3] je dokazan izrek: G je zaprta množica v $\mathcal{H}$ natančno tedaj, ko so $G_k = G \cap M_k$ zaprte množice v M_k za vsak k. (G_k zaprta v M_k v smislu normske topologije v M_k!) Pokazati moramo tedaj le še: če konvergira zaporedje funkcij $f_n \in G_k$ v smislu norme v M_k k neki funkciji iz M_k, je limita tudi cela funkcija eksponentnega naraščanja, torej element iz G_k.

Pozneje bomo dokazali izrek

2.3. <u>Če cela funkcija eksponentnega naraščanja, tj. funkcija, za katero najdemo konstanti B in p taki, da velja ocena $|f(z)| \leq B \cdot e^{pr}$, $r=|z|$, zadošča oceni $|f(z)| \leq A \cdot e^{lr}$ za $|\mathrm{Im}\, z| \geq k$,</u>

<u>$l < p$, eksistira taka konstanta C, odvisna le od k in l, ne pa od funkcije $f(z)$, da velja $|f(z)| \leq CA_\circ e^{lr}$ za vsak z.</u>

Seveda smemo vzeti, da je konstanta $C \geq 1$.

Norma v M_k je definirana takole:

$$\|f\|_k = \sup_{|\mathrm{Im}\, z| \geq k} |f(z)|\, e^{-k|z|}$$

Definirajmo v M_k še drugo normo s predpisom

$$|||f|||_k = \sup_{z \in C} |f(z)|\, e^{-k|z|}$$

Vzemimo, da smo izrek 2.3. že dokazali. Tolmačimo ga takole: normi $\|f\|_k$ in $|||f|||_k$ sta za funkcije iz G_k ekvivalnetni, saj velja $\|f\|_k \leq |||f|||_k \leq C\, \|f\|_k$. Konvergentno zaporedje v eni normi konvergira tudi v drugi. Konvergenca v normi $|||f|||_k$ pa pomeni enakomerno konvergenco zaporedja celih funkcij na vsaki omejeni množici v kompleksni ravnini, sa velja npr. za krog s polmerom R okoli točke O ocena

$$\sup_{|z| \leq R} |(f_n(z) - f_m(z))| \leq \varepsilon e^{kR}, \quad n,m \geq N(\varepsilon).$$

Znano je, da je limita takega zaporedja celih funkcij zopet cela funkcija, ki ne narašča bolj kot $e^{k|z|}$, torej element iz G_k. Množica G_k je res zaprta v M_k in G zato zaprt podprostor v $\mathcal{H}$.

Dokažimo sedaj izrek 2.3.! V ta namen tvorimo najprej novo funkcijo $F(z) = f(z)e^{-z^2}$. Naj bo $-k \leq y \leq k$; v tem pasu vzdolž realne osi velja po predpostavki izreka ocena $|F(x+iy)| \leq B \exp(p\sqrt{x^2+k^2}) \exp(-x^2+k^2)$. Ko gre $x \to \infty$, gre $F(z)$ za $-k \leq y \leq k$ enakomerno proti 0. Zato moremo najti dovolj veliko število N, da je $|F(\pm N \pm iy)| < \varepsilon$, $|y| \leq k$. To pomeni, da doseže pri dovolj majhnem ε analitična funkcija $F(z)$ v pravokotniku z ogljišči $N+ik$, $N-ik$, $-N-ik$, $-N+ik$ maksimum na eni od horizontalnih stranic; bodi to npr. zgornja stranica. Zato velja $|F(z)| \leq |F(x_0+ik)|$, $-N \leq x_0 \leq N$, $|y| \leq k$. Na robu Im z = k pa že velja po predpostavki ocena $|f(z)| \leq A.$ $.\exp(l\sqrt{x^2+k^2})$. To nam da v primeru, ko je točka z na imaginarni osi na daljici $-k \leq y \leq k$, oceno

$$|F(iy)| = |f(iy)| \cdot \exp(y^2) \leq A.\exp(lk+k^2)$$

Od tod sledi ocena za funkcijo f(z):

$$|f(iy)| \leq A.\exp(lk+k^2), \qquad |y| \leq k$$

Označimo z D konstanto $\exp(lk+k^2)$! Ker je $D \geq 1$, velja torej za vsak y ocena $|f(iy)| \leq AD.\exp(l|y|)$.

Doslej je funkcija f(z) zadoščala oceni $|f(z)| \leq$ $\leq Ae^{lr}$ za $|\mathrm{Im}\, z| \geq k$. Vzemimo sedaj, da funkcija zadošča taki oceni za Im $z \leq 0$ in Im $z \geq k$. (To dosežemo že z linearno transformacijo spremenljivke z.) Za novo funkcijo f(z) velja analogna ocena z novo konstanto D:

$$|f(iy)| \leq ADe^{l|y|} \qquad \text{za vsak } y.$$

Po predpostavki imamo na robu y = 0 oceno

$$|f(x)| \leq Ae^{l|x|} \qquad \text{za vsak } x$$

Sedaj tvorimo novo pomožno funkcijo $g(z) = f(z)e^{-lz}$! Njeno rast na imagirarni in realni osi moremo oceniti takole:

$$|g(x)| \leq A, \quad x \geq 0, \qquad |g(iy)| \leq ADe^{ly}, \quad y \geq 0.$$

Funkcija zadošča pogojema izreka 6.2.3. v [5] , zato velja

$$|g(x+iy)| \leq ADe^{ly}, \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

ali za funkcijo f(z) samo

$$|f(x+iy)| \leq AD.\exp(l(x+y)), \qquad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

Vzemimo poltrak $z = r.\exp(i\alpha)$, $0 < \alpha < \pi/2$ in opazujmo rast funkcije $|f(r.\exp(i\alpha))|e^{-lr}$, ko gre r od 0 proti ∞ ! Dokler smo še na delu poltraka v pasu med realno osjo in premico Im z = k, tj. $0 < r < k/\sin\alpha$, velja ocena

$|f(r.\exp(i\alpha))|\,e^{-lr} \leq AD.\exp(l(x+y-r))$, za del poltraka od $r=k/\sin\alpha$ naprej pa že velja po prvotni predpostavki ocena $|f(r.\exp(i\alpha))|\,e^{-lr} \leq A$. Izraz $\exp(l(x+y-r))$ ocenimo v pasu $0 \leq y \leq k$ takole: $\exp(l(x+y-r)) \leq \exp(lk)$, saj je vedno $x-r \leq 0$. Dobljena ocena nam pove

$$|f(r.\exp(i\alpha))|\exp(-lr) \leq AD.\exp(lk) = AC$$

kjer smo s C zaznamovali konstanto $D.e^{lk}$. Na podoben način bi ugotovili, da velja ista ocena tudi za vse z v drugem kvadrantu, le namesto pomožne funkcije $g(z)$ bi morali vzeti pomožno funkcijo $h(z) = f(z)e^{lz}$ in opazovati njeno rast. Izrek je s tem dokazan, saj konstanta C zavisi le od k in l.

