PRESEK
List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **16** (1988/1989)
Številka 3
Strani 130–131, IX

Marko Razpet:

ŠAHOVSKI KRALJ IZBIRA VZOREC

Ključne besede: matematika, računalništvo, deljivost števil, računalniška grafika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/16/930-Razpet.pdf

ŠAHOVSKI KRALJ IZBIRA VZOREC

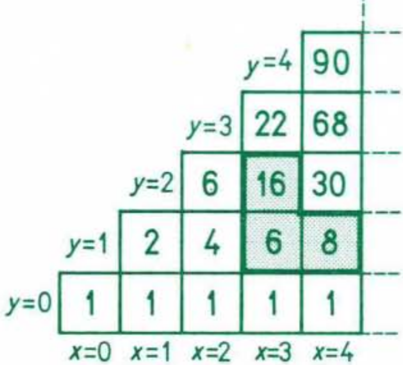
V šesti številki lanskega Preseka smo govorili o šahovskem kralju z omejeno svobodo gibanja. Kraljevo sprehajanje po šahovnici z osnovnico, ki šteje n kvadratov, je kar dvakrat omejeno: kralj ima na razpolago le polja pod diagonalo in na njej (slika 1), če se more, pa se lahko premakne le v treh dovoljenih smereh:

$$(x, y) \to (x+1, y), \qquad (x, y) \to (x, y+1), \qquad (x, y) \to (x+1, y+1)$$

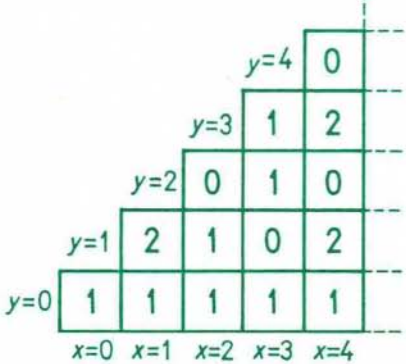
Spraševali smo se po številu $q(x, y)$ različnih poti, po katerih lahko pride kralj s polja (0, 0) na polje (x, y). Pri tem je $0 \leqslant y \leqslant x$. Če je $y > x$, je seveda $q(x, y) = 0$. Posebej vzemimo $q(0, 0) = 1$. Potem je očitno $q(x, 0) = 1$ za vsak $x \geqslant 0$. S preprostim premislekom smo ugotovili, da lahko števila $q(x, y)$ izračunamo samo s seštevanjem po formuli:

$$q(x, y) = q(x-1, y) + q(x, y-1) + q(x-1, y-1), \quad 1 \leqslant y \leqslant x \qquad (1)$$

Po tej formuli dobimo najprej števila $q(x, 1)$ za $x \geqslant 1$, nato $q(x, 2)$ za $x \geqslant 2$ in tako naprej. Na ta način lahko tvorimo poljubno velik trikotnik števil $q(x, y)$. Na vsako polje (x, y) napišemo ustrezno število $q(x, y)$. Tvorba števil je jasna: v spodnjo vrsto vpišemo same enice, nato pa seštevamo z leve proti desni po tri, kakor je označeno na sliki 1. Na prvi pogled opazimo, da števila $q(x,y)$



Slika 1



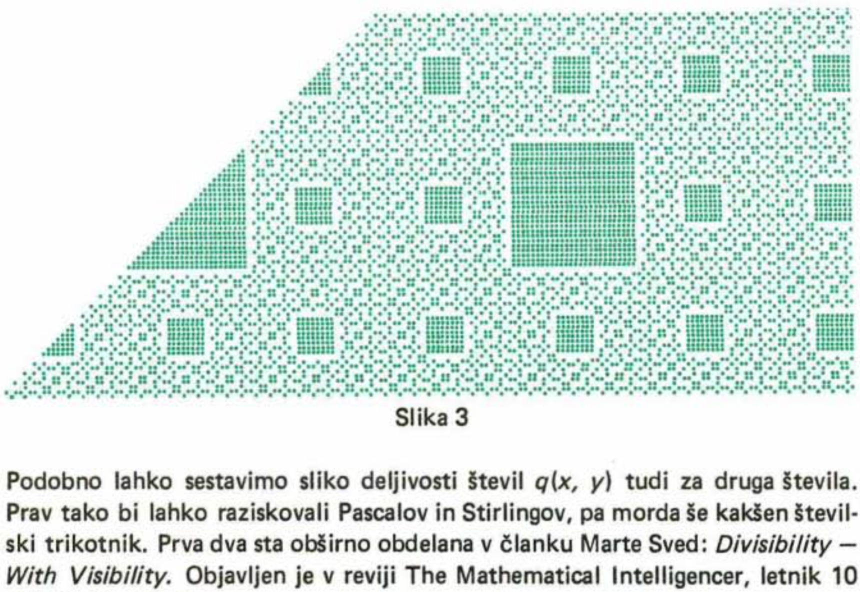
Slika 2

hitro naraščajo, če povečujemo števili x in y. Razen v začetni vrstici imamo povsod drugje sama soda števila. Zato se je smiselno vprašati, kje so števila

$q(x, y)$, ki so deljiva s kakšnim številom p, $p \geqslant 3$. Najzanimivejši so primeri, ko je p praštevilo.

Pretežko bi bilo odgovoriti na vprašanje, ali je na primer število $q(3535, 2525)$ deljivo s številom $p = 17$. Pač pa lahko sestavimo tabelo ostankov pri deljenju števil $q(x, y)$ s številom p. Tako kot smo sestavili prejšnjo tabelo, naredimo novo po formuli (1), čim pa vsota preseže p, odštejemo od nje tolikokrat p, da dobimo rezultat med 0 in $p - 1$. Za $p = 3$ pa dobimo sliko 2. Če je na mestu (x, y) število 0, potem je število $q(x, y)$ deljivo s p.

