PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **32** (2004/2005)
Številka 5
Strani 10–11

Matej Mlakar:

Z BARVANJEM HIŠK DO FORMUL ZA VSOTO POTENC

Ključne besede: matematika, teorija števil, Pascalov trikotnik, binomski simboli, števila barvanja hišk.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/32/1601-Mlakar.pdf

Z barvanjem hišk do formul za vsoto potenc

V zgodovini matematike so bile formule

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n &= \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 &= \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}\\ 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 &= \frac{n^4}{4}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}\end{aligned}$$

sprva namenjene izračunu ploščin ter prostornin, kasneje pa so jih uporabljali za razvoj pravil za integracijo polinomov.

Dokazovanje formul za vsote oblike $1^d+2^d+\cdots+n^d$, kjer je d naravno število, ponavadi temelji na indukciji, vendar si s to metodo ne moramo pomagati pri iskanju pravila, ki ga dejansko potrebujemo. Ena izmed metod za iskanje teh formul izhaja iz Kitajske ter Indije. Poznali so jo že arabski matematiki v Bagdadu in Kairu med leti 1200 in 1400. Temeljila je na lastnostih binomskih koeficientov v Pascalovem trikotniku.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} &&&&&&&&1&&&&&&&&\\ &&&&&&&1&&1&&&&&&&\\ &&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\ &&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\ &&&&1&&4&&6&&4&&\mathbf{1}&&&&\\ &&&1&&5&&10&&10&&\mathbf{5}&&1&&&\\ &&1&&6&&15&&20&&\mathbf{15}&&6&&1&&\\ &1&&7&&21&&35&&\mathbf{35}&&21&&7&&1&\\ 1&&8&&28&&56&&70&&\mathbf{56}&&28&&8&&1 \end{array}$$

Če zapišemo Pascalov trikotnik, opazimo, da velja $1+5+15+35=56$. To daje slutiti na

$$\binom{d}{d}+\binom{d+1}{d}+\binom{d+2}{d}+\cdots+\binom{n}{d}=\binom{n+1}{d+1}. \qquad (1)$$

Ker binomski simbol $\binom{n}{d}$ pomeni tudi število podmnožic z d elementi v množici z n elementi, lahko definiramo $\binom{n}{d}=0$ za $d>n$. Tako lahko vsoto (1) zapišemo tudi kot

$$\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{d}=\binom{n+1}{d+1}, \qquad (2)$$

kar lahko zlahka dokažemo z indukcijo po n. Vsak binomski koeficient $\binom{x}{d}$ je polinom spremenljivke x stopnje d, recimo

$$\begin{aligned} \binom{x}{1}&=x,\\ \binom{x}{2}&=\frac{x(x-1)}{2}=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2},\\ \binom{x}{3}&=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3},\\ \binom{x}{4}&=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}=\\ &=\frac{x^4}{24}-\frac{x^3}{4}+\frac{11x^2}{24}-\frac{x}{4}.\end{aligned}$$

Izrazimo potence spremenljivke x s pomočjo binomskih koeficientov. Tako je

$$\begin{aligned} x&=\binom{x}{1}\\ x^2&=2\binom{x}{2}+\binom{x}{1}\\ x^3&=6\binom{x}{3}+6\binom{x}{2}+\binom{x}{1}.\end{aligned}$$

Če zgornje enakosti povežemo z (2), dobimo

$$\sum_{x=1}^{n}x=\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{1}=\binom{n+1}{2} \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^2&=\sum_{x=1}^{n}\left(2\binom{x}{2}+\binom{x}{1}\right)=2\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{2}+\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{1}\\ &=2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2} \qquad (4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^3&=\sum_{x=1}^{n}\left(6\binom{x}{3}+6\binom{x}{2}+\binom{x}{1}\right)=\\ &=6\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{3}+6\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{2}+\sum_{x=1}^{n}\binom{x}{1}=\\ &=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}. \qquad (5)\end{aligned}$$

Obstoj formule za

$$\sum_{x=1}^{n}x^d$$

sledi iz dejstva, da so $\binom{x}{0}, \binom{x}{1},\ldots, \binom{x}{d}$ polinomi različne stopnje, zato tvorijo bazo prostora polinomov stopnje $\leq d$. Kaže, da se splošni rezultat izraža z binomskimi simboli v obliki

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{n}x^d&=a_{d,d}\binom{n+1}{d+1}+a_{d,d-1}\binom{n+1}{d}+\cdots\\ &+a_{d,1}\binom{n+1}{2}. \qquad (6)\end{aligned}$$

Poskusimo dokazati splošni rezultat. Povezavo med koeficienti $a_{d,j}$, kjer sta $d,j\in\mathbb{N}$, poiščimo s pomočjo kombinatoričnega razmisleka v navidez popolnoma drugačnih nalogah.

1 Posamezna hiška se pobarva le z eno barvo

2 Števila $H(d,j)$ so bolj znana kot števila barvanja hiške, angl. »house-painting numbers«

- **Prvi problem barvanja hišk.**
  Na koliko načinov lahko pobarvamo d hišk z *natanko* j barvami[1] ?