Videli smo, da je G zaprt podprostor v $\mathcal{H}$, zato je faktorski prostor $H = \mathcal{H}/G$ zopet Hausdorffov lokalno-konveksni prostor.

2.4. Preslikava $\mathcal{F}$ prostora H vase je v kvocientni topologiji zvezna.

Najprej pokažimo, da je F zvezna preslikava prostora $\mathcal{H}$ v prostor H! Ker je $\mathcal{H}$ tipa (LN^*), zadošča, da pokažemo, da so F_{kk} zvezne preslikave prostorov M_k v prostor H.

Izberimo si fiksen prostor M_k in okolico $\hat{U}$ v H, za katero smemo privzeti, da je kanonična slika okolice U iz $\mathcal{H}$, kjer je U definirana kot absolutno-konveksna lupina ΓU_n okolic U_n iz prostorov M_n: $U_n = \{ f : f \in M_n, \|f\|_n \leq \varepsilon_n \}$. Iz tega zaporedja okolic U_n si izberemo neko, npr. U_m, pri čemer naj bo $m > k$. Preslikava F_{kk} prostora M_k v prostor M_m je zvezna, kot kaže lahka ocena:

$$\|F_{kk}f\|_m = \sup |F_{kk}f|\,e^{-m|w|} = \max(\sup|\hat{f}^+(w)|\,e^{-m|w|},$$

$$\sup|\hat{f}^-(w)|\,e^{-m|w|}),$$ kjer je vzet supremum po vseh w z $\mathrm{Im}\, w \geq m$

pri prvem in po vseh w z $\operatorname{Im} w \leq -m$ pri drugem členu v oklepaju. S pomočjo izreka 1.1. ocenimo npr. prvi člen:

$$\sup(e^{-m|w|} \left| \int f^{+}(z)e^{izw}\,dz \right|) \leq 2\,\|f\|_k e^{k^2} \sup_{\operatorname{Im} w \geq k} e^{-(m-k)|w|} \leq$$

$\leq 2e^{k^2}\,\|f\|_k$. Podobno ocenimo drugi člen, kar nam da $\|F_{kk}f\|_m \leq 2e^{k^2}\,\|f\|_k$; če vzamemo v M_k okolico $U_k =$ $= \left\{f : f \in M_k,\ \|f\|_k \ \frac{\varepsilon_m}{2\exp(k^2)}\right\}$, se okolica U_k pri preslikavi F_{kk} res preslika v okolico U_m, kar pomeni, da je F_{kk} zvezna preslikava prostora M_k v prostor M_m.

S φ označimo naravni homomorfizem, ki preslika prostor $\mathcal{H}$ v kvocientni prostor H! φ preslika vsak element $f \in \mathcal{H}$ ravno v razred, ki ga f določa: $[f] = \varphi f = f+G$. Preslikava F preslika po pravkar pokazanem okolico U_k v množico razredov $\varphi(U_m)$. Množica teh razredov pa je vsebovana v množici $\varphi(U)$, saj je $U_m \in U = \Gamma' U_n$. Množica razredov $\varphi(U)$ je slika okolice $U \in \mathcal{H}$, tj. ravno provotno izbrana okolica $\hat{U} \subset H$.

Torej je preslikava F prostora $\mathcal{H}$ v prostor H zvezna. Treba je le še videti, da je zvezna preslikava $\mathfrak{F}$ prostora H vase! Po predpisu okolice $\hat{U} \subset H$ moremo najti tako okolico $V \subset \mathcal{H}$, da je $FV \subset \hat{U} \subset H$, ker je F zvezna preslikava. Množica $\hat{V} = \varphi(V)$ je po definiciji kvocientne topologije v H okolica v H. Zanjo trdimo, da jo preslikava $\mathfrak{F}$ preslika v izbrano okolico $\hat{U}$. Naj bo res $[f] \in \hat{V}$, torej $[f] = f+G$, $f \in V$. Tedaj velja $\mathfrak{F}[f] =$ $= [Ff]$, saj je $FG \subset G$. Ker pa je po prejšnjem $Ff \in \hat{U}$, če je $f \in V$, je tudi $\mathfrak{F}[f] \in \hat{U}$, tj. preslikava $\mathfrak{F}$ prostora H vase je zvezna.

3. FOURIER-LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA JE RAZŠIRJAVA KLASIČNE FOURIEROVE TRANSFORMACIJE, DEFINIRANE NA L^2

Naša Fourier-Laplaceova transformacija je res razširjava klasične, če velja: L^2 je vsebovan izomorfno kot podprostor v H in, če nova FLT priredi funkcijam, ki so zastopniki v H funkcij iz L^2 iste transformiranke, kot klasična Fourierova transformacija.

3.1. <u>Prostor L^2 s kvadratom integrabilnih merljivih funkcij na realni osi je izomorfen podprostoru prostora H. Topologija, ki jo v L^2 inducira topologija prostora H, je šibkejša od topologije Hilbertovega prostora L^2.</u>

Izrek 3.1. bomo dokazali v več korakih.

3.1.1. <u>L^2 je izomorfen podprostoru v H.</u>

Funkciji f(x) iz L^2 priredimo kot njenega zastopnika v H razred, ki ga definira tako imenovana indikatrika $\tilde{f}(z)$, definirana takole:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(z)}{t-z}\, dt$$

Formula definira par analitičnih funkcij, od katerih je ena analitična vsaj za Im $z > 0$, druga pa vsaj za Im $z < 0$. Za $|\mathrm{Im}\, z| > 0$ velja ocena

$$|\tilde{f}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(t)|}{|t-z|}\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-t)^2+y^2}\, dt \right]^{1/2}$$

torej $|\tilde{f}(z)| \leq \|f\|_{L^2} |y|^{-1/2}$. Ko narašča $|y| \to \infty$, gre f(z) proti 0; f(z) je res element iz $\mathcal{H}$. Znano je tudi, ([2]a) da konvergirajo razlike $f(x+i\varepsilon) - f(x-i\varepsilon)$ pri $\varepsilon \to 0+$ po normi v L^2 prav proti izhodnim elementom f(x). Od tod sledi, da različnima funkcijama iz L^2 pripadata različni indikatriki.