Na prvi pogled to ni nič posebnega, to pa zato, ker je številski trikotnik na sliki 2 premajhen. Toda z računalnikom si lahko privoščimo precej večji trikotnik. Napisati je treba program, ki nariše točko (x, y), če je število $q(x, y)$ deljivo s p, sicer pa naj ne nariše ničesar. Na ta način dobimo zanimive vzorce. Za $p = 3$, $0 \leqslant x \leqslant 250$, $0 \leqslant y \leqslant x$ dobimo na primer (temnim področjem ustrezajo števila $q(x, y)$, ki so deljiva s 3):

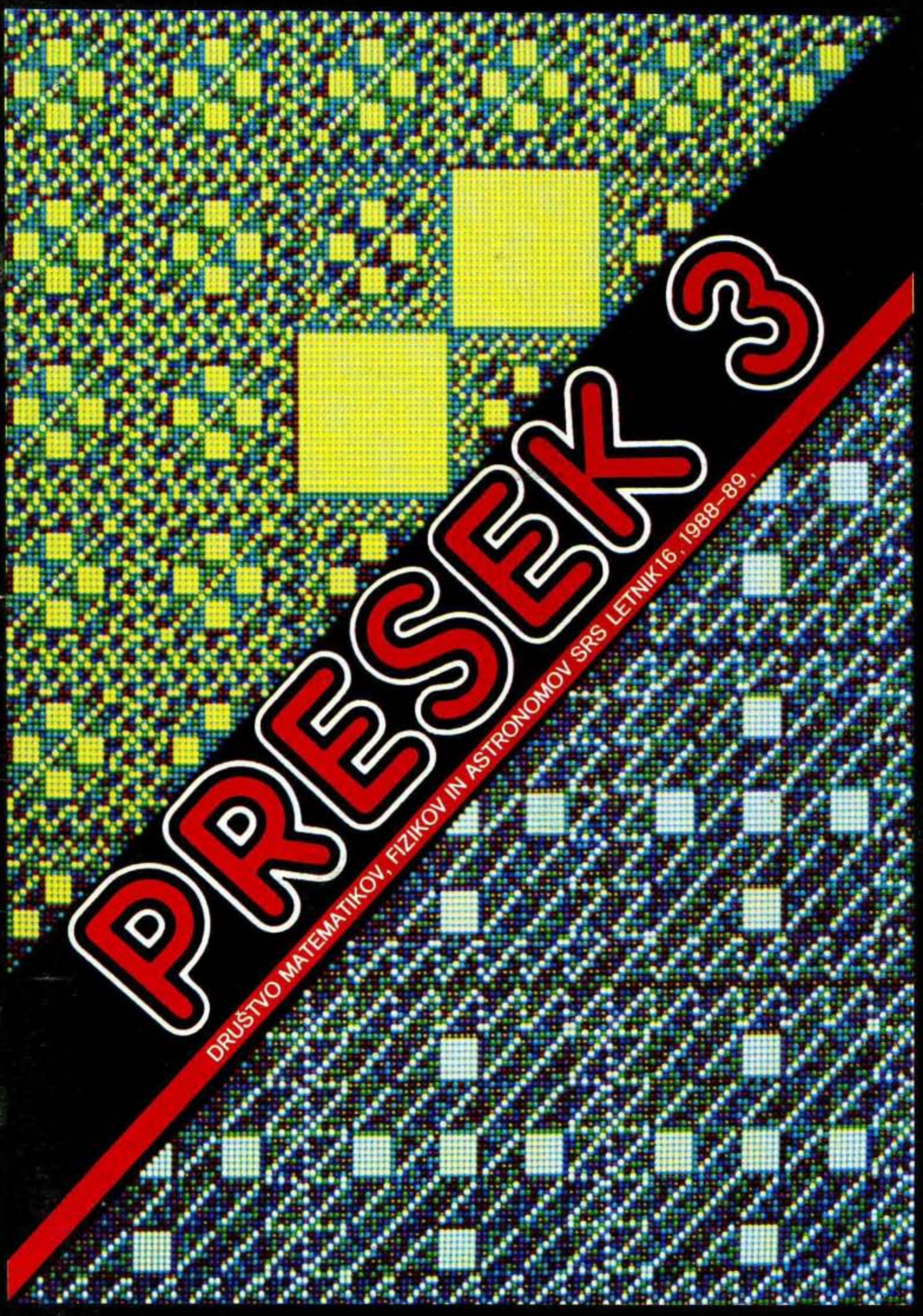


Slika 3

Podobno lahko sestavimo sliko deljivosti števil $q(x, y)$ tudi za druga števila. Prav tako bi lahko raziskovali Pascalov in Stirlingov, pa morda še kakšen številski trikotnik. Prva dva sta obširno obdelana v članku Marte Sved: *Divisibility — With Visibility.* Objavljen je v reviji The Mathematical Intelligencer, letnik 10 (1988), številka 2.

Naš šahovski kralj je bil celo tako prijazen, da je sodeloval pri izbiri naslovne strani ovitka. Za $p = 7$ smo dobili spodnji, za $p = 5$ pa zgornji trikotnik. Pri tem je spodnji rob osnovnica spodnjega, zgornji rob pa osnovnica zgornjega trikotnika, tako da je najbolje, da pri gledanju zgornjega Presek obrnete.

Marko Razpet


PRESEK 3
DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SRS LETNIK 16, 1988-89