PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **17** (1989/1990)
Številka 3
Strani 129–131

Samo Stanič:

DVAJSET TISOČ DECIMALK ŠTEVILA π

Ključne besede: matematika, teorija števil.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/17/982-Stanic.pdf

3.141592653589793238462643383279502884197169
39937510582097494459230781640628620889986280
34825342117067982148086513282306647093844609
55058223172535940812848111745502841027019385
21105559644622948954930381964428810975665933
44612847564823378678311652712019091456485669
23460348610454326648213393607260249141273724
58700660631558881748815209209628292540917153
64367892590360011330530548820466521384146951
94151160094330572703657595919530921861173819
32611793105118548074462379962749567351885752
77248912279381830119491298336733624406566430
86021394946395224737190702179860943702277053
92171762931767523846748184676694051320005681
27145263560827785771342757789600917363717872
14684409012249534301465495853710507922796892
58923542019956112129021996086403441815981362
97747713099605187072113499999983729780499510
59731732816096318859502445945534690830264252
23082533446850352619311881710100031378387528
86587533200838142061717766914730359825349042
87554687311595628638823537875937519577818577
80553217122680661300192787661119590921642019
89380952572010654858632788659361533818277968
23030195203530185296899577362259941389124972
17752834791315155748572424541506995950829533
11686172785588907509838175463746493931925506
04009277016711390098488240128583616035637076
66010471018194295559619894676783744944825537
97747268471040475344646208046684259069491293
31367702898915210475216205696602405803815019
35112533824330035587640247496473263914199272
60426992279678235478163600934172164121992458
63150030286182974555706749838505494588586926
99569092721079750930295532116534498720275559
60236480665499119881834797753566369807426542
52786255181841757467289097777279380000816470
60016145249192173217214772350141441973568548
16136115735255213347574184944684385233239073

DVAJSET TISOČ DECIMALK ŠTEVILA PI

Krog je ena najpogostejših geometrijskih oblik v naravi in že stari Egipčani so opazili, da obstaja med polmerom in površino kroga povezava. Antični misleci so pokazali, da je ploščina sorazmerna s kvadratom polmera, sorazmernostni koeficient pa danes poznamo kot π. Določanja te konstante se je prvi sistematično lotil Arhimed (225 pr.n.št.). Z izračunom ploščine krogu včrtanega in očrtanega 96 - kotnika je določil zgornjo in spodnjo mejo intervala, na katerem leži π. Njegova metoda je ostala v uporabi naslednjih 1800 let, zgornja meja 22/7 pa je še danes uporabljan približek. Največjo natančnost je z njo dosegel Ludolph Van Ceulen, ki je leta 1610 z uporabo 2^{62} – kotnikov uspel izračunati π na 35 mest natančno; nekateri viri navajajo, da je po tem zaradi izčrpanosti umrl. Odkritje Jamesa Gregorya leta 1671 je omogočilo mnogo večjo natančnost. Skoraj vsi postopki za računanje π do leta 1983 temeljijo na njegovi potenčni vrsti za arkus tangens (inverzna funkcija tangensu):

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \qquad (1)$$

Za vsak x se lahko z izračunom ustrezno mnogo členov vrste dobimo arkus tangens x na željeno stevilo decimalk natančno. Naš cilj je izračunati π, torej bomo izbrali tak x, katerega arkus tangens bo mnogokratnik π. Poznana je zveza arctg $1 = \frac{\pi}{4}$; torej lahko zapišemo:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \qquad \text{Leibnizova formula} \quad (2)$$

Težava je v tem, da moramo pri uporabi vrste (2) izračunati izredno veliko členov za vsako naslednje decimalno mesto: vrsta konvergira zelo počasi. Z uporabo raznih matematičnih trikov so matematiki za računanje π izpeljali formule, ki vsebujejo vsote in razlike arkus tangensov števil dosti manjših od 1. Tako vrste za vsak posamezen arkus tangens konvergirajo dosti hitreje in enako natančnost dosežemo z izračunom bistveno manj členov. Čim hitreje konvergira vrsta, tem hitrejši bo tudi izračun. Nekatere izmed bolj znanih formul so:

$$\frac{\pi}{4} = 5 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{79} \qquad (3)$$

po kateri je Jurij Vega leta 1794 izračunal π na 126 mest natančno;

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} \qquad \text{John Machin l.1706} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{4} = 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{10} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} - 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{515} \qquad \text{Klingstierna} \qquad (5)$$

$$\frac{\pi}{4} = 12 \operatorname{arctg}\frac{1}{18} + 8 \operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5 \operatorname{arctg}\frac{1}{239} \qquad \text{Gauss} \qquad (6)$$

Hitrost izračuna najlepše prikaže natančnost rezultata glede na število izračunanih členov:

n	Leibnizova formula	Machinova formula
1	4.00000	3.1832635
2	2.66666	3.1405970
3	3.46666	3.1416210
4	2.89523	3.1415917
5	3.33968	3.1415926
10	3.04138	
100	3.13593	

Po teh formulah z osebnim računalnikom v relativno kratkem času dobimo približek π natančen na nekaj 1000 decimalk. Objavljenih 20.000 mest je rezultat enournega računanja na računalniku VAX 8650. Rezultat je bil preverjen tako, da je bil izračunan po treh različnih formulah (4, 5 in 6). Rezultati se ujemajo v 19.995 mestih. Na žalost se kmalu pokažejo tudi omejitve te metode. Čas računanja se veča s kvadratom decimalnih mest, tako da je metoda uporabna le do nekaj 100.000 mest, potem pa se čas računanja poveča preko vsake smiselne meje. Šele po letu 1983 so odkrili nove postopke, ki pa so dosti bolj zapleteni. Z njihovo pomočjo je letos profesor Yasuma Kaneda s Tokijske univerze na superračunalniku NEC SX - 2 izračunal 536.870.912 (2^{29}) decimalnih mest π, kar je najnovejši dosežek na tem področju.

Literatura:

[1] Ivan Vidav, *Višja matematika I,* DMFA SRS, Ljubljana (1987) 399

[2] Tomaž Pisanski, *Razmerje med polmerom in obsegom kroga,* Obzornik za matematiko in fiziko 31 (1984) 44 - 48

[3] Jurg Nievergelt, *Computer approaches to mathematical problems,* Prentice Hall, Englewood Cliffs (1974) 198 - 202

Samo Stanič