3.1.2. <u>Topologija, ki jo v L^2 kot svojem podprostoru inducira topologija iz H, je šibkejša od običajne topologije v L^2.</u>

Pokažimo, da iz konvergence zaporedja $f_n(x)$ iz L^2 proti funkciji $f(x)$ v smislu normo v L^2 sledi konvergenca zaporedja v smislu topologije v H. Zadošča že, da pokažemo, da konvergira zaporedje $f_n(x)$ po normi prostora M_k za $k \geq 1$.

Iz $\int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t) - f(t)|^2 dx \to 0$, $n \to \infty$, sledi

$$\|f_n(z) - f(z)\|_k = \frac{1}{2\pi} \sup_{|\mathrm{Im}\, z| \geq k} \left(e^{-k|z|} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n(t)-f(t)}{t - z} dt \right|\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{|\mathrm{Im}\, z| \geq k} e^{-k|z|} \|f_n - f\|_{L^2} \|1/(t^2+y^2)\|_{L^2} \leq e^{-k^2} \|f_n - f\|_{L^2}$$

Gornji izraz gre z $n \to \infty$ proti 0, saj je $\sup \|1/(t^2+y^2)\|^2_{L^2} = \pi/k \leq \pi$ za $k \geq 1$.

3.2. <u>Transformacija $F(f)$, $f \in \mathcal{H}$, sovpada na elementih, ki so zastopniki funkcij iz $L^2(-\infty,\infty)$ s klasično Fourierovo transformacijo.</u>

Podprostor funkcij, ki so istočasno v L^1 in L^2, je gost podprostor v L^2. Ker je topologija, ki jo v L^2 inducira topologija iz H šibkejša od topologije v L^2, je $L^2 \cap L^1$ gost v L^2 tudi v smislu topologije v H. Če pokažemo, da da sovpada FLT s klasično na $L^2 \cap L^1$, sovpada zaradi zveznosti FLT na vsem prostoru L^2. Dokažimo torej izrek 3.2 za funkcije iz $L^2 \cap L^1$!

Indikatrika take funkcije je regularna za $|\mathrm{Im}\, z| \geq 0$ in za $|\mathrm{Im}\, z| \geq 1$ enakomerno omejena:

$$|\tilde{f}(z)| \leq \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2+y^2} dt \right]^{1/2}$$

tj. $|f(z)| \leq \sqrt{\pi}\,\|f\|$, $|\mathrm{Im}\, z| \geq 1$. Zato je $\tilde{f}(z)$ element vsakega prostora $M_{k,1}$ s $k \geq 1$. Poiščimo sedaj Fourier-Laplaceovo transformiranko $F_{a,1}\tilde{f}(z)$ elementa $\tilde{f}(z) \in M_{a,1}$! (a je celo število ≥ 1) $F_{a,1}\tilde{f}(z)$ je par analitičnih funkcij, ki ga označimo z $(\hat{f}^+(z), \hat{f}^-(z))$; $\hat{f}^+$ je definiran takole:

$$\hat{f}^+(w) = \int_{I_3} \tilde{f}^+(z)e^{izw}\,dz - \int_{I_4} \tilde{f}^-(z)e^{izw}\,dz$$

kjer je poltrak I_3 definiran z $(0+ia, \infty+ia)$, I_4 pa $(0-ia, \infty-ia)$. Podobno je definiran $\hat{f}^-$.

Če v tej formuli upoštevamo definicijo funkcije $\tilde{f}(z)$, dobimo

$$\hat{f}^+(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{ixw}e^{-aw}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-ai-x}\,dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{ixw}e^{aw}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t+ai-x}\,dt$$

Vrstni red integracije smemo zamenjati, ker so dvojni integrali absolutno konvergentni pri $|\mathrm{Im}\, z| > 0$.

Tvorili bomo razliko $\hat{f}^+(u+i\varepsilon) - \hat{f}^-(u-i\varepsilon)$ in poiskali limito, ko gre $\varepsilon \to 0+$. Pri tem se bo izkazalo, da je limita zgornjega izraza enaka klasični Fourierovi transformiranki funkcije $f(x)$.

Od razlike $\hat{f}^+(u+i\varepsilon) - \hat{f}^-(u-i\varepsilon)$ vzemimo le en del, integrala po poltrakih I_4 in I_2. Ta del razlike označimo s $C_{2,\varepsilon}$.

$$C_{2,\varepsilon} = - \frac{1}{2\pi i}e^{a(u+i\varepsilon)}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_0^{\infty} \frac{e^{ixu}e^{-\varepsilon x}}{t+ia-x}\,dx\right)dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}e^{a(u-i\varepsilon)}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ixu}e^{\varepsilon x}}{t+ia-x}\,dx\right)dt$$

Razliko moremo pisati tudi v obliki

$$C_{2,\varepsilon} = -\frac{1}{2\pi i} e^{a(u+i\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu} e^{-\varepsilon|x|}}{t+ia-x} \, dx \right) dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} e^{au} (e^{-i\varepsilon} - e^{i\varepsilon}) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{ixu} e^{\varepsilon x}}{t+ia-x} \, dx \right) dt$$

Prvi notranji integral označimo z $A(t,u,\varepsilon)$, drugega z $B(t,u,\varepsilon)$. Drugega ocenimo takole:

$$|B(t,u,\varepsilon)| \leq \left[\int_{-\infty}^{0} e^{2\varepsilon x} \, dx \int_{-0}^{0} \frac{dt}{(t-x)^2 + a^2} \right]^{1/2} \leq \left(\frac{\pi}{2\varepsilon a} \right)^{1/2}$$

Če upoštevamo še, da stoji pred členom B faktor $e^{-i\varepsilon} - e^{i\varepsilon}$, dobimo za ves drugi člen izraza $C_{2,\varepsilon}$, ko gre $\varepsilon \to 0+$, naslednjo oceno

$$\frac{e^{au}}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{-i\varepsilon} - e^{i\varepsilon}) B(t,u,\varepsilon) \, dt \right| \leq e^{au} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt \to 0,$$

ko gre ε proti $0+$. Pri tem je bilo u fiksno realno število.