Označimo s $H(d,j)$, kjer sta d in j naravni števili, število barvanj d hišk z natanko j barvami.[2] Očitno je $H(d,j)=0$, če je $j>d$. V primeru, da imamo d hišk in eno barvo, pobarvamo vse hiške z enako barvo; torej je $H(d,1)=1$ za vsak $d\in\mathbb{N}$. Če imamo enako število hišk in barv, gre dejansko za število vseh bijektivnih preslikav med dvema množicama. Vseh bijektivnih preslikav med končnima množicama z močjo d je $d!$, velja $H(d,d)=d!$. V splošnem imamo na voljo d hišk. Izberemo eno in jo pobarvamo z eno od j barv. Ostane nam $d-1$ hišk. Izbrano barvo lahko uporabimo naprej ali pa ne, kar lahko zapišemo z rekurzivno zvezo

$$H(d,j)=j(H(d-1,j)+H(d-1,j-1)).$$

Če nekaj vrednosti $H(d,j)$ zapišemo v tabeli, hitro ugotovimo, da so se že pojavile v razvoju vsote potenc x^d za $d\in\{1,2,3,4\}$.

$d\backslash j$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	2				
3	1	6	6			
4	1	14	36	24		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Z drugačnim razmislekom pokažimo pomen števil barvanja hišk $H(d,j)$ in veljavnost v (6).

- **Drugi problem barvanja hišk.**
  Na koliko načinov lahko pobarvamo d hišk, če želimo uporabiti *največ* j barv?

Če imamo na voljo več barv, kot je hišk, lahko uporabimo največ d barv. Če pobarvamo d hišk z natanko eno barvo, izberemo eno barvo izmed j barv, nakar pobarvamo d hišk z natanko eno barvo. Število načinov je $\binom{j}{1}\cdot H(d,1)$. Na podoben način ugotovimo število vse možnih barvanj z dvema barvama, ki ju izberemo izmed j barv. Teh je $\binom{j}{2}\cdot H(d,2)$. Tako pridemo do vseh možnosti, ki jih strnemo v

$$\binom{j}{d}H(d,d)+\binom{j}{d-1}H(d,d-1)+\binom{j}{1}H(d,1). \tag{7}$$

Na vsoto (7) pa lahko pogledamo tudi drugače. Označimo množico barv $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_j\}$. Na koliko načinov lahko iz znakov iz množice B sestavimo niz dolžine d, kjer je ponavljanje znakov dovoljeno? Gre za število variacij s ponavljanjem j elementov reda d, vseh je torej j^d. Zato je

$$j^d=\binom{j}{d}H(d,d)+\binom{j}{d-1}H(d,d-1)+\cdots+\binom{j}{1}H(d,1).$$

Ko uporabimo zgornjo enakost za izračun vsote in upoštevamo še (2), dobimo željeno zvezo

$$\sum_{x=1}^{n}x^d=\sum_{x=1}^{n}H(d,d)\binom{x}{d}+\sum_{x=1}^{n}H(d,d-1)\binom{x}{d-1}+\cdots+\sum_{x=1}^{n}H(d,1)\binom{x}{1}$$
$$=H(d,d)\binom{n+1}{d+1}+H(d,d-1)\binom{n+1}{d}+\cdots+H(d,1)\binom{n+1}{2}$$

Naloge

1. Na koliko načinov lahko pobarvamo šest hišk z natanko štirimi barvami?
2. Na koliko načinov lahko pobarvamo šest hišk z največ štirimi barvami?
3. Zapiši formulo za $1^5+2^5+\cdots+n^5$ s pomočjo binomskih koeficientov.

Vir

- http://www.macalester.edu/˜bressoud/talks/APNC2004/FTC.pdf

Prevedel in priredil *Matej Mlakar*

Rešitve

1. Vsak koeficient $H(d,j)$ izračunamo s pomočjo tabele. Če upoštevamo rekurzivno zvezo $H(d,j)=j(H(d-1,j)+H(d-1,j-1))$, dobimo določeni koeficient tako, da izračunamo vsoto koeficienta, ki je v istem stolpcu prejšnje vrstice, ter koeficienta, ki je v prejšnji vrstici levo od njega. Dobljeno vsoto pomnožimo s številko stolpca. Tako je

$$H(6,4)=4(H(5,4)+H(5,3))=4(150+240)=1560.$$

Opomba. Slabost tega načina je, da moramo dopolniti tabelo do vključno pete vrstice. To pa že kliče po zapisu računalniškega algoritma, ki bi generiral $H(d,j)$. Oglejmo si primer funkcijskega podprograma v pascalu.

```
function H(d,j: integer): real;
begin
  if (j>d) then H:=0
  else begin
    if (j=1) or (d=1) then H:=1
    else
      H:=j*(H(d–1,j)+H(d-1,j-1));
  end;
end;
```

2. Rezultat dobimo lahko na dva načina, saj velja

$$4^6=\underbrace{\binom{4}{6}H(6,6)}_{=0}+\underbrace{\binom{4}{5}H(6,5)}_{=0}+\binom{4}{4}H(6,4)+\cdots+\binom{4}{1}H(6,1)=4096.$$

3. S pomočjo končnega rezultata pridemo do zveze

$$\sum_{x=1}^{n}x^5=\sum_{x=1}^{5}H(6,6)\binom{x}{5}+\sum_{x=1}^{n}H(5,4)\binom{x}{4}+\cdots+\sum_{x=1}^{n}H(5,1)\binom{x}{1}$$
$$=H(5,5)\binom{n+1}{6}+H(5,4)\binom{n+1}{5}+\cdots+H(5,1)\binom{n+1}{2}.$$

Če bi zadnjo vrstico poenostavljali še naprej, bi dobili eksplicitno formulo

$$\sum_{x=1}^{n}x^5=\frac{n^6}{6}-\frac{3}{2}n^5+\frac{245}{12}n^4-30n^3-\frac{241}{12}n^2+32n.$$