Prvi del izraza $C_{2,\varepsilon}$ se da direktno izračunati, npr. po metodi odvajanja na parameter določenega integrala. Kratek račun nam da

$$A(t,u,\varepsilon) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu} e^{-\varepsilon|x|}}{a-it+ix} \, dx = -i2\varepsilon e^{-(a-it)u} \int_{-\infty}^{u} \frac{e^{(a-it)z}}{z^2+\varepsilon^2} \, dz$$

V integralu $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) A(t,u,\varepsilon) \, dt$ smemo vzeti limito $\varepsilon \to 0+$ pod znak integrala, kot nam pove Lebesguesov izrek. Ta zahteva, da je $f(t) \in L^1$, kar smo predpostavili, in da je družina funkcij $A(t,u,\varepsilon)$ omejena, ko gre $\varepsilon \to 0+$. To je res, kot nam pokaže ocena

$$\left| \varepsilon \int_{-\infty}^{u} \frac{e^{(a-it)w}}{w^2+\varepsilon^2} \, dw \right| \leq \varepsilon e^{au} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{w^2+\varepsilon^2} = e^{au} \pi$$

Za vsak realen u je torej

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) A(t,u,\varepsilon) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\lim_{\varepsilon \to 0+} A(t,u,\varepsilon)) \, dt$$

Izračunati moramo še limito $A(t,u,\varepsilon)$, ko gre $\varepsilon \to 0+$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{u} \frac{e^{(a-it)w}}{w^2+\varepsilon^2}\, dw = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{u/\varepsilon} \frac{e^{(a-it)\varepsilon w}}{w^2+1}\, dw$$

Integral pišemo v obliki $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w^2+1} g_\varepsilon(w)\, dw$, kjer je

$$g_\varepsilon(w) = \begin{cases} e^{(a-it)\varepsilon w}, & w \leq u/\varepsilon \\ 0, & w > u/\varepsilon \end{cases}$$

Pri računanju limite se skličemo ponovno na Lebesguesov izrek, ker je $1/(w^2+1)$ funkcija iz L^1, družina funkcij $g_\varepsilon(w)$ pa je pri $\varepsilon \to 0+$ omejena s funkcijo e^{au}. Limito smemo torej vzeti pod integralski znak in dobimo

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{u/\varepsilon} \frac{e^{(a-it)\varepsilon w}}{w^2+1}\, dw = \begin{cases} 0, & u<0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{w^2+1}\, dw = & u>0 \end{cases}$$

To upoštevamo pri izrazu $A(t,u,\varepsilon)$ in dobimo

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} A(t,u,\varepsilon) = \begin{cases} 0 & u<0 \\ -2\pi i\, e^{-(a-it)u}, & u>0 \end{cases}$$

Sedaj pa že moremo določiti limito izraza $C_{2,\varepsilon}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} C_{2,\varepsilon} = \begin{cases} 0, & u<0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itu}\, dt, & u>0 \end{cases}$$

Podobno izračunamo v razliki $\hat{f}^+(u+i\varepsilon) - \hat{f}^-(u-i\varepsilon)$ integrale po poltrakih I_1 in I_3, ko gre $\varepsilon \to 0+$:

$$\lim_{0+} C_{1,\varepsilon} = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itu}\, dt, & u<0 \\ 0, & u>0 \end{cases}$$

To pa pomeni, da Fourier-Laplaceova transformacija res sovpada na funkcijah, ki so v $L^1 \cap L^2$, s klasično Fourierovo transformacijo, definirano na L^2:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \left[\hat{f}^+(u+i\varepsilon) - \hat{f}^-(u-i\varepsilon)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itu}\,dt$$

za vsako fiksno realno število u. Vidimo torej, da velja konvergenca po točkah. Dokazati pa moremo še več: razlika konvergira tudi v smislu norme v L^2:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{-\infty}^{\infty} \left|(\hat{f}^+(u+i\varepsilon) - \hat{f}^-(u-i\varepsilon)) - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itu}\,dt\right|^2 du = 0$$

Za dokaz tega dejstva se poslužimo znanega Titchmarshovega izreka ([7], Theorem 93):

Bodi $f(x+iy)$ analitična funkcija za $y>0$; pri vsakem fiksnem $y>0$ bodi $f(x+iy)$ funkcija iz L^2, tj. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dx = M(y) < \infty$. Če ostanejo števila $M(y)$ omejena, ko gre $y \to 0+$, eksistira taka funkcija $\varphi(x) \in L^2$, da velja $f(x+iy) \to \varphi(x)$, ko gre $y \to 0+$, v smislu norme v L^2.

Če dokažemo, da razlika $\hat{f}^+(u+i\varepsilon) - \hat{f}^-(u-i\varepsilon)$ konvergira v L^2, ko gre $\varepsilon \to 0+$, potem konvergira skoraj povsod proti funkciji $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixu}\,dx$, proti kateri konvergira po točkah. Na osnovi pravkar citiranega Titchmarshovega izreka zadošča, da so funkcije $\hat{f}^+(u+i\varepsilon) - \hat{f}^-(u-i\varepsilon)$ v L^2 in da so njihove norme pri $\varepsilon \to 0+$ navzgor omejene. To pokažimo le za en del razlike, npr. za integral po poltraku I_4. Ta integral označimo z $G(u+i\varepsilon)$:

$$G(u+i\varepsilon) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} e^{i(x-ia)(u+i\varepsilon)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x+ia}\,dt\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{a(u+i\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(u+i\varepsilon)}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{a+i(x-t)}\,dt\right)dx$$

Najprej zamenjamo vrstni red integracij in izračunamo dobljeni integral podobno kot na strani 23;

$$G(u+i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} e^{ia\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{itu} \int_{0}^{u/\varepsilon} \frac{e^{(a-it)\varepsilon w}}{w^2+1}\, dw$$

Videli smo že, da gre notranji integral proti vrednosti $\pi/2$, ko gre $\varepsilon \to 0+$. Za dovolj majhne ε je notranji integral gotovo manjši po absolutni vrednosti od π ; isto velja za njegov realni in imaginarni del, npr.

$$-\pi \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{aw\varepsilon}\cos wt\varepsilon}{w^2+1}\, dw \leq \pi, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \qquad (3.1.)$$

Funkcijo $G(u+i\varepsilon)$ razbijemo na vsoto 4 členov tako, da pišemo e^{itu} in $e^{-itw\varepsilon}$ po Eulerjevih formulah. Od te vsote glejmo spet le en sam sumand, npr.

$$G_1(u+i\varepsilon) = \frac{e^{ia\varepsilon}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos tu \left(\int_{0}^{\infty} \frac{e^{aw\varepsilon}\cos tw\varepsilon}{w^2+1}\, dw \right) dt$$

Predpostavimo, da so vrednosti funkcije $f(t)$ realne, kar ni nobena omejitev. Tedaj moremo G_1 oceniti z upoštevanjem neenačbe (3.1.) takole:

$$-\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\, dt \leq 2\pi G_1(u+i\varepsilon) \leq \pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\, dt$$

ali, $|G_1(u+i\varepsilon)| \leq 1/2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\, dt \right|$. Zadnji integral pa je Fourierova kosinusna transformiranka. Ker je po predpostavki funkcija $f(x)$ v L^2, velja zanjo Parsevalova enačba, tj.

$$\left\| \int f(t)\cos ut\, dt \right\|_{L^2} = \pi/2\, \|f(t)\|_{L^2}$$

Torej velja ocena

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_1(u+i\varepsilon)|^2\, du \leq \pi/4 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt, \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

Podobno se prepričamo, da so ostali trije deli funkcije $G(u+i\varepsilon)$ po normi v L^2 omejeni. Pogoji Titchmarshovega izreka so torej izpolnjeni in $G(u+i\varepsilon)$ res konvergira v L^2 pri $y \to 0+$ proti neki funkciji iz L^2. Isto velja za drugi del funkcije $\hat{f}^+$ in za dele funkcije $\hat{f}^-$. Tako je izrek 3.2. dokazan.

4. INVERZNA FOURIER-LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA .

Klasična Fourierova transformacija je podana s formulo $Ff = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}\,dx$. Njej obratna transformacija je $\overline{F}f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixy}\,dx$. Znano je, da sta si transformaciji druga drugi obratni: za vsak $f \in L^2$ velja $\overline{F}Ff = F\overline{F}f = 2\pi f$. Doslej smo posplošili le transformacijo, v kateri nastopa pod integralom faktor e^{ixy}. Podobno moremo posplošiti transformacijo, pri kateri nastopa faktor e^{-ixy}.

Za funkcijo $f(z) = (f^+(z), f^-(z))$, $f(z) \in M_{p,q}$ definiramo posplošeno FLT $\overline{F}$ takole:

$$\overline{F}_{p,q} f = (\overline{f}^+(z), \overline{f}^-(z))$$

$$\overline{f}^+(\zeta) = \int_{I_1} f^+(z)e^{-iz\zeta}\,dz - \int_{I_2} f^-(z)e^{-iz\zeta}\,dz, \quad \operatorname{Im}\zeta > q$$

$$\overline{f}^-(\zeta) = -\int_{I_3} f^+(z)e^{-iz\zeta}\,dz + \int_{I_4} f^-(z)e^{-iz\zeta}\,dz, \quad \operatorname{Im}\zeta < -q$$

I_j so poltraki v razdalji p od realne osi:

I_1: $(-\infty+pi, pi)$ $\qquad$ I_3: $(pi, \infty+pi)$

I_2: $(-\infty-pi, -pi)$ $\qquad$ I_4: $(-pi, -pi+\infty)$

Na podoben način kot v prvem poglavju za transformacijo $F_{k,1}$ pokažemo, kako posplošimo zgornjo definicijo najprej na prostor $\mathcal{H}$ in nato še na preslikavo $\mathfrak{F}$ prostora H vase. Nato pokažemo neomejeno veljavnost pravil

a. $\overline{\mathfrak{F}}(z^n f(z)) = i^n \frac{d^n}{d\zeta^n} \overline{\mathfrak{F}}(f(z))$ $\qquad$ (1`)

$n = 1,2,..$

b. $\overline{\mathfrak{F}}(f^{(n)}(z)) = (i\zeta)^n \overline{\mathfrak{F}}(f(z))$ $\qquad$ (2`)

c. $\overline{\mathfrak{F}}(f(z)e^{az}) = \overline{\mathfrak{F}}(f(z))(\zeta+ai)$ $\qquad$ (3`)

$a \in C$

d. $\overline{\mathfrak{F}}(f(z-a)) = e^{-ia\zeta}\,\overline{\mathfrak{F}}(f(z))$ $\qquad$ (4`)

Nadalje veljajo izreki:

2.4.' <u>Preslikava $\bar{\mathfrak{F}}$ prostora H vase je v kvocientni topologiji zvezna.</u>

3.2.' <u>Transformacija $\bar{\mathfrak{F}}$ sovpada na elementih iz H, ki so zastopniki funkcij iz $L^2(-\infty,\infty)$, s klasično inverzno Fourierovo transformacijo.</u>

Naša transformacija $\bar{\mathfrak{F}}$ je posplošitev klasične inverzne transformacije. Tudi našo transformacijo $\bar{\mathfrak{F}}$ smemo imenovati inverzno Fourier-Laplaceovo transformacijo, kot nam pokaže naslednji izrek:

4.1. <u>Transformaciji $\bar{\mathfrak{F}}$ in $\mathfrak{F}$ sta si druga drugi v bistvu inverzni: $\mathfrak{F}\bar{\mathfrak{F}}f = \bar{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f = 2\pi f$ za vsak $f \in H$.</u>

Dokazali bomo le prvo polovico izreka: $\bar{\mathfrak{F}}\mathfrak{F}f = 2\pi f$. Vsak element $f(z) = (f^+,f^-)$ moremo pisati kot vsoto elementov, ki imata po eno komponento enako 0: $f(z) = (f^+(z),0) + (0,f^-(z))$. Zato se smemo pri dokazovanju omejiti na primer, da je npr. druga komponenta enaka 0: $f(z) = (f(z),0)$. Funkcija $f(z)$ je vsebovana v nekem M_k. Če po potrebi k povečamo za 1, smemo vzeti, da velja celo

a. $f(z)$ analitična za $\operatorname{Im} z \geq k-\varepsilon$

b. velja ocena $|f(z)| \leq A.e^{(k-\varepsilon)|z|}$, $\operatorname{Im} z \geq k-\varepsilon$,

kjer je ε neko pozitivno število.

Najprej poiščemo Fourier-Laplaceovo transformiranko funkcije $f(z)$: $\mathfrak{F}f = (\hat{f}^+,\hat{f}^-)$:

$$\hat{f}^+(z) = \int_{I_3} f(t)e^{itz}\,dt, \quad \hat{f}^-(z) = -\int_{I_1} f(t)e^{itz}\,dt$$

Integrala po poltrakih I_2 in I_4 sta seveda 0, ker je spodnja komponenta elementa $f(z)$ enaka 0. Poltraka I_1

in I_3 smemo vzeti v razdalji k od realne osi. Kratek račun nam da

$$\hat{f}^+(z) = e^{-kz} \int_0^\infty f(t+ik)e^{itz}\,dt$$
$$\hat{f}^-(z) = -e^{-kz} \int_0^\infty f(-t+ik)e^{-itz}\,dt \qquad (4.1)$$

Par $(\hat{f}^+, \hat{f}^-)$ preslikamo sedaj z inverzno FLT, $\bar{\mathfrak{F}}$. Treba je videti, da je tako dobljeni par $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} f) = (\hat{\bar{f}}^+, \hat{\bar{f}}^-)$ kot element iz H enak elementu $2\pi(f,0)$, to je, da se para razlikujeta le za kakšno funkcijo iz G.

Ker sta $\hat{f}^+$ in $\hat{f}^-$ analitični za $|\mathrm{Im}\, z| \geq k$, smemo pri računanju inverzne FLT vzeti integracijske poti zopet v razdalji k od realne osi.

$$\hat{\bar{f}}^+(z) = e^{kz} \int_0^\infty \hat{f}^+(-t+ik)e^{itz}\,dt - e^{-kz} \int_0^\infty \hat{f}^-(-t-ik)e^{izt}\,dt$$
$$\hat{\bar{f}}^-(z) = -e^{kz} \int_0^\infty \hat{f}^+(t+ik)e^{-itz}\,dt + e^{-kz} \int_0^\infty \hat{f}^-(t-ik)e^{-itz}\,dt$$

V ti formuli vstavimo za $\hat{f}^+$ in $\hat{f}^-$ izraze iz formule (4.1). V vseh nastopajočih dvojnih integralih smemo zamenjati vrstni red integracije, ker sta prva dva integrala absolutno konvergentna za $\mathrm{Im}\, z > k$, druga dva za $\mathrm{Im}\, z < k$. Notranji integrali se dajo elementarno izračunati, od koder dobimo

$$\hat{\bar{f}}^+(z) = e^{kz-ik^2} \int_0^\infty \frac{f(t+ik)e^{-kt}}{it-k-iz}\,dt - e^{-kz+k^2} \int_0^\infty \frac{f(-t+ik)e^{-kt}}{it+k+iz}\,dt$$

$$\hat{\bar{f}}^-(z) = e^{kz-ik^2} \int_0^\infty \frac{f(t+ik)e^{-kt}}{it-k-iz}\,dt - e^{-kz+k^2} \int_0^\infty \frac{f(-t+ik)e^{-kt}}{it+k+iz}\,dt$$

Prva formula velja za $\mathrm{Im}\, z > k$, druga za $\mathrm{Im}\, z < k$. V prvi integral prve in druge formule vpeljemo kompleksno spremenljivko $w=ik+t$, v druga dva pa $w=ik-t$.

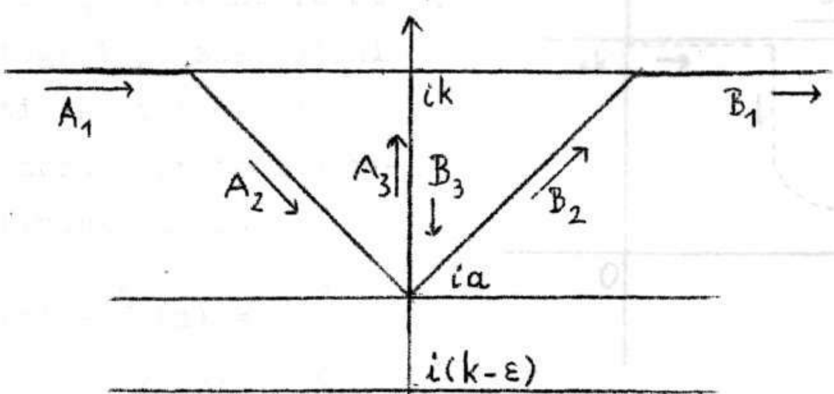
$$\hat{\bar{f}}^+(z) = -ie^{kz} \int_{I_3} \frac{f(w)e^{-kw}}{w-z}\,dw - ie^{-kz} \int_{I_1} \frac{f(w)e^{kw}}{w-z}\,dw, \quad \mathrm{Im}\, z>k$$

$$\hat{f}^{-}(z) = -ie^{kz}\int_{I_3}\frac{f(w)e^{-kw}}{w-z}\,dw - ie^{-kz}\int_{I_1}\frac{f(w)e^{kw}}{w-z}\,dw, \quad \mathrm{Im}\, z < k$$

Poltraka I_1 in I_3 imata isti pomen kot doslej.

Oglejmo si sedaj npr. funkcijo $\hat{f}^{+}(z)$! Ta je regularna vsaj v polravnini $\mathrm{Im}\, z > k$. Regularna pa je še na osi $\mathrm{Im}\, z = k$. O tem se prepričamo takole: naj se točka z od zgoraj približuje točki $x+ik$, $x>0$! Ker je funkcija $f(w)$ po predpostavki regularna še do premice $\mathrm{Im}\, w = k-\varepsilon$, smemo integracijsko pot deformirati. Namesto poltraka I_3 vzamemo pot, sestavljeno iz daljice $(ik, x-\delta+ik)$, spodnje polovice kroga s polmerom δ, $0<\delta<\varepsilon$, $\delta<x$, s središčem v točki $x+ik$ ter poltraka $(x+\delta+ik, \infty+ik)$. Sedaj je očitno, da je $\hat{f}^{+}(z)$ v točki $x+ik$ regularna in nadaljevati jo moremo analitično preko osi $\mathrm{Im}\, z = k$ na pas med premicama $\mathrm{Im}\, z = k$ in $\mathrm{Im}\, z = k-\varepsilon$. Tako vidimo, da je $\hat{f}^{+}(z)$ regularna na polravnini $\mathrm{Im}\, z > k-\varepsilon$, le v točki ik bi utegnila imeti izolirano singularnost. Pokažimo, da je $\hat{f}^{+}(z)$ regularna tudi v točki ik!

Poltraka I_1 in I_3 deformirajmo v okolici točke ik tako, kot kaže slika. Pri tem je število a večje od



$k-\varepsilon$ in manjše od k. V definiciji funkcije $\hat{f}^{+}(z)$ smemo nadomestiti poltraka I_1 in I_3 z lomljenima črtama A_1, A_2, A_3 in B_1, B_2 in B_3. Integrali, ki se nanašajo na dele poti po A_1, A_2, B_2 in B_1 so v točki ik regularni. Dokazati je treba le še, da je funkcija

$$g(z) = -ie^{kz} \int_{B_3} \frac{f(w)e^{-kw}}{w - z}\, dw - ie^{-kz} \int_{A_3} \frac{f(w)e^{kw}}{w - z}\, dw$$

analitična v točki z=ik. Funkcijo g(z) transformiramo na obliko

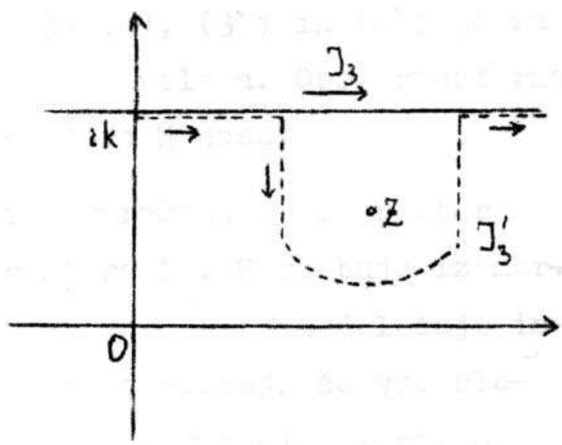
$$g(z) = \int_a^k f(it)\, \frac{e^{-k(z-it)} - e^{k(z-it)}}{it - z}\, dt$$

Funkcija $\frac{e^{-k(z-it)} - e^{k(z-it)}}{z - it}$ je analitična tudi za vse $z=it$, $a \leq t \leq k$, zato je g(z) analitična v okolici točke z=ik. To pomeni, da moremo funkcijo $\hat{f}^+(z)$ nadaljevati analitično tudi preko točke z=ik.

Funkciji $\hat{f}^+$ in $\hat{f}^-$ sta obe regularni v pasu $k-\varepsilon < \operatorname{Im} z < k$, zato moremo za z iz tega pasu tvoriti razliko

$$\hat{f}^+(z) - \hat{f}^-(z), \quad z=x+yi, \quad k-\varepsilon < y < k.$$

Vzemimo npr., da je $x > 0$! Tedaj je razlika integralov v $\hat{f}^+$ oziroma $\hat{f}^-$ po poltraku I_1 enaka 0. V integralu po I_3 v $\hat{f}^+(z)$ deformiramo pot tako, kot kaže slika. V razliki se odštejeta integrala po tistih delih poltraka I_3, ki so skupni tudi novi poti I_3'. Ostane le še integral po zaključeni poti okoli točke z, ki ga moramo preteči v pozitivnem smislu:



$$\hat{f}^+(z) - \hat{f}^-(z) =$$

$= -ie^{kz} \oint \frac{f(w)e^{-kw}}{w - z}\, dw$. Ker je števec integranda v notranjosti integracijske krivulje analitična funkcija, je po izreku o residuumu integral enak $2\pi i \cdot f(z)e^{-kz}$, kar nam da za razliko

$$\hat{f}^{+}(z) - \hat{f}^{-}(z) = 2\pi f(z) \qquad (4.2)$$

To enačbo zapišemo malo drugače : $\hat{f}^{-}(z) = \hat{f}^{+}(z) - 2\pi f(z)$ Desna stran je analitična funkcija v polravnini Im z k- , v pasu med premicama Im z = k oz. Im z = k-ε se desna stran ujema z levo. To pomeni, da velja zadnja enačba za vso polravnino Im z>k-ε, funkcija $\hat{f}^{-}(z)$ pa se da analitično nadaljevati na vso polravnino Im z>k-ε. Tudi enačba (4.2) velja ne samo v pasu, temveč v celi polravnini Im z>k-ε. Ker sta funkciji f(z) in $\hat{f}^{+}(z)$ na polravnini Im z>k-ε eksponentnega naraščanja, je taka tudi funkcija $\hat{f}^{-}(z)$, ki je torej cela funkcija eksponentnega naraščanja.

Dosedanje ugotovitve pomenijo ravno to, da sta para $(2\pi f(z),0)$ in $(\hat{f}^{+}(z),\hat{f}^{-}(z))$ kot elementa prostora H enaka, saj se njuni komponenti zaradi enačbe (4.2) razlikujeta le za $\hat{f}^{-}(z)$, ki pa je cela funkcija eksponentnega naraščanja. S tem je izrek 4.1. dokazan.

V prostoru H moremo torej definirati FLT in njej inverzno transformacijo tako, da veljajo lastnosti (1), (2), (1`) in (2`) za vse elemente iz H in za vsako naravno število n, lastnosti (3),(4), (3`) in (4`) pa za vse f∈H in za vsako kompleksno število a. Obe transformaciji sta zvezni preslikavi prostora H nase.

Končno si še zastavimo vprašanje, če prostor H ni preobširna razširjava prostora L^2. H vsebuje izomorfno prostor L^2, tj. prostor razredov, ki jih določajo indikatrike funkcij iz L^2. Poleg tega vsebuje še vse elemente, ki jih dobimo iz indikatrik s končnim številom naslednjih operacij: z odvajanjem, množenjem s faktorji oblike z^n in e^{az} (n je naravno število, a poljubno kompleksno število) in paralelnimi premiki za poljubno kompleksno število. Prostor H bi bil preobširna razširjava, če bi H vsebeval poleg opisanih elementov še kakšne druge.

Pokažimo, da temu ni tako! Vzemimo poljuben element $f(z) = (f^+(z), f^-(z)) \in H$! Tega pišemo v obliki $f(z) = (f^+, 0) + (0, f^-)$. Funkcija $f^+(z)$ je analitična za $\operatorname{Im} z > k$ in na premici $\operatorname{Im} z = k$ še zvezna ter zadošča oceni $|f^+(z)| \leq Ae^{l|z|}$ za $\operatorname{Im} z \geq k$. Funkcija $g^+(z) = f^+(z+ik)$ je analitična do realne osi, na realni osi še zvezna in zadošča oceni $|g^+(z)| \leq Ce^{l|z|}$ za $\operatorname{Im} z \geq 0$. Iz [6] vemo, da par $(g^+, 0)$ določa neko distribucijo "eksponentnega tipa": $u(x) = D^p e^{p|x|} h(x)$, kjer je p celo število, večje od 1, simbol D^p pomeni p-ti odvod v smislu teorije distribucij, h(x) pa je omejena funkcija iz L^2. Nadalje vemo, da se indikatrika $(\tilde{u}^+(z), \tilde{u}^-(z))$ distribucije u(x), kjer je indikatrika definirana s formulo

$$\tilde{u}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[D^p e^{pz}\int_0^\infty \frac{h(x)}{x-z}\,dx + D^p e^{-pz}\int_{-\infty}^0 \frac{h(x)}{x-z}\,dx\right]$$

razlikuje od $(g^+, 0)$ le za neko celo funkcijo eksponentnega naraščanja. Ker sta integrala v zgornji formuli indikatriki funkcij iz L^2, je $\tilde{u}(z)$ linearna kombinacija odvodov indikatrik, pomnoženih s faktorji oblike e^{pz} oziroma e^{-pz}. Elementa $(g^+, 0)$ in $(\tilde{u}^+, \tilde{u}^-)$ sta v prostoru H enaka, saj se razlikujeta le za celo funkcijo eksponentnega naraščanja, kot smo že omenili. Potem pa za element $(f^+, 0)$ velja, da je v H enak elementu $(\tilde{u}^+(z-ik), \tilde{u}^-(z-ik))$, ki je linearna kombinacija odvodov indikatrik funkcij iz L^2, pomnoženih z eksponencialnimi faktorji, premaknjena za k v smeri pozitivnega dela imaginarne osi. Podobno velja seveda za $(0, f^-)$. Prostor H torej res ni prevelik.

Zaključne opombe.

Prav lahko pokažemo, da je naša Fourier-Laplaceova transformacija tudi razširjava Fourier-Laplaceovih transformacij, ki jih je definiral Pantelidis v [6] na prostorih "ultradistribucij" in distribucij "eksponentnega tipa". V obeh prostorih je namreč L^2 vsebovan izomorfno kot podprostor, ki je v odgovarjajoči topologiji celo gost v vsem prostoru. Na elementih, ki so zastopniki funkcij iz L^2, sovpadajo Pantelidisove posplošene FLT s klasičnima. Pantelidisova prostora moremo smatrati za podprostora v našem prostoru H. Topologija, ki jo v Pantelidisovih prostorih inducira topologija našega prostora H, je šibkejša od topologij, ki jih je definiral Pantelidis. Od tod sklepamo, da sovpadajo Pantelidisove in naše transformacije na elementih iz H, ki so zastopniki Pantelidisovih prostorov.

Zdi se verjetno, da je L^2 kot podprostor v H gost v H v smislu topologije v L^2. Če je to res, smemo smatrati našo FLT kot razširjavo po zveznosti klasične Fourierove transformacije v smislu topologije v H iz podprostora L^2 na ves prostor H. Tedaj H gotovo ni "preveliki", saj je le zaprta lupina prostora L^2. Iz gostote L^2 v H sledi tudi neposredno dejstvo, da sta si transformaciji $\mathfrak{F}$ in $\bar{\mathfrak{F}}$ inverzni do konstantnega faktorja 2π.

Drugo nerešeno vprašanje je v zvezi s podprostorom $G \subset \mathcal{H}$. Tega smo definirali kot prostor celih funkcij eksponentnega naraščanja. Vzemimo, da za cele funkcije f(z) vemo, da za $|\mathrm{Im}\, z| \geq k$ ne narašča bolj kot eksponentno, ničesar pa ne vemo glede naraščanja, ko gre $z \to \infty$ v pasu $|\mathrm{Im}\, z| < k$. Zanimivo bi bilo ugotoviti, če iz dejstva, da f(z) za $|\mathrm{Im}\, z| \geq k$ ne narašča bolj kot eksponentno sledi, da narašča f(z) ne bolj kot eksponentno tudi v pasu $|\mathrm{Im}\, z| < k$. Če to ni res, potem eksistirajo v $\mathcal{H}$ cele funkcije, ki zunaj pasu $|\mathrm{Im}\, z| < k$ naraščajo ne bolj kot eksponentno, znotraj pasu pa bolj kot vsaka funkcija e^{az}. Taka cela funkcija f(z) definira par $(f^+, f^-) \in \mathcal{H}$, ki ni element iz G! - Odgovor na zastavljeno vprašanje bi nam omogočil natančno poznavanje prostora $\mathcal{H}$.

LITERATURA:

[1] G.Köthe, Topologische lineare Räume I, Springer 1961

[1]a " Dualität in der Funktionentheorie, Journal für die reine und angewandte Mathematik 191, (1953)

[2] H.G.Tillmann, Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen, Math. Zeitschrift 59, (1953)

[2]a " Distributionen als Randverteilungen analytischer Funktionen, Math. Zeitschrift 76, (1961)

[2]b " Darstellung der Schwartzschen Distributionen durch analytische Funktionen, Math. Zeitschrift 77, (1961)

[3] J.S.e Silva, Le calcul operationel au point de vue des distributions, Portugaliae Mathematica 14, (1955)

[3]a " Sur l`espace des fonctions holomorphes a croissance lente a droite, Portugaliae Mathematica 17, (1958)

[3]b " O nekotorih klassah lokalno-vipuklih prostranstev, važnih v priloženijah, Matematika 1:1, (1957), prevod

[4] L.Schwartz, Theorie des distributions, Hermann 1950-51

[5] R.P.Boas, Entire Functions, Academic Press 1954

[6] G.Pantelidis, Fourier-Laplace-Transformation im Bereich der Ultra-Distributionen, doktorska disertacija, Heidelberg 1962

[7] E.C.Titchmarsh, Fourier Integral, Oxford University Press, 1948